VIII. Data Compression (B)

◎ 8-A Differential Coding for DC Terms, Zigzag for AC Terms

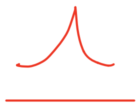
這兩者可視為 JPEG Huffman coding 的前置工作

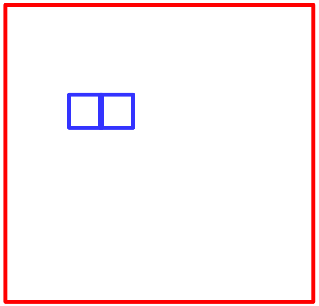
Differential Coding (差分編碼)

If the DC term of the $(i, j)^{\text{th}}$ block is denoted by $DC[i, j]$, then

encode $DC[i, j] - DC[i, j\text{-}1]$ ≒ 0

Instead of $DC[i, j]$





(也是運用 space domain 上的一致性)

Zigzag scanning

AC terms

將 2D 的 8x8 DCT outputs 變成 1D 的型態

但按照 “zigzag” 的順序 (能量可能較大的在前面)

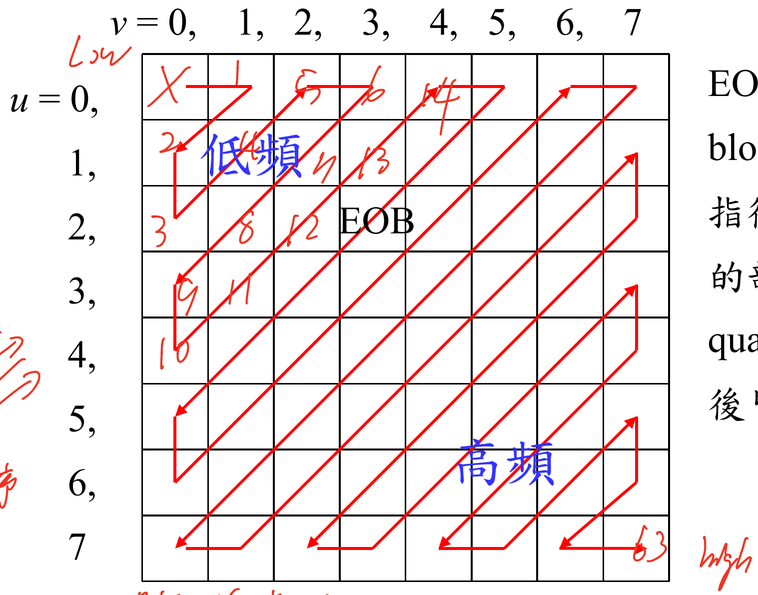
8x8 DCT output:

$C[u, v]$

$u = 0, 1, \ldots, 7$

$v = 0, 1, \ldots, 7$

排序



對角線處理

EOB (end of block):

指後面的高頻的部分經過 quantization 之後皆為0

(也是運用 frequency domain 上的一致性)

◉ 8-B Lossless Coding

Lossless Coding: The original data can be perfectly recovered

机率越大 Byte 越小

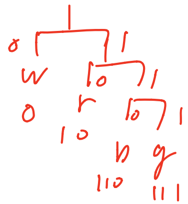
Example:

$P(W) = 60\%$

$P(R) = 30\%$

$P(B) = 5\%$

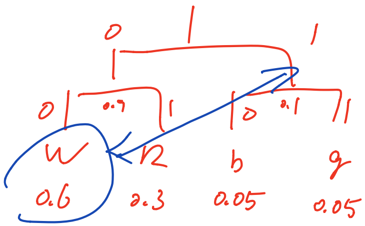
$P(G) = 5\%$



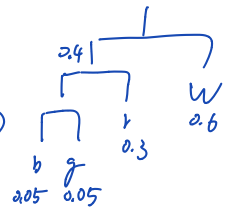
$1 \times 0.6 + 2 \times 0.3 + 3 \times (0.05 + 0.05)$

$= 1.5$

- direct coding method
- Huffman coding
- Arithmetic coding
- Shannon–Fano Coding, Golomb coding, Lempel–Ziv, ...



$\Rightarrow$



◎ 8-C Lossless Coding: Huffman Coding

- **Huffman Coding 的編碼原則: (Greedy Algorithm)**

(1) 所有的碼皆在 Coding Tree 的端點，再下去沒有分枝
(滿足一致解碼和瞬間解碼)

(2) 機率越大的， code length 越短；機率越小的， code length 越長

(3)假設 S_a 是第 L 層的 node，S_b是第 L+1 層的 node

則 $P(S_a) \geq P(S_b)$ 必需滿足

不滿足以上的條件則往上推一層

原始的編碼方式：

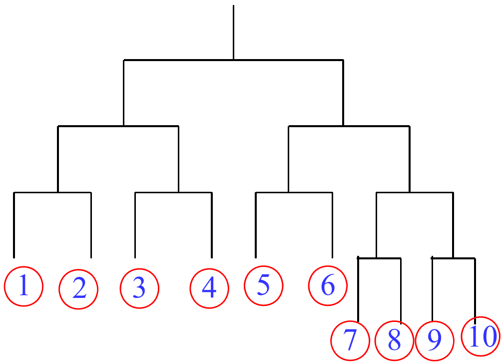
若 data 有 M 個可能的值，使用 k 進位的編碼，
則每一個可能的值使用 floor($\log_k M$) 或 ceil($\log_k M$) 個 bits 來編碼

floor: 無條件捨去

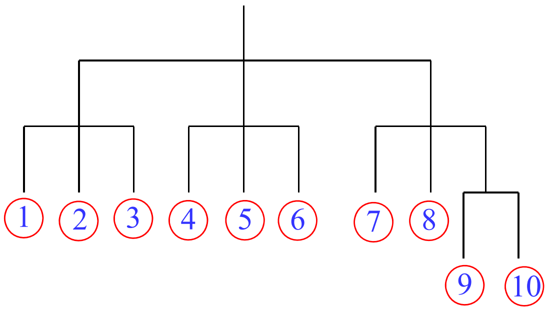
ceil: 無條件進位

Example:

若有 8 個可能的值，在2進位的情形下，需要 3 個 bits



若有 10 個可能的值，在3進位的情形下，需要 2 個或 3 個 bits



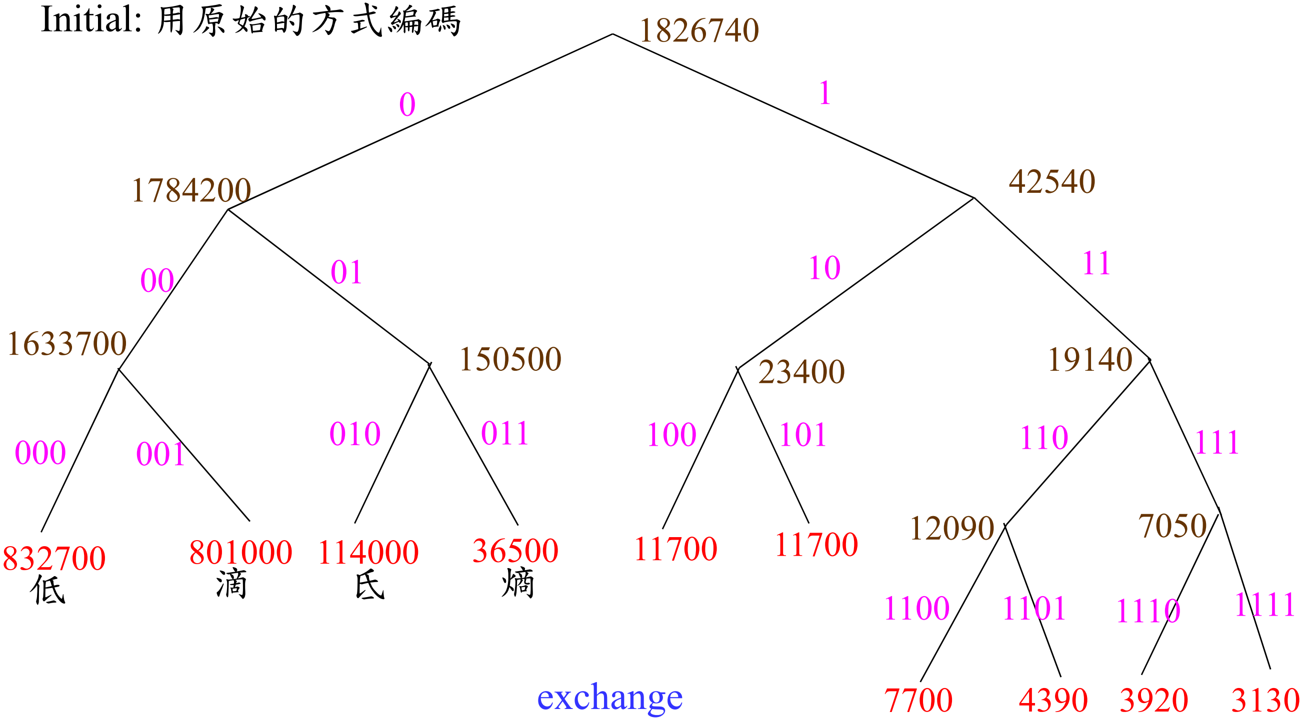
Example:

1 低	2 滴	3 氐	7 羝	8 鞮
832700	801000	114000	7700	4390
9 磾	5 衹	6 菂	10 墒	4 熵
3920	11700	11700	3130	36500

他們2進位的Huffman Code 該如何編

Huffman coding

Initial: 用原始的方式編碼



exchange

average code length = 3.0105

The rules of the Huffman coding process.

(1) Process the case with lower probability first

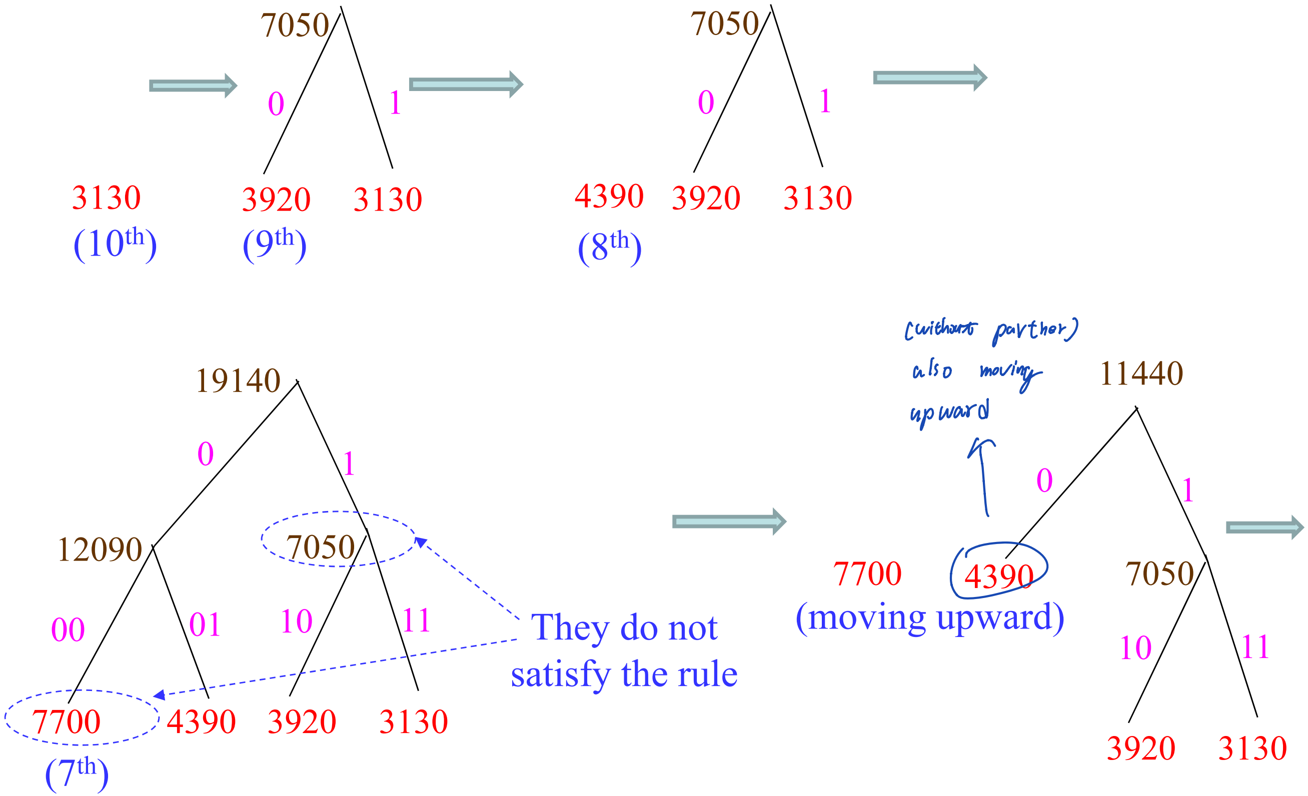
(2) If the node in the lower layer has <u>higher probability</u>, then <u>move it upward</u>.

(3) For the node to be moved upward, if it has a partner, then <u>move the partner</u>, too.

