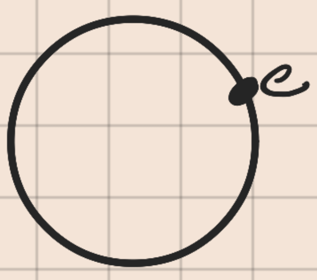
①



א) $H_0 = \frac{L_z^2}{2MR^2}$

$\Rightarrow E_m^{(0)} = \frac{\hbar^2 m^2}{2MR^2}$

ולכן יש ניוון עבור $\pm m$

ב) $H = H_0 - \varepsilon_0 e x$

השדה שבר את הסימטריה לסיבובים במישור xy, אבל זה לא שבר את הסימטריה לשיקוף סביב ציר x ולכן הניוון לא יוסר!

ג) נתחיל מלחשב את ההפרעה בבסיס של H_0 כדי לראות איך היא נראית בבסיס הניוון:

$$\langle m'|V|m\rangle = -\varepsilon_0 e \langle m'|x|m\rangle$$

נצטרך את המצבים העצמיים של L_z בבסיס המקום.

נזכור ש בבסיס המקום $L_z = i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$

אז אם כדי לקבל את הפונקציות העצמיות

$$|m\rangle \propto e^{im\varphi}$$

ופקטור הנרמול יהיה $|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$

$$\Rightarrow \langle m'|V|m\rangle = -\varepsilon_0 e \frac{1}{2\pi}\int e^{-im'\varphi} x e^{im\varphi} d\varphi$$

ונפרק פורייה: $x = R\cos\varphi = R\frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$

$$= -\varepsilon_0 e R \frac{1}{4\pi}\int e^{i(m-m'+1)\varphi} + e^{i(m-m'-1)\varphi} d\varphi$$

$$= -\frac{\varepsilon_0 e R}{2}\left(\delta_{m,m'+1} + \delta_{m,m'-1}\right) = -\varepsilon_0 e R\, \delta_{m,m'\pm1}$$

לכן בבסיס המנוון ההפרעה מלוכסנת (עבור $m=-m'$)

ולכן $\Delta E_m^{(1)} = 0$

למסדר שני:

$$\Delta E_m^{(2)} = \sum_{n\neq 0} \frac{|\langle n^0|V|n_m^{(0)}\rangle|^2}{E_\alpha^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

"נשארו" רק שני איברים עם $m\pm1$

$$= \frac{\left(\frac{\varepsilon_0 e R}{2}\right)^2}{\frac{\hbar^2}{2MR^2}\left(m^2-(m+1)^2\right)} + \frac{''}{''\ \left(m^2-(m-1)^2\right)}$$

$$= \frac{\varepsilon_0^2 e^2 R^2}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2}MR^2}{\hbar^2}\left(\underbrace{\frac{1}{m^2-m^2-2m-1} + \frac{1}{m^2-m^2+2m-1}}\right)$$

$$\frac{1}{-2m-1} + \frac{1}{2m-1}$$

$$\frac{2m-1 + -2m-1}{-(2m+1)(2m-1)}$$

$$\frac{\cancel{2}}{4m^2-1}$$

$$\boxed{\Delta E_m^{(2)} = \frac{\varepsilon_0^2 e^2 M R^4}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{4m^2-1}}$$

ב

א) סימטריה לסיבובים במישור xy, החלפה בין xy,

סיבוב ב-$90°$ (זה נכלל בסיבובים במישור xy).

V שוברת את הסימטריה לסיבוב ב-$90°$,

אך משאירה את הסימטריה להחלפה בין xy.

