数字特性

一、整除特性

1、整除

1. 被 2 整除特性：偶数
2. 被 3 整除特性：一个数字的每位数字相加能否被 3 整除
3. 被 9 整除特性：与 3 整除的特性类似。

4. 被 4 和 25 整除特性：只看一个数字的末 2 位能不能被 4 整除。
5. 被 5 整除特性：末尾是 O 或者是 5 即可被 5 整除。
6. 被 6 整除特性：兼被 2 和 3 整除的特性。
7. 被 8 和 125 整除特性：看一个数字的末 3 位。
8. 被 7,11,13 整除的这个方法叫做末三位划分法

- 被 7 整除的特性：一个数字的末三位划分，大的数字减去小的 数字，除以 7，能整除就说明这个数能被 7 整除。
- 被 11 整除的特性：一个数字的末三位划分，大的数字减去小 的数字，除以 11，能整除就说明这个数能被 11 整除。
- 被 13 整除的特性：一个数字的末三位划分，大的数字减去小 的数字，除以 13，能整除就说明这个数能被 13 整除。

2、关于整除的其他注意事项

（1）被其他合数整除的数字特性，应将该合数进行因数分解，能同时被分解后的互质

因数整除，比如被 28 整除的数字，需同时被 4 和 7 整除。

（2）三个连续的自然数之和（积）能被 3 整除。

（3）四个连续的自然数之和是偶数，但不能被 4 整除。

（4）平方数的尾数只能是 0、1、4、5、6、9。

二、奇偶性

自然数只要不是奇数就是偶数。

奇数：不能被 2 整除的数都是奇数

偶数：可以被 2 整除的数都是偶数

0 也是偶数

奇数和偶数的运算规律：

奇数±奇数=偶数；偶数±偶数=偶数；

奇数±偶数=奇数；奇数×奇数=奇数；

偶数×偶数=偶数；奇数×偶数=偶数。

2个数和差奇偶性相同

奇偶性的使用时机

1：明显的偶数倍关系

2：已知两者之和求差，已知两者之差求和，（和差倍比）

3：形如 ax + by = c 的形式

三、质合性

质数：如果一个大于 1 的正整数，只能被 1 和它本身整除，那么这个正整数叫做质数

（质数也称素数），如 2、3、5、7、11、13……

合数：一个正整数除了能被 l 和它本身整除外，还能被其他的正整数整除，

这样的正整数叫做合数，如 4、6、8、9、10……

2 是唯一一个为偶数的质数。

如果两个质数的和（或差）是奇数，那么其中必有一个数是 2；

如果两个质数的积是偶数，那么其中也必有一个数是 2。

四、公约数与公倍数

1、核心知识

（1）约数与倍数

若数 a 能被 b 整除，则称数 a 为数 b 的倍数，数 b 为数 a 的约数。其中，一个数的最小约数是 1，最大约数是它本身。

（2）公约数与最大公约数

几个自然数公有的约数，叫做这几个自然数的公约数。

公约数中最大的一个，称为这几个自然数的最大公约数。

（3）公倍数与最小公倍数

几个自然数公有的倍数，叫做这几个自然数的公倍数。

公倍数中最小的一个，称为这几个自然数的最小公倍数。

考试题型一般是已知两个数，求它们的最大公约数或最小公倍数。

2、求最大公约数和最小公倍数

A、把共同的质因数连乘起来，就是这两个数的最大公约数。

B、把共同的质因数和各自独有的质因数连乘起来，就是这两个数的最小公倍数。

五、同余问题

同余，即余数相同

公务员考试中的四种常考形式

经典口诀：余同取余，和同加和，差同减差，最小公倍做周期。

（1）余同取余，公倍数做周期：如果一个数除以几个不同的数，余数相同，则这个数可以表示成这几个除数的最小公倍数的倍数与余数相加的形式。例如一个数除以 3 余 1，除以 4 余 1，除以 10 余 1，则这个数可以表示为 60n+1，60 是 3、4、10 的最小公倍数，