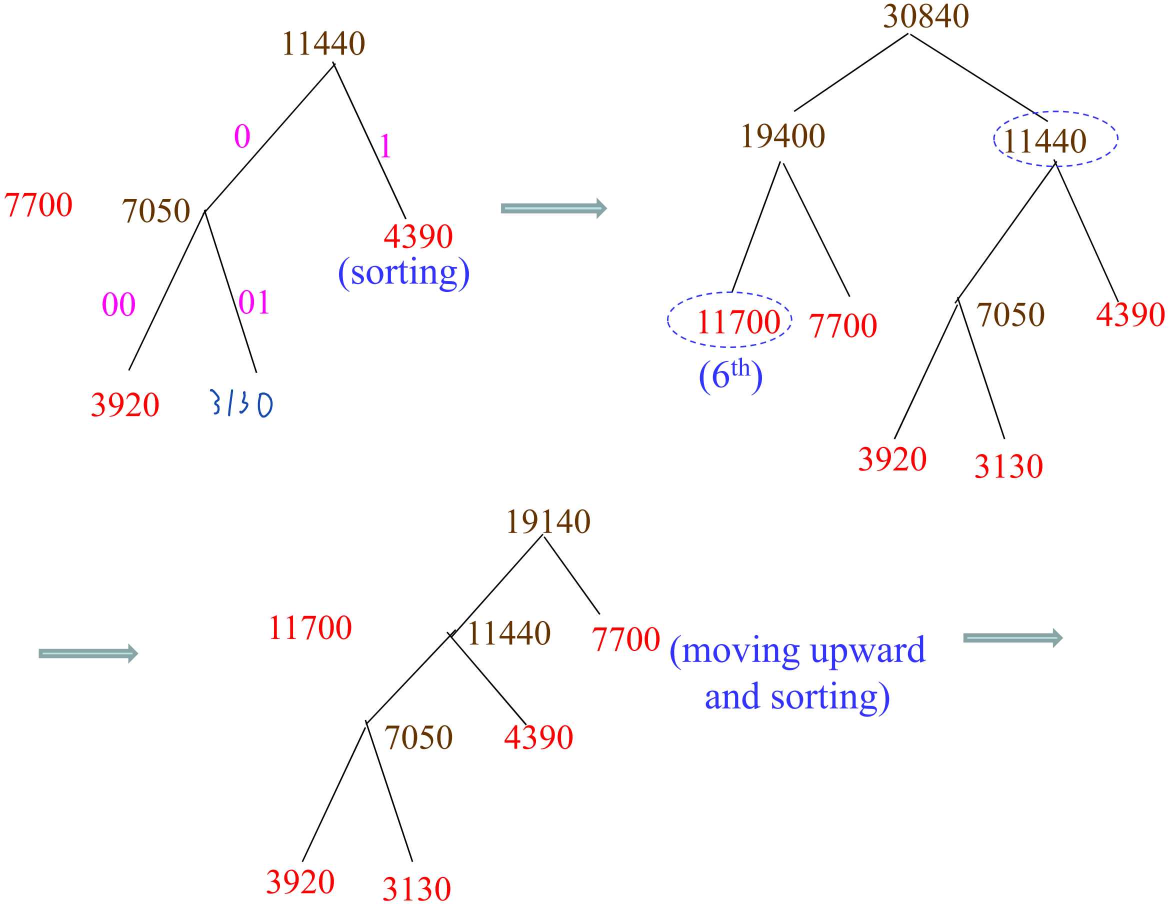
(4) <u>Re-sort</u> after moving upward.

