1

$$\Delta E_n^{(1)} = \langle n | H_1 | n \rangle$$

$$= \langle n | \tfrac{1}{2} k' x^2 | n \rangle = \tfrac{1}{2} k' \frac{1}{\alpha} \left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\hbar}{m\omega} = \frac{\hbar}{\frac{k}{\omega^2}\omega} = \frac{\hbar\omega}{k}$$

$$m\omega^2 = k$$
$$m = \frac{k}{\omega^2}$$

$$\Rightarrow \Delta E_n^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{k'}{k}\underbrace{\hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)}_{E_n^{(0)}}$$

ב)

$$\Delta E_0^{(2)} = \sum_{m\neq 0} \frac{|\langle m^\circ | H_1 | 0^\circ \rangle|^2}{E_0^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

$$\tfrac{1}{2} k' x^2 = \tfrac{1}{2} k' \frac{1}{2\alpha}(a^\dagger + a)^2 = \frac{1}{4}\frac{k'}{k}\hbar\omega\left(a^{\dagger 2} + a^2 + 2a^\dagger a + 1\right)$$

$$\underbrace{+aa^\dagger}_{1+a^\dagger a} + a^\dagger a$$

$$aa^\dagger - a^\dagger a = 1$$

$a^{\dagger 2}|0\rangle = \sqrt{1}\sqrt{2}\,|2\rangle$ רק הזוגיים דהיקוט תורמים

$a^2|0\rangle = 0$ הורס אותו

לכן רק $a^{\dagger 2}$ תורם, כלומר $m=2$:

$$\Delta E_0^{(2)} = \frac{|\langle 2 | \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{k'}{k}\hbar\omega | 2 \rangle|^2}{\frac{1}{2}\hbar\omega - \underbrace{\hbar\omega\left(2+\frac{1}{2}\right)}_{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{8}\left(\frac{k'}{k}\right)^2\hbar\omega\frac{1}{-2} = -\frac{1}{16}\left(\frac{k'}{k}\right)^2\hbar\omega$$

$$\hbar\omega = \frac{E_n^{(0)}}{n+\frac{1}{2}} \xrightarrow{n=0} 2E_n^{(0)}$$

$$\Delta E_0^{(2)} = -\frac{1}{8}\left(\frac{k'}{k}\right)^2 E_n^{(0)}$$

$$E_n \approx \left(1 + \frac{1}{2}\frac{k'}{k} - \frac{1}{8}\left(\frac{k'}{k}\right)\right)E_n^{(0)}$$

סופי

ג) הפתרון המדויק הוא עבור $m\omega^2 = k+k'$

$$E_n = \hbar\sqrt{\frac{k+k'}{m}}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \hbar\omega\sqrt{1+\frac{k'}{k}}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

ובפיתוח עבור $\frac{k'}{k} \ll 1$ אכן שני האיברים הראשונים

הם $+\frac{1}{2}$ ו- $-\frac{1}{8}$.

ד) נעשה הדיוק כמו בתרגול:

$$E_l^{(0)} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2MR^2}$$

$$H_1 = q\varepsilon R\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,Y_0^{(1)}$$

האם H_1 מלוכסן בתת המרחב המנוון ב-$l=2$?

$$\langle 2m'|H_1|2m\rangle = 0$$

$2 \neq 1+2$ מ- WE

$$\Rightarrow \underline{\Delta E^{(1)}_{l=2,m} = 0}$$

עבור התיקון מסדר שני:

$$\Delta E^{(2)}_{l=2,m} = \sum_{l'\neq 2}\frac{|\langle l'm'|H_1|2m\rangle|^2}{E^{(0)}_{l=2,m}-E^{(0)}_{l',m'}}$$

$\frac{\hbar^2 3}{MR^2} - \frac{\hbar^2 l'(l'+1)}{2MR^2}$ ונתחל מהמכנה כי זה קל

כעת מ- WE:

$2-1 \le l' \le 1+2$

$l' = 1,\cancel{2},3$ ($l'\neq 2$) $m'=m$

$$\Rightarrow \Delta E^{(2)}_{\ell=2,m} = \frac{\mu R^2}{\hbar^2}\left[\frac{|\langle 1m|H_1|2m\rangle|^2}{3-1} + \frac{|\langle 3m|H_1|2m\rangle|^2}{3-6}\right]$$

$$= \frac{\mu R^2}{\hbar^2}\, q^2\varepsilon^2 R^2\, \frac{4\pi}{3}\left[\frac{|\langle 1m|Y_0^{(1)}|2m\rangle|^2}{2} - \frac{|\langle 3m|Y_0^{(1)}|2m\rangle|^2}{3}\right]$$

לשים לב => WE כדי לחשב רק שני אלמנטים

$$\langle j'm'|Y_0^{(1)}|jm\rangle = (j1m0|j'm')\langle j'\|Y_0^{(1)}\|j\rangle$$