n=0,1,2，，，，，。

（2）和同加和，公倍数做周期：如果一个数除以几个不同的数，除数与余数之和相同，

则这个数可以表示成这几个除数的最小公倍数的倍数与该和（除数与余数之和）相加的形式。

例如一个数除以 5 余 4，除以 6 余 3，除以 8 余 1，则这个数可以表示为 120n+9，120 是 5、

6、8 的最小公倍数，9=5+4=6+3=8+1， n=0,1,2，，，，，，。

（3）差同减差，公倍数做周期：如果一个数除以几个不同的数，除数与余数之差相同，

则这个数可以表示成这几个除数的最小公倍数的倍数与该差（除数与余数之差）相减的形式。

例如一个数除以 3 余 1，除以 4 余 2，除以 10 余 8，则这个数可以表示为 60n-2，60 是 3、4、

10 的最小公倍数，2=3-1=4-2=10-8， n=1,2，，，，，，。

（4）如果三个不符合口诀，怎么办？先两个结合，再跟第三结合！

六、乘方尾数

经典口诀：底数留个位，指数除 4 留余数，余数为 0 转成 4

例子：1234^2008 2008/4整除，那么1234^2008的位数应该是等于4^4的位数，也是6

七、不定方程

解不定方程问题常用的解法：综合利用整数的**奇偶性**、自然数的**质合性**、数的**整除特性**、 尾数法、余数特性、特殊值法、代入排除法等多种数学知识来得到答案

我们在解决不定方程时需要注意两点：

- 对于不定方程，我们一般只讨论他的整数解或正整数解
- 解不定方程要善用整除特性，奇偶性，特值法和代入排除法。（）

使用整除特性时要选取最大公约数

数列

一、等差数列

等差数列求和公式：

- S=平均数×项数
- S=中位数×项数

特别注意：只有当项数为奇数项的时候，才会有中位数（即平均数、中间项）。如果项数是偶数的情况下，不存在中位数，但是我们可以虚拟一个中位数，比如 2,3,4,5 的等差数 列，我们可以虚拟一个中位数 3.5，也就是 3 与 4,2 与 5 的平均数。

如果等差数列的下标和（或差）相等，那么对应的数相加和相等，即如果等差数列有 7 项，分别为 a1、a2、a3、、、、、、、a7，因此有 a1+a7=a2+a6=a3+a5=a4+a4。

二、等比数列

$$a_n = a_1 \times q^{(n-1)}$$

$$a_n = a_m \times q^{(n-m)}$$

通项公式：

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

求和公式：

等比中项：如果 a,b,c 成等比数列，则 b 叫做 a 与 c 的等比中项，有：b^2=ac。

计数模型

一、鸡兔同笼

核心公式：

鸡数=（兔脚数×总头数—总脚数）÷（兔脚数—鸡脚数）；

兔数=（总脚数—鸡脚数×总头数）÷（兔脚数—鸡脚数）。

总的思维：先假设全部是某一种，然后求出假设后的值与实际值得差值除以单个差值

举个例子：

```
现已知鸡兔共 35 只，脚共 94 只，求鸡和兔的个数。

解法1.
    假设全是鸡，那么脚共有2*35=70

    (70 - 94)/（2-4） = 12 求出来的是兔子的数量12只

    那么鸡有23只

解法2：
    假设全部是兔子，脚工35 * 4 = 140
```

```
（140-94）/（4-2） = 23 求出来的是鸡的数量23只

那么兔子12只
```

二、植树问题

所谓植树问题就是要理清间隔数量与端点之间的关系。

1、两端栽树，棵树比段数多 1，棵树=线路总长÷株距+1；

2、一端栽树，棵树与段数相等；棵树=线路总长÷株距；

3、两端都不栽树，棵树=段数-1；棵树=线路总长÷株距-1；

4、双边植树需要在 1 条路的基础上乘以 2。

5、封闭型植树，棵树=线路总长÷株距=总段数；

三、方正问题

方阵万能思维：

方阵的核心是一个等差数列，可以将方阵的每一层看做是一项，每一层边长之差是 2，每一层周长之差为 8，也就是方阵等差数列的所谓公差

方阵特点

①方阵不论在哪一层，每边上的人数量都相同。每向里一层，每边上的人数就少 2， 每层总数就少 8。

②每边人（或物）数和每层总数的关系：

- 每层总数=[每边人数-1]×4=每边人数×4-4（为什么减去 4， 因为四个角上的四个人
- 被相邻的 2 个边重复计算了 1 次，所以减去 4）
- 每边人数=每层总数÷4+1。

