$$\langle fg\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T Re\{f_0 e^{-i\omega t}\}\,Re\{g_0 e^{-i\omega t}\}\,dt$$ א) 1

$$(a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc - bd$$

$$(a+ib)(c-id) = ac - iad + ibc + bd$$

$$Re\{(a+ib)(c+id)\} = ac-bd$$

$$Re\{a+ib\}\,Re\{c+id\} = ac$$

$$f(t) = f\cos(\omega t) \qquad g(t) = g\cos(\omega t$$ נסמן

$$g, f \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \langle fg\rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} fg\cos^2\omega t\,dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi} fg\,\frac{\pi}{\omega} = \frac{1}{2}fg$$

$$fg = Re\{f_0 g_0^*\}$$ נותר להראות ש-:

$$f_0 = f + ia \qquad g_0 = g + ib$$ אלגם

ד) אם הוכחנו ג) זה נובע ישירות מבניק וקטורי

$$\langle S_i\rangle = \frac{c}{8\pi}\,Re\{\varepsilon_{ijk}E_{j\omega}B^*_{k\omega}\} = \frac{c}{8\pi}\,Re\{\bar{E}_\omega \times \bar{B}^*_\omega\}$$

(א $2$

$$\bar p = \int \bar r\, \rho(\bar r)\, d^3 r$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\,\sigma_0\cos\omega t\; a^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \hat z\, \overset{\nearrow r}{\cancel{4}}\pi a^3\sigma_0\cos\omega t \cancel{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\cos\theta}_{\frac{1}{2}} = 2\pi a^3\sigma_0\cos\omega t\,\hat z$$

(ב

$$\bar A(\bar r) = -ik\bar p\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

$$= -ik\,2\pi\sigma_0 a^3\cos\omega t\,\hat z\,\frac{e^{ikr}}{r} \quad ; \quad k = \frac{\omega}{c}$$

$ka \ll 1$ סביר

$\omega a \ll c$

$-i\left(\cos kr + i\sin kr\right) \Rightarrow \cos(\omega t)\sin(kr)$ $\frac{0}{0}$ לכן $\Re$ והמשי

$$-i\,\frac{e^{i(kr+\omega t)} + e^{i(kr-\omega t)}}{2} \rightarrow -\frac{i}{2}\Big(\cos(kr+\omega t) + i\sin(kr+\omega t)$$

$$+ \cos(kr-\omega t) + i\sin(kr-\omega t)\Big)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\sin(kr+\omega t) + \sin(kr-\omega t)\right) = \cos(\omega t)\sin(kr) \equiv f(r,t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar A(\bar r,t) = \frac{2\pi\sigma_0 k a^3}{r} f(r,t)\,\hat r \; ; \; k = \frac{\omega}{c}, \; ka \ll 1}$$

(ג

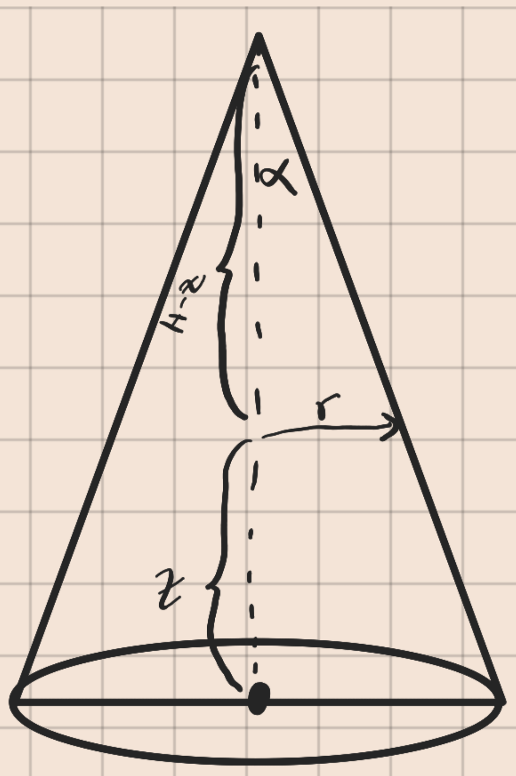
$$\frac{d\langle P\rangle}{d\Omega} = \frac{1}{8\pi c^3}|\ddot{\bar p}|^2\sin^2\theta$$

