$$V(t) = -eE_0 e^{-\gamma t} z$$ 1

$$\langle 21m' | V(t) | 100 \rangle = -eE_0 e^{-\gamma t} \langle 21m' | z | 100 \rangle$$

מדובר בחיבור תנ״ז $1 \otimes 0$ ולכן זה לא מתאפס.

בגלל ע״פ WE $\quad m' = 0$

$$\langle 210 | z | 100 \rangle = \int R_{21} Y_{10}\, r\cos\theta\, R_{10} Y_{00}\, r^2\, dr\, d\Omega$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}} \left(\frac{1}{2a_0}\right)^{3/2} \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}} \frac{1}{\cancel{2}} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos\theta\, r\cos\theta\, \cancel{2} \left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-\frac{r}{a_0}} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$\frac{2}{2^{5/2}} \quad 1 - \frac{5}{2} \quad -\frac{3}{2}$

$$= \frac{1}{2^{3/2}} \frac{1}{a_0^4} \int r^4 e^{-\frac{3}{2}\frac{r}{a_0}} \cos^2\theta \sin\theta\, dr\, d\theta$$

$$(\cos^3\theta)' = -3\cos^2\theta\sin\theta$$

ולכן האינטגרל על θ:

$$-\frac{1}{3}\left(\cos^3\theta\right)_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{3}\left[(-1)^3 - 1\right] = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}\, 3 a_0^4} \int r^4 e^{-\frac{3}{2}\frac{r}{a_0}}\, dr = \frac{1}{\sqrt{2}\, 3a_0^4} \frac{2^8 a_0^5}{3^4} = \frac{2^7\sqrt{2}\, a_0}{3^5}$$

$$P_{1\to 2} = \left| \frac{1}{i\hbar} \int_0^\infty \left(\frac{2^7\sqrt{2}\, a_0}{3^5}\right) (-eE_0 e^{-\gamma\tau}) e^{i\omega\tau}\, d\tau \right|^2$$

$$= \frac{2^{15} a_0^2}{3^{10} \hbar^2} e^2 E_0^2 \left| \int_0^\infty e^{\tau(i\omega - \gamma)}\, d\tau \right|^2$$

$$\int = \frac{1}{i\omega - \gamma} e^{\tau(i\omega-\gamma)} \Big|_0^\infty = \frac{1}{i\omega - \gamma}$$

והגודל של האינטגרל $\frac{1}{\sqrt{\omega^2+\gamma^2}}$ לכן

$$\boxed{P_{1\to 2} = e^2 E_0^2 \frac{2^{15} a_0^2}{3^{10}\hbar^2 (\omega^2+\gamma^2)}}$$

$$\langle m | \lambda X \cos(\omega_1 t) e^{-\alpha t} | n \rangle$$

(2)

$$\lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos(\omega_1 t) e^{-\alpha t} \underbrace{\langle m | (a^\dagger + a) | n \rangle}_{\sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\,\delta_{m,n-1}}$$

$$P_{n\to m} = \frac{\lambda^2}{\hbar^2} \frac{\hbar}{2m\omega} \left| \int_0^\infty \cos(\omega_1 \tau) e^{\tau(i\omega_{nm} - \alpha)} \left(\sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\,\delta_{m,n-1}\right) d\tau \right|^2$$

$$= \frac{\lambda^2}{2m\omega\hbar} \left(\sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1} + \sqrt{n}\,\delta_{m,n-1}\right)^2 \left| \int_0^\infty \frac{e^{\omega_1 \tau} + e^{-\omega_1 \tau}}{2} e^{\tau(i\omega_{nm} - \alpha)} d\tau \right|^2$$

$$e^{\tau(i\omega_{nm} - \alpha + \omega_1)} + e^{\tau(i\omega_{nm} - \alpha - \omega_1)}$$

$$\left| \frac{1}{i\omega_{nm} - \alpha + \omega_1} + \frac{1}{i\omega_{nm} - \alpha - \omega_1} \right|^2$$

$$\frac{i\omega_n - \alpha + \omega_1 + i\omega_{nm} - \alpha - \omega_1}{(-\alpha + \omega_1 + i\omega_{nm})(-(\alpha + \omega_1) + i\omega_{nm})}$$

