Laboratorium 2

Piotr Witek

17 marca 2021

1 Zadania

1.1 Dane są trzy węzły interpolacji (-2.9,1), (0,1.5), (2.3,3.9), proszę obliczyć wielomian interpolacyjny 2-go stopnia, wykorzystując:

1.1.1 jednomiany

Bazę stanowią funkcje 1, x, x^2. Funkcja interpulująca będzie mieć postać:

$$w(x) = ax^2 + bx + c$$

Wyznaczam i rozwiązuję układ równań:

$$\begin{cases} w(-2.9) = 1 \\ w(0) = 1.5 \\ w(2.3) = 3.9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8.41a - 2.9b + c = 1 \\ c = 1.5 \\ 5.29 + 2.3b + c = 3.9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{2905}{17342} \\ b = \frac{22829}{34684} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Zatem $w(x) = \frac{2905}{17342}x^2 + \frac{22829}{34684}x + \frac{3}{2}$

1.1.2 wielomiany Lagrange'a

Bazą są trzy funkcje L_i postaci:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Wielomian interpolacyjny ma postać:

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot L_i(x)$$

gdzie f_i to wartość wielomianu interpolowanego w i-tym węźle interpolacji. Zatem:

$$w(x) = 1 \cdot \frac{x}{-2.9} \cdot \frac{x - 2.3}{-2.9 - 2.3} + 1.5 \cdot \frac{x + 2.9}{2.9} \cdot \frac{x - 2.3}{-2.3} + 3.9 \cdot \frac{x + 2.9}{2.3 + 2.9} \cdot \frac{x}{2.3}$$

$$w(x) = \frac{2905}{17342}x^2 + \frac{22829}{34684}x + \frac{3}{2}$$

1.1.3 wielomiany wg wzoru Newtona

Wielomian interpolujący ma postać:

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

$$w(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$w(x) = a_0 + a_1(x + 2.9) + a_2 x(x + 2.9)$$

Wyznaczam i rozwiązuję układ równań:

$$\begin{cases} w(-2.9) = a_0 + a_1(-2.9 + 2.9) + a_2(-2.9)(-2.9 + 2.9) = 1 \\ w(0) = a_0 + a_1(0 + 2.9) + a_2 \cdot 0 \cdot (0 + 2.9) = 1.5 \\ w(2.3) = a_0 + a_1(2.3 + 2.9) + a_2 \cdot 2.3 \cdot (2.3 + 2.9) = 3.9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = \frac{5}{29} \\ a_2 = \frac{2905}{17342} \end{cases}$$

Zatem wielomian interpolacyjny ma postać:

$$w(x) = \frac{2905}{17342}x^2 + \frac{22829}{34684}x + \frac{3}{2}$$

Każda z metod daje tożsamy wynik postaci wielomianu interpolacyjnego.

1.2 Wyrazić następujący wielomian metodą Hornera: $p(t) = 3t^3 - 7t^2 + 5t - 4$

$$p(t) = 3t^3 - 7t^2 + 5t - 4 = t \cdot (3t^2 - 7t + 5) - 4 = t \cdot (t \cdot (3t - 7) + 5) - 4$$

1.3 Ile mnożeń trzeba wykonać do ewaluacji wielomianu p(t) stopnia n-1 w danym punkcie t jeżeli wybieramy jako reprezentacje:

1.3.1 jednomiany

Wielomian stopnia n-1 ma postać:

$$w(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} x^{n-1}$$

W takiej postaci potrzebujemy $0 + 1 + 2... + (n - 1) = \frac{(n-1) \cdot n}{2}$ mnożeń.

1.3.2 wielomiany Lagrange'a

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i \cdot L_i(x)$$

Począwszy od funkcji bazowych L_i mamy n mnożeń prostych ilorazów, gdzie jeden iloraz to jedno mnożenie przez odwrotność, co daje 2n mnożeń. Następnie obliczenie wartości wielomianu wymaga n-krotnego wykonania powyższych mnożeń. W rezultacie potrzeba $2n^2$ mnożeń.