$2\pi a^3\sigma_0\cos\omega t\,\hat z$

$$= \frac{1}{8\pi c^3}\left(2\pi a^3\sigma_0\omega^2\right)^2\sin^2\theta$$

$$\underbrace{2\pi}_{\int d\varphi}\int\sin^3\theta\, d\theta = 2\pi\,\frac{4}{3} = \frac{8}{3}\pi$$

$$\langle P\rangle = \frac{1}{3c^3}\left(2\pi a^3\sigma_0\omega^2\right)^2$$




$$\omega = \omega_0 \cos(\Omega t)$$ 3

$$\tan\alpha = \frac{R}{2H} = \frac{r}{H-z}$$

$$r = \frac{R}{2H}(H-z)$$
$$= \frac{R}{2} - \frac{R}{2H} z$$

בכל לופ ברדיוס $r$ וגובה $z$

יש אותו זרם

$$dI = \frac{d\,dq}{dt} = \frac{d\,dq}{dl}\frac{dl}{dt}$$

$$= \frac{\rho_0 r\,dr\,\cancel{d\theta}\,dz}{\cancel{dl}} V = \rho_0 r \omega_0 \cos(\Omega t)\,dr\,dz$$

$$S = \pi r^2$$

$$\Rightarrow \quad d\bar{m} = \frac{dI\,S}{c}\hat{z} = \frac{1}{c}\pi\rho_0\omega_0 r^3 \cos(\Omega t)\,dr\,dz\,\hat{z}$$

$$\bar{m} = \int d\bar{m}$$

$$\int_0^{r(z)}\int_0^H r^3\,dr\,dz = \frac{1}{4}\int_0^H r^4(z)\,dz = \frac{R^4}{2^6 H^4}\int_0^H (H-z)^4\,dz$$

$$H - z = x$$
$$dx = -dz$$

$$= \frac{R^4}{2^6 H^4}\int_0^H x^4\,dx = \frac{1}{320} R^4 H$$

$$\frac{I\,S}{c} \qquad \frac{\frac{q}{s}\,m^2}{\frac{m}{s}} = \frac{q\,m^{\cancel{2}}\,\cancel{s}}{\cancel{ms}} = q\,m$$

$$\bar{m} = \underbrace{\frac{R^4}{320c} H \rho_0 \omega_0}_{\equiv m_0} \cos(\Omega t)\hat{z}$$

מומנט הדיפול החשמלי קבוע בזמן ולכן לא קורן.

$$K = \frac{\omega_0}{c}\cos(\Omega t)$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi}K^4 \langle|\bar{m}|^2\rangle \sin^2\theta$$

$\cos^2(\Omega t)$ ממוצע בזמן של

$$= \frac{c}{8\pi}K^4 \frac{1}{2} m_0^2 \sin^2\theta$$

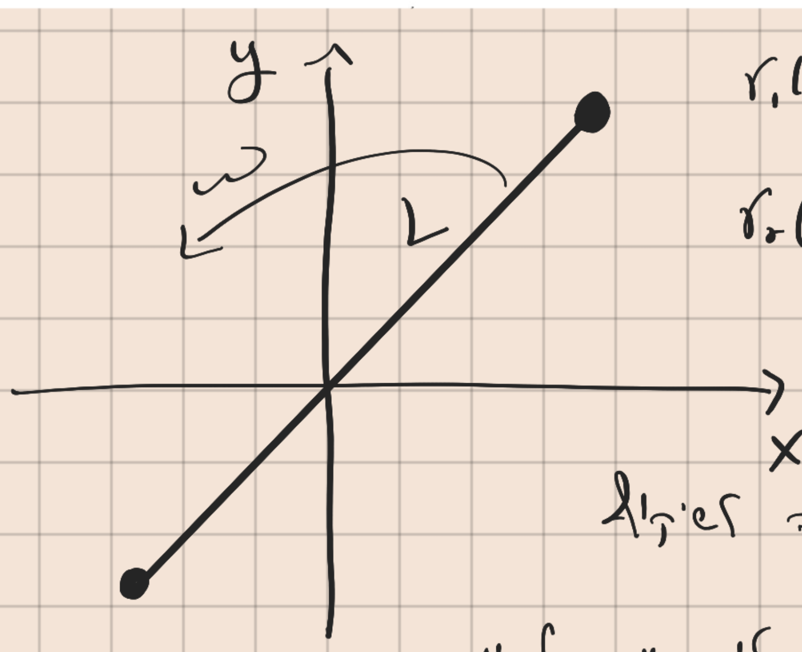
$$\langle P\rangle = \frac{cK^4}{3} m_0^2$$

וכל זה אם ההנחה
הקוואזיסטטית מספיק
$\Omega R \ll c$
וגם $\omega_0 R \ll c$

**שאלה 4 – קרינה קוודרופולית**

א. שני הקצוות של מוט מבודד באורך $2L$, טעונים כל אחד במטען $q$. אמצע המוט מחובר לציר בראשית הצירים, והמוט מסתובב במישור $x-y$ במהירות זוויתית קבועה $\omega$. מצאו את מומנטי הדיפול החשמלי, הדיפול המגנטי והקוודרופול החשמלי, וחשבו את $\frac{d\langle P\rangle}{d\Omega}$ ואת $\langle P\rangle$ בקירוב הקוואדרופול החשמלי. באיזה תנאי קירוב זה מוצדק?