Huffman coding

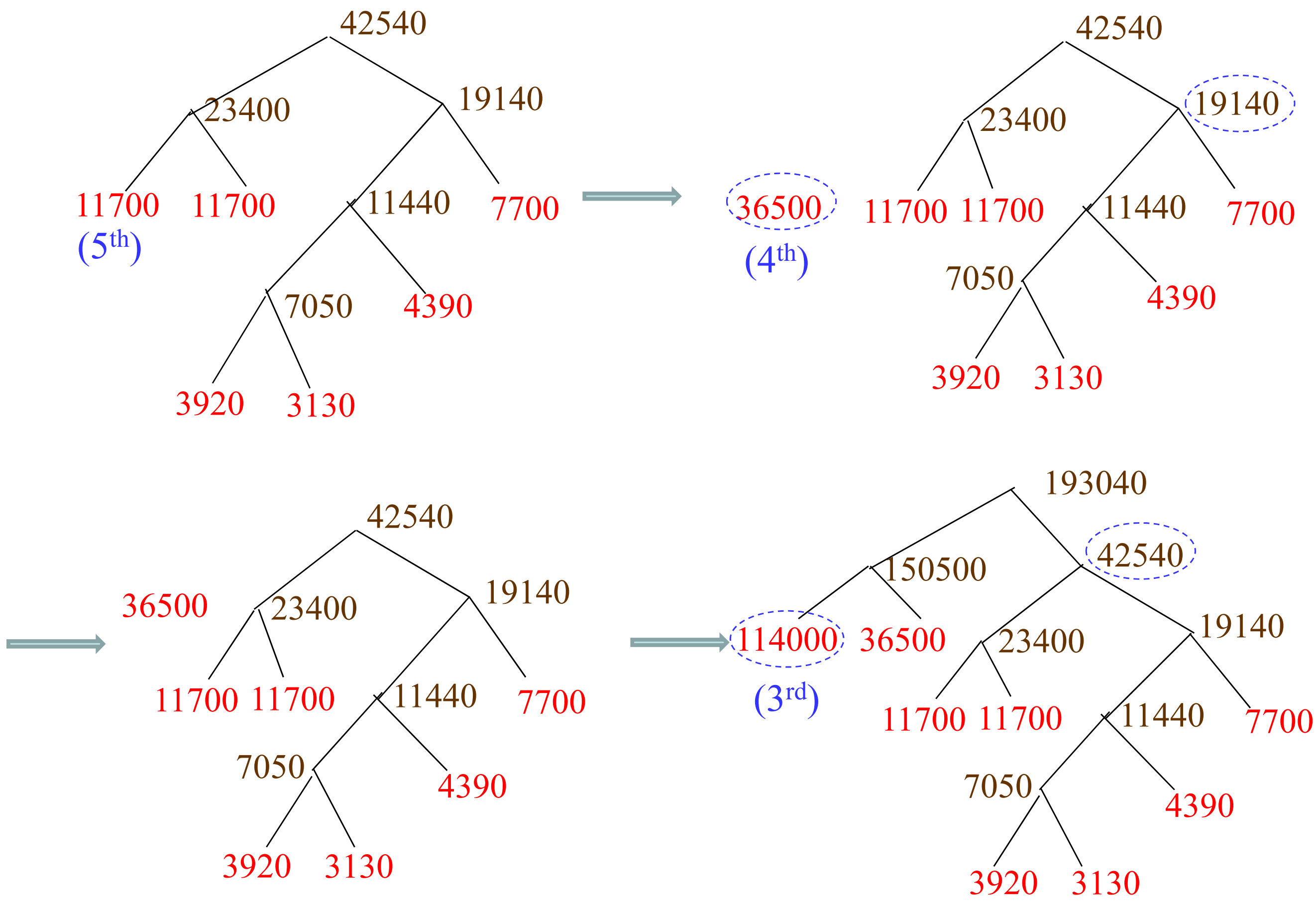
由機率低的開始編碼，一步一步加進機率高的



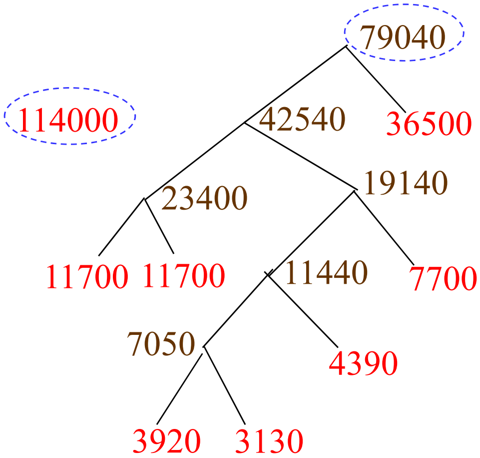
Huffman coding



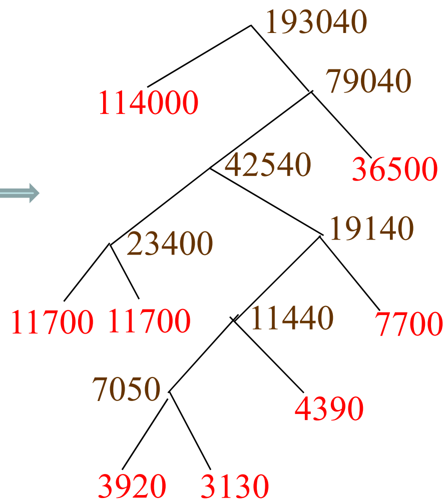
Huffman coding



Huffman coding

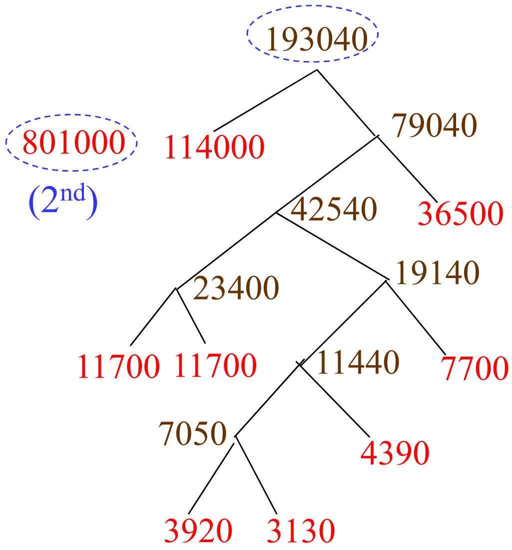


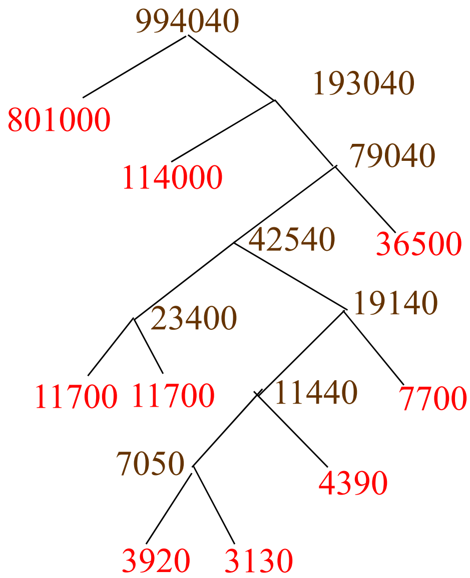
(moving upward and sorting)



(moving upward again)

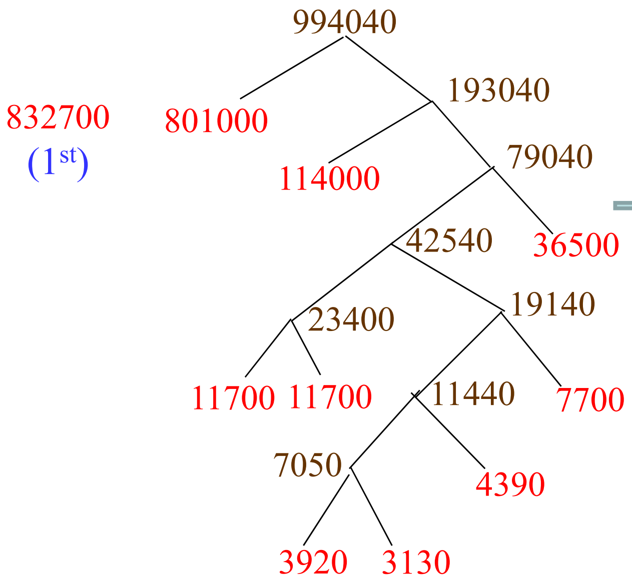
Huffman coding



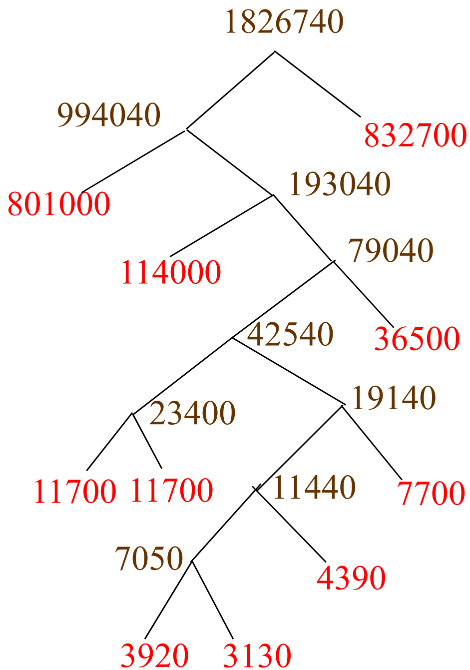


(moving upward)

