

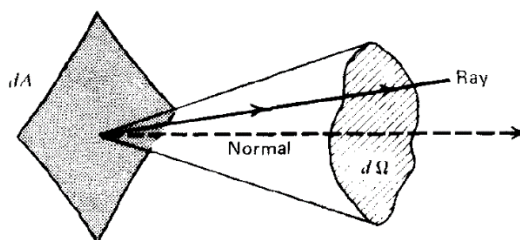
מבוא לאסטרופיזיקה – תרגיל בית 1

1. (בפתרון שאלה זו מומלץ להיעזר בפרק 1 בספר (Rybicki & Lightman) גוף שחור: ספקטרום של גוף שחור נוצר כאשר חומר וקרינה נמצאים בשיווי משקל תרמודינמי. צפיפות האנרגיה הנפחית ליחידת תדר של קרינת גוף שחור הינה

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

כאשר ν הינו התדר, c מהירות האור, h קבוע פלאנק, k קבוע בולצמן, ו- T הטמפרטורה.

אנו מעוניינים לאפיין את האנרגיה הנישאת ע"י קרני אור הנעות בכיוון כלשהו \hat{n} . נביט במשטח בעל גודל אינפיניטסימלי dA הניצב ל- \hat{n} ובאלמנט זווית מרחבית $d\Omega$ סביב \hat{n} ונגדיר את I_ν ככמות האנרגיה ליחידת זמן dt ליחידת תדר $d\nu$ העוברת דרך dA בכיוון $d\Omega$ (ראו איור).



א. שטף האנרגיה I_ν של גוף שחור מוגדר להיות $I_\nu \equiv B_\nu$. השתמשו בצפיפות האנרגיה הנפחית u_ν והניחו כי הקרינה איזוטרופית על מנת לקבל את B_ν .

ב. מצאו ביטוי לערכו של B_ν בגבול ($Wien\ tail\ h\nu \gg kT$) ובגבול $h\nu \ll kT$ (גבול ריילי-ג'ינס).

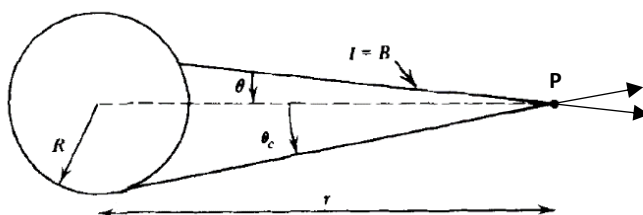
ג. מצאו את שטף האנרגיה הכללי ליחידת תדר העובר מצד אחד לצד שני של אלמנט שטח אינפיניטסימלי (השטף מגיע כולו מאותו צד של המשטח), f_ν , על ידי אינטגרציה זוויתית על B_ν . מהן היחידות של f_ν ?

ד. ניתן לתאר כוכב כגוף הפולט בקירוב קרינת גוף שחור משפתו. עבור כוכב כדורי ברדיוס R הפולט קרינת גוף שחור בטמפ' T בצורה איזוטרופית. מצאו את סך שטף האנרגיה ליח' תדר הנפלטת מהכוכב, L_ν . מהן היחידות של L_ν ?

ה. מצאו את שטף האנרגיה ליחידת שטח ליח' תדר המגיע לצופה הנמצא במרחק r מהכוכב, F_ν .

ו. באיור הבא נמצא הצופה בנקודה P במרחק r ממרכז הכוכב. קרני אור מהכוכב מגיעות לצופה בכל הזוויות $0 < \theta < \theta_c$ ו- $0 < \varphi < 2\pi$. מצאו את השטף המגיע לצופה (אנרגיה ליחידת זמן ליחידת שטח העוברת דרך אלמנט שטח הניצב לקו שמחבר את P עם מרכז הכוכב) ע"י אינטגרציה על הזווית המרחבית $d\Omega$ כפי שנמדדת מהצופה. מהי התוצאה המתקבלת כאשר $r = R$? השוו את תשובתכם לתוצאות שקיבלתם בסעיפים ג' ו'ה'.

הדרכה: שטף האנרגיה לאורך קרן (שטף האנרגיה לזווית מרחבית) נשמר כשהקרן עוברת בריק (ראו תת פרק 1.3 ב-Rybicki & Lightman) ולכן ניתן לבצע אינטגרל על השטף ליחידת זמן ליחידת זווית מרחבית המגיע מנקודות שונות על פני הכוכב לצופה כאשר הזווית נמדדת בין הקרן לאלמנט השטח בנקודה P . שימו לב לגבולות האינטגרציה!



ז. בצעו אינטגרציה על הצפיפות האנרגיה הנפחית ליח' תדר של גוף שחור, u_ν , על מנת לקבל את חוק סטפן-בולצמן המתאר את צפיפות האנרגיה בכל התדרים כפונקציה של הטמפרטורה, $u(T)$. היעזרו באינטגרל בוז-איינשטיין: $\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$.

ח. השתמשו בסעיף ז' על מנת למצוא את סך שטף האנרגיה (בכל התדירויות) משפת הכוכב $L(R, T)$.

ט. הראו כי אם מודדים את יחס השטפים של קרינת גוף שחור מכוכב בשתי תדירויות שונות ב-Wien tail, אז בעיקרון ניתן למצוא את הטמפרטורה בשפת הכוכב ללא כל מידע נוסף. כמו כן הראו כי לא ניתן לעשות זאת אם השטפים נמצאים בגבול ריילי ג'ינס.