**הנחיה:** חשבו את הקוודרופול החשמלי ע״י שימוש בקואורדינטות קרטזיות, והפרידו אותו לחלק סטטי וחלק שתלוי באופן מחזורי בזמן.




$r_1(t) = (L\cos\omega t, L\sin\omega t, 0)$

$r_2(t) = -(L\cos\omega t, L\sin\omega t, 0)$

הדיפול החשמלי מתאפס

כי בכל רגע נתון יש סימטריה לשיקוף

זרם המעגל והדיפול המגנטי חייב להיות קבוע בזמן

כי הזרם קבוע.

$\bar{m} = \hat{z}\,\frac{qL^2\omega}{c}$ מימדיות $\frac{\frac{q}{s}m^2}{\frac{m}{s}} = \frac{qm^2}{m} = qm$

נשאר רק הקוודרופול:

$$Q_{ij} = \int dq\,(3r_ir_j - r^2\delta_{ij})$$

$$Q_{xy} = q\,3L^2\sin\cos + 3q\ldots = 3qL^2\sin(2\omega t) = Q_{yx}$$

$$Q_{xx} = q(3x^2 - x^2 - y^2) + q(3x^2\ldots)$$

$$= 2q(2x^2 - y^2) = qL^2(2\cos^2\omega t - \underbrace{\sin^2\omega t}_{(1-\cos^2\omega t)})$$

$\cos^2 - \sin^2 = \cos 2$

$1-\cos^2$

$2\cos^2 - 1 = \cos 2 + 1$

$$= 2qL^2(3\underbrace{\cos^2\omega t}_{\frac{\cos 2\omega t + 1}{2}} - 1)$$

$\frac{3}{2}\cos 2\omega t + \frac{1}{2}$

$$Q_{yy} = 2q(2y^2 - x^2) = 2qL^2(2\sin^2\omega t - \underbrace{\cos^2\omega t}_{1-\sin^2\omega t})$$

$1 - 2\sin^2 = \cos 2$

$\frac{1-\cos 2}{2} = \sin^2$

$$= 2qL^2(3\underbrace{\sin^2\omega t}_{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cos 2\omega t} - 1)$$

$$Q_{zz} = 2q(-x^2 - y^2) = -2qL^2$$

$$
Q_{ij} = \begin{pmatrix} qL^2(3\cos(2\omega t)+1) & 3qL^2\sin(2\omega t) & 0 \\ 3qL^2\sin(2\omega t) & qL^2(1-3\cos(2\omega t)) & 0 \\ 0 & 0 & -2qL^2 \end{pmatrix}
$$

$$
3qL^2 \begin{pmatrix} \cos(2\omega t) & \sin(2\omega t) & 0 \\ \sin(2\omega t) & -\cos(2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{qL^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{לא תלוי בזמן}}
$$

$$
Q_i(\bar{r}) = \sum_j \hat{r}_j Q_{ij}
$$

$$
Q_x(\bar{r}) = \sum_j \hat{r}_j Q_{xj}
$$

$$
= Q_{xx}\hat{r}_x + Q_{xy}\hat{r}_y
$$

$$
= \cos(2\omega t)\sin\theta\cos\varphi + \sin(2\omega t)\sin\theta\sin\varphi
$$

$$
\bar{Q}(\bar{r}) = 3qL^2\sin\theta \begin{pmatrix} \cos(2\omega t)\cos\varphi + \sin(2\omega t)\sin\varphi \\ \sin(2\omega t)\cos\varphi - \cos(2\omega t)\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
|\bar{Q}|^2 = (3qL^2\sin\theta)^2 \Big[ (\cos(2\omega t)\cos\varphi + \sin(2\omega t)\sin\varphi)^2 \\ (\sin(2\omega t)\cos\varphi - \cos(2\omega t)\sin\varphi)^2 \Big]
$$