יספיק לחשב עם $m=0$, לכן:

$$\langle 10|Y_0^{(1)}|20\rangle = (2100|10)\quad\langle 1\|Y_0^{(1)}\|2\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle 1m|Y_0^{(1)}|2m\rangle = \frac{(21m0|1m)}{(2100|10)}\langle 10|Y_0^{(1)}|20\rangle$$

$$\langle 3m|Y_0^{(1)}|2m\rangle = \frac{(21m0|3m)}{(2100|30)}\langle 30|Y_0^{(1)}|20\rangle$$ כנ"ל וגם

כעת נותר לחשב רק 2 אלמנטים:

$$\langle 10|Y_0^{(1)}|20\rangle = \int Y_0^{(1)*}\, Y_0^{(1)}\, Y_0^{(2)}\, d\Omega$$

$$= 2\cancel{\pi}\frac{3}{4\cancel{\pi}}\int\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3x^2-1)\,x^2\,dx$$

$\frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$

$2\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)$

$\frac{9-5}{15} = \frac{8}{15}$

$$= \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{\cancel{5}}{\cancel{16}\pi}}\,\frac{\cancel{8}\,4}{\cancel{15}\,5} = \frac{1}{\sqrt{5\pi}}$$

$$(2100|10) = -\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\Rightarrow \quad \langle 1m|Y_0^{(1)}|2m\rangle = (21m0|1m)\left[\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{5\pi}}\sqrt{\frac{5}{2}}}_{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}\right]$$

$$\langle 30|Y_0^{(1)}|20\rangle = 2\pi\sqrt{\frac{7}{16\pi}}\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\int(5x^3-3x)\,x\,(3x^2-1)\,dx$$

$(3x^3-x)$

$15x^6 - 5x^4 - 9x^4 + 3x^2$

$\sqrt{16}=4$

16×3

$$=\frac{48}{\cancel{35}\,\sqrt{35}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{105}{1024}} \qquad 105 \to \cancel{7\times5\times3} \qquad 1024 = 64\times\cancel{16}$$

$$15x^6-14x^4+3x^2$$

$$21\left(\frac{15}{7}-\frac{14}{5}+1\right)=\frac{24}{35}$$

$$=\frac{12}{\sqrt{35}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{3}{64}}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{35\pi}}$$

$$(21\,00|30)=\sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$\Rightarrow \langle 3m|\psi_0^{(1)}|2m\rangle=(21m0|3m)\left[\underbrace{\sqrt{\frac{\cancel{5}}{7}}\;\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{\cancel{35}\,7\,\pi}}}_{=\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{7\pi}}}\right]$$

בסה"כ:

$$\Delta E^{(2)}_{l=2,m}=\frac{MR^4}{\hbar^2}(q\varepsilon)^2\frac{4\pi}{3}\left\{\frac{1}{2}\left[(21m0|1m)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right]^2-\frac{1}{3}\left[(21m0|3m)\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{7\pi}}\right]^2\right\}$$

$$=\frac{MR^4}{\hbar^2}(q\varepsilon)^2\frac{4}{3}\left[\frac{1}{\cancel{4}}(21m0|1m)^2-\frac{3}{\cancel{4}}\frac{1}{7}(21m0|3m)^2\right]$$

$$=\underbrace{\frac{MR^4}{\hbar^2}}_{\alpha}(q\varepsilon)^2\left[\frac{1}{3}(21m0|1m)^2-\frac{1}{7}(21m0|3m)^2\right]$$

לכל m:

[illegible]

$\underline{m=0}$

$$\Delta E^{(2)}_{2,0}=\alpha(q\varepsilon)^2\left[\frac{1}{3}\frac{2}{5}-\frac{1}{7}\frac{3}{5}\right]=\frac{1}{21}\alpha(q\varepsilon)^2$$

$$\frac{2}{15}-\frac{3}{35}=\frac{1}{21}$$

$\underline{m=\pm1:}$

$$\left\{\frac{1}{\cancel{3}}\frac{\cancel{3}}{10}-\frac{1}{7}\frac{8}{15}\right\}\Rightarrow \Delta E^{(2)}_{2,\pm1}=\frac{1}{42}\alpha(q\varepsilon)^2$$

$\underline{m=\pm2:}$

$$\left\{\frac{1}{3}\cdot 0-\frac{1}{7}\frac{1}{3}\right\}\Rightarrow \Delta E^{(2)}_{2,\pm2}=-\frac{1}{21}\alpha(q\varepsilon)^2$$