מתבטלים החזי לה קוסינוס

$$\frac{2(i\omega_{nm} - \alpha)}{-(\alpha + \omega_1)(\omega_1 - \alpha) + i\omega_{nm}(\omega_1 - \alpha) - i\omega_{nm}(\alpha + \omega_1) - \omega_{nm}^2}$$

$$\alpha - \omega_1$$

$$\frac{i\omega_{nm} - \alpha}{(\alpha^2 - \omega_1^2) + i\omega_{nm}(\omega_1 - \alpha - \alpha - \omega_1) - \omega_{nm}^2}$$

$$-2i\omega_{nm}\alpha$$

$$\left| \frac{i\omega_{nm} - \alpha}{(\alpha - i\omega_{nm})^2 - \omega_1^2} \right|^2$$

$$\omega_{nm} = \hbar\omega\left(n + \tfrac{1}{2} - m - \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\hbar^2\omega^2(n-m)^2 + \alpha^2$$

$$\frac{1}{\gamma}\int_0^\infty e^{\tau(i\omega_{nm}-\alpha+\omega_1)}+e^{\tau(i\omega_{nm}-\alpha-\omega_1)}\,d\tau$$

$$=\frac{1}{\gamma}\left[\frac{e^{\tau(i\omega_{nm}-\alpha+\omega_1)}}{i\omega_{nm}-\alpha+\omega_1}+\frac{e^{\tau(i\omega_{nm}-\alpha-\omega_1)}}{i\omega_{nm}-\alpha-\omega_1}\right]_0^\infty$$

הגודל של הקספוננט
המרוכב הוא 1

$$=\frac{1}{\gamma}\left[\frac{\cancel{e^{i\omega_{nm}\infty}}\,e^{\infty(-\alpha+\omega_1)}}{i\omega_{nm}-\alpha+\omega_1}+\frac{\cancel{e^{i\omega_{nm}\infty}}\,e^{\infty(-\alpha-\omega_1)}}{i\omega_{nm}-\alpha-\omega_1}-\frac{1}{i\omega_{nm}-\alpha+\omega_1}-\frac{1}{i\omega_{nm}-\alpha-\omega_1}\right]$$

3. **(שאלת חובה)**
אלקטרון מאולץ לנוע על פני כדור ברדיוס R.

(א) כתבו את ההמילטוניאן של הבעיה. מהו מצב היסוד ומהי אנרגית היסוד?

(ב) בזמן $t \to -\infty$ מדליקים הפרעה

$$V(t) = \epsilon \frac{\tau^2}{t^2+\tau^2}\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\left(3\cos^2\theta - 1\right).$$

אם האלקטרון התחיל ברמת היסוד, מהם המצביים הסופיים אליהם יכול להגיע האלקטרון כתוצאה מההפרעה?

(ג) מצאו את ההסתברות של כל אחד מהמעברים האפשריים עבור $t \to \infty$.

א)

$$H = \frac{L^2}{2mR^2}$$

$$E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mR^2}$$

מצב היסוד עקיר $l=0$

$$E_0 = 0$$

ב)

$$V(t) = \frac{\epsilon}{\pi}\frac{\tau^2}{t^2+\tau^2}Y_{20}$$

המצב ההתחלתי הוא: $|00\rangle = Y_{00}$

$$\langle lm|V(t)|00\rangle = \frac{\epsilon}{\pi}\frac{\tau^2}{t^2+\tau^2}\langle lm|Y_0^{(2)}|00\rangle$$

לפי WE: $l:\ 0\otimes 2 = 2$

$m=0$

$$\Rightarrow \langle 20|Y_0^{(2)}|00\rangle = \int Y_{20}^* Y_{20} Y_{00}\, d\Omega$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

אפשר לעבור רק ל $|20\rangle$:

$$P_{|00\rangle\to|20\rangle} = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\epsilon}{\pi}\frac{\tau^2}{t^2+\tau^2}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{i\omega_{20}t}\,dt\right|^2$$

$$= \frac{\epsilon^2}{\hbar^2}\frac{\tau^4}{4\pi^3}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega_{20}t}}{t^2+\tau^2}\,dt\right|^2$$

אם נרצה חייבים לפתור אינטגרל במישור

$\frac{e^{i\omega_{mn}t}}{(t+i\tau)(t-i\tau)}$ המרוכב. נרחיב את האינטגרל מחצי ש

ונשים לב שהאינטגרל מתאים ללמה של ג'ורדן, ומכיוון

ש טרנספורם לסגור דרך המישור העליון, ונקבל

שהאינטגרל שווה ל: $2\pi i\,\mathrm{Res}\left\{\frac{e^{i\omega_{0r}t}}{t^2+\tau^2},\ t=i\tau\right\}$

$$\mathrm{Res}=\frac{e^{i\omega_{0r}i\tau}}{2i\tau}=\frac{e^{-\omega_{0r}\tau}}{2i\tau}$$

$$\Rightarrow\int=\frac{\pi}{\tau}e^{-\omega_{0r}\tau}$$

$$\Rightarrow\quad P=\frac{\varepsilon^2}{\hbar^2}\frac{\overset{\tau^2}{\cancel{\tau^4}}}{4\pi\hbar}\cancel{\frac{\pi^2}{\tau^2}}\,e^{-2\omega_{0r}\tau}$$

$$\omega_{0r}=\frac{1}{\hbar}(E_0-E_r)=-\cancel{\hbar}\,\frac{3\hbar}{mA^2}$$

$$\boxed{P_{|00\rangle\to|02\rangle}=\frac{\varepsilon^2\tau^2}{4\pi\hbar^2}e^{\frac{6\hbar}{mA^2}\tau}}$$

4) א)

$$H=\frac{(\bar p-\frac{e}{c}\bar A)^2}{2m}-\frac{e^2}{r}+g_e\frac{e}{2mc}\bar S\cdot\bar B$$

הצימוד עם השדה המגנטי הוא מאוד מהיר

$\bar p\cdot\bar A$ (מפריעות הסיבוביות) ולכן נזניח אותו.

