Laboratorium 5

Piotr Witek

21 kwietnia 2021

1 Mamy równanie: $f(x) = x^2 - 2 = 0$

(a) zakładając że mamy punkt początkowy x0 = 1, jaką wartość x1 dostaniemy, jeśli używamy metody Newtona ?

Wzór iteracyjny metody Newtona ma postać:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Obliczamy $f(x_0)$ i $f'(x_0)$:

$$f(x_0) = f(1) = 1^2 - 2 = -1$$
$$f'(x_0) = f'(1) = 2x|_{x=1} = 2$$

Podstawiając do wzoru otrzymujemy:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{-1}{2} = 1.5$$

(b) zakładając że mamy $x_0 = 1$ i $x_1 = 2$ jako punkty początkowe, jaka będzie wartość x2, jeśli używamy metody siecznych do tego samego problemu?

Metoda siecznych polega na prowadzeniu funkcji liniowych przechodzących przez dwa punkty a i b dla których szukana funkcja ma wartości o przeciwnych znakach, znalezieniu miejsca zerowego c tej funkcji liniowej i stworzeniu ciągu, liczb takiego, że $x_0 = a, x_1 = b, x_n$ - miejsce zerowe funkcji liniowej przechodzącej przez punkty $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ i $(x_{n-2}, f(x_{n-2}))$ Metodę tę powtarzamy do momentu uzyskania satysfakcjonującego nas przybliżenia funkcji.

Zgodnie z powyższą definicją x_2 będzie to miejsce zerowe funkcji liniowej przechodzącej przez punkty $(a, f(a))$i$(b, f(b))$

Równanie prostej przechodzącej przez punkty: $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ jest postaci:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b)$$

Szukamy takiego x dla którego: $y = 0$

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x_2 - b) + f(b)$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}x_2 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}b - f(b)$$

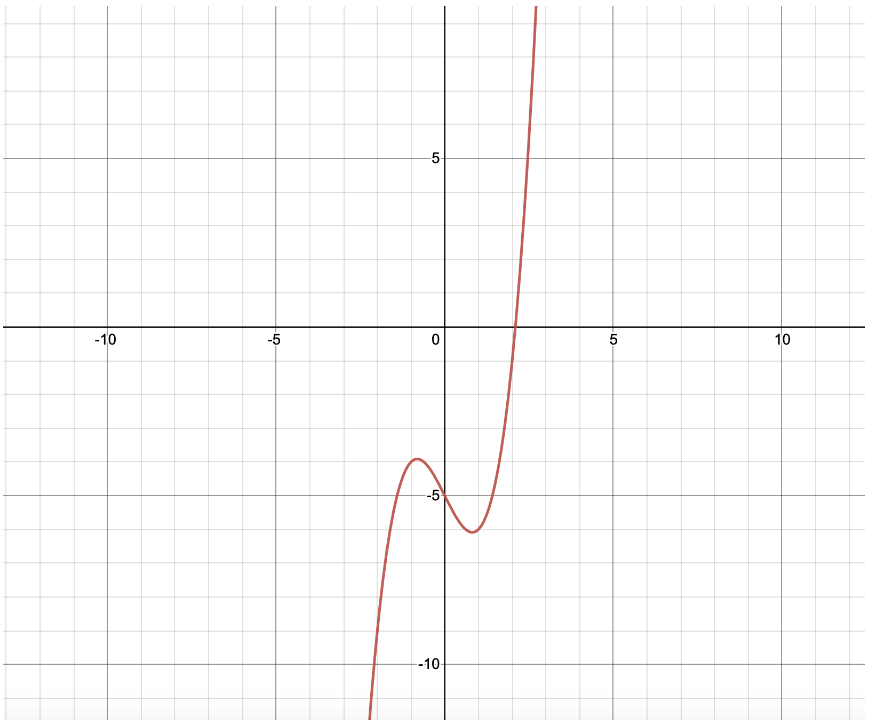
$$x_2 = b - \frac{bf(b) - af(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{bf(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} - \frac{bf(b) - af(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$x_2 = \frac{1 * f(2) - 2 * f(1)}{f(2) - f(1)} = \frac{1 * (2^2 - 2) - 2 * (1^2 - 2)}{(2^2 - 2) - (1^2 - 2)} = \frac{2 + 2}{2 + 1} = 2.33333\ldots$$

2 Napisz iteracje wg metody Newtona do rozwiązywania każdego z następujących równań nieliniowych:

(a) $x^3 - 2x - 5 = 0$

Musimy poznać przebieg funkcji, aby w przybliżeniu określić granice przedziału zawierającego dany pierwiastek. W tym celu został wygenerowany wykres:



Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x) = x^3 - 2x - 5$

Miejsce zerowe znajduje się w przedziale [1,3] i jest to jedyne miejsce zerowe w tym przedziale więc zostało spełnione założenie pierwsze metody Newtona dla funkcji f.

