Тригонометрия

Основное тригонометрическое тождество

Определение. Пусть в декартовой системе координат на единичной окружности с центром в начале отсчета отмечена точка X. Пусть луч OX получается из положительного направления оси абсцисс поворотом на x радиан против часовой стрелки. Тогда абсцисса точки X называется *косинусом* числа x (обозначается $\cos x$), а ордината точки X называется *синусом* числа x (обозначается $\sin x$).

Из определения сразу следует

Основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Функции *тангенс* и *котангенс* определяются следующим образом:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Поделим основное тригонометрическое тождество сначала на $\cos^2 x$, а потом на $\sin^2 x$, и получим следующие формулы:

Формулы с тригонометрической единицей:

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad \operatorname{ctg}^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Из определения тангенса и котангенса следует еще одно важное тождество:

Произведение тангенса и котангенса равно

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1.$$

Формулы суммы (разности) аргумента

Для синуса и косинуса верны **формулы суммы (разности) аргумента**:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta.$$

Заметьте! Во второй формуле знак $\mp$ означает, что если в левой части выбран знак "плюс", то в правой стоит знак "минус", и наоборот.

Используя эти формулы, легко получить, например, формулу для тангенса суммы:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

поделим числитель и знаменатель последней дроби на выражение $\cos\alpha\cos\beta$:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Аналогично получим оставшиеся формулы для тангенса и котангенса:

Формулы суммы (разности) аргумента для тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta}.$$

Формулы двойного и тройного угла

Из формул суммы аргумента легко получить формулы двойного угла – нужно все лишь вместо β подставить α. Например, для синуса:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Аналогично для косинуса:

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

С учетом основного тригонометрического тождества формулу для косинуса удобно записать еще так:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$$

Итого:

Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \qquad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Зная формулы двойного угла, легко получить формулы тройного угла. Сделаем это для косинуса:

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) &= \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha = \\ &= \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - \sin\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha\sin^2\alpha\end{aligned}$$

Заменим $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ и получим

$$\cos 3\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Аналогично получаются оставшиеся

Формулы тройного угла:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha, \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{3\operatorname{tg}^2\alpha - 1}, \qquad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}.$$

Попробуй сам! Используя этот подход, найдите формулы для $\sin 4\alpha$, $\cos 5\alpha$ и $\operatorname{tg} 6\alpha$.

Формулы понижения степени

Рассмотрим две формулы, полученные ранее:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Выразим квадраты косинуса и синуса через косинус двойного угла и получим

Формулы понижения степени:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

Из этих формул получается формула понижения степени для тангенса (и, соответственно, для котангенса):

Формула понижения степени для тангенса:

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}.$$

Попробуй сам! Найдите формулы понижения степени для третих степеней: $\sin^3\alpha$, $\cos^3\alpha$ и $\operatorname{tg}^3\alpha$.

Формулы преобразования произведения функций

Рассмотрим две доказанные ранее формулы:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Сложим формулы и поделим полученное выражение пополам, получим

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}.$$

Теперь вычтем вторую формулу из первой, поделим пополам и получим

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

Аналогично получим формулу для $\sin\alpha\cos\beta$. Итого имеем

Формулы преобразования произведения функций:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2},$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2},$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

Попробуй сам! Докажите формулу

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}.$$

Формулы преобразования суммы (разности) функций

Рассмотрим формулу

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}.$$

Сделаем замену: пусть $\alpha+\beta = x$, $\alpha-\beta = y$. Тогда $\alpha = (x+y)/2$, $\beta = (x-y)/2$. Домножив исходную формулу на 2, получим

$$\cos x + \cos y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Аналогично получаем

Формулы преобразования суммы (разности) функций:

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),$$
$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

Попробуй сам! Докажите формулу

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$