הדיבר A^2 זניח כי A_0 קטנה.

ולכן נשארנו:

$$H\approx\underbrace{\frac{p^2}{2m}-\frac{e^2}{r}}_{H_0}+\underbrace{\frac{e}{mc}\bar A\cdot\bar p}_{V(t)}$$

ב) מדובר באותה הבעיה כמו בתרגיל,

מכיוון שאורך הגל גדול מאוד מרדיוס בוהר

ניתן לקרב $\bar{A} \approx \bar{A}_0 e^{i\omega t}$

$$\Rightarrow V(t) = \frac{e}{mc}\bar{A}_0 \cdot \bar{p}\, e^{i\omega t}$$

עם קצב לפי פרמי הפוטונים עבור $\bar{k}$ מסוים

$$\Gamma_{|100\rangle \to |\bar{k}\rangle} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle \bar{k}|\frac{e}{mc}\bar{A}_0\cdot\bar{p}|100\rangle\right|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega)$$

נתחיל לחשב באמת האינטגרל, נשתמש בקירוב הדיפול:

$$\Rightarrow \frac{e\hbar}{mc}\bar{A}_0\cdot\bar{k}\,\langle\bar{k}|100\rangle$$

$$\langle\bar{k}|100\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}\int e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}}\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}e^{-\frac{r}{a_0}}\,d^3r$$

$$= 2\sqrt{\frac{\pi}{V}}\frac{1}{\sqrt{a^3}}\int e^{ik_f r\cos\theta}e^{-\frac{r}{a_0}}r^2\,d\cos\theta$$

$$= 2\sqrt{\frac{\pi}{a^3V}}\int e^{-\frac{r}{a_0}}r^2\left.\frac{e^{ik_f r\cos\theta}}{ik_f r}\right|_1^{-1}dr$$

$$= 2\sqrt{\frac{\pi}{a^3V}}\frac{1}{ik_f}\int e^{-\frac{r}{a_0}}r\left(e^{ik_f r}-e^{-ik_f r}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \langle k|100\rangle = \sqrt{\frac{\pi a_0^3}{V}}\,\frac{8}{[1+(k_f a_0)^2]^2}$$

⇐ ולכן המטריצה:

$$\frac{8e\hbar}{mc}\sqrt{\frac{\pi a_0^3}{V}}\,\frac{\bar{A}_0\cdot\bar{k}}{[1+(k_f a_0)^2]^2}$$

והקצב הכולל יקבל אינטגרל על הקצבים על הכיוונים

$$\text{קצב} = \frac{V}{(2\pi)^3}\frac{2\pi}{\hbar}\iint\left[\frac{8e\hbar}{mc}\sqrt{\frac{\pi a_0^3}{V}}\,\frac{\bar{A}_0\cdot\bar{k}}{[1+(k_f a_0)^2]^2}\right]^2\delta(E_f-E_i-\hbar\omega)\,k^2\,dk\,d\Omega$$

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \frac{1}{\pi^3}\,\frac{8e^2\cancel{\hbar^2}\,\cancel{\pi}a_0^3}{m^2c^2}\,\frac{1}{(1+k_f^2a_0^2)^4}\,\frac{\pi}{4\hbar}\int A_0^2k_f^2\cos^2\theta\,\frac{m}{\cancel{\hbar}k_f}\,\delta(k-k_f)\,k^2\,dk$$

$$= \frac{16e^2a_0^3}{\pi\hbar c^2}\,\frac{A_0^2k_f^3}{(1+k_f^2a_0^2)^4}\cos^2\theta$$

אחרי כל הכוונים θ:

$$\int_0^\pi \cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\Gamma_1 = \frac{8e^2a_0^3}{\hbar c^2}\,\frac{A_0^2k_f^3}{(1+k_f^2a_0^2)^4}$$

וכל מה שנותר זה להכפיל ב N_0, כדור מס' האטומים לקבל

$$\Gamma_{N_0} = N_0\Gamma_1$$

ג) אחרי זמן t נפלו $\Gamma_{N_0}t$ אטו'

ולכן נשאר $e^{\Gamma_{N_0}t}$ אחוז

ולכן האחוז הכולל הוא $Q(t) = e^{\Gamma_{N_0}t}$