Sprawdzamy więc warunek $f(a) * f(b) < 0$:

$$f(1) = 1 - 2 - 5 = -6 < 0$$

$$f(3) = 27 - 6 - 5 = 16 > 0$$

Widać że warunek $f(a) * f(b) < 0$ został spełniony.

Musimy jeszcze sprawdzić znak wyrażenia $f'(x) * f''(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 2, f'(1) = 1, f'(3) = 25$$
$$f''(x) = 6x, f''(1) = 6, f''(3) = 18$$

Widać że znak jest zawsze dodatni, więc wybieramy punkt startowy: $x_0 = b = 3$
Sprawdzam warunek zbieżności dla $x = 3 : \left|\frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{f(3) \cdot f''(3)}{(f'(3))^2}\right| < 1 \Leftrightarrow 0.13328 < 1.$

$x_0 = 3$

$x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} \approx 2.36 \qquad |x_1 - x_0| \approx 0.232803$

$x_2 = 2.36 - \frac{f(2.36)}{f'(2.36)} \approx 2.1272 \qquad |x_2 - x_1| \approx 0.0320606$

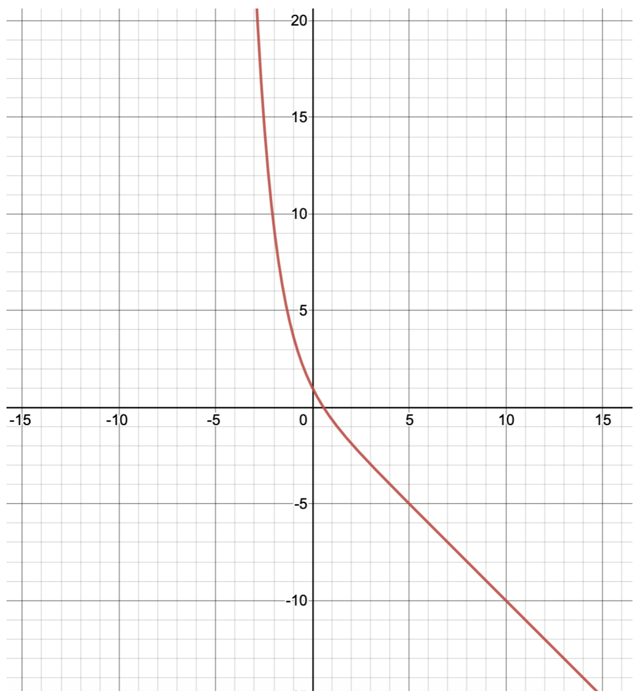
$x_3 = 2.1272 - \frac{f(2.1272)}{f'(2.1272)} \approx 2.09514 \qquad |x_3 - x_2| \approx 0.00058447$

$x_4 = 2.09514 - \frac{f(2.09514)}{f'(2.09514)} \approx 2.09455 \qquad |x_4 - x_3| \approx 2 \cdot 10^{-7} < \varepsilon$

Dla x_4 warunek został spełniony. Zatem można uznać, że dla określonej dokładności $\varepsilon = 10^{-6}$ wynik $x_4 \approx 2.09455$ jest szukanym miejscem zerowym funkcji.

(b) $e^{-x} = x$

W celu okreslenia granic przedziału w którym znajduje się pierwiastek znowu musimy poznać wykres funkcji.



Rysunek 2: Wykres funkcji $f(x) = e^{-x} - x$

Możemy stwierdzić, że pierwiastek wystepuje z w przedziale $[-1, 2]$. Sprawdźmy teraz warunek $f(a) \cdot f(b) < 0$, gdzie [a, b] to $[-1, 2]$.