ב) מכיוון ש-V אינה שוברת את הסימטריה להחלפה

$$|10\rangle \xleftrightarrow{x\leftrightarrow y} |01\rangle$$

ג) בתת המרחב המנוון

$$V = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} |10\rangle & |01\rangle \end{array} \\ \begin{array}{c} \langle 10| \\ \langle 01| \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

נמצא את a:

$$\langle 10|V|01\rangle = \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega$$

ו-V בתת המרחב המלוכסן:

$$V = \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E^{(1)}_{1,\pm} = \pm\frac{1}{2}\lambda\hbar\omega}$$

המצבים העצמיים הם:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|1^{0}_{\alpha}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$$

$$\Rightarrow \langle m_x m_y|V|1^{0}_{\alpha}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle m_x m_y|V|10\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\langle m_x m_y|V|01\rangle$$

בגלל שההבדל בין $|1^{(0)}_{\pm}\rangle$ זה רק המינוס, התיקון יהיה זהה לשניהם. בנוסף את $|10\rangle$ אפשר לקחת רק ל: $|21\rangle$, $\underline{\underline{|01\rangle}}$. אבל $|10\rangle$ במרחב המנוון ולא סוכמים עליו. בנוסף נשים לב ש $\langle 21|V|10\rangle = \langle 12|V|01\rangle$

לכן בסה"כ:

$$\Delta E^{(2)}_{1,\pm} = 2\,\frac{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 21|V|10\rangle\right|^2}{2\hbar\omega - 4\hbar\omega} \qquad \frac{1}{2}\lambda^2\hbar^2\omega^2$$

$$= \boxed{-\frac{1}{4}\lambda^2\hbar\omega}$$

3

$$H = \underbrace{\frac{A}{2}\left[(\bar{S}_p+\bar{S}_e)^2 - S_p^2 - S_e^2\right]}_{H_0}$$

$$+\underbrace{B\left(g_p S_p^z + g_e S_e^z\right)}_{V}$$

הבסיס הלא מופרד הוא סינגלט/טריפלט

והאנר' של H_0:

$$\frac{A\hbar^2}{2}\left[S^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]$$

$$= \frac{A\hbar^2}{2}\left[S^2 - \frac{3}{2}\right] \qquad 2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

$$E_+ = \frac{A\hbar^2}{4}$$

$$E_- = -\frac{3}{4}A\hbar^2$$

$|00\rangle \quad |1\bar{1}\rangle \quad |10\rangle \quad |10\rangle$

$$H_0 = \begin{array}{c|cccc} \langle 00| & E_- & & & \\ \langle 1\bar{1}| & & E_+ & & \\ \langle 10| & & & E_+ & \\ \langle 11| & & & & E_+ \end{array}$$

V לעומת זאת אלכסוני בבסיס המכפלה $|m_p m_e\rangle$.

$$|\uparrow\uparrow\rangle \to \frac{B\hbar}{2}(g_p + g_e)$$

$$|\downarrow\downarrow\rangle \to -\frac{B\hbar}{2}(g_p + g_e)$$

$$|\uparrow\downarrow\rangle \to \frac{B\hbar}{2}(g_p - g_e)$$

$$|\downarrow\uparrow\rangle \to \frac{B\hbar}{2}(-g_p + g_e)$$

מכיוון ששני המצבים $|\uparrow\uparrow\rangle = |11\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle = |1\bar{1}\rangle$

אלכסוניים בשני הבסיסים צריך ללכסן רק 2x2

הבסיס הנפרש ע"י השניים האחרים.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} |\uparrow\downarrow\rangle & |\downarrow\uparrow\rangle \end{array} \\
V = \begin{array}{c} \langle\uparrow\downarrow| \\ \langle\downarrow\uparrow| \end{array} & \begin{array}{cc} b & 0 \\ 0 & -b \end{array}
\end{array}
=
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cc} |10\rangle & |00\rangle \end{array} \\
\begin{array}{c} \langle 10| \\ \langle 00| \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & b \\ b & 0 \end{array}
\end{array}
$$

$$
\Rightarrow V =
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} |00\rangle & |1\bar{1}\rangle & |10\rangle & |11\rangle \end{array} \\
\begin{array}{c} \langle 00| \\ \langle 1\bar{1}| \\ \langle 10| \\ \langle 11| \end{array} & \begin{array}{cccc} & & b_- & \\ & -b_+ & & \\ b_- & & & \\ & & & b_+ \end{array}
\end{array}
$$

