ALGORITHM *SequentialSearch*$(A[0..n-1], K)$

```
//Searches for a given value in a given array by sequential search
//Input: An array A[0..n − 1] and a search key K
//Output: The index of the first element in A that matches K
//            or −1 if there are no matching elements
i ← 0
while i < n and A[i] ≠ K do
    i ← i + 1
if i < n return i
else return −1
```

4. Bài tập về nhà

1. Cho thuật toán sau:

ALGORITHM *Mystery*(n)
    //Input: A nonnegative integer n
    $S \leftarrow 0$
    for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
        $S \leftarrow S + i * i$
    return S

a. Output của thuật toán này là gì?
b. Basic operation của thuật toán này là gì?
c. Tính số lần thực thi basic operation? (Tính $C(n)$)
d. Lớp hiệu năng của thuật toán?
e. Cải thiện hoặc đề xuất một thuật toán tốt hơn và xác định lớp hiệu năng? (Nếu có)

4. Bài tập về nhà

ALGORITHM *Mystery*(n)

//Input: A nonnegative integer n

$S \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

$\quad S \leftarrow S + i * i$

return S

a. Output của thuật toán này là gì?

Output của thuật toán là tổng

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 .$$

4. Bài tập về nhà

ALGORITHM *Mystery*(n)

//Input: A nonnegative integer n

$S \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

$\quad S \leftarrow S + i * i$

return S

b. Basic operation của thuật toán này là gì?

Basic operation là phép nhân.

(Hoặc nếu phép nhân và cộng được cho là mất cùng một khoảng thời gian để thực thi thì chọn một trong hai)

4. Bài tập về nhà

ALGORITHM *Mystery*(n)

//Input: A nonnegative integer n
$S \leftarrow 0$
for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    $S \leftarrow S + i * i$
return S

c. Tính số lần thực thi basic operation?

$$C(n) = \sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

4. Bài tập về nhà

ALGORITHM *Mystery(n)*

```
//Input: A nonnegative integer n
S ← 0
for i ← 1 to n do
    S ← S + i * i
return S
```

d. Lớp hiệu năng của thuật toán?

$$C(n) = n \in \Theta(n).$$

Vì input chỉ là một số nguyên không âm n nên ta có thể xác định kích thước input bằng số lượng bit $b = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1 \approx \log_2 n$ biểu diễn n, do đó

$$n \approx 2^b.$$

Vậy $C(n) \approx 2^b \in \Theta(2^b)$.

4. Bài tập về nhà

ALGORITHM *Mystery*(n)

//Input: A nonnegative integer n

$S \leftarrow 0$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**

$\quad S \leftarrow S + i * i$

return S

e. Cải thiện hoặc đề xuất một thuật toán tốt hơn và xác định lớp hiệu năng? (Nếu có)

Dùng công thức

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

để tính tổng trong thời gian $\Theta(1)$.

(Lưu ý, thời gian thực thi các phép toán số học được cho là không phụ thuộc vào kích thước của các toán hạng)

4. Bài tập về nhà

2. Cho thuật toán sau:

ALGORITHM *Secret*$(A[0..n-1])$

//Input: An array $A[0..n-1]$ of n real numbers
$minval \leftarrow A[0]$; $maxval \leftarrow A[0]$
for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
  if $A[i] < minval$
    $minval \leftarrow A[i]$
  if $A[i] > maxval$
    $maxval \leftarrow A[i]$
return $maxval - minval$

a. Output của thuật toán này là gì?
b. Basic operation của thuật toán này là gì?
c. Tính số lần thực thi basic operation? (Tính $C(n)$)
d. Lớp hiệu năng của thuật toán?
e. Cải thiện hoặc đề xuất một thuật toán tốt hơn và xác định lớp hiệu năng? (Nếu có)

4. Bài tập về nhà

ALGORITHM $Secret(A[0..n-1])$

//Input: An array $A[0..n-1]$ of n real numbers

$minval \leftarrow A[0]$; $maxval \leftarrow A[0]$

for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**

  if $A[i] < minval$

    $minval \leftarrow A[i]$

  if $A[i] > maxval$

    $maxval \leftarrow A[i]$

return $maxval - minval$

a. Output của thuật toán này là gì?

Output của thuật toán là khoảng cách giữa phần tử lớn nhất và nhỏ nhất.

4. Bài tập về nhà

ALGORITHM *Secret*$(A[0..n-1])$

```
//Input: An array A[0..n − 1] of n real numbers
minval ← A[0]; maxval ← A[0]
for i ← 1 to n − 1 do
    if A[i] < minval
        minval ← A[i]
    if A[i] > maxval
        maxval ← A[i]
return maxval − minval
```

b. Basic operation của thuật toán này là gì?

Basic operation của thuật toán là 1 phép so sánh phần tử.

