

קוונטים 2 – תרגול 10

מעברים קרינתיים

מתרגל: זמיר הלר-אלגזי

תוכן העניינים

2	1 מעברים קרינתיים
2	1.1 קירוב הדיפול (מעברים מותרים)
3	1.2 קירוב הקוואדרופול (מעברים אסורים)
3	1.3 כללי ברירה למעברי דיפול
3	1.4 קוונטיזציה שנייה
4	2 תרגילים

1 מעברים קרינתיים

כלל הזהב של פרמי מאפשר לנו לחשב את קצב הדעיכה ממצב $|i\rangle$ למצב $|f\rangle$ בזמן $t \rightarrow \infty$ של הפרעות מחזוריות $V(t) = \mathcal{V}e^{i\omega t} + \text{h.c.}$

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \sum_{|f\rangle} \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|\mathcal{V}|i\rangle|^2 \delta(E_f - E_i \mp \hbar\omega) \quad (1.1)$$

כאשר (\mp) מתאים לבליעה/פליטה. נסתכל על המילטוניאן ספרי-סימטרי של אלקטרון בהשפעת שדה א"מ חלש (ובהזנחת צימוד הספין),

$$H = \frac{(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A})^2}{2m} + V(r) \simeq \underbrace{\frac{p^2}{2m} + V(r)}_{H_0} + \underbrace{\frac{e}{mc}\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}}_{V(t)} \quad (1.2)$$

ונניח שהשדה הא"מ אוסצילטורי,

$$\mathbf{A} = \epsilon A_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + \text{h.c.} \quad (1.3)$$

כאשר ϵ וקטור הקיטוב (שיכול להיות מורכב, כמו בקיטוב מעגלי). לפוטון יש שני קיטובים, $\epsilon^{(\lambda)}$ ו- $\lambda = 1, 2$. מכלל הזהב של פרמי אנחנו רואים שקצב המעברים הקרינתיים נתון ע"י

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \sum_{|f\rangle} \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | \frac{e}{mc} \mathcal{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{p} | i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i \mp \hbar\omega), \quad \mathcal{A}(\mathbf{r}) \equiv \epsilon A_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (1.4)$$

כאשר $\mathcal{A}(\mathbf{r})$ הוא החלק המרחבי של השדה הא"מ. אם אורך הגל של הקרינה גדול בהרבה ממימדי המערכת, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$ אזי

$$\mathcal{A}(\mathbf{r}) \approx \epsilon A_0 (1 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \dots) \quad (1.5)$$

ככל שהסדר של האיבר גדול יותר כך עוצמתו קטנה.

1.1 קירוב הדיפול (מעברים מותרים)

כשלווקחים בחשבון רק את האיבר הראשון ב- \mathcal{A} עלינו לחשב את אלמנט המטריצה $\langle f | \epsilon \cdot \mathbf{p} | i \rangle$. לרוב נעדיף לכתוב מחדש את אלמנט המטריצה ע"י שימוש בנוסחא $[\mathbf{r}, H_0] = i\hbar \mathbf{p}/m$:

$$\frac{1}{m} \langle f | \epsilon \cdot \mathbf{p} | i \rangle = \frac{i}{\hbar} \epsilon \cdot \langle f | (H_0 \mathbf{r} - \mathbf{r} H_0) | i \rangle = i \underbrace{\frac{(E_f - E_i)}{\hbar}}_{\pm \hbar\omega} \epsilon \cdot \langle f | \mathbf{r} | i \rangle = \pm i\omega \langle f | \epsilon \cdot \mathbf{r} | i \rangle \quad (1.6)$$

לכן אנחנו רואים שבקירוב הדיפול קצב המעבר פרופורציוני לאלמנט המטריצה של הדיפול החשמלי (טנזור מדרגה 1):

$$\Gamma_{i \rightarrow f}^{\text{dip.}} = \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{e\omega A_0}{c} \right)^2 |\langle f | \epsilon^{(\lambda)} \cdot \mathbf{r} | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i \mp \hbar\omega) \quad (1.7)$$

1.2 קירוב הקוואדרופול (מעברים אסורים)

אם ניקח בחשבון את האיבר השני ב- \mathcal{A} , מניפולציה דומה תראה לנו שבקירוב הקוואדרופול קצב המעבר פרופורציוני לאלמנט המטריצה של הקוואדרופול החשמלי (טנזור מדרגה 2):

$$\Gamma_{i \rightarrow f}^{\text{quad.}} = \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{e\omega A_0}{c} \right)^2 \left| \left\langle f \left| \epsilon_i^{(\lambda)} k_j \left(r_i r_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} r^2 \right) \right| i \right\rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i \mp \hbar\omega) \quad (1.8)$$

המעברים האלה חשובים כאשר מעברי דיפול אסורים מכללי ברירה.