Huffman coding

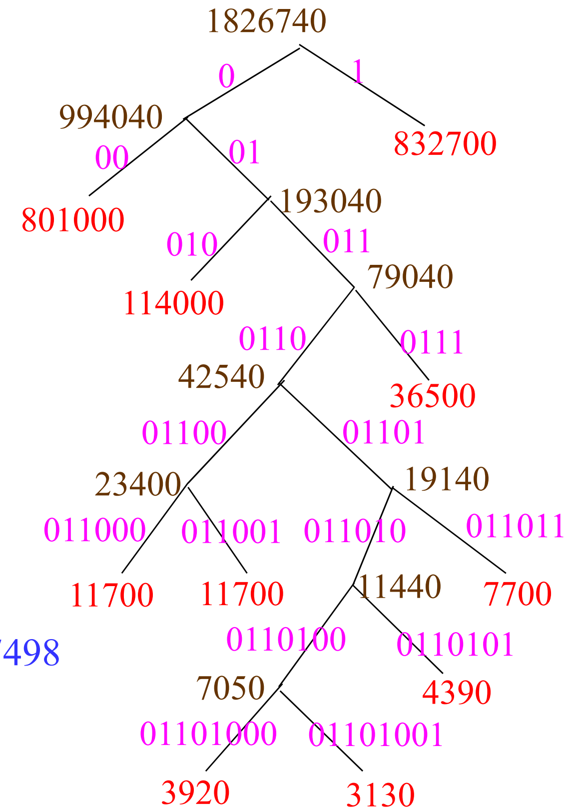


(no paring)



(moving upward and sorting)

Huffman coding by the greedy algorithm



average code length = 1.7498

entropy/log(2) = 1.5830

思考： 郵遞區號是多少進位的編碼？

電話號碼的區域碼是多少進位的編碼？

中文輸入法是多少進位的編碼？

如何用 Huffman coding 來處理類似問題？

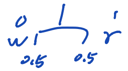
◉ 8-D Entropy and Coding Length

- Entropy 熵；亂度 (Information Theory)

註：此處 log 即 ln
和 $\log_{10}$ 不同

$$entropy = \sum_{j=1}^{J} P\left(S_j\right)\log\frac{1}{P\left(S_j\right)}$$

P: probability



$P(\mathrm{S}_0) = 1$, entropy = 0

$0.5\log 2 + 0.5\log 2 = \log 2 = 0.6931$　　$\frac{\log 2}{\log 2} = 1$

$P(\mathrm{S}_0) = P(\mathrm{S}_1) = 0.5$, entropy = 0.6931

$P(\mathrm{S}_0) = P(\mathrm{S}_1) = P(\mathrm{S}_2) = P(\mathrm{S}_3) = P(\mathrm{S}_4) = 1/5$, entropy = 1.6094

$P(\mathrm{S}_0) = P(\mathrm{S}_1) = P(\mathrm{S}_2) = P(\mathrm{S}_3) = 0.1$, $P(\mathrm{S}_4) = 0.6$, entropy = 1.2275

同樣是有 5 種組合，機率分佈越集中，亂度越少

If $P(S_0) = P(S_1) = P(S_2) = P(S_3) = 0.25$

entropy $= (0.25\log 4) \times 4 = \log 4$

lower bound of coding length $\frac{\log 4}{\log 2} = 2$

• Huffman Coding 的平均長度

$$mean(L)=\sum_{j=1}^{J}P(S_j)L(S_j)$$ $P(S_j)$: S_j 發生的機率， $L(S_j)$: S_j 的編碼長度

• **Shannon 編碼定理：**

平均編碼長度

$$\frac{entropy}{\log k}\le mean(L)\le\frac{entropy}{\log k}+1$$ 若使用 k 進位的編碼

• Huffman Coding 的 total coding length $b=mean(L)N$ N: data length

$$\boxed{ceil\left(N\frac{entropy}{\log k}\right)\le b\le floor\left(N\frac{entropy}{\log k}+N\right)}$$

都和 entropy 有密切關係

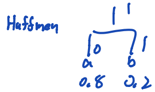
ceil: 無條件進位, floor: 無條件捨去

Entropy: 估計 coding length 的重要工具

$$N \frac{entropy}{\log k} \cong \text{bit length}$$

⦿ 8-E Arithmetic Coding

If $P(a)=0.8$, $P(b)=0.2$



• Arithmetic Coding (算術編碼)

Huffman coding 是將每一筆資料分開編碼

Arithmetic coding 則是將多筆資料一起編碼，因此壓縮效率比 Huffman coding 更高，近年來的資料壓縮技術大多使用 arithmetic coding

K. Sayood, *Introduction to Data Compression*, Chapter 4: Arithmetic coding, 3rd ed., Amsterdam, Elsevier, 2006

編碼

若 data X 有 M 個可能的值 ($X[i]$ = 1, 2, …, or M)，使用 k 進位的編碼，且

P_n : the probability of $x = n$ (from prediction)

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{j=1}^{n} P_j$$

現在要對 data X 做編碼，假設 length(X) = N

Algorithm for arithmetic encoding

initiation: $lower = S_{X[1]-1}$ $\qquad$ $upper = S_{X[1]}$

for $i = 2 : N$

$$lower = lower + S_{X[i]-1} \times (upper - lower)$$

$$upper = lower + S_{X[i]} \times (upper - lower)$$

end

(continue)…

Suppose that $\frac{14}{32}$ $\frac{15}{32}$

$$lower \le C \cdot k^{-b} < (C+1) \cdot k^{-b} \le upper$$

where C and b are integers (b is as small as possible), then the data X can be encoded by