4. Bài tập về nhà

ALGORITHM *Secret*$(A[0..n-1])$

```
//Input: An array A[0..n − 1] of n real numbers
minval ← A[0]; maxval ← A[0]
for i ← 1 to n − 1 do
    if A[i] < minval
        minval ← A[i]
    if A[i] > maxval
        maxval ← A[i]
return maxval − minval
```

c. Tính số lần thực thi basic operation?

$$C(n) = \sum_{i=1}^{n-1} 2 = 2(n-1).$$

4. Bài tập về nhà

ALGORITHM $Secret(A[0..n-1])$
    //Input: An array $A[0..n-1]$ of n real numbers
    $minval \leftarrow A[0]$; $maxval \leftarrow A[0]$
    for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
        if $A[i] < minval$
            $minval \leftarrow A[i]$
        if $A[i] > maxval$
            $maxval \leftarrow A[i]$
    return $maxval - minval$

d. Lớp hiệu năng của thuật toán?

Ta có

$$C(n) = 2(n-1) \approx 2n \in \Theta(n).$$

4. Bài tập về nhà

ALGORITHM *Secret*$(A[0..n-1])$

//Input: An array $A[0..n-1]$ of n real numbers
$minval \leftarrow A[0]$; $maxval \leftarrow A[0]$
for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
    if $A[i] < minval$
        $minval \leftarrow A[i]$
    if $A[i] > maxval$
        $maxval \leftarrow A[i]$
return $maxval - minval$

e. Cải thiện hoặc đề xuất một thuật toán tốt hơn và xác định lớp hiệu năng?

Dễ thấy rằng, ta có thể cải thiện thuật toán bằng cách đổi lệnh **if** thứ 2 thành **else if.**

(Trừ trường hợp xấu nhất)

4. Bài tập về nhà

ALGORITHM *Secret*$(A[0..n-1])$

//Input: An array $A[0..n-1]$ of n real numbers
$minval \leftarrow A[0]$; $maxval \leftarrow A[0]$
for $i \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
  if $A[i] < minval$
    $minval \leftarrow A[i]$
  if $A[i] > maxval$
    $maxval \leftarrow A[i]$
return $maxval - minval$

e. Cải thiện hoặc đề xuất một thuật toán tốt hơn và xác định lớp hiệu năng?

Một cách khác, sẽ hiệu quả hơn nếu cập nhật minval và maxval dựa trên 2 phần tử liên tiếp. So sánh 2 phần tử đó và thực hiện 2 lần so sánh nữa để cập nhật minval và maxval. Tổng cộng là 3 phép so sánh cho mỗi cặp. Tức là,

$$C(n) \approx \frac{3n}{2} = 1.5n$$

Như vậy thuật toán này thực thi ít hơn khoảng 25% số phép so sánh.

4. Bài tập về nhà

3. Cho thuật toán sau:

```
ALGORITHM  Enigma(A[0..n − 1, 0..n − 1])
    //Input: A matrix A[0..n − 1, 0..n − 1] of real numbers
    for i ← 0 to n − 2 do
        for j ← i + 1 to n − 1 do
            if A[i, j] ≠ A[j, i]
                return false
    return true
```

a. Output của thuật toán này là gì?
b. Basic operation của thuật toán này là gì?
c. Tính số lần thực thi basic operation? (Tính $C(n)$)
d. Lớp hiệu năng của thuật toán?
e. Cải thiện hoặc đề xuất một thuật toán tốt hơn và xác định lớp hiệu năng? (Nếu có)

4. Bài tập về nhà

3. Cho thuật toán sau:

ALGORITHM $Enigma(A[0..n-1, 0..n-1])$

```
//Input: A matrix A[0..n − 1, 0..n − 1] of real numbers
for i ← 0 to n − 2 do
    for j ← i + 1 to n − 1 do
        if A[i, j] ≠ A[j, i]
            return false
return true
```

a. Output của thuật toán này là gì?

Output: return true nếu ma trận là đối xứng, nếu không return false.

4. Bài tập về nhà

3. Cho thuật toán sau:

ALGORITHM *Enigma*$(A[0..n-1, 0..n-1])$

```
//Input: A matrix A[0..n − 1, 0..n − 1] of real numbers
for i ← 0 to n − 2 do
    for j ← i + 1 to n − 1 do
        if A[i, j] ≠ A[j, i]
            return false
return true
```

b. Basic operation của thuật toán này là gì?

Basic operation của thuật toán là phép so sánh phần tử ma trận $A[i,j] \neq A[j,i]$.

4. Bài tập về nhà

3. Cho thuật toán sau:

ALGORITHM *Enigma*$(A[0..n-1, 0..n-1])$

```
//Input: A matrix A[0..n − 1, 0..n − 1] of real numbers
for i ← 0 to n − 2 do
    for j ← i + 1 to n − 1 do
        if A[i, j] ≠ A[j, i]
            return false
return true
```

c. Tính số lần thực thi basic operation?

Input là một ma trận vuông có thể đối xứng hay không đối xứng → xét các trường hợp xấu nhất, trung bình.

