

Raport z zadania nr. 6

1. Cel zadania

W poniższej tabeli zestawiono średnie miesięczne temperatury powietrza zanotowane w stacji meteorologicznej Kraków - obserwatorium w latach 2010-2016 (w stopniach C). Oblicz za ten okres średnie temperatury miesięczne. Następnie wyznacz wielomian interpolacyjny przedstawiający zmiany temperatury w Krakowie w ciągu roku. Rozważ różne zestawy punktów uwzględniane w interpolacji tak, by uzyskany wielomian był jak najlepszy. Następnie wykorzystując jedną z metod przybliżonych znajdź w jakich dniach średnia temperatura w Krakowie spada poniżej zera oraz kiedy średnia temperatura staje się dodatnia. Wykorzystując rachunek różniczkowy znajdź najcieplejszy i najzimniejszy dzień w roku oraz średnią temperaturę z roku wykorzystując średnią całkową (do wyznaczenia całki – wykorzystaj jedną z metod poznanych na zajęciach). Do obliczenia pochodnej można wykorzystać odpowiednią metodę numeryczną.

2. Przyjęte metody

Podczas rozwiązywania kolejnych punktów zadania przyjęto następujące metody. Do każdej z nich została napisana klasa ją wykonująca w języku Python v. 3.7.1 z wykorzystaniem zewnętrznych bibliotek zawartych w załączonym pliku *requirements.txt*.

Metody:

- Średnia arytmetyczna
- Wielomian interpolacyjny Newtona
- Metoda Stycznych
- Metoda $\frac{3}{8}$ Newtona

3. Przyjęte parametry i założenia

W metodzie stycznych używano wartości **$\text{eps} = 10^{-5}$**

Dla uproszczenia, przyjęte zostało iż rok to **360 dni**, miesiąc ma **30 dni**, natomiast na wykresach **$x = 1$ to 01.01** , a **$x = 13$ to 31.12**