אפשר לסדר את זה יותר יפה אם נסדר מחדש את הבסיס

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} |11\rangle & |1\bar{1}\rangle & |10\rangle & |00\rangle \end{array} \\
\begin{array}{c} \langle 11| \\ \langle 1\bar{1}| \\ \langle 10| \\ \langle 00| \end{array} & \begin{array}{cccc} b_+ & & & \\ & -b_+ & & \\ & & 0 & b_- \\ & & b_- & 0 \end{array}
\end{array}
$$

מכיוון שחלק מ-V כבר שלוכסן אפשר מייד לקרוא את התיקונים מסדר ראשון למרות שהרמה מנוון:

$$\Delta E^{(1)}_{1,\pm 1} = \pm b_+ = \pm \frac{B\hbar}{2}(g_p + g_e)$$

ואת השניים האחרים כבר ליכסנו

$$\Delta E^{(1)}_{10} = 0$$

$$\Delta E^{(1)}_{00} = 0$$

מסדר שני:

$$\Delta E^{(2)} = \sum_{m\neq 0} \frac{|\langle m^{(0)}|V|n_\alpha^{(0)}\rangle|^2}{E_m - E_n}$$

נתחיל מיצבי הטריפלט כי להם מתחבר רק

מצב יחיד שלא שייך לבסיס המנוון (00).

$$\Delta E^{(2)}_{1,\pm1} = \frac{|\langle 00|V|11\rangle|^2}{E_- - E_+} = \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle\uparrow\downarrow| - \langle\downarrow\uparrow|\right)V|\uparrow\uparrow\rangle\right|^2}{A\hbar^2} = 0$$

$$\Delta E^{(2)}_{1,0} = \frac{|\langle 00|V|10\rangle|^2}{A\hbar^2} = \frac{b_-^2}{A\hbar^2} = \frac{B^2}{4A}(g_p - g_e)^2$$

$$\frac{1}{2}\left(\langle\uparrow\downarrow| - \langle\downarrow\uparrow|\right)V\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) = b_-$$

באופן דומה נקבל

$$\Delta E^{(2)}_{00} = -\frac{B^2}{4A}(g_p + g_e)^2$$

$$(E_- - E_+)$$

4. חלקיק בעל מסה m נמצא תחת השפעת הפוטנציאל

$$.V(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2\left(x^2+y^2\right), & -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2} \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(הערה: אין צורך לחשב אינטגרלים על הקואורדינטה z – סמנו אותם באות כרצונכם.)

(א) מצאו את רמות האנרגיה של המערכת. מהי אנרגיית רמת היסוד?

(ב) מהן הסימטריות המרחביות הקיימות בבעיה? האם מצב היסוד מקיים את הסימטריות הללו?

(ג) כעת מוסיפים הפרעה $V_1 = \lambda xy\cos(\pi z/L)$. חשבו את התיקון לסדר ראשון ב-λ לאנרגיית מצב היסוד.

א)
$$E_{n_x n_y n} = \hbar\omega(n_x + n_y + 1) + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$$

$$E_{gs} = E_{001} = \hbar\omega + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$$

ב) סימטריה להחלפת x y, סימטריה לשיקופים סביב

ציר z. מצב היסוד הוא $\underbrace{\langle x|0_x\rangle\langle x|0_y\rangle}_{\text{גאוסיין דו-מימדי}}\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)$

והוא מקיים את הסימטריות הללו.

ג) מצב היסוד אינו מנוון ולכן

$$\Delta E^{(1)}_{001} = \langle 001|V_1|001\rangle$$

$$= \lambda \langle 001|xy\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)|001\rangle$$

$$\boxed{=0}$$

כי האינטגרלים על x,y הם אפס, כי x,y אי"ז

אבל מצבי היסוד של האוסצילטור ההרמוני זוגיים כי מדובר

בגאוסיאנים

(ד) מהו התנאי על הפרמטרים m,ω ו-L כך שהניוון של המצב המעורר הראשון (*הלא מופרע*) הוא שלוש.

(ה) בהנחה והתנאי מהסעיף הקודם מתקיים, חשבו את התיקון לסדר ראשון ב-λ לאנרגיה של המצבים המעוררים הראשונים.