$$
= (3qL^2\sin\theta)^2 \Big[ \cos^2(2\omega t)\cos^2\varphi + \sin^2(2\omega t)\sin^2\varphi \\ \cancel{+ 2\cos(2\omega t)\cos\varphi\sin(2\omega t)\sin\varphi} \\ \sin^2(2\omega t)\cos^2\varphi + \cos^2(2\omega t)\sin^2\varphi \\ \cancel{-2\sin(2\omega t)\cos\varphi\cos(2\omega t)\sin\varphi} \Big]
$$

$$= \left(3qL^2\sin\theta\right)^2\left[\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right]$$

$$= \left(3qL^2\right)^2\sin^2\theta$$

וואו ! שוכט

$$\bar{Q}\cdot\hat{r} = 3qL^2\sin\theta\Big[\big(\cos(2\omega t)\cos\varphi+\sin(2\omega t)\sin\varphi\big)\sin\theta\cos\varphi$$
$$+\big(\sin(2\omega t)\cos\varphi-\cos(2\omega t)\sin\varphi\big)\sin\theta\sin\varphi\Big]$$

$$= 3qL^2\sin^2\theta\Big[\cos(2\omega t)\cos^2\varphi+\sin(2\omega t)\sin\varphi\cos\varphi$$
$$+\sin(2\omega t)\cos\varphi\sin\varphi-\cos(2\omega t)\sin^2\varphi\Big]$$

$\cos(2\omega t)\cos^2\varphi+2\sin(2\omega t)\sin\varphi\cos\varphi-\cos(2\omega t)\sin^2\varphi$

$$= 3qL^2\sin^2\theta\left[\cos(2\omega t)\cos 2\varphi+\sin(2\omega t)\sin 2\varphi\right]$$

נעלה בריבוע:

$$= \left(3qL^2\sin^2\theta\right)^2\left[\cos^2(2\omega t)\cos^2 2\varphi+\sin^2(2\omega t)\sin^2 2\varphi+2\cdot\frac{1}{2}\sin(4\omega t)\frac{1}{2}\sin(4\varphi)\right]$$

איבר זה תלוי בזמן ויעלם אחרי מיצוע על זמן מחזור

$\sin(4\omega t)$ "יפול" ושני האיברים האחרים יקבל $\frac{1}{2}$, לכן סה"כ

$$\langle|\hat{r}\cdot\bar{Q}|^2\rangle = \frac{1}{2}\left(3qL^2\sin^2\theta\right)^2$$

וסה"כ:

$$\frac{d\langle P\rangle}{d\Omega} = \frac{c}{288\pi}k^6\left(|\bar{Q}|^2-|\hat{r}\cdot\bar{Q}|^2\right)$$

$$= \frac{c}{288\pi}k^6\left[\left(3qL^2\right)^2\sin^2\theta-\frac{1}{2}\left(3qL^2\right)^2\sin^4\theta\right]$$

$\cos^2\theta+\sin^2\theta$

$$= \frac{c}{288\pi}k^6\left(3qL^2\right)^2\sin^2\theta\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)$$

$$\langle P\rangle = \frac{ck^6}{360}\sum|Q_{ij}|^2 = \frac{ck^6}{360}\cdot 4\cdot 9q^2L^4$$

$$= \frac{ck^6}{10}q^2L^4$$

ב. השתמשו בחוק שימור האנרגיה כדי להעריך את האנרגיה הקינטית $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2$ כתלות בזמן, כאשר $I$ מומנט ההתמד של המוט המסתובב. הניחו שב $t = 0$ האנרגיה הקינטית היא $E_0$. חלצו מכך את התלות של התדירות $\omega$ בזמן.

$$\frac{dE}{dt} = -\langle P \rangle = -\frac{1}{10}\frac{1}{c^5}\omega^6 q^2 L^4$$

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\frac{2}{I} E = \omega^2$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{10}\frac{1}{c^5} q^2 L^4 \frac{8}{I^3} E^3$$

$$\alpha \equiv \frac{8}{10 c^5 I^3} q^2 L^4$$

$$\int_{E_0}^{E(t)} \frac{dE}{E^3} = -\alpha \int_0^t dt$$

$$+\frac{1}{2E^2}\Big|_{E_0}^{E(t)} = +\alpha t$$

$$\frac{1}{E^2(t)} \cancel{- \frac{1}{E_0^2}} = 2\alpha t + \frac{1}{E_0^2}$$

$$E(t) = \sqrt{\frac{1}{2\alpha t + \frac{1}{E_0^2}}} = \frac{1}{2} I \omega^2(t)$$

$$\omega(t) = \left[\frac{2}{I}\left(\frac{1}{2\alpha t + \frac{1}{E_0^2}}\right)\right]^{1/4}$$