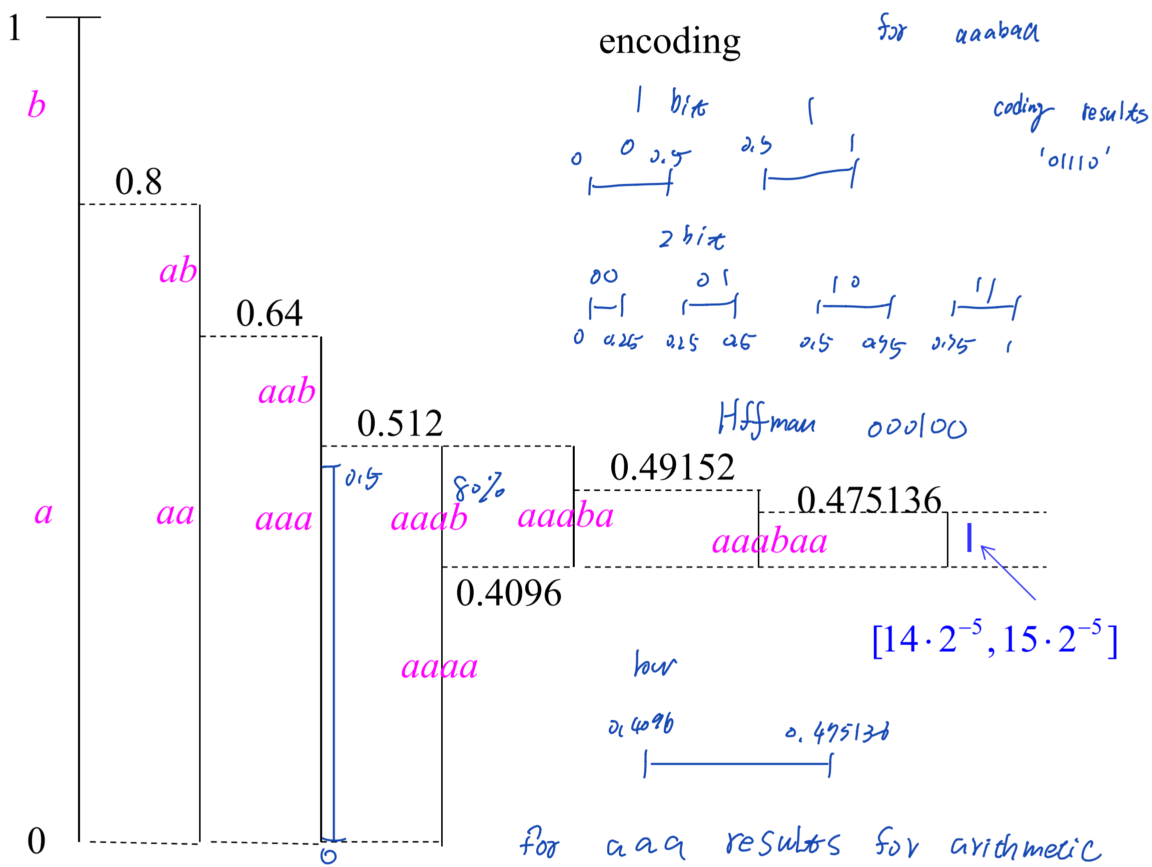
$$C_{(k,b)}$$

where $C_{(k,b)}$ means that using k-ary (k 進位) and b bits to express C.
14 2 5

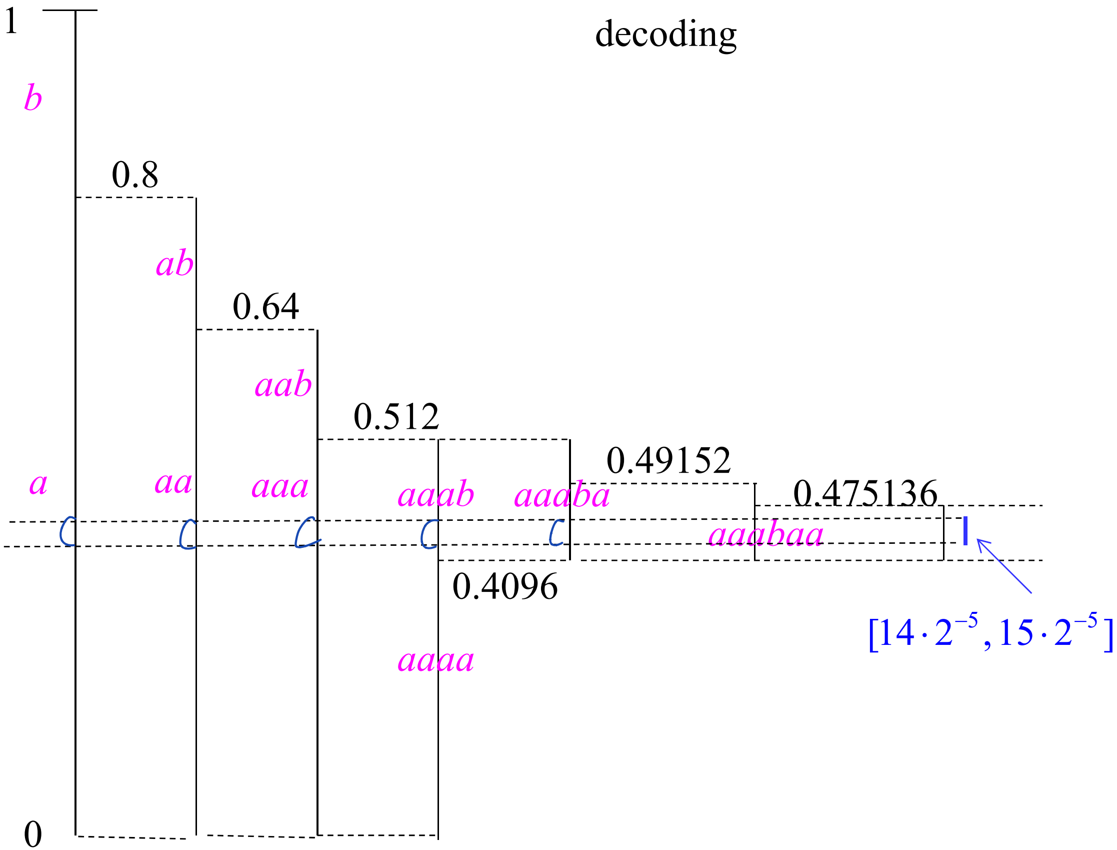
01110

(註： Arithmetic coding 還有其他不同的方式，以上是使用其中一個較簡單的 range encoding 的方式)

encoding for aaabaa



If the input is b arithmetic coding results decoding



1
b
0.8
ab
0.64
aab
0.512
a
aa
aaa
aaab
aaaba
0.49152
0.475136
aaabaa
0.4096
aaaa
0
$[14\cdot 2^{-5}, 15\cdot 2^{-5}]$

Example:

假設要對 X 來做二進位 $(k=2)$ 的編碼

且經由事先的估計，$X[i]=a$ 的機率為 0.8, $X[i]=b$ 的機率為 0.2

$P_1=0.8,\quad P_2=0.2,\qquad S_0=0,\quad S_1=0.8,\quad S_2=1$

若實際上輸入的資料為 $X=a\ a\ a\ b\ a\ a$

Initiation $(X[1]=a)$: $lower=0,\quad upper=0.8$

When $i=2\ \ (X[2]=a)$: $lower=0,\quad upper=0.64$

When $i=3\ \ (X[3]=a)$: $lower=0,\quad upper=0.512$

When $i=4\ \ (X[4]=b)$: $lower=0.4096,\quad upper=0.512$

When $i=5\ \ (X[5]=a)$: $lower=0.4096,\quad upper=0.49152$

When $i=6\ \ (X[6]=a)$: $lower=0.4096,\quad upper=0.475136$

由於 $\quad lower = 0.4096, \quad upper = 0.475136$

$$lower \le 14 \cdot 2^{-5} < 15 \cdot 2^{-5} \le upper$$

$$0.4375 \qquad 0.46875$$

所以編碼的結果為

$$14_{(2,5)} = 01110$$

2 進位 5 個 bits

解碼

假設編碼的結果為 Y, length(Y) = b

其他的假設，和編碼 (see page 292) 相同　　使用 k 進位的編碼

Algorithm for arithmetic decoding

initiation: $lower = 0$　　$upper = 1$　　$j = 1$

$lower1 = 0$　　$upper1 = 1$

for i = 1 : N　　% loop 1

check = 1;

while check = 1　　% loop 2

if there exists an n such that

$lower + (upper\text{-}lower)S_{n\text{-}1} \leqq$ lower 1　and

$lower + (upper\text{-}lower)S_{n} \geqq$ upper 1　are both satisfied,

then

check = 0;

(continue)....

```
        else
            upper1 = lower1 + (Y[j]+1)k^(-j)
            lower1 = lower1 + Y[j]k^(-j)
            j = j+1
        end
    end                          % end of loop 2
    X(i) = n;
    lower = lower + (upper-lower)S_(n-1)
    upper = lower + (upper-lower)S_n
end                              % end of loop 1
```

Coding Length for Arithmetic Coding

假設 P_n 是預測的 $X[i]=n$ 的機率

Q_n 是實際上的 $X[i]=n$ 的機率

(也就是說，若 length(X) = N, X 當中會有 $Q_n N$ 個 elements 等於 n)

則

$$upper - lower = \prod_{m=1}^{M} P_m^{Q_m N}$$

$\prod$: 連乘符號

另一方面，由於 (from page 293)

$$k^{-b} \le upper - lower < (2k)k^{-b}$$

$$-\log_k\left(upper - lower\right) \le b < -\log_k\left(upper - lower\right) + 1 + \log_k 2$$

$$ceil\left(-N\sum_{m=1}^{M} Q_m \log_k P_m\right) \le b \le floor\left(-N\sum_{m=1}^{M} Q_m \log_k P_m + \log_k 2\right) + 1$$

$$ceil\left(-N\sum_{m=1}^{M} Q_m \log_k P_m\right) \le b \le floor\left(-N\sum_{m=1}^{M} Q_m \log_k P_m + \log_k 2\right) + 1$$

在機率的預測完全準確的情形下， $Q_m = P_m$

Total coding length b 的範圍是

$$ceil\left(-N\sum_{m=1}^{M} P_m \log_k P_m\right) \le b \le floor\left(-N\sum_{m=1}^{M} P_m \log_k P_m + \log_k 2\right) + 1$$

The low bound is the same   The upper bound ≌ lower bound + 2 (by Binary)

$$\boxed{ceil\left(N \cdot \frac{entropy}{\log k}\right) \le b \le floor\left(N \cdot \frac{entropy}{\log k} + \log_k 2 + 1\right)}$$

Arithmetic coding 的 total coding length 的上限比 Huffman coding 更低

• **Shannon 編碼定理：**

平均編碼長度

$$\frac{entropy}{\log k} \le mean(L) \le \frac{entropy}{\log k} + 1$$ 若使用 k 進位的編碼

• Huffman Coding 的 total coding length $b = mean(L)N$ N: data length

$$\boxed{ceil\left(N\frac{entropy}{\log k}\right) \le b \le floor\left(N\frac{entropy}{\log k} + N\right)}$$

都和 entropy 有密切關係

ceil: 無條件進位, floor: 無條件捨去

⊙ 8-F MPEG

MPEG： 動態影像編碼的國際標準　　全名： Moving Picture Experts Group

MPEG standard： http://www.iso.org/iso/prods-services/popstds/mpeg.html

MPEG 官方網站： http://mpeg.chiariglione.org/

人類的視覺暫留： 1/24 second

一個動態影像，每秒有 30個或 60個畫格 (frames)

例子：

Pepsi 的廣告

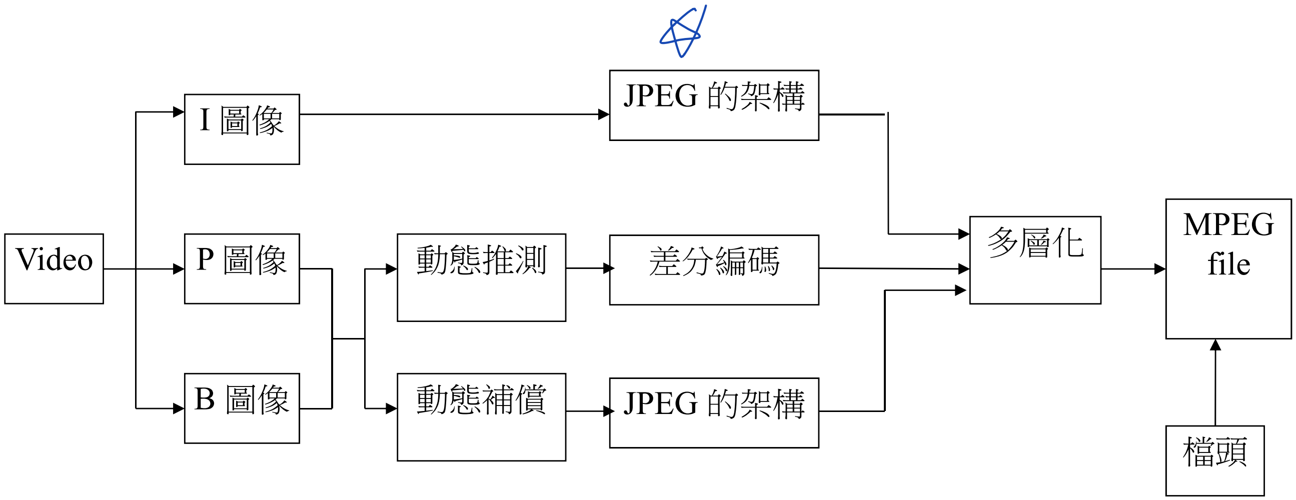
Size: 160×120 Time: 29 sec 一秒 30 個 frames