$$f(-1) = 1 + e \approx 3.71828$$

$$f(2) = -2 + \frac{1}{e^2} \approx -1.86466$$

Warunek $f(-1) \cdot f(2) \approx -6.93335 < 0$ został spełniony więc w przyjętym przedziale pierwiastek na pewno występuje. Musimy sprawdzić jaki znak ma wyrażenie: $f'(x) * f''(x)$ dla punktów brzegowych:

$$f'(x) = -1 - e^{-x}, f'(-1) = -3.718, f'(2) = -1.135$$

$$f''(x) = e^{-x}, f''(-1) = 2.718, f''(2) = 0.135$$

Zauważamy że znak wyrażenia jest zawsze ujemny więc wybieramy punkt startowy $x_0 = a = -1$. Warunek stopu dobieramy jako $\varepsilon = 10^{-6}$ i sprawdzamy warunek zbieżności dla $x = -1$: $\left|\frac{f(x) \cdot f''(x)}{(f'(x))^2}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{f(-1) \cdot f''(-1)}{(f'(-1))^2}\right| < 1 \Leftrightarrow 0.731 < 1$.

$x_0 = -1$

$x_1 = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} \approx 0 \qquad |x_1 - x_0| \approx 1$

$x_2 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} \approx 0.5 \qquad |x_2 - x_1| \approx 0.5$

$x_3 = 0.5 - \frac{f(0.5)}{f'(0.5)} \approx 0.56631 \qquad |x_3 - x_2| \approx 0.066311$

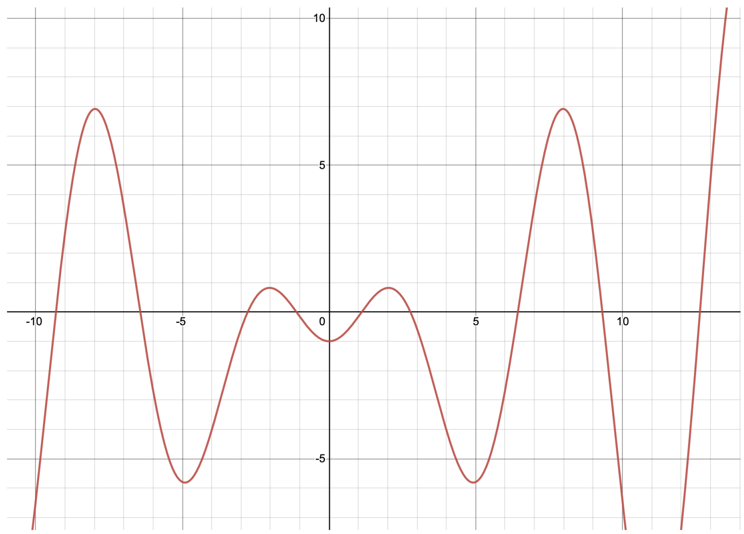
$x_4 = 0.56631 - \frac{f(0.56631)}{f'(0.56631)} \approx 0.567143165 \qquad |x_4 - x_3| \approx 0.000832162$

$x_5 = 0.56714 - \frac{f(0.56714)}{f'(0.56714)} \approx 0.567143290 \qquad |x_5 - x_4| \approx 1.25 \cdot 10^{-7} < \varepsilon$

Dla x_5 warunek został spełniony. Zatem można uznać, że dla określonej dokładności $\varepsilon = 10^{-6}$ wynik $x_5 \approx 0.56714$ jest szukanym miejscem zerowym funkcji.

(c) $xsin(x) = 1$

Tutaj również warto spojrzeć na wykres:



Rysunek 3: Wykres funkcji $f(x) = e^{-x} - x$

W tym przypadku funkcja jest okresowa i ma nieskończenie wiele pierwiastków, dlatego dla przykładu policzymy dwa pierwsze z nich w przedziałach: $[0.5, 1.5]$ i $[2.5, 3]$ Tak jak poprzednio sprawdzimy warunek $f(a) \cdot f(b) < 0$ dla tych przedziałów:

$$f(0.5) \cdot f(1.5) \approx -0.377287 < 0$$

$$f(2.5) \cdot f(3) \approx -0.286117 < 0$$

Warunek został spełniony dla obydwu przedziałów został spełniony więc dwa pierwsze przerwiastki tej funkcji na pewno znajdują się w tych przedziałach. Metodą Newtona-Raphson policzymy te pierwiastki. Najpierw musimy sprawdzić znak wyrażenia $f'(x) * f''(x)$ dla punktów brzegowych przedziałów:

$$f'(x) = x \cdot \cos(x) + \sin(x)$$

$$f''(x) = 2\cos(x) - x \cdot \sin(x)$$

$$f'(0.5) = 0.9182, f''(0.5) = 1.5155$$

$$f'(1.5) = 1.1036, f''(1.5) = -1.3548$$

$$f'(2.5) = -1.4044, f''(2.5) = -3.0985$$

$$f'(3) = -2.8289, f''(3) = -2.4034$$

W pierwszym przedziale znaki różnią się więc musmy sprawdzić warunek zbieżności dla obu wartości brzegowych: $x = 0.5 : \left|\frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{f(0.5)\cdot f''(0.5)}{(f'(0.5))^2}\right| < 1 \Leftrightarrow 1.36656 < 1$ - sprzeczność, więc nie będziemy brać pod uwagę tego punktu. Sprawdźmy jeszcze warunek dla $x = 1.5 : \left|\frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}\right| < 1 \Leftrightarrow \left|\frac{f(1.5)\cdot f''(1.5)}{(f'(1.5))^2}\right| < 1 \Leftrightarrow 0.552 < 1$. Więc dla $x \in [0.5, 1.5] : x_0 = a = 0.5$ Ustalmy jeszcze warunek stopu - dobierając dokładność obliczeń równ np. $\varepsilon = 10^{-5}$.

$x_0 = 0.5$
$x_1 = 0.5 - \frac{f(0.5)}{f'(0.5)} \approx 1.328 \qquad |x_1 - x_0| \approx 0.828004$
$x_2 = 1.328 - \frac{f(1.328)}{f'(1.328)} \approx 1.1039 \qquad |x_2 - x_1| \approx 0.224083$
$x_3 = 1.1039 - \frac{f(1.1039)}{f'(1.1039)} \approx 1.11415349 \qquad |x_3 - x_2| \approx 0.0102322$
$x_4 = 1.11415 - \frac{f(1.11415)}{f'(1.11415)} \approx 1.11415714 \qquad |x_4 - x_3| \approx 3.65 \cdot 10^{-6} < \varepsilon$

Dla x_4 warunek został spełniony. Zatem można uznać, że dla określonej dokładności $\varepsilon = 10^{-5}$ wynik $x_4 \approx 1.11415714$ jest szukanym miejscem zerowym funkcji.

Dla drugiego punktu wartość wyrażenia jest dodatnia więc dla $x \in [2.5, 3] : x_0 = b = 3$.
$x_0 = 3$
$x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} \approx 2.796158 \qquad |x_1 - x_0| \approx 0.203842$
$x_2 = 2.7962 - \frac{f(2.7962)}{f'(2.7962)} \approx 2.77294969 \qquad |x_2 - x_1| \approx 0.0232083$
$x_3 = 2.77295 - \frac{f(2.77295)}{f'(2.77295)} \approx 2.77260478 \qquad |x_3 - x_2| \approx 0.00034491$
$x_4 = 2.7726 - \frac{f(2.7726)}{f'(2.7726)} \approx 2.77260471 \qquad |x_4 - x_3| \approx 7 \cdot 10^{-8} < \varepsilon$

Dla x_4 warunek został spełniony. Zatem można uznać, że dla określonej dokładności $\varepsilon = 10^{-5}$ wynik $x_4 \approx 2.77260471$ jest szukanym miejscem zerowym funkcji.

Ze względu na symetrię otrzymaliśmy miejsca zerowe: $x_1 = \pm 1.11415714$ oraz $x_2 = \pm 2.77260471$.

3 Zapisz iteracje Newtona do rozwiązywania następującego układu równań nieliniowych.

$$x_1^2 + {x_2}^2 = 1$$
$$x_1^2 - x_2 = 0$$

W tym zadaniu korzystamy z Metody Newtona dla układu równań. Metoda Newtona dla funkcji wielu zmiennych jest uogólnieniem tej metody dla funkcji jednej zmiennej. W metodzie stycznych wykorzystywaliśmy wzór: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ Jeżeli przyjąć, że $x \approx x_0$ to

$$\text{otrzymywalismy: } f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0 \Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} .$$

Dla funkcji wielu zmiennych gdy $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : R^n \to R^n$ możemy f przybliżyć równaniem afi- Jeśli założymy, że $x \approx x_0$ to:

$$f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) + Df(x_0)x - Df(x_0)x_0 = 0 \Rightarrow Df(x_0)x = Df(x_0)x_0 - f(x_0)$$