ד)

$$E_{011} = E_{101} \overset{!}{=} E_{002}$$

$$2\hbar\omega + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \hbar\omega + \frac{\hbar^2\pi^2}{\cancel{2}mL^2}\cancel{4}^{2}$$

$$\cancel{\hbar}\omega = \frac{3}{2}\frac{\hbar^{\cancel{2}}\pi^2}{mL^2}$$

$$\boxed{\omega = \frac{3}{2}\frac{\hbar\pi^2}{mL^2}}$$

ה)

$$\begin{array}{c|ccc} & |101\rangle & |011\rangle & |002\rangle \\ \hline \langle 101| & 0 & a & 0 \\ \langle 011| & a & 0 & 0 \\ \langle 002| & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$V = $$

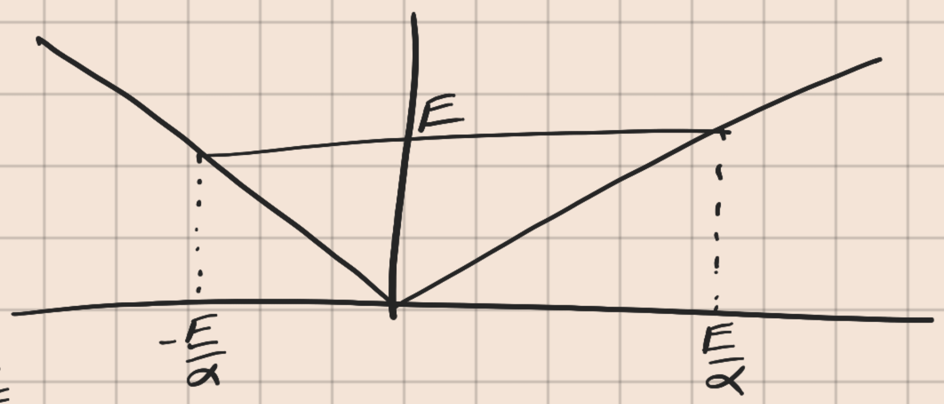
$$a = \lambda\langle 011|xy\cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)|101\rangle$$

$$= \lambda\int_{-L/2}^{L/2}\frac{2}{L}\cos^3\left(\frac{\pi z}{L}\right) \equiv \lambda I$$

$$\Rightarrow \quad \Delta E^{(1)}_{101} = -\Delta E^{(1)}_{011} = \lambda I$$

$$\Delta E^{(1)}_{002} = 0$$

5. נתון הפוטנציאל החד-מימדי $V=\alpha\left|x\right|$, כאשר α קבוע חיובי. העריכו את האנרגיה של הרמה ה-n באמצעות קירוב WKB.



$$\int_{-\frac{E}{\alpha}}^{\frac{E}{\alpha}} \sqrt{2m(E_n-\alpha|x|)}\,dx = \int_{-\frac{E}{\alpha}}^{0} \sqrt{2m(E+\alpha x)}\,dx + \int_{0}^{\frac{E}{\alpha}} \sqrt{2m(E-\alpha x)}\,dx$$

$$= \sqrt{2m}\left\{ (E+\alpha x)^{3/2}\cdot\frac{2}{3\alpha}\Big|_{-\frac{E}{\alpha}}^{0} + (E-\alpha x)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\Big|_{0}^{\frac{E}{\alpha}} \right\}$$