③实心方阵：总人数=每边人数的平方

④空心方阵的总人（或物）数=（最外层每边人数-层数）×层数×4

⑤取消 m 行、n 列的方阵，人数减少=边长×（m+n）-mn

⑥增加 m 行、n 列的方阵，人数增加=边长×（m+n）+mn

四、剪绳问题

题型特征：

题目表述为将一根绳子折成几折，然后在上面剪几刀，求分成段数。

经典公式:

一根绳子连续对折 N 次，剪 M 刀，问绳子被剪成几段？

$$2^N \times M + 1$$

五、过河问题

M 个人过河，船上能载 N 个人，由于需要一人划船，故共需过河次数

$$M - 1/N - 1$$

（分母分别减“1”是因为需要 1 个人划船，如果需 要 n 个人划船就要同时减去 n);

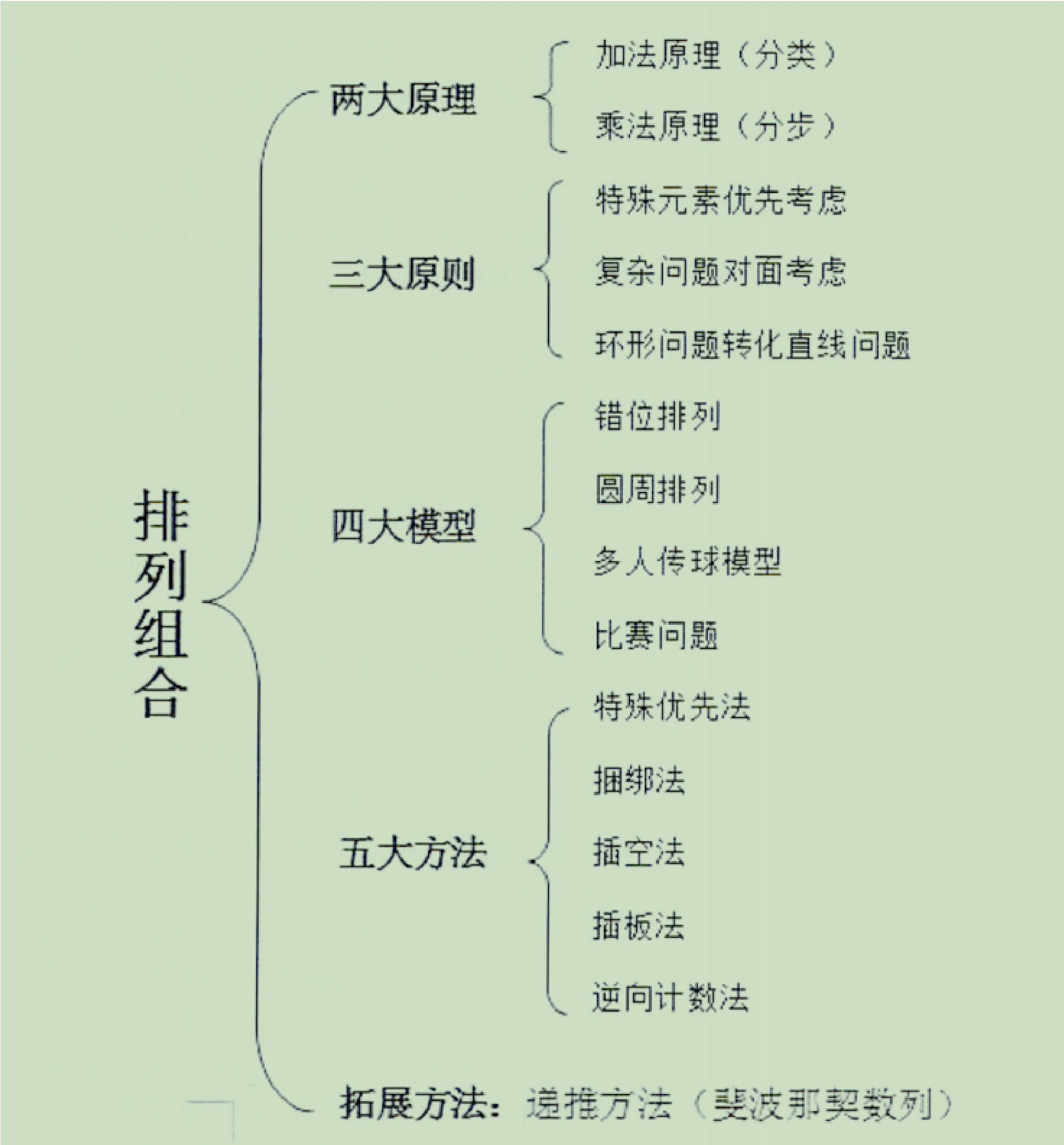
六、空瓶换水

N个空瓶换一瓶水转换成公式

N空瓶 = 1空瓶 + 1水

即（N-1)空瓶 = 1水

排列组合



一、两个原理

- **分类加法**
- **分布乘法**

二、排列组合

排列：从m个元素中任取m个元素并排序

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$$

当 m=n 时，为全排列 Pnn=n(n−1)(n−2)…3·2·1=n!

组合

(1)**组合**：从 n 个不同元素中，任取 m(m≤n)个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

(2)**组合数**：从 n 个不同元素中取出 m(m≤n)个元素的所有组合的个数

$$C_n^m=\frac{P_n^m}{P_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

区别：排列------与顺序有关

组合------与顺序无关

三、特殊优先

在排列组合中，对于特殊元素要优先考虑！！

四、捆绑法

就是将几个人或者物体捆绑在一起，捆绑法解决的问题是**相邻问题**