Gdy $Df(x_0)$ jest odwracalna to: $x = [Df(x_0)]^{-1} Df(x_0)(x_0) - [Df(x_0)]^{-1} f(x_0) = I(x_0) - [Df(x_0)]^{-1} f(x_0)$. A zatem ostatecznie $\quad x = (x_0) - [Df(x_0)]^{-1} f(x_0)$ Ogólnie można napisać: $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \equiv F(X) = 0, \quad$ gdzie $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$

$$\text{Zatem: } 0 = F(X) \approx F(X_0) + DF(X_0)(X - X_0)$$

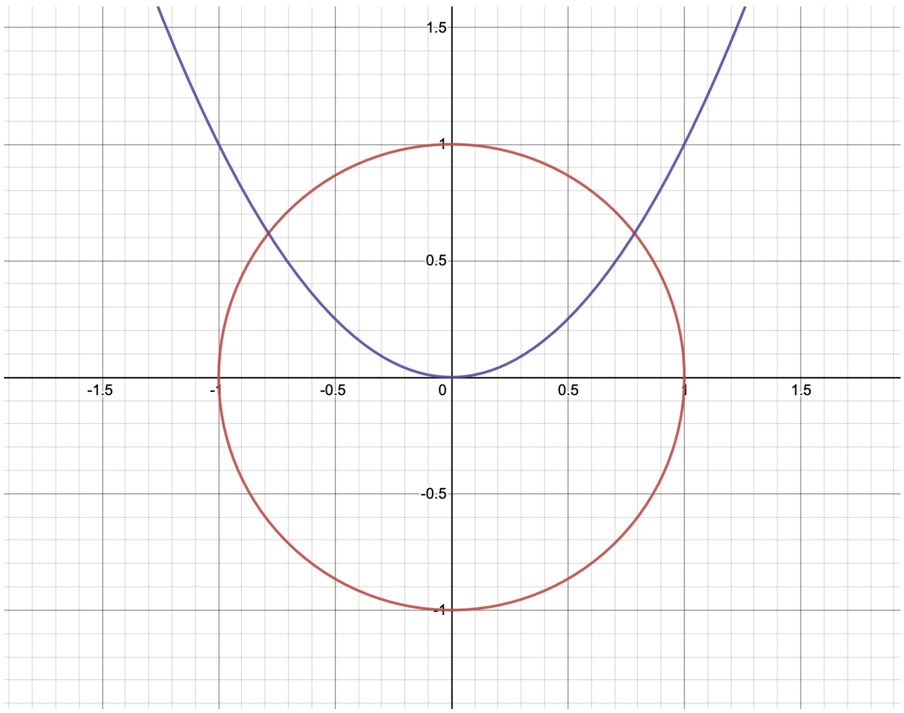
A więc otrzymujemy rekurencyjne rozwiązanie: $X_{k+1} = X_k - [DF(X_k)]^{-1} F(X_k)$ Dla naszego zadania otrzymamy nastepujące równania:

$$F(X) = \begin{bmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+y^2-1 \\ x^2-y \end{bmatrix}$$

$$DF(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial_2(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -1 \end{bmatrix}$$

$$X_{k+1} = X_k - \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x^2+y^2-1 \\ x^2-y \end{bmatrix}$$

Wykres poniżej przedstawia przebieg funkcji. Musimy w przybliżeniu określić granice przedzziału, w którym znajduje się dany pierwiastek.



Rysunek 6
Czerowny: $x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$
Niebieski: $f(x) = x_1^2 - x_2$

Z wykresu możemy wywnioskować, że pierwiastek będzie mieścił się w granicach $x \in [0.5; 1]$ oraz $x \in [-1; -0.5]$, a $y \in [0.5; 1]$. Ponieważ rozwiązanie x jest symetryczne, rozwiążemy tylko jeden przypadek.

Wybieramy punkt startowy $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Obliczenia zostały wykonane za pomocą programu komputerowego:
$(x_0, y_0) = (1, 1)$
$(x_1, y_1) = (0.8(3); 0.(6))$
$(x_2, y_2) = (0.7881; 0.619)$
$(x_3, y_3) = (0.78615407; 0.6180344)$
$(x_4, y_4) = (0.78615138; 0.618034)$

Otrzymujemy więc dwa rozwiązania (0.78615138; 0.618034) oraz (-0.78615138; 0.618034). Oczywiście powinniśmy ustalić warunek stopu, co pokazane zostało na przykładach w zadaniu 1). W tym zadaniu ograniczę się do warunku, którym jest ilość wykonanych iteracji równa w tym wypadku 4 .

4 Bibliografia

1. http://home.agh.edu.pl/~funika/mownit/lab5/wyklad_02.pdf
2. http://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=MN02#Metoda_Newtona