1.3 כללי ברירה למעברי דיפול

כאשר נחשב אלמנטי מטריצה $\langle n'\ell'm' | \mathbf{r} | n\ell m \rangle$ אין צורך לחשב יותר מרכיב אחד בגלל כללי הברירה מזוגיות וממשפט ויגנר-אקרט:

$$\Delta\ell \equiv \ell' - \ell = \pm 1, \quad \Delta m \equiv m' - m = 0, \pm 1 \quad (1.9)$$

יתרה מכך, שימוש בעובדה ש- $\mathbf{r} = r^{(1)}$ (או יחסי החילוף של x ו- y עם L_z) יראו כי

$$\begin{cases} \text{if } m' = m & \text{then } \langle n'\ell'm' | x | n\ell m \rangle = \langle n'\ell'm' | y | n\ell m \rangle = 0, \\ \text{if } m' = m \pm 1 & \text{then } \langle n'\ell'm' | x | n\ell m \rangle = \pm i \langle n'\ell'm' | y | n\ell m \rangle \\ & \text{and } \langle n'\ell'm' | z | n\ell m \rangle = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

1.4 קוונטיזציה שנייה

במציאות, השדה הא"מ \mathbf{A} מקוונטט גם הוא, ולכל עירור שלו אנחנו קוראים **פוטון** (שמשומן ב- γ) עם אנרגיה $E_\gamma = \hbar\omega$. נניח שאנחנו מסתכלים על המערכת בקופסא גדולה בנפח V עם N פוטונים. **עבור בליעה**, הקשר בין A_0 למספר הפוטונים N הוא

$$A_0 = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k} \frac{N}{V}} \quad (1.11)$$

עבור פליטה, הקשר בין A_0 למספר הפוטונים N הוא

$$A_0 = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k} \frac{N+1}{V}} \quad (1.12)$$

כאשר ה- $(+1)$ הוא תוצאה של **פליטה ספונטנית**, שמתרחשת גם אם לא מפעילים שדה א"מ ($N=0$). והיא כתוצאה מאנרגית הואקום. פליטת הפוטונים שמתרחשת כתוצאה מהפעלת שדה א"מ חיצוני נקראת **פליטה מאולצת**.

2 תרגילים

תרגיל 1

אטום מימן מצוי במצב מעורר $|300\rangle$ ועובר סדרה של דעיכות דיפול למצב היסוד.

א. מהם מסלולי הדעיכה האפשריים?

ב. אם היה לנו בקבוק מלא באטומים הנמצאים במצב זה, כמה מהם היו דועכים בכל מסלול דעיכה?

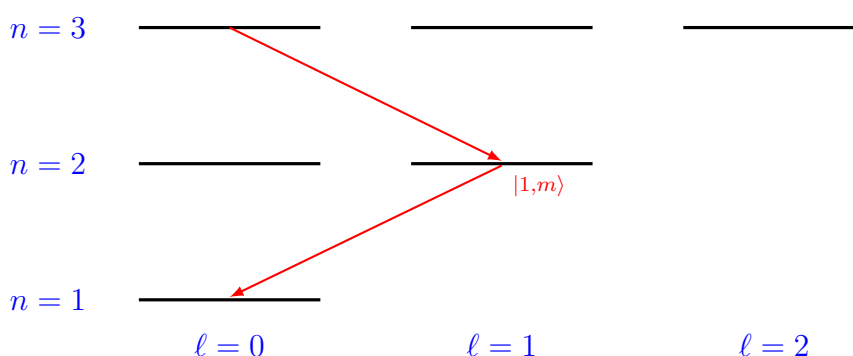
ג. מהו זמן החיים של המצב המעורר?

א. אטום המימן דועך בפליטה ספונטנית של פוטון בכל שלב. נמצא את מסלולי הדעיכה ע"י שימוש בכללי הברירה של מעברי דיפול חשמלי. לפי כלל הזהב של פרמי,

$$\Gamma_{|n\ell m\rangle \rightarrow |n'\ell' m'\rangle} \propto |\langle n'\ell' m' | \epsilon \cdot \mathbf{r} | n\ell m \rangle|^2 \propto |\langle n'\ell' m' | r_q^{(1)} | n\ell m \rangle|^2 \quad (2.1)$$

מזוגיות $\Delta\ell$ מספר אי-זוגי, וממשפט ויגנר-אקרט $\Delta m = 0, \pm 1$ ו- $\Delta\ell = \pm 1$ ובסה"כ $\Delta\ell = \pm 1$. בכל שלב בדעיכה נרד לרמת אנרגיה נמוכה יותר $n' < n$ (משימור אנרגיה), ולכן מסלולי הדעיכה האפשריים של $|300\rangle$ הם

$$|300\rangle \rightarrow \{|211\rangle, |210\rangle, |21, -1\rangle\} \rightarrow |100\rangle \quad (2.2)$$



איור 1: מסלולי הדעיכה של $|300\rangle$ באטום המימן.

