① ננסה

$\theta = \frac{\pi}{2n}$

ונבחר $n=2$:

$\theta = \frac{\pi}{4}$

$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

50%

0

בהפעלה הבאה נקבל $|1\rangle$ ואז אם זה
מתפוצץ אז זה התקין אבל אם זה לא
התקין אז זה דפוק. לכן

$$\boxed{\begin{aligned} &\theta = \frac{\pi}{2n} \\ &1 \Rightarrow \text{dud} \\ &0 \Rightarrow \text{not dud} \end{aligned}}$$

ובאמת יש הסתברות של 50% (עבור $n=2$)

אם זה לא פצצה זה כמו להפעיל n
פעמים את הסיבוב

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{n \text{ פעמים}}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

נרצה בסוף $n\theta = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow R_n^n |0\rangle = |1\rangle$

ולכן dud תמיד יזוהה כ dud.

אחרי סיבוב אחד:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta|1\rangle$$

ואם כן פצצה אז הסיכוי שהיא תתפוצץ $\sin^2\theta$

ושהיא לא תתפוצץ $\cos^2\theta$

אם היא לא התפוצצה
אז תמיד ממשיכים הלאה
וזה עם $|0\rangle$, לכן מניחים
לאותו מצב
$\cos^2\theta \approx 1-\frac{1}{2}\theta^2$
ולכן הסיכוי שזה $|0\rangle$
אחרי n פעמים
זה $1-\frac{1}{2}\frac{(\frac{\pi}{2})^2}{n}$

וזה הסיכוי לזיהוי נכון!

אם היא התפוצצה
אז נגמר
זה
$\sin^2\theta \approx \theta^2 = (\frac{\pi}{2n})^2$
עבור n
מספיק גדול
אבל עושים
זאת
n פעמים
ולכן
$\frac{(\frac{\pi}{2})^2}{n}$

ב

$$|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle + |11\rangle\right)$$

q_1 q_2

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \leftarrow q_3$$

א) נמדוד בבסיס Bell, כלומר נטיל על
המצבים

$$\langle B_{ab}| = X^a Z^b \otimes \mathbb{1}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 00| + \langle 11|\right)$$

מדובר בטלפורטציה קוונטית לכן אנחנו מתחילים

מתקבל:

$$|\psi\rangle|B_{00}\rangle = (\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|\underset{3\,2}{00}0\rangle+\beta|100\rangle+\alpha|011\rangle+\beta|111\rangle)$$

אז מודדים בבסיס Bell את $\underline{q3 \text{ -ו } q2}$

למדוד את הקיוביט של $|\psi\rangle$ ואת הקיוביט השני

של Alice:

$$(X_3^a Z_3^b)^\dagger = X_3^a Z_3^b$$

כל שנותר לנו לעשות: צריך להפעיל את ההופכיים שלהם

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle \underset{3\,2}{00}| + \langle \underset{3\,2}{11}|\right) Z_3^b X_3^a \otimes \mathbb{1}\, \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|000\rangle+\beta|100\rangle+\alpha|011\rangle+\beta|111\rangle)$$

הפעלה של הפוך
הכי ימני

נפעיל את האופרטורים על הזוג הימני

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle \underset{3\,2}{00}| + \langle 11|\right) Z_3^b\, \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|a00\rangle+\beta|\bar{a}00\rangle+\alpha|a11\rangle+\beta|\bar{a}11\rangle)$$

$$X|0\rangle = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = |1\rangle \qquad X = \text{bit flip}$$

$$X|1\rangle = |0\rangle$$

$$X^a|0\rangle = \begin{cases} \xrightarrow{a=1} |1\rangle = |a\rangle \\ \xrightarrow{a=0} |0\rangle = |a\rangle \end{cases} \qquad X^a|1\rangle = \begin{cases} \xrightarrow{a=1} |0\rangle = \bar{a} \\ \xrightarrow{a=0} |1\rangle = \bar{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad X^a|0\rangle = |a\rangle$$
$$X^a|1\rangle = |\bar{a}\rangle$$