若不作壓縮： $160 \times 120 \times 29 \times 30 \times 3 = 50112000 = 47.79$ M bytes。

經過 MPEG壓縮： $1140740 = 1.09$ M bytes。

只有原來的 2.276%。

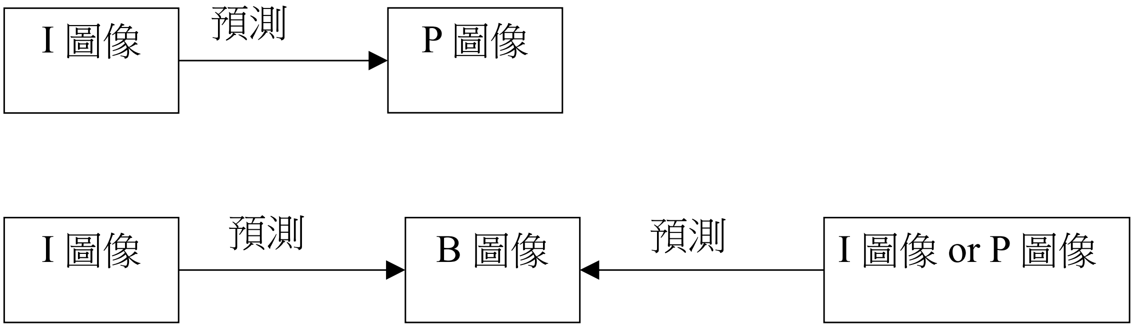
• Flowchart of MPEG Compression



I 圖像 (Intra-coded picture): 作為參考的畫格

P 圖像 (Predictive-coded picture): 由之前的畫格來做預測

B 圖像 (Bi-directionally predictive-coded picture): 由之前及之後的畫格來做預測



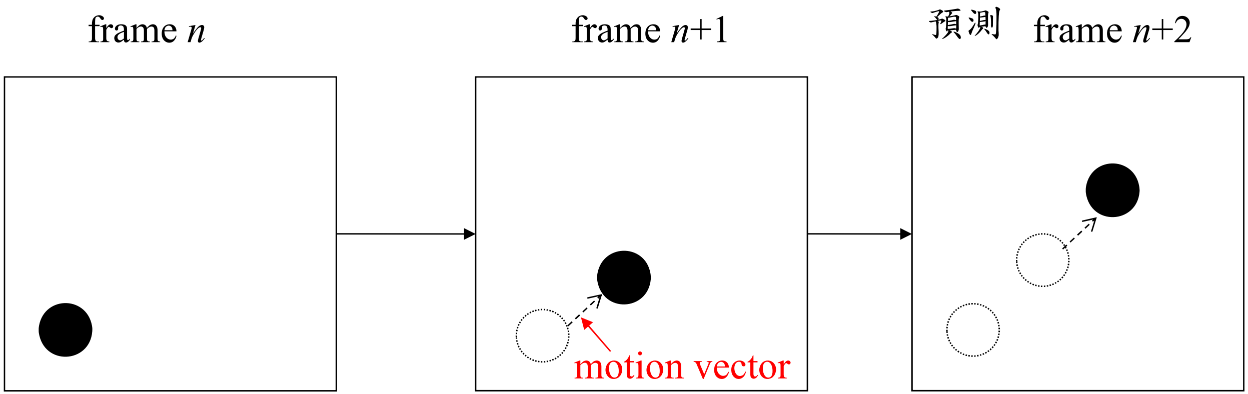
- 動態影像之編碼

  原理：不同時間，同一個 pixel 之間的相關度通常極高

  只需對有移動的 objects 記錄 “motion vector”

- 動態補償 (Motion Compensation)

  時間相近的影像，彼此間的相關度極高



(bidirectional prediction)

$F[m, n, t]$: 時間為 t的影像

如何由 $F[m, n, t]$， $F[m, n, t+\Delta]$ 來預測 $F[m, n, t+2\Delta]$?

(1) 移動向量 $V_x(m, n), V_y(m, n)$

(2) 預測 $F[m, n, t+2\Delta]$ ：

$$F_p[m, n, t+2\Delta] = F[m - V_x(m, n), n - V_x(m, n), t+\Delta]$$

(3) 計算 「預測誤差」

$$E[m, n, t+2\Delta] = F[m, n, t+2\Delta] - F_p[m, n, t+2\Delta]$$

對預測誤差 $E[m, n, t+2\Delta]$ 做 編碼

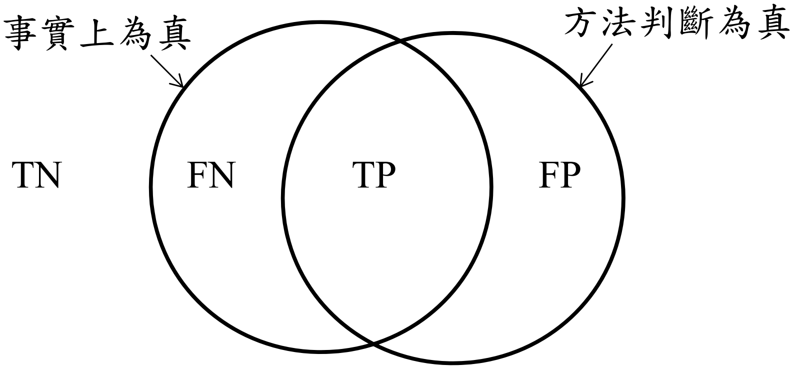
⦿ 8-G Data Compression 未來發展的方向

Two important issues:

Q1: How to further improve the compression rate

Q2: How to develop a compression algorithm whose compression rate is acceptable and the buffer size / hardware cost is limited

附錄八：量測方法的精確度常用的指標



TP (true positive): 事實上為真，而且被我們的方法判斷為真的情形

FN (false negative): 事實上為真，卻未我們的方法被判斷為真的情形

FP (false positive): 事實上不為真，卻被我們的方法誤判為真的情形

TN (true negative): 事實上不為真，而且被我們的方法判斷成不為真的情形

$$precision = \frac{TP}{TP+FP} = +P \quad \text{(positive prediction rate)}$$

$$recall = \frac{TP}{TP+FN}$$

$$specificity = \frac{TN}{TN+FP} \qquad sensitivity = \frac{TP}{TP+FN} = recall$$

以抓犯人為例，TP 是有罪而且被抓到的情形，FP是無罪但被誤抓的情形，FN 是有罪但沒被抓到的情形，TN 是無罪且未被誤逮的情形

寧可錯抓一百，也不可放過一個

$\longrightarrow$ recall 高，但 precision 低

寧可錯放一百，也不可冤枉一個

$\longrightarrow$ precision 高，但 recall 低

Accuracy $$\frac{TP+TN}{TP+FP+TN+FN}$$

Detection error rate $$\frac{FP+FN}{TP+FN}$$

F-score $$2\frac{precision \times recall}{precision + recall}$$

General form of the F-score $$\frac{(1+\beta^2)\, precision \times recall}{\beta^2\, precision + recall}$$