# Laboratorium 3

Piotr Witek

24 marca 2021

## 1 Zadania

### 1.1 Aproksymować funkcję $f(x) = 1 + x^3$ w przedziale [0,1] wielomianem pierwszego stopnia metodą średniokwadratową ciągłą dla w(x)=1.

Aproksymujemy wielomianami $\phi_n(x) = x^n$, więc funkcja aproksymująca ma postać:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \phi_i(x), c_i \in R$$

Odległość od funkcji aproksymowanej w metryce $L_1^2([0,1])$ wynosi:

$$\delta(f,F) = \int_0^1 [F(x) - f(x)]^2 dx = \int_0^1 \left[\sum_{i=0}^{n} c_i \phi_i(x) - f(x)\right]^2 dx$$

Aby znaleźć minimum funkcji w zależności od współczynników $c_i$ porównujemy jej pochodne względem tych współczynników do 0 :

$$\frac{\partial \delta}{\partial c_i} = 2\int_0^1 [F(x) - f(x)]\phi_i(x) dx = 0$$
$$\int_0^1 [F(x) - f(x)]\phi_i(x) dx = 0$$
$$\int_0^1 F(x)\phi_i(x) dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x) dx$$
$$\int_0^1 \sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j(x)\phi_i(x) dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x) dx$$
$$\sum_{j=0}^{n} c_j \cdot \int_0^1 \phi_j(x)\phi_i(x) dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x) dx, i \in \{0, 1..n\}$$

W naszym przypadku ($n = 1$) równania te wyrażone w postaci macierzowej mają postać:

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_0(x)\phi_0(x)dx & \int_0^1 \phi_0(x)\phi_1(x)dx \\ \int_0^1 \phi_1(x)\phi_0(x)dx & \int_0^1 \phi_1(x)\phi_1(x)dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 f(x)\phi_0(x)dx \\ \int_0^1 f(x)\phi_1(x)dx \end{bmatrix}$$

$$\int_0^1 \phi_0(x)\phi_0(x)dx = \int_0^1 1 \cdot 1dx = x\Big|_0^1 = 1$$
$$\int_0^1 \phi_1(x)\phi_0(x)dx = \int_0^1 1 \cdot xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$
$$\int_0^1 \phi_1(x)\phi_1(x)dx = \int_0^1 x \cdot xdx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$
$$\int_0^1 \phi_0(x)f(x)dx = \int_0^1 1 \cdot \left(1 + x^3\right) dx = \frac{x^4}{4} + x\Big|_0^1 = \frac{5}{4}$$
$$\int_0^1 \phi_1(x)f(x)dx = \int_0^1 x \cdot \left(1 + x^3\right) dx = \int_0^1 x \cdot \left(x + x^4\right) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{7}{10}$$

Podstawiając do równania (1):

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 21 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$
$$-5c_1 = -4, \quad 1c_0 + 2c_1 = 5$$

$$c_0 = \frac{4}{5}, \quad c_1 = \frac{9}{10}$$

Z tego wynika że nasza funkcja aproksymująca jest postaci:

$$F(x) = 0.9x + 0.8$$

### 1.2 Aproksymować funkcję $f(x) = 1 + x^3$ w przedziale [0,1] wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa nie są ortogonalne na zadanym przedziale [0,1], waga $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Baza to: $1, x, 2x^2 - 1$. Posłużę się wzorem:

$$c_i = \frac{1}{\lambda_i} \int_0^1 p(x)\phi_i(x)f(x)$$

Dla wielomianów Czebyszewa: $\lambda_0 = \frac{1}{\pi}$ $\lambda_i = \frac{2}{\pi}$ dla $i \neq 0$

$$c_0 = \tfrac{1}{\pi} \int_0^1 \tfrac{1+x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \tfrac{1}{6\pi}(4 + 3\pi)$$

$$c_1 = \tfrac{2}{\pi} \int_0^1 \tfrac{x\cdot(1+x^3)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \tfrac{2}{\pi} + \tfrac{3}{8}$$

$$c_2 = \tfrac{2}{\pi} \int_0^1 \tfrac{\left(2x^2-1\right)\cdot(1+x^3)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \tfrac{52}{15\pi} + 2$$

$$q(x) = \frac{1}{6\pi}(4 + 3\pi) + (\frac{2}{\pi} + \frac{3}{8}) \cdot x + (\frac{52}{15\pi} + 2) \cdot (2x^2 - 1)$$

## 2 Zadania domowe

### 2.1 Obliczyć 4-5 współczynników aproksymacji funkcji |x| w przedziale [-1,1] wielomianami Czebyszewa. Obliczyć błąd aproksymacji w równoodległych punktach z odstępem 0.2, poczynając od punktu –0.8. Narysować na papierze kratkowanym funkcję aproksymowaną i aproksymującą.