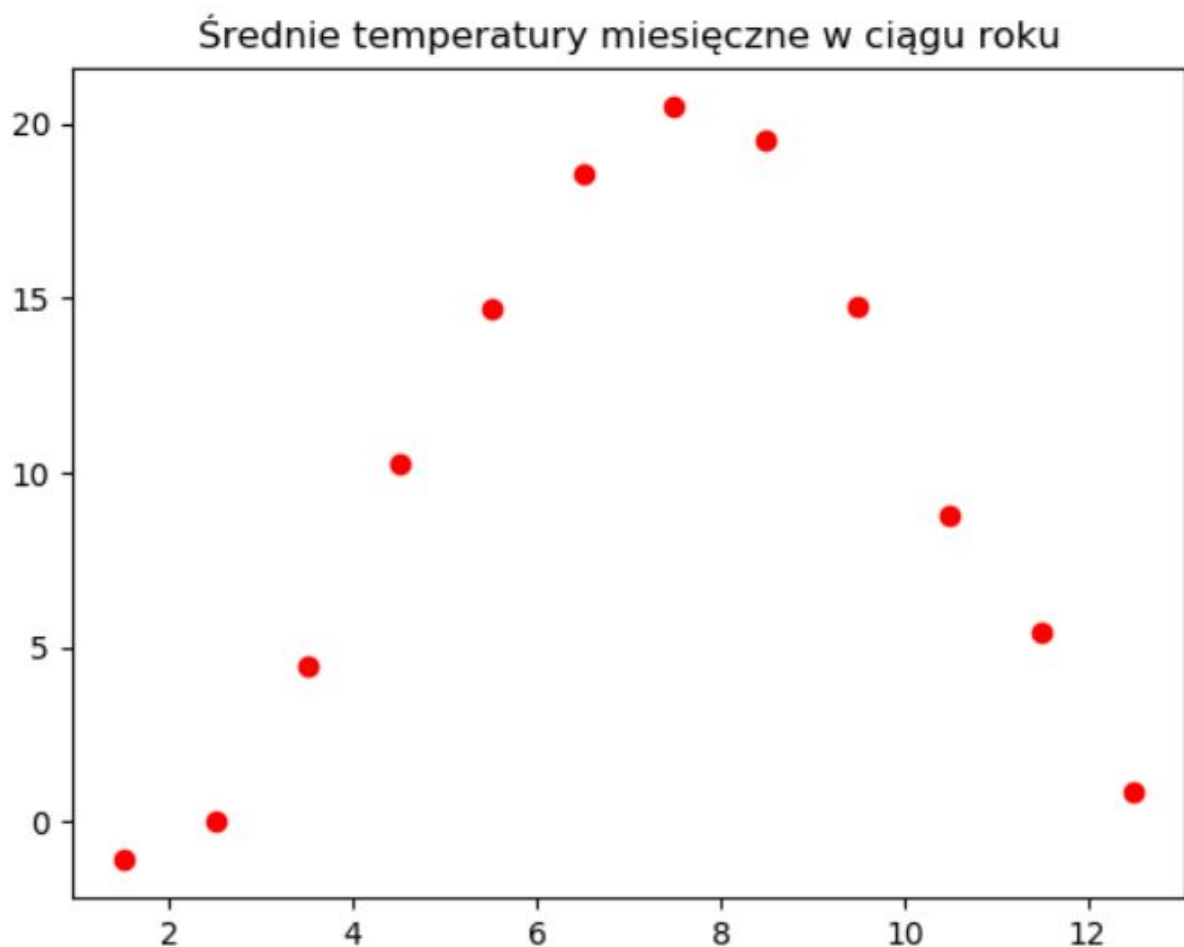
4. Przebieg zadania

Poszczególne kroki przebiegu zadania są wyszczególnione w pliku main.py

Pierwszą rzeczą w przebiegu zadania było pobranie danych z tabeli załączonej do polecenia (plik *tabelka.csv*). Odbywa się to za pomocą klasy "Data". Dane są następnie przerabiane na formę wygodną w dalszym użyciu.

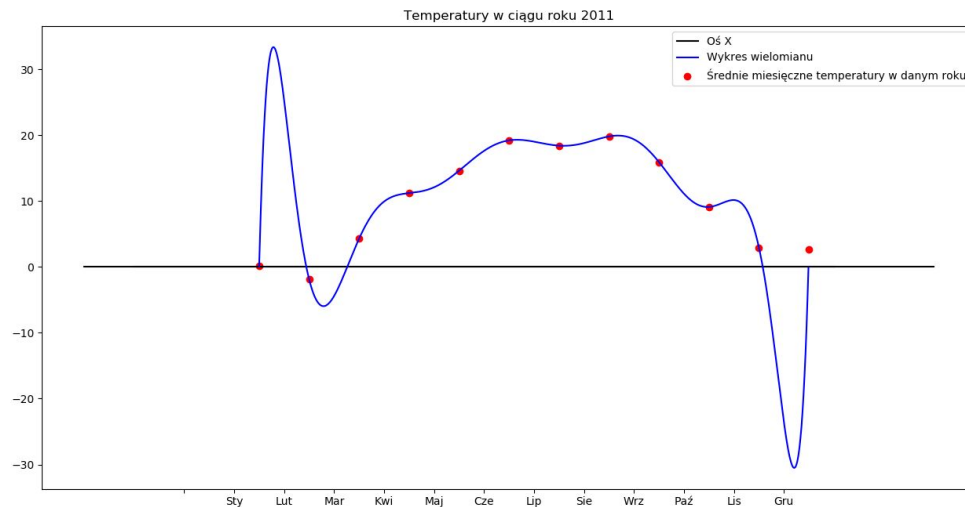
Pierwsze polecenie obejmuje policzenie średnich temperatur miesięcznych przy użyciu średniej arytmetycznej. Kształtują się one następująco:

Sty: -1.1 °C	Lip: 20.54 °C
Lut: 0.04 °C	Sie: 19.57 °C
Mar: 4.49 °C	Wrz: 14.79 °C
Kwi: 10.29 °C	Paź: 8.79 °C
Maj: 14.73 °C	Lis: 5.44 °C
Cze: 18.56 °C	Gru: 0.87 °C