1.3.3 wielomiany Newtona

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Mamy n składników, które wymagają kolejno 0,1,2,...,n mnożeń. Zatem łączna liczba potrzebnych mnożeń wynosi:

$$0 + 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

2 Zadania domowe

2.1 Obliczyć wielomian interpolacyjny dla danych (0.5,5.5), (1,14.5), (1.5,32.5), (2,62.5)

2.1.1 jednomiany

Bazę stanowią funkcje 1, x, x^2 oraz x^3 . Funkcja interpulująca będzie mieć postać:

$$w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Wyznaczam i rozwiązuję układ równań:

$$\begin{cases} w(0.5) = 5.5 \\ w(1) = 14.5 \\ w(1.5) = 32.5 \\ w(2) = 62.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c + d = \frac{11}{2} \\ a + b + c + d = \frac{29}{2} \\ \frac{27}{8}a + \frac{9}{4}b + \frac{3}{2}c + d = \frac{65}{2} \\ 8a + 4b + 2c + d = \frac{125}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ b = 6 \\ c = 2 \\ d = 2.5 \end{cases}$$

Zatem $w(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2.5$

2.1.2 wielomian Lagrange'a

Bazą są cztery funkcje L_i postaci:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Wielomian interpolacyjny ma postać:

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot L_i(x)$$

gdzie f_i to wartość wielomianu interpolowanego w i-tym węźle interpolacji. Zatem:

$$w(x) = 5.5 \cdot \frac{x-1}{-0.5} \cdot \frac{x-1.5}{-1} \cdot \frac{x-2}{-1.5} + 14.5 \cdot \frac{x-0.5}{0.5} \cdot \frac{x-1.5}{-0.5} \cdot \frac{x-2}{-1} + 32.5 \cdot \frac{x-0.5}{1} \cdot \frac{x-1}{0.5} \cdot \frac{x-2}{-0.5} + 62.5 \cdot \frac{x-0.5}{1.5} \cdot \frac{x-1}{1} \cdot \frac{x-1.5}{0.5}$$

$$w(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2.5$$

Otrzymany wielomian jest tożsamy z uzyskanym metodą jednomianów.

2.1.3 wielomian Newtona

Iloraz różnicowy to wielkość opisująca przyrost funkcji na danym przedziale. Postać ilorazu różnicowego to:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Dla danych punktów, trójkąt ilorazów różnicowych ma postać:

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i; x_{i+1})$	$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2})$	$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3})$
0.5	5.5			
		18		
1	14.5		18	
		36		4
1.5	32.5		24	
		60		
2	62.5			

Korzystając z metody różnic skończonych otrzymuję wielomian o postaci:

$$5.5 + 18(x - 0.5) + 18(x - 0.5)(x - 1) + 4(x - 0.5)(x - 1)(x - 1.5) = 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2.5$$

2.2 Dowieść, że wzór używający różnic skończonych $y_i = f[x_1, x_2, ..., x_j]$ rzeczywiście daje współczynnik j-tej funkcji bazowej w interpolującym wielomianie Newtona

Wielomian Newtona ma postać:

$$w(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

Iloraz różnicowy rzędu k definiujemy rekurencyjnie:

$$f(x_0, x_0, ..., x_k) = \frac{f(x_1, x_2, ..., x_k) - f(x_0, x_1, ..., x_{k-1})}{x_k - x_0}$$

Należy pokazać, że $a_j = f(x_0, x_1, ..., x_j)$. Aby dowieść tezy posłuże się rownością, którą następnie udowodnię.

$$w_{i,j}(x) = \frac{(x - x_i) \cdot w_{i+1,j}(x) - (x - x_j) \cdot w_{i,j-1}(x)}{x_j - x_i}$$

gdzie $w_{i,j}(x)$ to wielomian interpolacyjny dla węzłów $x_i ... x_j$.