总之就是：相邻用捆绑法

解题思路:

1. 先将相邻的元素进行捆绑
2. 然后和其他元素进行排列组合
3. 最后相邻的元素内部也要进行排序

五、插空法

针对不相邻问题

解题思路

1. 先将其他元素进行排列
2. 然后将不相邻的元素进行插孔

2、一张节目表上原有 4 个节目，如果要保持这 4 个节目的相对顺序不变，再添加进去 2 个新节目，有（ ）种安排方法。【2012 年山西党群】

A. 15　　B. 20　　C. 25　　D. 30

【参考答案】D

【灰兔点拨】要添加 2 个新节目，依次插入。首先安排第一个节目，原来 4 个节目形成 5 空，有 5 种方法；再插入第二个节目，6 个空，5 种方法，总的安排方法有 5×6=30（种），选 D

【实战秒杀】最后节目安排完毕后有 6 个节目，其中 2 个是新加的节目，而剩下 4 个位置因相对顺序不变，故安置方式一样，因此安排方法数相当于从 6 个位置中挑出两个位置并安排两个节目的方法数，即 A6，2=30，秒杀 D

【实战点拨】本题原型是一道国考题，山西党群考前直接命中！

六、插板法

题型特征： 题目表述为一组相同的元素分成若干组，要求每组至少一个元素。

解题思路： 将比所需要分组数目少 1 的插板元素之间形成分组，假定 M 个元素，分成 N 组，方法数为：C(M-1，N-1)

实战点拨： 插板法的三要件：①相同元素分配；②每组至少分到一个；③所分组是不相同的。缺一不可

特殊题型

3、某领导要把 20 项任务分配给三个下属，每个下属至少分得三项任务，则共有多少种不同的分配方式。（） 【2013 陕西-80】

A. 28　B. 36　C. 54　D. 78

先给3个人每个人分2个，转换成没人至少一个

然后按公式计算

七、正难则反

结果 = 总 - 反面情况

八、错误排列

$$D1=0，D2=1，D3=2，D4=9，D5=44，D6=265，D7=1854.$$

九、环形排列

N 个元素排列，结果

$$（N-1）!$$