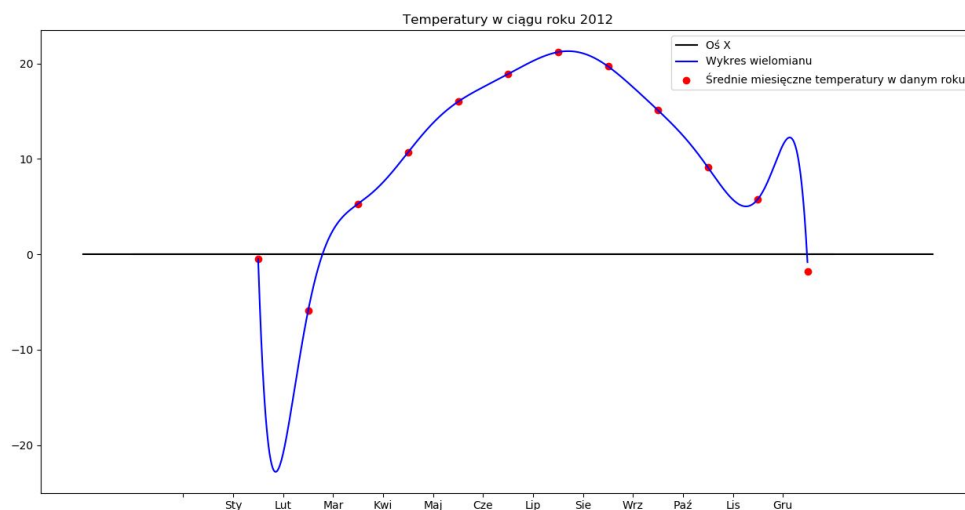


Wykres 1. przedstawiający średnie temperatury miesięczne w badanym okresie

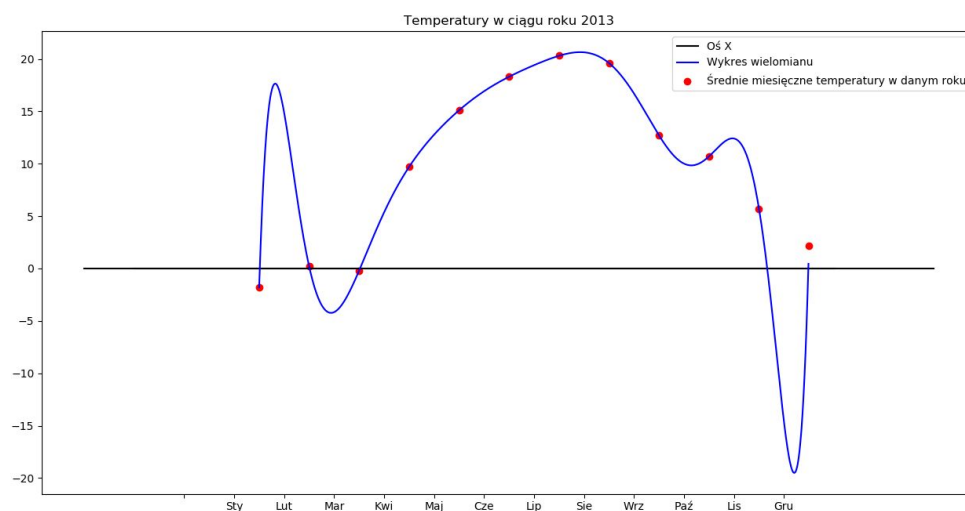
Kolejne polecenie dotyczyło wyznaczenia wielomianu interpolacyjnego przedstawiającego zmiany temperatur w Krakowie. Najpierw sprawdzone zostały wielomiany utworzone na bazie średnich temperatur miesięcznych w danych latach. Wyniki na wykresach przedstawiały się następująco:



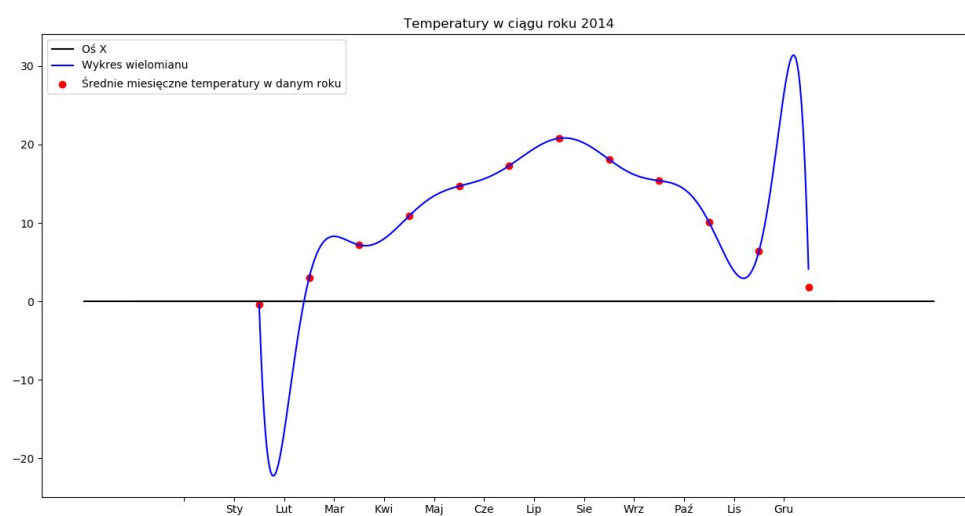
Wykres 2. przedstawiający zmiany temperatur w Krakowie w roku 2011