Chỉ tính C_{worst} (vì C_{avg} tính rất khó):

$$C_{worst}(n) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} 1$$

$$= \sum_{i=0}^{n-2} [(n-1) - (i+1) + 1] = \sum_{i=0}^{n-2} (n-i-1)$$

$$= (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{(n-1)n}{2}.$$

4. Bài tập về nhà

3. Cho thuật toán sau:

ALGORITHM *Enigma*$(A[0..n-1, 0..n-1])$
    //Input: A matrix $A[0..n-1, 0..n-1]$ of real numbers
    for $i \leftarrow 0$ **to** $n-2$ **do**
        for $j \leftarrow i+1$ **to** $n-1$ **do**
            if $A[i, j] \neq A[j, i]$
                return false
    return true

d. Lớp hiệu năng của thuật toán?

$$C_{worst}(n) = \frac{(n-1)n}{2} \approx \frac{1}{2}n^2 \in \Theta(n^2).$$

4. Bài tập về nhà

3. Cho thuật toán sau:

ALGORITHM *Enigma*$(A[0..n-1, 0..n-1])$

```
//Input: A matrix A[0..n − 1, 0..n − 1] of real numbers
for i ← 0 to n − 2 do
    for j ← i + 1 to n − 1 do
        if A[i, j] ≠ A[j, i]
            return false
return true
```

e. Cải thiện hoặc đề xuất một thuật toán tốt hơn và xác định lớp hiệu năng?

Thuật toán đã tối ưu bởi vì để kiểm tra ma trận đối xứng thì bắt buộc phải thực thi $\frac{(n-1)n}{2}$ (trường hợp xấu nhất) lần phép so sánh giữa phần tử ở tam giác trên với phần tử đối xứng ở tam giác dưới của ma trận.

4. Bài tập về nhà

4. Cho thuật toán sau:

ALGORITHM $GE(A[0..n-1, 0..n])$

//Input: An $n \times (n+1)$ matrix $A[0..n-1, 0..n]$ of real numbers
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-2$ **do**
  for $j \leftarrow i+1$ **to** $n-1$ **do**
    for $k \leftarrow i$ **to** n **do**
      $A[j, k] \leftarrow A[j, k] - A[i, k] * A[j, i] \,/\, A[i, i]$

a. Xác định lớp hiệu năng thời gian của thuật toán này?
b. Xác định sự kém hiệu quả trong thuật toán này và làm sao để tăng tốc độ của thuật toán?

4. Bài tập về nhà

4. Cho thuật toán sau:

ALGORITHM $GE(A[0..n-1, 0..n])$

//Input: An $n \times (n+1)$ matrix $A[0..n-1, 0..n]$ of real numbers
for $i \leftarrow 0$ **to** $n-2$ **do**
    for $j \leftarrow i+1$ **to** $n-1$ **do**
        for $k \leftarrow i$ **to** n **do**
            $A[j,k] \leftarrow A[j,k] - A[i,k] * A[j,i] \,/\, A[i,i]$

a. Xác định lớp hiệu năng thời gian của thuật toán này?

a. Số lần thực hiện phép nhân $M(n)$ và phép chia $D(n)$ là như nhau:

$$M(n) = D(n) = \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n} 1 = \sum_{i=0}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}(n-i+1) = \sum_{i=0}^{n-2}(n-i+1)(n-i-1)$$

$$= (n+1)(n-1) + n(n-2) + \cdots + 3\cdot 1 = \sum_{i=1}^{n-1}(i+2)i = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} i$$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 2\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6} \approx \frac{1}{3}n^3 \in \Theta(n^3).$$

4. Bài tập về nhà

4. Cho thuật toán sau:

ALGORITHM $GE(A[0..n-1, 0..n])$

```
//Input: An n × (n + 1) matrix A[0..n − 1, 0..n] of real numbers
for i ← 0 to n − 2 do
    for j ← i + 1 to n − 1 do
        for k ← i to n do
            A[j, k] ← A[j, k] − A[i, k] ∗ A[j, i] / A[i, i]
```

b. Xác định sự kém hiệu quả trong thuật toán này và làm sao để tăng tốc độ của thuật toán?

b. Phép chia $A[j,i]\ /\ A[i,i]$ là không đổi trong vòng lặp for biến k. Do đó, phép chia cần phải được tính trước khi vào vòng lặp for biến k: $temp \leftarrow A[j,i]\ /\ A[i,i]$, và trong vòng lặp for biến k trở thành $A[j,k] \leftarrow A[j,k] - A[i,k]\ * temp$.

Có thể ước lượng sự cải thiện thời gian chạy ($T(n)$) như sau:

$$\frac{T_{old}(n)}{T_{new}(n)} \approx \frac{c_M \frac{1}{3}n^3 + c_D \frac{1}{3}n^3}{c_M \frac{1}{3}n^3} = \frac{c_M + c_D}{c_M} = \frac{c_D}{c_M} + 1.$$

Trong đó, c_D và c_M lần lượt là thời gian thực thi 1 phép chia và 1 phép nhân.