Dowodzę poprawność powyższej równości. Oznaczam prawą stronę równania jako $p(x)$. Należy dowieść, że funkcja $p(x)$ w węzłach interpolacji $x_i, ..., x_j$ przyjmuje wartości odpowiednio $f(x_i)...f(x_j)$

Dla $x = x_i$

$$p(x) = \frac{-(x_i - x_j) \cdot w_{i,j-1}(x)}{x_j - x_i} = w_{i,j-1}(x_i) = f(x_i)$$

Dla $x = x_j$

$$w_{i,j}(x) = \frac{(x_j - x_i) \cdot w_{i+1,j}(x)}{x_j - x_i} = w_{i+1,j}(x_i) = f(x_j)$$

Dla $x = x_k \in \{x_{i+1}, ..., x_{j-1}\}$

$$p(x_c) = \frac{(x_c - x_i) \cdot w_{i+1,j}(x_c) - (x_c - x_j) \cdot w_{i,j-1}(x_c)}{x_j - x_i} = \frac{(x_c - x_i) \cdot f(x_c) - (x_c - x_j) \cdot f(x_c)}{x_j - x_i} = f(x_c)$$

Zatem zależność rekurencyjna $w_{i,j}(x) = \frac{(x-x_i)\cdot w_{i+1,j}(x)-(x-x_j)\cdot w_{i,j-1}(x)}{x_j-x_i}$ jest prawdziwa.

Zakładam, że teza: $a_j = f(x_0, x_1, ..., x_j)$ jest prawdziwa.

Jeżeli stopień wielomianu wynosi 0 wtedy $a_j = f(x_0)$
Ponadto można zauważyć, że:

$$w_{0,n} = w_{0,n-1} + a_n(x_0 \cdot x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1})$$

wtedy, a_n jest współczynnikiem przy x^n.

Udowodniliśmy również wcześniej, że prawdziwa jest równość:

$$w_{0,n}(x) = \frac{(x-x_0)\cdot w_{1,n}(x) - (x-x_n)\cdot w_{0,n-1}(x)}{x_n - x_0}$$

Zatem wiedząc, że współczynniki x^{n-1} w wielomianie $w_{0,n-1}$ oraz $w_{1,n}$ to ilorazy różnicowe $f(x_1...x_n)$ oraz $f(x_0...x_{n-1})$ więc:

$$a_n = \frac{f(x_1...x_n) - f(x_0...x_{n-1})}{x_n - x_0} = f(x_0...x_n)$$

co kończy dowód.

2.3 Wykonać interpolację funkcji f(x) = |sin(x)| w przedziale [-4,4] przy użyciu wielomianów Lagrange'a 2-go, 5-go oraz 10-go stopnia, dla równoodległych węzłów interpolacji. Narysować wykres na papierze w kratkę oraz go zinterpretować

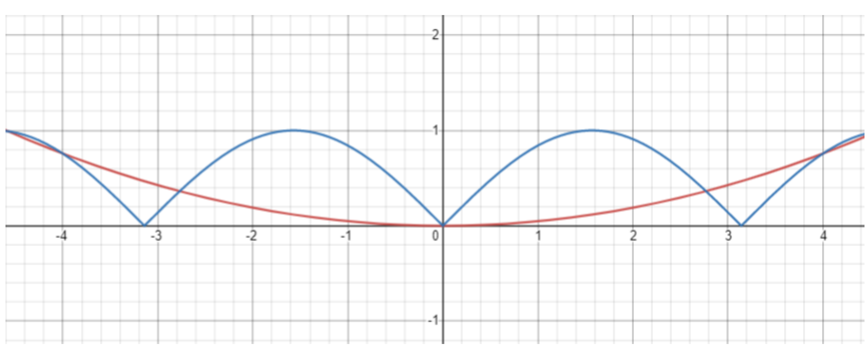
Ustalam węzły interpolacji i przybliżone wartości funkcji w tych punktach.

x	-4	-3.2	-2.4	-1.6	-0.8	0	0.8	1.6	2.4	3.2	4
$\lvert\sin x\rvert$	0.757	0.058	0.675	1	0.717	0	0.717	1	0.675	0.058	0.757

Dla wielomianu Lagrange'a drugiego stopnia potrzebuję trzech węzłów interpolacji czyli -4, 0 oraz 4.