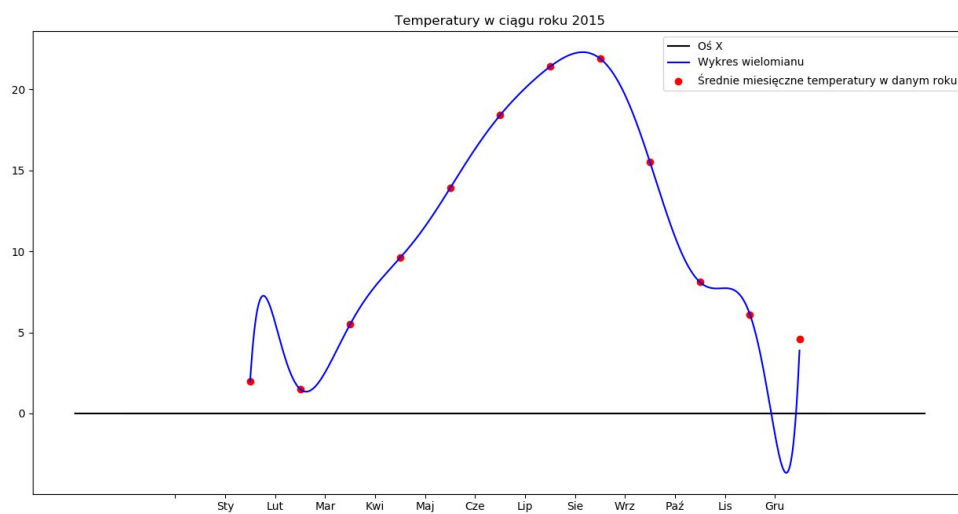
Wykres 3. przedstawiający zmiany temperatur w Krakowie w roku 2012



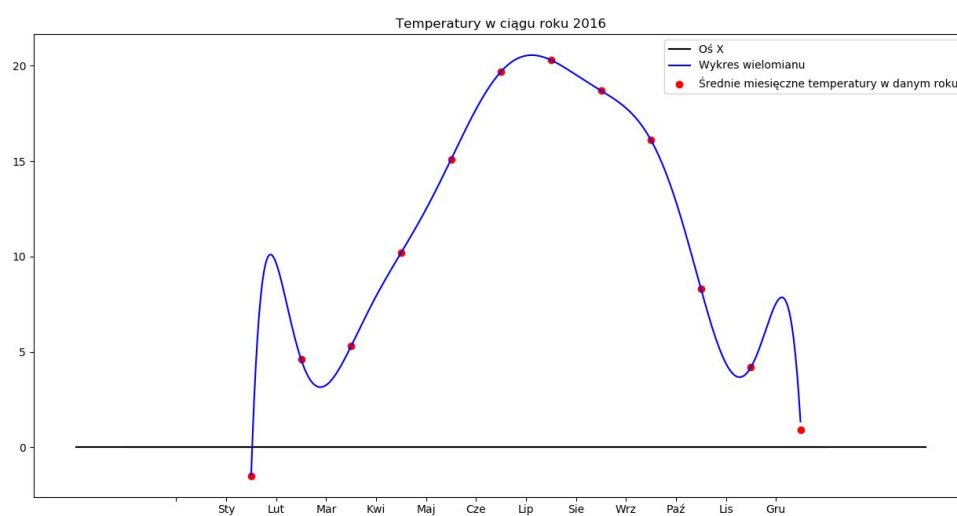
Wykres 4. przedstawiający zmiany temperatur w Krakowie w roku 2013