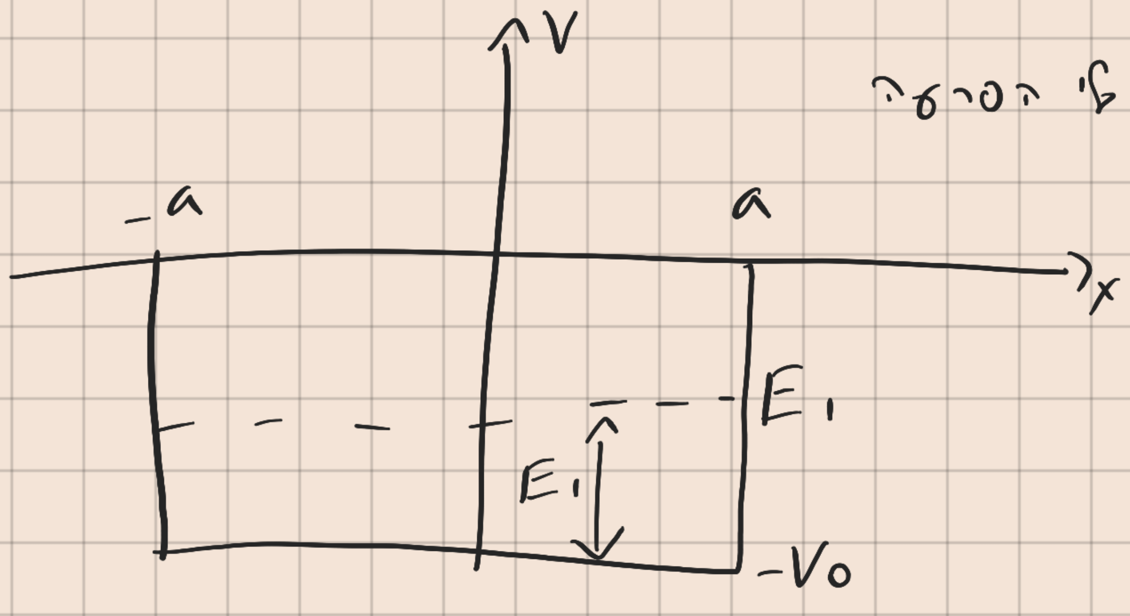
$$= \sqrt{2m}\,\frac{2}{3\alpha}\left[E^{3/2}-(0)+E^{3/2}\right] = 2^{\frac{5}{2}}\frac{\sqrt{m}}{3}E^{3/2} = n\pi\hbar$$

$$\boxed{E_n = 2^{-\frac{5}{3}}\left(\frac{3\alpha}{\sqrt{m}}\,n\pi\hbar\right)^{2/3}}$$

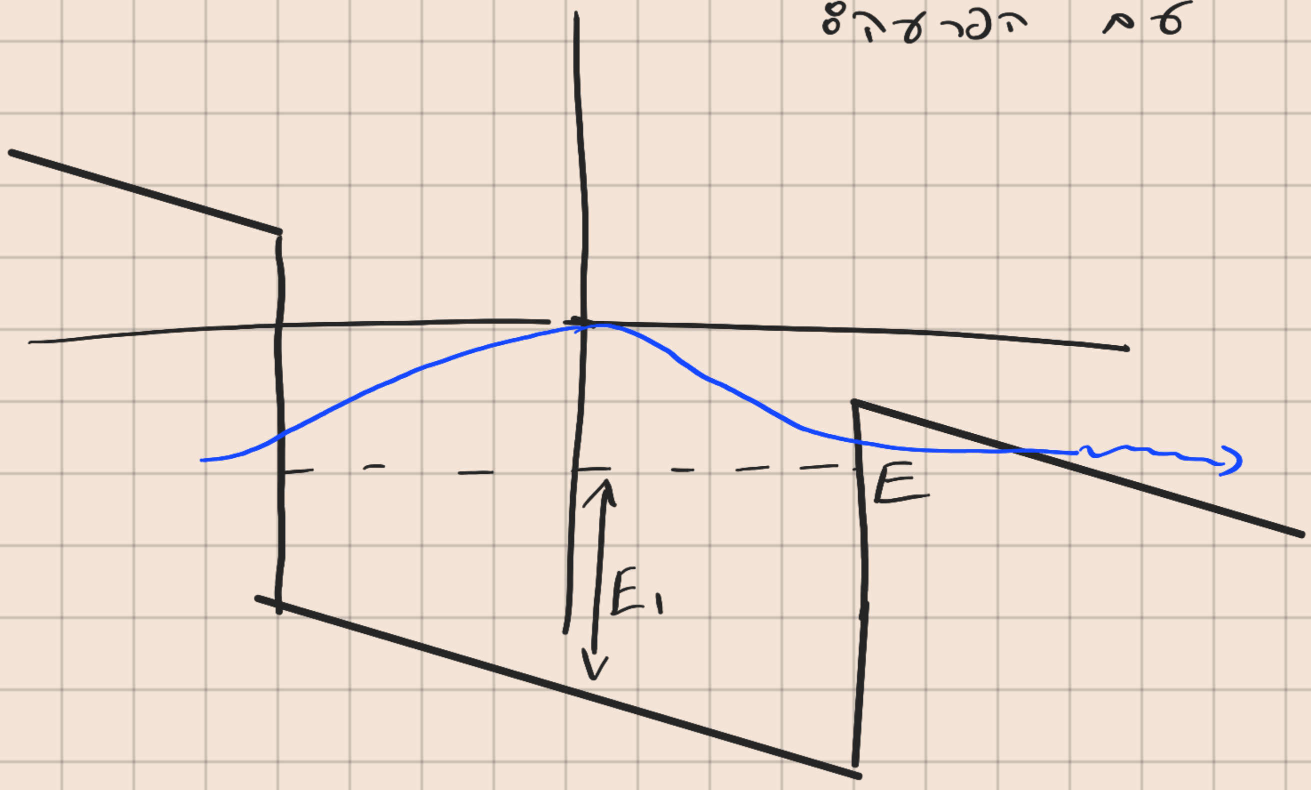
6 א)