י. מסעיף ט ניתן לגזור תובנה כללית יותר. נתונה מערכת כלשהי ואנו מודדים בה תלות בין שני גדלים במערכת, A ו-B. מה ניתן ללמוד על סקלות אופיניות של המערכת במקרה שבו קיימת תלות אקספוננציאלית $A \propto e^{B/B_0}$ ומה ניתן ללמוד במקרה שיש חוק חזקה מהצורה $A \propto B^\alpha$?

שימו לב – שאלת חובה: בשאלה זו תידרשו לבצע חישובים נומרים. ניתן לחשב בכל כלי שתמצאו.

2. נעריך את טמפרטורת שיווי המשקל של שפת כדור הארץ, T_E , בהנחה שכדה"א מחומם ע"י קרינת גוף שחור של השמש, בטמפרטורה של 5,800 K ומתקרר ע"י פליטת קרינת גוף שחור בטמפרטורה T_E .

א. בהינתן בהירות השמש $L_\odot = 3.83 \times 10^{33} \frac{\text{erg}}{\text{s}}$ המרחק הממוצע של כדה"א מהשמש, $1 AU = 1.5 \times 10^{13} \text{ cm}$ ורדיוס כדה"א $R_\oplus = 6,371 \text{ km}$, העריכו את שטף האנרגיה הכולל המגיע לשפתו.

ב. 30% מהאנרגיה המגיעה לכדה"א מהשמש מוחזרת מבלי להיבלע, למשל כתוצאה מנוכחות עננים, גודל זה נקרא אלבידו. 70% הנותרים נבלעים ומחממים את כדה"א. השוו את קצב החימום של כדה"א מהשמש לקצב בו הוא פולט את הקרינה חזרה כגוף שחור, וחלצו את טמפרטורת שיווי המשקל של שפת כדה"א. השוו את טמפרטורה זו לטמפרטורת כדה"א הנמדדת.

ג. אפקט החממה: האטמוספירה אטומה לחלק מאורכי הגל, והקרינה עוברת רק בתדרים בהם ישנם "חלונות". אנו יודעים כי קיים חלון סביב התחום הנראה בזכותו אנו מסוגלים לראות את אור השמש. נעריך כי חלון זה נמצא בתחום התדרים 1,000-300 ננומטר וכי האטמוספירה שקופה לחלוטין לכל האור בחלון (עד כדי האלבידו), ואטומה לחלוטין לכל התדרים מחוץ לחלון. חיזרו על החישוב של סעיף ב' והראו כי אילו חלון זה היה החלון היחיד, כדה"א לא היה תומך חיים. (שימו לב – בסעיף זה יש לחשב את הפיתרון נומרי בכל כלי שתמצאו).

ד. ג'ורג' סימפסון גילה את חשיבותם של חלונות אטמוספיריים נוספים באינפרא-אדום. חיזרו על החישוב פעם נוספת, הפעם תוך התחשבות גם בחלון בתחום 8-12 מיקרון. השוו את תשובתכם לטמפרטורת כדה"א הנמדדת. (גם בסעיף זה יש לחשב באופן נומרי)

הערה: חישוב זה הינו תיאור פשטני ולא מדויק של אפקט החממה והשפעתו על אקלים כדה"א, אולם הוא מדגים את האפקט היטב.

3. משוואות מצב של גז אידיאלי:

א. רשמו ביטוי לאנרגיה הקינטית של חלקיק כפונקציה של התנע והמהירות של החלקיק בגבול היחסותי ובגבול הלא יחסותי.

ב. רשמו ביטוי אינטגרלי לאנרגיה הקינטית הכוללת U במערכת. השתמשו בצפיפות המספרית של חלקיקים במערכת נתונה במרחב התנע $n(\vec{p})$ המוגדרת על ידי

$$n = \int n(\vec{p}) d^3p$$

ובאנרגיה כפונקציה של התנע $E_k(\vec{p})$.

ג. הניחו תנועה אקראית ורשמו ביטוי אינטגרלי ללחץ הכולל במערכת P . בטאו את תשובתכם באמצעות מהירויות החלקיקים, צפיפותם והתנע שלהם. ניתן להיעזר בכך שהלחץ הוא הכוח ליחידת שטח שהחלקיקים היו מפעילים על אלמנט שטח דמיוני לו היו מתנגשים בו התנגשות אלסטית.

ד. הציבו את תשובתכם לסעיף א' בביטויים שמצאתם בסעיפים ב' וג' והשוו אותם על מנת לקבל את משוואת המצב בגבול היחסותי והלא יחסותי, קרי התלות הפונקציונלית של האנרגיה U בלחץ P .

ה. משוואת מצב של גז אידיאלי הינה: $P = (\gamma - 1)u$, כאשר γ האינדקס האדיאבטי. השתמשו בתשובתכם לסעיף ד' ומצאו את האינדקס האדיאבטי של גז יחסותי.

ו. השוו בין התוצאה שקיבלתם לקשר בין אנרגיה ולחץ של גז פוטונים (גוף שחור).

ז. השתמשו במשוואת המצב ובחוק הראשון של התרמודינמיקה על מנת להראות שבתהליך אדיאבטי מתקיים

$$PV^\gamma = \text{const.}$$