Wykres 5. przedstawiający zmiany temperatur w Krakowie w roku 2014

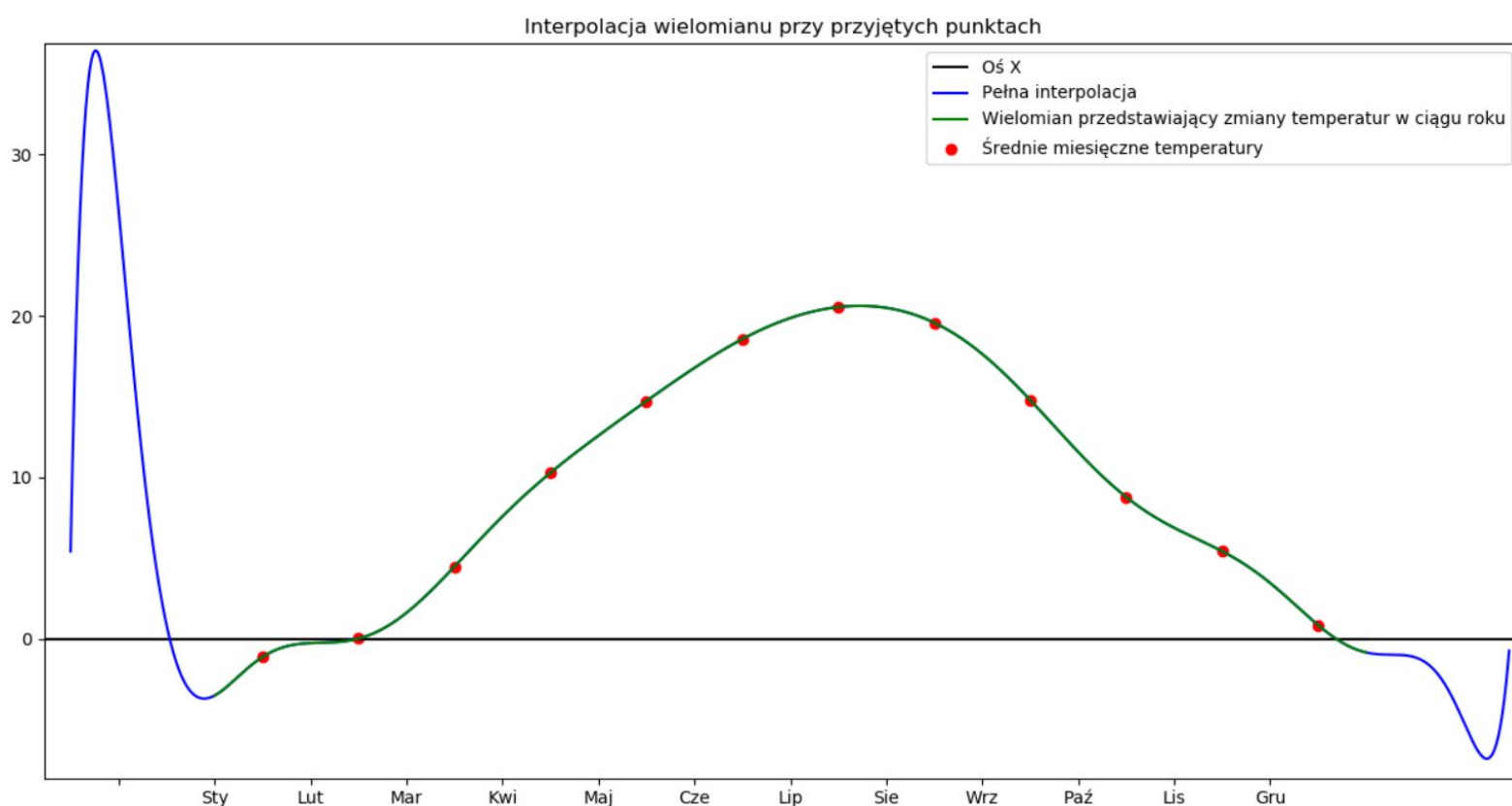


Wykres 6. przedstawiający zmiany temperatur w Krakowie w roku 2015



Wykres 7. przedstawiający zmiany temperatur w Krakowie w roku 2016

Na niemalże wszystkich wykresach, na początku oraz na końcu przedziału można zaobserwować znaczące skoki lub spadki wartości. Jest to wywoływane przez Efekt Rungego, który to przy znacznej ilości węzłów powoduje pogorszenie się jakości wielomianu. Widać to zwłaszcza na krańcach przedziałów co właśnie jest uwidocznione na powyższych wykresach. Dodatkowo, jako iż szukany jest wielomian odpowiadający średnim temperaturom w Krakowie, a do utworzenia powyższych wykresów użyte zostały temperatury z poszczególnych lat, żaden z nich nie mógł zostać uznany za ten "najlepszy". Aby takowy uzyskać, do utworzenia następnego wielomianu (Wykres 8.) użyte zostały średnie temperatury miesięczne, które to mogły pozwolić na najlepsze odwzorowanie zmian temperatur w Krakowie na bazie posiadanych danych. Jednocześnie w celu zniwelowania Efektu Rungego, do dwunastu posiadanych punktów (temperatur) dodane zostały po dwa dodatkowe punkty - na początku średnie temperatury za listopad oraz grudzień, a na końcu za styczeń oraz luty. Efektem był następujący wielomian interpolacyjny:



Wykres 8. przedstawiający wielomian na bazie szesnastu węzłów

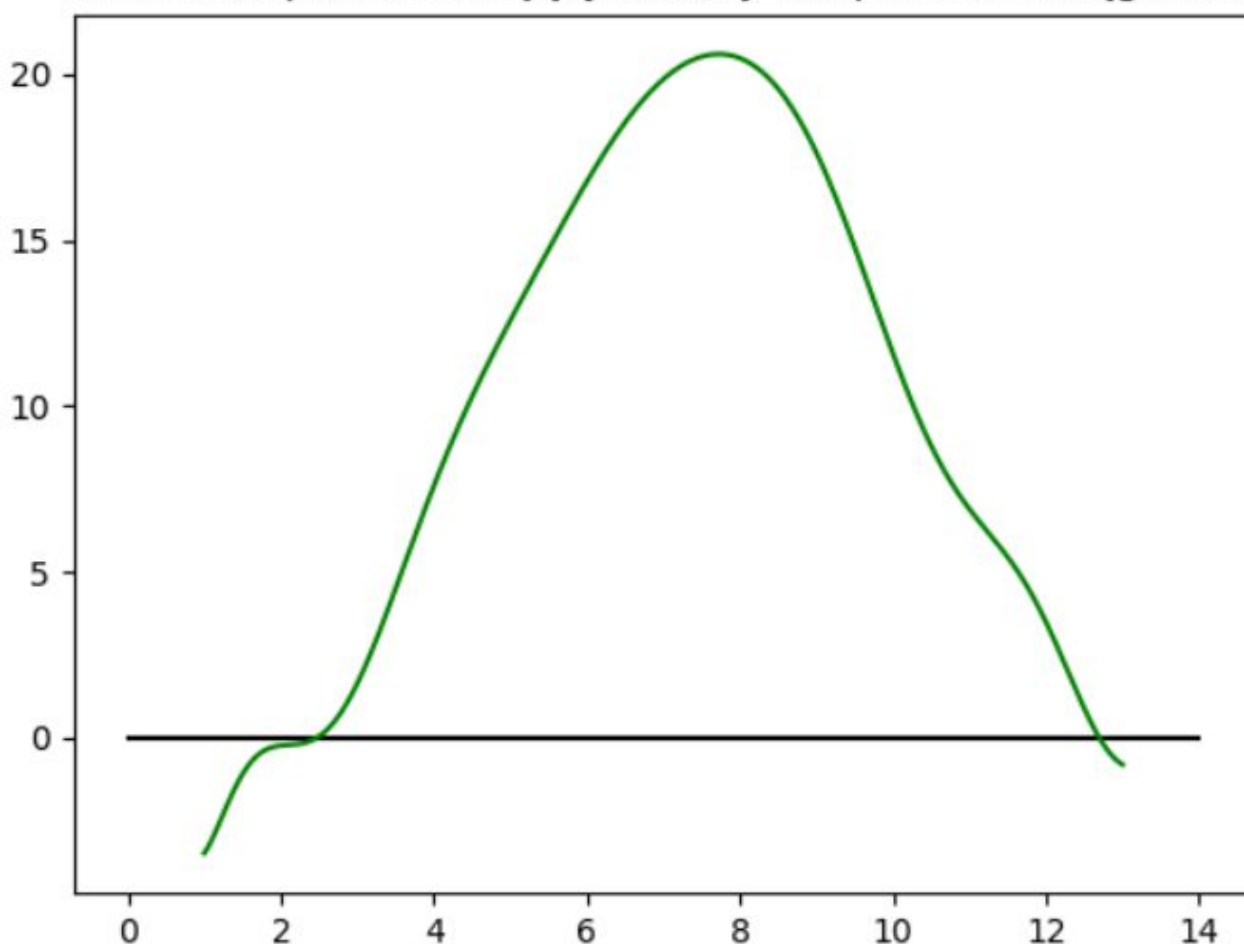
Jak widać na powyższym wykresie, nie udało się uniknąć Efektu Rungego. Jednakże nie wpłynęło to w znaczący sposób, na badany przedział. Linia dotycząca kształtowania się temperatury w Krakowie (zielona) jest na tyle daleko od krańców przedziału, że jest pozbawiona nadmiernych wahań. W związku z tym, właśnie na podstawie tego wielomianu były dokonywane dalsze obliczenia.