$$E_{gs} = E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m(2a)^2}$$

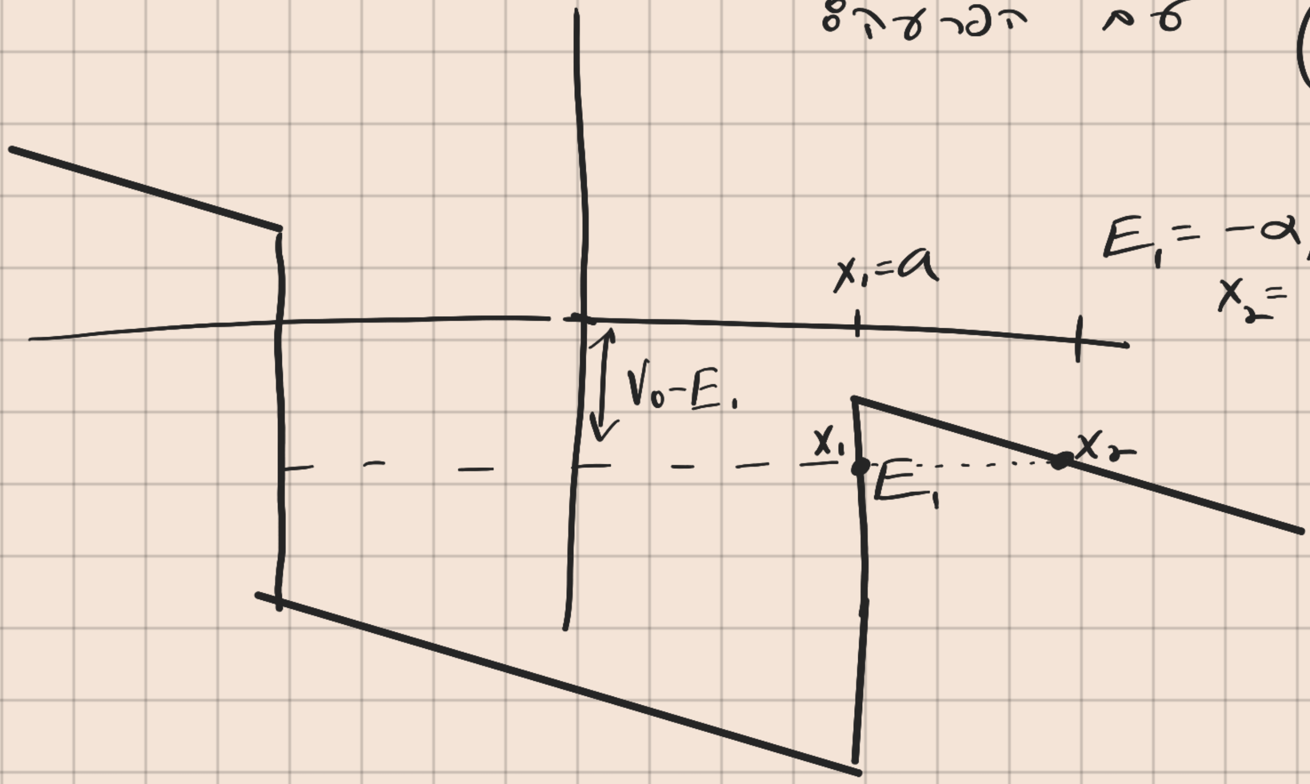
ב) לפי הפרעה:



טם הפרעה 8



טם הפרעה 8 (c



$E_1 = -\alpha x$

$x_2 = \frac{V_0 - E_1}{\alpha} > 0$

$E_1 < 0$

$$\sigma = \frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2} |p(x)|\, dx$$

$$= \frac{1}{\hbar}\int_{a}^{\frac{V_0-E_1}{\alpha}} \sqrt{2m\,(E_1 - V_0 + \alpha x)}\, dx$$

$$= \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m}\,\frac{2}{3\alpha}\left(E_1 - V_0 + \alpha x\right)^{3/2}\Big|_{a}^{\frac{V_0-E_1}{\alpha}}$$

$$= -\frac{\sqrt{8m}}{3\alpha\hbar}\left(E_1 - V_0 + \alpha a\right)^{3/2}$$

אם $\alpha a \ll E_1 \ll V_0$ אזי

$$\sigma \simeq \frac{\sqrt{8 m V_0^3}}{3\alpha\hbar}$$

$$\Rightarrow \quad T = e^{-2\gamma}$$

$$E_1 = \frac{1}{\cancel{2}} m V^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{\cancel{2} m (2a)^2}$$

$$V = \frac{\hbar \pi}{2ma}$$

ומכיוון שהוא מתנגש בכל הזדמנות ב $4a$

$$\tau = \frac{4a}{V} e^{2\gamma} = \frac{8ma^2}{\pi \hbar} e^{2\gamma}$$

(ד) הציבו נתונים:
$a = 1\,\text{Å} = 10^{-10}\,\text{m}$ (סקלת אורך אטומית), $V_0 = 20\,\text{eV}$ (אנרגיית קשר טיפוסית של אלקטרון), $\mathcal{E} = 10^4\,\text{V/cm}$ (שדה חשמלי טיפוסי במעבדה, כבר ראינו בתרגיל בית 6 שניתן להתייחס אליו כהפרעה קטנה), ומסה ומטען של אלקטרון. **חשבו** את τ (מספיק לקבל סדר גודל), ונמקו מדוע אנו יכולים להתעלם מתהליכי מנהור שכאלו.

נתחיל מ-γ כי הוא הכי דומיננטי

$$\gamma \sim \frac{\sqrt{8 \cdot \underbrace{9 \cdot 10^{-31}}_{m} \cdot 20^3 e^3}}{3 \hbar e \cdot 10^6} = 3 \times 10^5$$

$10^4 \frac{V}{cm}$ $10^{-2} m$

$$\frac{8ma^2}{\pi \hbar} \sim \frac{8 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-20}}{3.14 \cdot 10^{-34}} \sim 10^{-16}$$

כלומר $\tau \sim e^{6 \times 10^5}$ זה מספר עצום

אפשר להתעלם ממנהור שכזה לגמרי, זה הרבה יותר מגיל היקום.

ה) צריך $e^{2\gamma} \sim 10^{16}$

$$e^{6 \times 10^{11} \cdot \frac{1}{\mathcal{E}}} = 10^{16}$$

$$6 \times 10^{11} \frac{1}{\mathcal{E}} = \ln(10^{16})$$

$$\mathcal{E} = \frac{6 \times 10^{11}}{\ln 10^{16}} \sim \boxed{10^{10}\ V/m}$$