① א) עבור מצב טהור $\rho = |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

ולכן $\rho^2 = |\psi_i\underbrace{\rangle\langle\psi_i|\psi_i\rangle}_{=1}\langle\psi_i|$

$= |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \rho$

ולכן $Tr\,\rho^2 = Tr\,\rho = 1$

ב) $Tr\,\rho^2 = \sum_n \langle\varphi_n|\hat{\rho}^2|\varphi_n\rangle$

$= \sum_n \langle\varphi_n|\left[\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right]^2|\varphi_n\rangle$

$\left[\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right]\left[\sum_j p_j |\psi_j\rangle\langle\psi_j|\right]$

$= \sum_{i,j,n} p_i p_j \langle\varphi_n|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle\langle\psi_j|\varphi_n\rangle$

$= \sum_{i,j,n} p_i p_j \langle\psi_i|\cancel{\varphi_n}\rangle\langle\psi_i|\psi_j\rangle\langle\cancel{\varphi_n}|\psi_j\rangle$

$= \sum p_i p_j |\langle\psi_i|\psi_j\rangle|^2$

כבר מתקיים ש: $\sum p_i = 1$! $\sum p_j = 1$

$\Downarrow$

$\sum_{i,j} p_i p_j \le 1$

וכן טוב מכפלים אחרת באינ' שבמהות

$|\langle\psi_i|\psi_j\rangle|^2 \le 1$

ולכן $Tr\,\rho^2 \le 1$ תמיד,

אך הראנו שלמצב טהור $Tr\,\rho^2 = 1$ ככל האפשרי

רק אם יש רק i אחד:

$$P_i = P_j = \langle \psi_i | \psi_j \rangle = 1$$

ולכן לכל מצב אחר המכיל יותר מ i אחד

תמיד $\mathrm{Tr}\,\rho^2 < 1$

ב) א) $$\left[\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle\right]^* = \sum_i P_i \left[\langle \varphi | \psi_i \rangle\langle \psi_i | \varphi \rangle\right]^*$$

$$= \sum_i P_i \langle \psi_i | \varphi \rangle\langle \varphi | \psi_i \rangle$$

$$= \sum_i P_i \langle \varphi | \psi_i \rangle\langle \psi_i | \varphi \rangle$$

$$= \langle \varphi | \hat{\rho} | \varphi \rangle$$

הנוכל $$\langle \varphi | \psi_i \rangle\langle \psi_i | \varphi \rangle = \underset{0 \le}{} |\langle \varphi | \psi_i \rangle|^2 \le 1$$

ולכן זה גם בין 0 ל-1

ג) $$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}) = \sum_n \langle \varphi_n | \hat{\rho}\,\hat{O} | \varphi_n \rangle$$

$$= \sum_{i,n} P_i \langle \varphi_n | \psi_i \rangle\langle \psi_i | \hat{O} | \varphi_n \rangle$$

$$= \sum_{i,n} P_i \left[\langle \psi_i | \underbrace{\varphi_n \rangle\langle \varphi_n}_{\mathbb{1}} | \hat{O}^\dagger | \psi_i \rangle\right]^*$$

$$= \sum_i P_i \langle \psi_i | \hat{O}^\dagger | \psi_i \rangle$$

$$\frac{d\rho}{\partial t} = \sum_i \rho_i \left[\frac{d}{dt} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| + |\psi_i\rangle \frac{d}{dt}\langle\psi_i| \right]$$ (ב

$$\partial_t |\psi\rangle = \frac{1}{i\hbar} H|\psi\rangle$$

$$\partial_t \langle\psi| = -\frac{1}{i\hbar} \langle\psi|H$$

$$= \sum_i \rho_i \left[\frac{1}{i\hbar} H|\psi_i\rangle\langle\psi_i| - \frac{1}{i\hbar} |\psi_i\rangle\langle\psi_i|H \right]$$

$$= \frac{1}{i\hbar}\{H,\rho\} = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho] = \frac{i}{\hbar}[\rho,H]$$