Kolejne polecenie polegało na znalezieniu dni, w których średnie temperatury były dodatnie oraz w których były ujemne. Na podstawie obserwacji wykresu nr. 9 znalezione zostały dwa przedziały, w których wykres funkcji przecina oś X co oznacza zmianę temperatury z dodatniej na ujemną lub na odwrót. Są to zakresy $[2, 2.5]$ oraz $[12.5, 13]$. W tym pierwszym temperatura z ujemnej zmienia się na dodatnią. W tym drugim temperatura z dodatniej zmienia się na ujemną. Przy użyciu metody stycznych zawartej w klasie "NRMethod" oraz przy założeniu, że poszukiwany jest wynik z dokładnością 10^{-5} wyliczone zostały następujące przybliżenia:

Przedział, w którym szukane jest x	$[2, 2.5]$	$[12.5, 13]$
Iteracja nr. 1	2.5	13
Iteracja nr. 2	2.474420360131563	12.398113716429318
Iteracja nr. 3	2.4730263130632384	12.66235591094808
Iteracja nr. 4	2.4730222448186963	12.692389378119941
Iteracja nr. 5	-	12.693179083933485
Iteracja nr. 5	-	12.693179184882954

Tabela 1. przedstawiająca kolejne przybliżenia szukanego x dla którego $y=0$

Wielomian przedstawiający zmiany temperatur w ciągu roku

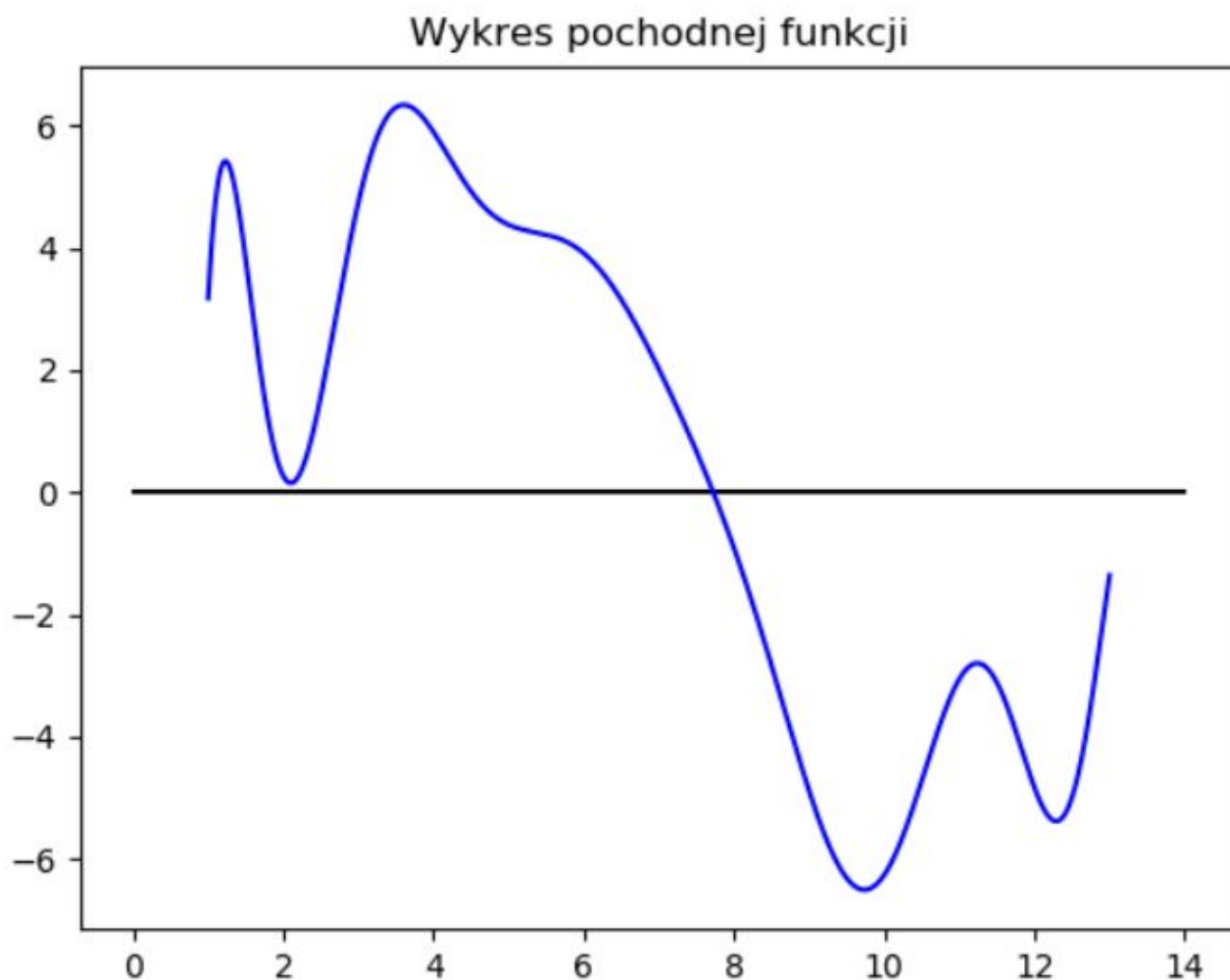


Wykres 9. przedstawiający zmiany temperatur na bazie wyznaczonego wcześniej wielomianu. Nazwy miesięcy zostały zamienione za wartości numeryczne zgodnie z przyjętymi na początku założeniami.

Na bazie uzyskanych wyników oraz analizy wykresu (Wykres 9.) można było wyciągnąć następujące wnioski:

W dniach od 01.01 do 15.02 średnia temperatura była ujemna. Następnie średnia temperatura aż do dnia 21.12 była dodatnia. Po wspomnianej dacie, średnia temperatura już do końca roku była ujemna.

Kolejny etap zadania polegał na znalezieniu najcieplejszego oraz najzimniejszego dnia w roku z wykorzystaniem rachunku różniczkowego. Z wykorzystaniem odpowiedniej metody w klasie "Polynomial" wyznaczona została pochodna przyjętego wielomianu (Wykres 10.), następnie przy użyciu metody stycznych szukane było jej ekstremum.



Wykres 10. przedstawiający pochodną, przyjętego w poprzednich etapach zadania, wielomianu.

Znalezione ekstremum, jako iż zmienia wartość z dodatniej na ujemną okazuje się być maksimum lokalnym. Na bazie znalezionej maksimum można było oszacować, że najcieplejszy dzień w roku przypadał na 22 lipca.