ב. כמות האטומים שידעכו בכל מסלול נקבעת לפי קצב הדעיכה של אותו מסלול, כלומר Γ_m כאשר $m = 0, \pm 1$. נחשב את היחס ביניהם.

ציפיה: המצב ההתחלתי $|300\rangle$ הוא ספרי-סימטרי $\psi_{300}(\mathbf{r}) = \psi_{300}(r)$, ולכן אין סיבה שכאשר ידעך יעדיף את $m = 1$ על-פני $m = 0$ או $m = -1$ – ההבדל בין המצבים האלו זה רק בחירת מערכת צירים, שהיא שרירותית בבעיה ספרי-סימטרית. בנוסף על כך, הפליטה ספונטנית, ולכן לפוטון הנפלט לא יהיה כיוון $\hat{\mathbf{k}}$ מועדף גם כן. בסה"כ אנחנו מצפים ש- $\Gamma_1 = \Gamma_0 = \Gamma_{-1}$, כלומר $1/3$ מהאטומים ידעכו בכל מסלול.

נחשב במפורש את קצב המעברים ממצב $|i\rangle = |300\rangle$ למצב $|f\rangle = |21m\rangle$ בפליטת פוטון בודד בקירוב הדיפול. הפוטון נפלט באנרגיית העירור בין הרמות $n = 3$ ו- $n = 2$,

$$\Delta E = E_3 - E_2 = \frac{5}{72} \frac{e^2}{a_0} \quad (2.3)$$

הפוטון יפלט בתדירות $\omega = \Delta E/\hbar$ ווקטור גל $k_0 \equiv |\mathbf{k}| = \omega/c = \Delta E/\hbar c$. הגודל של \mathbf{k} קבוע, אבל $\hat{\mathbf{k}}$ לא מוגבל. לכן גם כיווני הקיטובים $\epsilon^{(\lambda)}$ לא מוגבלים וצריך לסכום על כל האפשרויות ($\lambda = 1, 2$). אם כך, לפי כלל הזהב של פרמי

$$\begin{aligned}\Gamma_{|300\rangle \rightarrow |21m\rangle}^{\text{dip.}} &= \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{e\omega A_0}{c} \right)^2 |\epsilon^{(\lambda)} \cdot \langle 21m|\mathbf{r}|300\rangle|^2 \delta(E_2 - E_3 + \hbar\omega) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{e\omega A_0}{c} \right)^2 \sum_{\lambda=1,2} \sum_{\mathbf{k}} |\epsilon^{(\lambda)} \cdot \langle 21m|\mathbf{r}|300\rangle|^2 \frac{1}{\hbar c} \delta(k - k_0) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{e\omega A_0}{c} \right)^2 \sum_{\lambda=1,2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int |\epsilon^{(\lambda)} \cdot \langle 21m|\mathbf{r}|300\rangle|^2 \frac{1}{\hbar c} \delta(k - k_0) d^3k\end{aligned}\quad (2.4)$$

בשלב האחרון עברנו לגבול הרצף $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k$. נחשב קודם את אלמנט המטריצה בהצגה הכדורית של הוקטור $\mathbf{r} = r_q^{(1)}$ (כמובן ש- $q = m$ מכללי הברירה):

$$\langle 21m|r_m^{(1)}|300\rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \underbrace{\int R_{21}(r) r R_{30}(r) r^2 dr}_{\mathcal{R}} \underbrace{\int Y_m^{(1)*} Y_m^{(1)} Y_0^{(0)} d\Omega}_{1/\sqrt{4\pi}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \mathcal{R} \quad (2.5)$$

כצפוי, אלמנט המטריצה זהה לכל m (חשבו מה היינו מקבלים ממשפט ויגנר-אקרט). בתרגום לרכיבים הקרטזיים נקבל

$$\langle 210|\mathbf{r}|300\rangle = \frac{\mathcal{R}}{\sqrt{3}} \hat{\mathbf{z}}, \quad \langle 21, \pm 1|\mathbf{r}|300\rangle = \mp \frac{\mathcal{R}}{\sqrt{3}} \frac{\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}} \quad (2.6)$$