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta\hat{H}}$$ ג) 3

$$\mathrm{Tr}\,\rho = \sum_n \langle\varphi_n|\rho|\varphi_n\rangle$$

$$= \sum_n \langle\varphi_n|\frac{1}{Z}e^{-\beta\hat{H}}|\varphi_n\rangle$$

$$= \frac{1}{Z}\sum_n e^{-\beta E_n} \overset{!}{=} 1$$

$$Z = \sum_n e^{-\beta\varepsilon_n}$$: פונק' החלוקה

ב) ברור ש״ז בדיוק כמו בקלאסי $\langle\hat{O}\rangle = \frac{1}{Z}\sum O e^{-\beta\varepsilon_n}$

$$\langle\hat{O}\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{O}) = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{Z}e^{-\beta\hat{H}}\hat{O}\right)$$

$$= \sum_n \langle\varphi_n|\frac{1}{Z}e^{-\beta\hat{H}}\hat{O}|\varphi_n\rangle$$

$$= \frac{1}{Z}\sum_n e^{-\beta E_n}\langle\varphi_n|\hat{O}|\varphi_n\rangle$$

$$
\begin{array}{cccc|c}
|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 & |\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 & |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 & |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 & (\rho \\
\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{i\sqrt{3}}{8} & -\frac{i\sqrt{3}}{8} & \\
-\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{i\sqrt{3}}{8} & \frac{i\sqrt{3}}{8} & \\
-\frac{i\sqrt{3}}{8} & \frac{i\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & \\
\frac{i\sqrt{3}}{8} & -\frac{i\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{i\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{i\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{pure}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-|\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_2\right)|\uparrow\rangle_1 + \frac{i\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left(-|\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_2\right)|\downarrow\rangle_1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-|\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_2\right)\left(|\uparrow\rangle_1 + i\sqrt{3}\,|\downarrow\rangle_1\right)$$

$$
\begin{array}{cccc|c}
|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 & |\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 & |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 & |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 & (\rho \\
\frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} & \\
\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & \\
-\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \\
\frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} & \frac{1}{8} &
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \\ & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{mixed} = \text{entangled}$$

$$\left(\tfrac{1}{3}|\uparrow\rangle|0\rangle + \tfrac{2}{3}|\downarrow\rangle|1\rangle + \tfrac{2}{3}|\uparrow\rangle|2\rangle\right)\left(\tfrac{1}{3}\langle\uparrow|\langle 0| + \tfrac{2}{3}\langle\downarrow|\langle 1| + \tfrac{2}{3}|\uparrow\rangle|2\rangle\right) \;(c$$

$$= \frac{1}{9}|\uparrow 0\rangle\langle\uparrow 0| + \frac{2}{9}|\uparrow 0\rangle\langle\downarrow 1| + \frac{2}{9}|\uparrow 0\rangle\langle\uparrow 2|$$

$$+ \frac{2}{9}|\downarrow 1\rangle\langle\uparrow 0| + \frac{4}{9}|\downarrow 1\rangle\langle\downarrow 1| + \frac{4}{9}|\downarrow 1\rangle\langle\uparrow 2|$$

$$+ \frac{2}{9}|\uparrow 2\rangle\langle\uparrow 0| + \frac{4}{9}|\uparrow 2\rangle\langle\downarrow 1| + \frac{4}{9}|\uparrow 2\rangle\langle\uparrow 2|$$

$$\langle 0|\rho|0\rangle = \frac{1}{9}\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

$$\Rightarrow \quad \rho_1 = \frac{1}{9}\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{4}{9}\,|\downarrow\rangle\langle\downarrow| + \frac{4}{9}\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow|$$

$$= \frac{5}{9}\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{4}{9}\,|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \Rightarrow \text{mixed/entangled}$$