Wielomiany Czebyszewa są ortogonalne na zadanym przedziale (-1,1) z wagą $p(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Przyjmuję bazę: $1, x, 2x^2 - 1, 4x^2 - 3x, 8x^4 - 8x^2 + 1$ W celu obliczenia współczynników posłużę się wzorem:

$$c_i = \frac{1}{\lambda_i} \int_{-1}^1 p(x)\phi_i(x)f(x)$$

Dla wielomianów Czebyszewa: $\lambda_0 = \frac{1}{\pi}$ $\lambda_i = \frac{\pi}{\pi}$ dla $i \neq 0$ We wszystkich całkach znajduje się $|x|$ - całki te w celu obliczenia nalezy rozbić na dwie mniejsze całki.

$$c_0 = \tfrac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \tfrac{|x|}{\sqrt{1-x^2}} dx = \tfrac{2}{\pi}$$

$$c_1 = \tfrac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \tfrac{x\cdot|x|}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

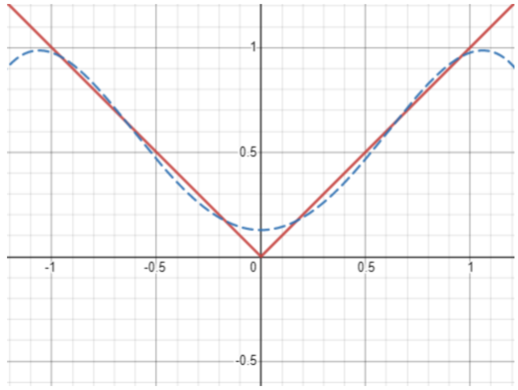
$$c_2 = \tfrac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \tfrac{\left(2x^2-1\right)\cdot|x|}{\sqrt{1-x^2}} dx = \tfrac{4}{3\pi}$$

$$c_3 = \tfrac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \tfrac{\left(4x^3-3x\right)\cdot|x|}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$$

$$c_4 = \tfrac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \tfrac{\left(8x^4-8x^2+1\right)\cdot|x|}{\sqrt{1-x^2}} dx = \tfrac{-4}{15\pi}$$

Aproksymowana funkcja jest parzysta, dlatego współczynniki przy nieparzystych wielomianach Czebyszewa są równe 0 .

$$q(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{3\pi} \cdot \left(2x^2 - 1\right) - \frac{4}{15\pi} \cdot \left(8x^4 - 8x^2 + 1\right)$$




Rysunek 1: Wykres funkcji $|x|$ $oraz$ $q(x)$

| x | q(x) | $\|x\|$ | bł. bezwzgl. | bł.wzgl |
|---|---|---|---|---|
| -0.800000 | 0.827029 | 0.800000 | 0.027029 | 0.033786 |
| -0.600000 | 0.589357 | 0.600000 | 0.010643 | 0.017738 |
| -0.400000 | 0.354402 | 0.400000 | 0.045598 | 0.113995 |
| -0.200000 | 0.187353 | 0.200000 | 0.012647 | 0.063235 |
| 0.000000 | 0.127324 | 0.000000 | 0.127324 | $\infty$ |
| 0.200000 | 0.187353 | 0.200000 | 0.012647 | 0.063235 |
| 0.400000 | 0.354402 | 0.400000 | 0.045598 | 0.113995 |
| 0.600000 | 0.589357 | 0.600000 | 0.010643 | 0.017738 |
| 0.800000 | 0.827029 | 0.800000 | 0.027029 | 0.033786 |
| 1.000000 | 0.976150 | 1.000000 | 0.023850 | 0.023850 |

## 2.2 Wykonać aproksymację funkcję |sin(x)| funkcjami trygonometrycznymi w zakresie [-pi, pi]

Funkcja $|\sin x|$ spelnia warunki Dirichleta na podanym przedziale. Ponieważ funkcja jest parzysta, mozna ją rozwinąć w szereg cosinusów:

$$a_n = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos nx dx = \tfrac{-(2(\cos(\pi n)+1))}{(\pi(n^2-1))}$$

$$a_n = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos nx dx = \tfrac{-(2((-1)^n+1))}{(\pi(n^2-1))}$$

dla $n > 1$ oraz $a_1 = 0$ dla pozostatych nieparzystych $n, a_n = 0$ bo $(-1)^n + 1 = 0$. Dla parzystych $n$ licznik jest równy -4 , więc dla parzystych $n$ prawdziwy jest wzór $a_n = \frac{-4}{\pi(n^2-1)}$

$$\tfrac{a_0}{2} = \tfrac{2}{\pi}$$

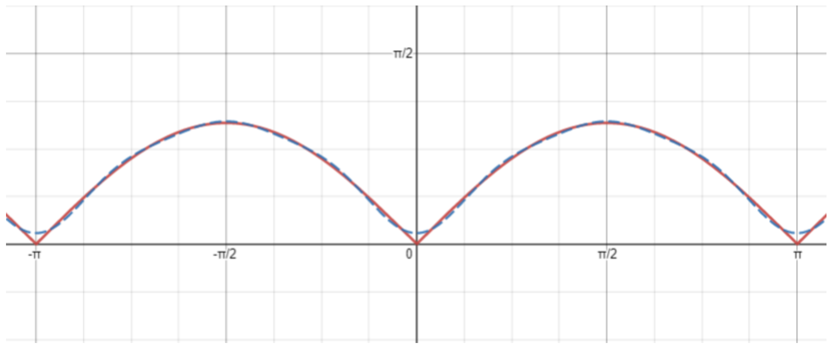
$$S_N(x) = \tfrac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx$$

$$a_2 = \tfrac{-4}{3\pi}$$

$$a_4 = \tfrac{-4}{15\pi}$$

$$a_6 = \tfrac{-4}{35\pi}$$

$$S_6(x) = \tfrac{2}{\pi} - \tfrac{4}{3\pi} \cdot \cos(2x) - \tfrac{4}{15\pi} \cdot \cos(4x) - \tfrac{4}{35\pi} \cdot \cos(6x)$$




Rysunek 2: Wykresy funkcji $|sin(x)|\, oraz\ S_6$

# 3 Bibliografia

1. http://home.agh.edu.pl/~funika/mownit/lab3/aproksymacja.pdf
2. https://pl.wikipedia.org/wiki/Szereg_Fouriera