נפעיל את Z_3^b:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle \underset{3\,2}{00}| + \langle 11|\right) \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\underset{(-1)^{ab}}{\alpha}|a00\rangle+\underset{(-1)^{\bar{a}b}}{\beta}|\bar{a}00\rangle+\underset{(-1)^{ab}}{\alpha}|a11\rangle+\underset{(-1)^{\bar{a}b}}{\beta}|\bar{a}11\rangle\Big)$$

6 סעיף ג':

$$\langle \underset{3\,2}{00}|\underset{3\,2\,1}{a00}\rangle = \bar{a}|0\rangle$$

$$\langle 00|\bar{a}00\rangle = a|0\rangle \qquad \langle 11|a11\rangle = a|1\rangle$$

$$\frac{1}{2}\left((-1)^{ab}\bar{a}\alpha|0\rangle+(-1)^{\bar{a}b}a\beta|0\rangle+(-1)^{ab}a\alpha|1\rangle+(-1)^{\bar{a}b}\bar{a}\beta|1\rangle\right)$$

כעת נשים לב שיש $\bar{a}, a$ גם בחזקה של (-1)

וגם שמכפל לכן נאפשר לצמצם

$$a=0 \Rightarrow \quad (-1)^0\cdot 1 = 1 \qquad (-1)^b\cdot 0=0$$
$$(-1)^0\cdot 0=0 \qquad (-1)^b\cdot 1=(-1)^b$$

$$a=1 \Rightarrow \quad (-1)^b\cdot 0=0 \qquad (-1)^0\cdot 1=1$$
$$(-1)^b\cdot 1=(-1)^b \qquad (-1)^0\cdot 0=0$$

כלומר היחידים בכל שינויים להיות תלויים ב-b

הם ה-$|1\rangle$-ים וה-$|0\rangle$-ים שכן תלויים בערך

של a לכן:

$$\frac{1}{2}\left(\bar{a}\alpha|0\rangle+a\beta|0\rangle+(-1)^b a\alpha|1\rangle+(-1)^b\bar{a}\beta|1\rangle\right)$$

ונרצה להגיע למצב $\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ לכן נוציא

גורם משותף:

$$\frac{1}{2}\left[a\left(\beta|0\rangle+(-1)^b\alpha|1\rangle\right)+\bar{a}\left(\alpha|0\rangle+(-1)^b\beta|1\rangle\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}Z^b\left[a\left(\beta|0\rangle+\alpha|1\rangle\right)+\bar{a}\left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)\right]$$

אם $a=0$ אז מקבלים $\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ ואם $a=1$ מקבלים (ה-) פ' $\alpha|1\rangle+\beta|0\rangle$

$$=\frac{1}{2}Z^b X^a\left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)=\rho\left(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle\right)$$

כלומר בהינתן למדידה של ביטים $2,3$,

אנחנו מקבלים $\rho(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)$ בביט 1.

$$|B(U)_{ab}\rangle = U^{\dagger} \otimes \mathbb{1}\, |B_{ab}\rangle \qquad (\text{ה}$$

$$= \underbrace{U^{\dagger} X^a Z^b}_{\text{על } 3} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|00\rangle_{32} + |11\rangle_{32} \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\langle 00| + \langle 11| \right) Z^b X^a U^{\dagger} \left(\alpha|000\rangle + \beta|100\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|111\rangle \right)$$

מכיוון ש U רק מסובבת נקבל $\rho\, U(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$.

פה מ״ג י׳:

$$ {}_{32}\langle B_{00}| \; Z_3^b X_3^a U_3^{\dagger} \, |B_{00}\rangle_{12} \, |\psi\rangle_3 $$

חלים
אחרים

$$= \underbrace{{}_{32}\langle B_{00}| Z_3^b X_3^a |B_{00}\rangle_{12}}_{\rho} \; \underbrace{U_3^{\dagger} \, |\psi\rangle_3}_{U(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)}$$