# PHÂN TÍCH VÀ THIẾT KẾ THUẬT TOÁN

NHÓM 15

Nguyễn Tường Duy (MSSV 21520782)
Đỗ Bá Huy (MSSV 21522137)
Huỳnh Nhân Thập (MSSV 21521457)

---

**1:**

---

### (a)

Output của thuật toán là $\sum_{i=1}^{n} i^2$.

### (b)

Basic operation của thuật toán là phép cộng và phép nhân (trong phép gán `S := S + i * i`).

### (c)

Số basic operation được thực hiện là cố định với mỗi giá trị $n$ được cho trước, vì vậy trong mọi trường hợp :

$$C(n) = \sum_{i=1}^{n} 2 = 2n$$

### (d)

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n} = \lim_{n\to\infty} 2 = 2$$

Do đó $C(n) \in \Theta(n)$, vậy $C(n) \in O(n)$ và $C(n) \in \Omega(n)$.

### (e)

Ta có thể dễ dàng chứng minh bằng quy nạp mệnh đề sau :

$$\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N} \;:\quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

Thuật toán sau đây sẽ đưa ra kết quả tương tự, được viết bằng *pseudo-code*:

```
// Input: A non-negative integer n
return n * (n - 1) * (2 * n - 1) / 6
```

Lúc này ta thấy $C(n) = 6$, $\lim_{n\to\infty} \frac{6}{1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$.

Vậy $C(n) \in \Theta(1)$ và ta được $C(n) \in O(1)$ và $C(n) \in \Omega(1)$.

---

**2:**

---

### (a)

Output của thuật toán là hiệu giữa hai phần tử có giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong mảng một chiều $A$, nói cách khác là

$$\max_i A_i - \min_j A_j$$

### (b)

Basic operation của thuật toán này là phép so sánh (`A[i] < minval` và `A[i] > maxval` ở mỗi vòng lặp).

### (c)

Các phép so sánh sẽ được thực hiện với số lần như nhau, bất luận thứ tự của các phần tử, vậy trong mọi trường hợp :

$$C(n) = \sum_{i=0}^{n-1} 2 = 2n$$

### (d)

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n} = \lim_{n\to\infty} 2 = 2$$

Do đó $C(n) \in \Theta(n)$, vậy $C(n) \in O(n)$ và $C(n) \in \Omega(n)$.

### (e)

(Từ từ làm)

---

**3:**

---

### (a)

Output : Kiểm tra ma trận có đối xứng qua đường chéo chính không.

### (b)

Basic operation là phép so sánh $A[i,j] \neq A[j,i]$ ở vòng lặp trong cùng.

**(c)**

Số lần thực thi basic operation :

1. Trong trường hợp tìm được 2 phần tử đối xứng nhau qua đường chéo chính không bằng nhau trong trường hợp đầu tiên
$$C_{best}(n) = 1$$
2. Trong trường hợp ma trân đối xứng qua đường chéo chính

$$\begin{aligned}
*C_{worst}(n) &= \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} 1 = \sum_{i=0}^{n-2} [(n-1)-(i+1)+1] \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} (n-1-i) = (n-1)+(n-2)+...+1 = \frac{(n-1)n}{2} \approx \frac{n^2}{2}
\end{aligned}$$

**(d)**

Ta có :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{0.5n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 0.5 = 0.5$$

Do đó $C(n) \in \Theta(n^2)$.

**(e)**

Không có.

---

**4:**

---

**(a)**

$$\begin{aligned}
C(n) &= \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=i}^{n} 1 = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} (n-i+1) \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} (n-i+1)(n-i-1) = \sum_{j=1}^{n-1} j(j+2) = \sum_{j=1}^{n-1} j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} 2j \\
&= \frac{n(n-1)(2n-1)}{2} + n(n-1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6} \\
&= \frac{2n^3+3n^2-5n}{6}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}\right)}{n^3} = 2$$
$$\implies C(n) \in \Theta(n^3)$$

### (b)

Do $A[j, i]/A[i, j]$ không đổi trong vòng lặp $k$ nên ta có thể gán một biến tạm để lưu giá trị này trước khi thực hiện vòng lặp $k$.