נסמן $\mathcal{R}_m \equiv \langle 21m|\mathbf{r}|300\rangle$, ונזכר שבפליטה ספונטנית $A_0 = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k_0}} \frac{1}{V}$ ולכן

$$\begin{aligned}\Gamma_{|300\rangle \rightarrow |21m\rangle}^{\text{dip.}} &= \frac{V}{c} \left(\frac{ek_0}{2\pi\hbar} \right)^2 A_0^2 \sum_{\lambda=1,2} \int |\epsilon^{(\lambda)} \cdot \mathcal{R}_m|^2 \delta(k - k_0) k^2 dk d\Omega \\ &= \frac{e^2 k_0^3}{2\pi\hbar} \int \sum_{\lambda=1,2} |\epsilon^{(\lambda)} \cdot \mathcal{R}_m|^2 d\Omega\end{aligned}\quad (2.7)$$

נזכיר שגל א"מ הוא גל רוחבי ולכן $\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)} \perp \hat{\mathbf{k}}$. שימו לב שהשלשה $(\hat{\mathbf{k}}, \epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)})$ היא בסיס אורתונורמלי לכל כיווני המרחב, ולכן אם נשתמש בהטלות של \mathcal{R}_m בבסיס זה נקבל

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_m &= (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathcal{R}_m) \hat{\mathbf{k}} + (\epsilon^{(1)} \cdot \mathcal{R}_m) \epsilon^{(1)} + (\epsilon^{(2)} \cdot \mathcal{R}_m) \epsilon^{(2)} \\ \Rightarrow |\mathcal{R}_m|^2 &= (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathcal{R}_m)^2 + \sum_{\lambda=1,2} |\epsilon^{(\lambda)} \cdot \mathcal{R}_m|^2\end{aligned}\quad (2.8)$$

קיבלנו

$$\Gamma_{|300\rangle \rightarrow |21m\rangle}^{\text{dip.}} = \frac{e^2 k_0^3}{2\pi\hbar} \int \left[|\mathcal{R}_m|^2 - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathcal{R}_m)^2 \right] d\Omega = \frac{e^2 k_0^3}{2\pi\hbar} |\mathcal{R}_m|^2 \int \left[1 - (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathcal{R}}_m)^2 \right] d\Omega \quad (2.9)$$

אנחנו מזהים ש- $|\mathcal{R}_m|^2 = \mathcal{R}^2/3$, ונותר רק לחשב את האינטגרל הזוויתי. נעבוד במערכת צירים כדורית שבה $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{z}$ ו- θ היא הזווית בין $\hat{\mathbf{k}}$ ל- \mathcal{R}_m ,

$$\Gamma_{|300\rangle \rightarrow |21m\rangle}^{\text{dip.}} = \frac{e^2 k_0^3}{2\pi\hbar} \cdot \frac{\mathcal{R}^2}{3} \int (1 - \cos^2 \theta) d\Omega = \frac{e^2 k_0^3}{3\hbar} \mathcal{R}^2 \underbrace{\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx}_{4/3} = \frac{4e^2 k_0^3}{9\hbar} \mathcal{R}^2 \quad (2.10)$$

כצפוי, קיבלנו ש- $\Gamma_1 = \Gamma_0 = \Gamma_{-1}$ ולכן $1/3$ מהאטומים ידעכו בכל מסלול כי ההסתברות זהה בכל אחד.

ג. זמן החיים של $|300\rangle$ נתון ע"י סכום קצבי הדעיכה שלו,

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_{\text{tot}}} = \frac{1}{\Gamma_1 + \Gamma_0 + \Gamma_{-1}} = \frac{1}{3\Gamma_{|300\rangle \rightarrow |21m\rangle}^{\text{dip.}}} = \frac{3\hbar}{4e^2 k_0^3 \mathcal{R}^2} \quad (2.11)$$

נותר רק לחשב את \mathcal{R} . הפונקציות הרדיאליות המתאימות הן

$$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2a_0} \right)^{3/2} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}, \quad R_{30}(r) = 2 \left(\frac{1}{3a_0} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2r^2}{27a_0^2} \right) e^{-r/3a_0} \quad (2.12)$$

נעבור למשתנים חסרי מימדים $\rho = 5r/6a_0$ ונעזר באינטגרל $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$

$$\mathcal{R} = \frac{a_0}{9\sqrt{2}} \left(\frac{6}{5} \right)^5 \int \left(\rho^4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \rho^5 + \frac{2}{27} \cdot \left(\frac{6}{5} \right)^2 \rho^6 \right) e^{-\rho} d\rho = \frac{4!}{9\sqrt{2}} \frac{6^5}{5^6} a_0 = \frac{2^7 3^4}{5^6} \sqrt{2} a_0 \quad (2.13)$$

