

מבוא לאסטרופיזיקה - תרגיל בית מס' 4

20 בפברואר 2022

שאלה מס' 1

ראיתם בתרגיל בית 3 כי ניתן להעריך את צפיפות הפוטונים מתוך חלוקה של צפיפות האנרגיה של הפוטונים ידי

$$u = aT^4$$

באנרגיה האופיינית של פוטון שניתן להעריך על ידי

$$\langle \varepsilon \rangle \sim k_B T$$

וכך מתקבל

$$n_\gamma \sim \frac{a}{k_B} T^3.$$

1. מצאו את הביטוי המדויק עבור n_γ . בטאו אותו באמצעות a, k_B ו- T . הדרכה - העזרו בביטוי לצפיפות האנרגיה ליחידת תדר של גז פוטונים מתרגיל בית 1 ובאינטגרל

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx \approx 2.4.$$

2. מצאו את הביטוי המדויק עבור האנרגיה הממוצעת לפוטון בגז קרינה.

שאלה מס' 2

1. חשבו את המרחק הזוויתי כפונקציה של ה-redshift ביקום שטוח המורכב מחומר בלבד.

2. הראו כי תחת תנאי סעיף 1, המרחק מגיע למקסימום (כלומר לא גדל מונוטונית). מצאו את ה-redshift בו מתקבל המקסימום הזה.

שאלה מס' 3

1. Light-travel distance מוגדר כזמן שעבר (כפי שנמדד על ידי צופה במנוחה) מרגע שאור נפלט מנקודה כלשהיא ועד שהגיע לצופה, מוכפל במהירות האור. מצאו ביטוי למרחק זה כתלות ב-redshift.

2. הראו כי עבור יקום נשלט חומר ה-comoving distance נתון על ידי

$$r_0 = 3ct_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right]$$

כאשר t_0 גיל היקום כיום.

שאלה מס' 4

גלקסיה פולטת אור באורך גל מסויים. בעוד האור עושה את דרכו אל צופה, התפשטות היקום מאטה ועוצרת, ומתחילה התכווצות. זמן קצר מאד (קצר ביחס לכל סקאלת זמן רלוונטית לבעיה) אחרי תחילת ההתכווצות האור מגיע אל הצופה. האם הצופה תבחין בהסחה לאדום או לכחול של האור?

שאלה מס' 5

1. נתון יקום שטוח עם חומר ורכיב אנרגיה אפלה עם משוואת מצב

$$w\rho_\Lambda c^2 = p.$$

כתבו את משוואת פרידמן חסרת המימדים במונחי קבוע הסקאלה a , Ω_m ו- Ω_Λ כיום (הוא פרמטר הצפיפות רכיב האנרגיה האפלה). ניתן להיעזר בתוצאות של שאלה מס' 1 בתרגיל בית 3.

2. עבור המקרה $w < -1$, מצאו כיצד משתנה קבוע האבל כפונקציה של קבוע הסקאלה ותארו את גורלו הסופי של היקום. הניחו Ω_m ו- Ω_Λ כיום המתאימים ליקום שלנו, ומצאו כמה זמן יקח ליקום שלנו להגיע לקיצו בתרחיש ה"ל" עבור $w = -\frac{3}{2}$.

3. עבור קבוע קוסמולוגי ($w = -1$) נקבל תרחיש עתידי שונה עבור היקום. הזכרו בתרגול כיתה מס' 3 בו הראנו כיצד משתנה האופק ביקום נשלט קבוע קוסמולוגי ותארו איכותית מה יקרה ליקום בעתיד.

שאלה מס' 6

1. רשמו את ההגדרה של אורך גל קומפטון ℓ_c של חלקיק עם מסה m (אורך גל דה ברוי המינימאלי).

2. רשמו את ההגדרה של רדיוס שורצילד ℓ_s של גוף עם מסה m .

3. מצאו את המסה עבורה מתקבל שוויון בין אורך גל קומפטון המצומצם ($\frac{\ell_c}{2\pi}$) ורדיוס שוורצילד שווים. רשמו את אנרגיית המנוחה של מסה זו.

4. מסה זו נקראת מסת פלאנק (m_p) ורדיוס שוורצילד שלה נקרא אורך פלאנק ℓ_p . מצאו את ערכו.

5. חשבו את צפיפות פלאנק (ρ_p) המוגדרת להיות צפיפות המסה של מסת פלאנק בנפח ℓ_p^3 .

6. זמן פלאנק (t_p) הוא יחידת זמן בסיסית המתקבלת מקבועים פיזיקליים יסודיים, והוא הזמן הקצר ביותר שיכול להמדד משיקולים של עיקרון אי הוודאות של הייזנברג. ערכו נתון על ידי

$$t_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}} \approx 10^{-44} \text{s}.$$

העריכו את גודל האופק כאשר היקום היה בגיל השווה לזמן פלאנק (בצעתם הערכות דומות באמצעות H_0 בכיתה).

7. הניחו כי כאשר היקום בגיל השווה ל- t_p וצפיפות האנרגיה שלו היא $\rho_p c^2$ ומקורה בקרינה. מצאו את טמפרטורת הקרינה וחשבו כמה פוטונים יש בממוצע בתוך האופק בזמן זה.