Rozwiązanie dla wielomianu 2 stopnia:

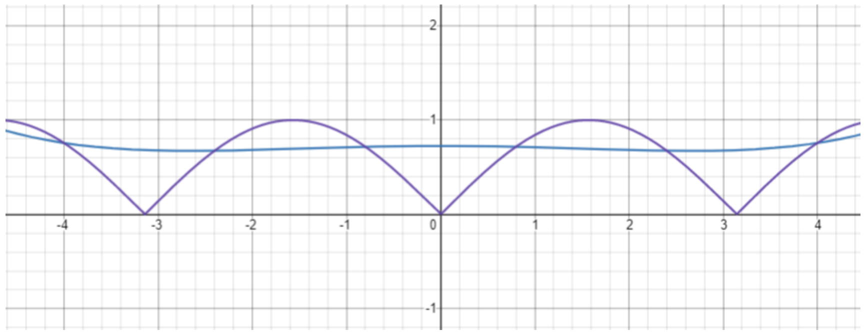
$$w_2(x) = 0.757 \cdot \frac{(x-0)(x-4)}{(-4-0)(-4-4)} + 0.757 \cdot \frac{(x-0)(x+4)}{(4-0)(4+4)} = 0.0473125x^2$$



Rysunek 1: Wykres funkcji $w_2(x)$

Analogicznie rozwiązanie dla wielomianu 5 stopnia:

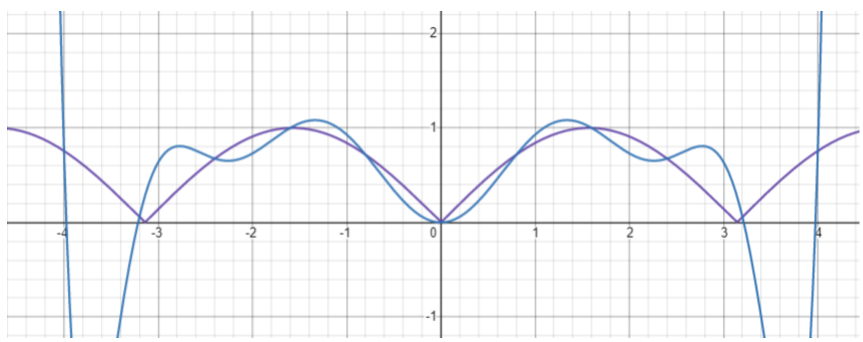
$$w_5(x) = -4.517509 \cdot 10^{-20} \cdot x^5 + 0.0010554x^4 - 0.0149577x^2 + 2.7755575615628 \cdot 10^{-17} \cdot x + 0.726141$$



Rysunek 2: Wykres funkcji $w_5(x)$

Rozwiazanie dla wielomianu 10 stopnia:

$$w_{10}(x) = 0.000313736x^{10} + 2.1684 \cdot 10^{-19}x^9 - 0.011196x^8 - 6.93889 \cdot 10^{-18} \cdot x^7 + 0.138964x^6 \\ + 5.55112 \cdot 10^{-17} \cdot x^5 - 0.735417x^4 - 1.11022 \cdot 10^{-16}x^3 + 1.53694x^2 - 1.11022 \cdot 10^{-16}x$$



Rysunek 3: Wykres funkcji $w_{10}(x)$

Wnioski:

Wielomiany Lagrange'a 2 oraz 5 stopnia słabo przybliżają kształt funkcji $|\sin x|$. Ilość węzłów interpolacji jest zbyt mała. W przypadku wielomianu 5 stopnia, funckja nie posiada miejsca zerowego, ze wzgledu na brak punktu o odciętej 0.

Wielomian 10 stopnia w obszarze [-3,3] dosyć dobrze przybliża zadaną funkcję. Poza obszarem [-3,3] widać duże rozbieżności, jakość interpolacji jest zła. Jest to wynikiem efektu Rungego, który występuje w przypadku symetrycznego rozkładu węzłów interpolacji. Aby wyeliminować efekt Rungego należałoby zmienić rozkład węzłów interpolacji, gęściej umieszczając je na końcach przedziału.

3 Bibliografia

1. `https://pl.wikipedia.org/wiki/Efekt_Rungego`

2. `http://www.is.umk.pl/~kg/zajecia/MetNum2.pdf`