ולכן

$$\tau = \frac{3}{8} \left(\frac{5^6}{2^7 3^4} \right)^2 \frac{c\hbar}{e^2} \cdot \frac{1}{(k_0 a_0)^3} \cdot \frac{a_0}{c} = \frac{3}{8} \left(\frac{5^6}{2^7 3^4} \right)^2 \left(\frac{72}{5} \right)^3 \frac{1}{\alpha^4} \cdot \frac{a_0}{c} \simeq 1.58 \times 10^{-7} \text{ s} \quad (2.14)$$

זמן החיים של המצב $|300\rangle$ הוא עשירית מיקרו-שנייה.

תרגיל 2

להמילטוניאן של אטום מימן (התעלמו מספין) מוסיפים הפרעה חלשה,

$$V = \frac{b}{a_0^2} xy \quad (2.15)$$

כאשר b הוא קבוע חיובי ו- a_0 הוא רדיוס בוהר.

א. מהם כללי הברירה עבורם אלמנט המטריצה $\langle m'|V|m \rangle$ לא מתאפס? $|m\rangle$ הם המצבים העצמיים של L_z

ב. נתון $\langle 21, -1|V|211 \rangle = 6ib$ (בסימן הרגיל $\langle n\ell m \rangle$). חשבו את התיקון מסדר ראשון בתורת ההפרעות לרמת האנרגיה $E_{n=2}$.

ג. בזמן שההפרעה החלשה פועלת על האטום (כך שניתן להניח שרק סדר ראשון בתורת ההפרעות תורם), מפזרים עליו קרינה המקוטבת בכיוון \hat{z} ובעלת ספקטרום רחב של אנרגיות. לכמה פסי בליעה נצפה במעבר $n = 1 \rightarrow 2$ בקירוב הדיפול?

א. נכתוב את ההפרעה בקואורדינטות כדוריות ונזהה את הרכיבים הכדוריים של הטנזור,

$$V \propto xy \propto \sin^2 \theta \sin 2\phi \propto \sin^2 \theta (e^{2i\phi} - e^{-2i\phi}) \propto Y_2^{(2)} - Y_2^{(-2)} \quad (2.16)$$

שואלים פה רק על כללי הברירה של m , ולכן נוכל להשתמש רק במשפט ויגנר-אקרט שקובע

$$\Delta m = \pm 2 \quad (2.17)$$

ב. ברמת האנרגיה $E_{n=2}$ יש 4 מצבים מנוונים, $D = \{|00\rangle, |11\rangle, |10\rangle, |1, -1\rangle\}$. לכן עלינו קודם כל ללכסן את המטריצה V_D . לפי הנתון $\langle 21, -1|V|211 \rangle = 6ib$ וכללי הברירה $\Delta m = \pm 2$ נקבל כי

$$V_D = \begin{pmatrix} \langle 00| & |00\rangle & |11\rangle & |10\rangle & |1\bar{1}\rangle \\ \langle 11| & 0 & 0 & 0 & -6ib \\ \langle 10| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle 1\bar{1}| & 0 & 6ib & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{eigenstates: } \begin{cases} |00\rangle \\ |10\rangle \\ |1+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + i|1\bar{1}\rangle) \\ |1-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - i|1\bar{1}\rangle) \end{cases} \quad (2.18)$$

והע"ע של V_D הם התיקונים מסדר ראשון לאנרגיה,

$$\Delta E_{|00\rangle}^{(1)} = \Delta E_{|10\rangle}^{(1)} = 0, \quad \Delta E_{|1\pm\rangle}^{(1)} = \pm 6b \quad (2.19)$$

ג. כל קו בליעה מתאים למעבר $n = 1 \rightarrow 2$ עם אנרגיה שונה, אחרי ההפרעה. מכיוון שהקרינה מקוטבת בכיוון \hat{z} אנחנו צריכים רק את רכיב זה במעבר הדיפול,

$$\Gamma \propto |\langle 2\ell m | z | 100 \rangle|^2 \quad (2.20)$$

כללי הברירה של הדיפול (זוגיות ומשפט ויגנר-אקרט) בוררים $m = 0$ ו- $\ell = 1$, ולכן רק המעבר $|100\rangle \rightarrow |210\rangle$ אפשרי. אחרי ההפרעה המצב $|210\rangle$ מתאים עדיין לרמת אנרגיה יחידה, ולכן יש רק פס בליעה אחד.