Jako że funkcja nie posiada minimum lokalnego w badanym zakresie, sprawdzone zostały wartości na początku oraz na końcu przedziału. Okazało się, że najzimniejszy dzień przypadał na początek wykresu, czyli na dzień 1 stycznia. Sprawdza się to z wnioskami jakie można wyciągnąć z analizy wykresu nr 9.

Ostatnie z poleceń dotyczyło znalezienia średniej temperatury w ciągu roku przy użyciu średniej całkowitej. Do obliczenia samej całki, tak jak jest to podane w założeniach, użyta została metoda 3% Newtona zaimplementowana w klasie "Integral". Najpierw, w celu wyznaczenia najbardziej optymalnego parametru n zostały przeprowadzone testy sprawdzające wyniki obliczonej całki dla badanego wielomianu w zakresie $[1, 13]$. Wyniki te kształtowały się następująco:

Wartość n	Wartość całki oznaczonej
1	129.551780565727
2	113.73902893328798
3	115.86962875250586
4	116.81353691219121
5	117.02877979028608
6	116.91846584234213
7	116.82375419910649
8	116.76614348319272
9	116.73243773270111
10	116.71233973654208
11	116.69995526753746
12	116.6920548136146
13	116.6868492389372
14	116.68331698121592
15	116.68085574500174
16	116.67909968562742
17	116.67782188100551
18	116.67687297102981
19	116.67615744577617
20	116.67561031935826

Tabela 2. przedstawiająca różne wartości całki oznaczonej przy zmiennym parametrze n

Można zauważyć, że dla $n = 6$ wartość całki mniej więcej się normuje. W związku z tym właśnie dla takiej wartości parametru n obliczona została średnia całkowa, którą można interpretować jako średnią dobową temperaturę w roku w Krakowie. Średnia ta została obliczona za pomocą odpowiedniej metody z klasy "Integral" i jej wartość wynosi ok. $9,74^{\circ}\text{C}$.

5. Podsumowanie

Przeprowadzone eksperymenty w pewnym stopniu pozwalają oszacować otaczającą nas rzeczywistość na bazie empirycznego zestawu danych. Pokazują one również zastosowanie twierdzeń matematycznych z użyciem narzędzi programistycznych w realnym życiu. Oczywiście ze względu na uproszczenie całego modelu na potrzeby tego zadania na wyniki należy patrzeć z pewnym marginesem błędu, jednakże są one na tyle zbliżone do oczekiwanych wartości, że nie budzą sprzeciwu intuicji w kontekście badania średnich dobowych temperatur w Krakowie.