③ (א

$$R P x P^{-1} R^{-1} = R(-x)R^{-1} = -x$$

$$R P y P^{-1} R^{-1} = R(-y)R^{-1} = y$$

$$R P z P^{-1} R^{-1} = R(-z)R^{-1} = z$$

(ב

$$L_z = x p_y - y p_x$$

$$\mathcal{P}_x L_z \mathcal{P}_x^{-1} = \mathcal{P}_x\, x \underbrace{\,}_{(\mathcal{P}_x^{-1}\mathcal{P}_x)} p_y \mathcal{P}_x^{-1} - \mathcal{P}_x\, y \underbrace{\,}_{(\mathcal{P}_x^{-1}\mathcal{P}_x)} p_x \mathcal{P}_x^{-1}$$

$$= -x p_y - y(-p_x) = \underline{\underline{-L_z}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{P}_x L_z \mathcal{P}_x^{-1} = -L_z \quad / \leftarrow \mathcal{P}_x$$

$$\mathcal{P}_x L_z = -L_z \mathcal{P}_x$$

$$\{\mathcal{P}_x, L_z\} = 0$$

(ג

$$\mathcal{P}_x |lm\rangle = \mathcal{P}_x Y_m^{(l)}$$

שים לב שרק $\varphi \to -\varphi$ ואילו $\theta \to \theta$

מתוך הגדרה: $x \to -x$

$$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right]$$ כי x בריבוע

$$\varphi = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$tg^{-1}(-x) = -tg(x) \quad - !$$

$$e^{im\varphi} \to e^{-im\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad |lm\rangle \to |l\,-m\rangle$$

ה

א) ברור כי H_0 מתחלף עם P_x, L_z

מסימטריה, ולכן עם L^2 כי כולו H

נותר לבדוק:

$$[L_z, z] \overset{\text{ברור}}{=} 0$$

$$[P_x, z] = P_x z - \underset{1}{\underbrace{}} z P_x = P_x z - P_x P_x^{-1} z P_x$$

$$= P_x z - P_x z = 0$$

לפי הרמז $[L^2, z] \neq 0$

ב) נרצה לבדוק מה האנר' H של $P_x|E,m\rangle$

$$H P_x|E,m\rangle = P_x H|E,m\rangle = P_x E|E,m\rangle$$

כלומר המצב $P_x|E,m\rangle$ הוא מ"ע של H

עם ע"ע E.

אך
$$L_z P_x|E,m\rangle = -P_x L_z|E,m\rangle$$
$$= -\hbar m P_x|E,m\rangle$$

כלומר המצב $P_x|E,m\rangle$ הוא מ"ע של L_z

עם ע"ע $-\hbar m$, לכן ה-m של הוא

$-m$: $P_x|E,m\rangle = |E,-m\rangle$

ולכן בהכרח המצב שקיבלנו מקיים

$$H P_x|Em\rangle = E|E,-m\rangle$$

ולכן למצבים $|E,\pm m\rangle$ אותה אנרגיה E.

ד)

קיבלנו ששבירת הסימטריה ב-z הסירה חלקית את הניוון, נשאר ניוון עבור ערכי $|m|$ זהים.
וזה בדיוק מה שקיבלנו בסעיף ב הקודם, למצבים עם אותם ערכי $|m|$ אחד אחרי.

ד)

$$e\varepsilon_0 \sim 10^{4}\, eV/cm$$

$$|E_3-E_4| = \left|-13.6\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)\right|$$

$$\approx 0.661\, eV$$

יש ממדים יחידות של אורך ב $e\varepsilon_0$ לכן נכפיל ברדיוס בוהר a_0 סקאלה אופיינית $a_0 \sim 5.3\times10^{-13}$
ונקבל שסה"כ $e\varepsilon_0 a_0 \sim 10^{-4}$ וזה בהרבה קטן ביחס ל- 0.66

ה) מקסימום הוא יכול להתפצל עבור $m=0,\pm1,\pm2$
ועבור $\ell=0,1,2$, לכן $\underset{\ell=0}{1}+\underset{\ell=1}{2}+\underset{\ell=2}{3}=6$
כלומר הניוון המקסימלי יהיה $\sum_{\ell_{min}}^{\ell_{max}}(\ell+1)$.

ו) צריך ללכסן את ההפרעה בתת המרחב המנוון.

ונתחיל מסימטריות:
$$\langle 3\,\ell' m'|V_0^{(1)}|3\,\ell m\rangle$$

WE: $m'=m$ $l-1\le l'\le l+1$

אם $0\le l\le 2$ לכן $l'=0,1,2$

אבל z אי״ז ולכן צריך l-ים עם זוגיות

שונה: עבור $0,2$ מתאים 1

〃 1 〃 $0,2$

רק ה איברי l $m'=m$ תורמים שלא מתאפסים

	$\|00\rangle$	$\|10\rangle$	$\|20\rangle$	$\|11\rangle$	$\|21\rangle$	$\|1\bar{1}\rangle$	$\|2\bar{1}\rangle$	$\|22\rangle$	$\|2\bar{2}\rangle$
$\langle 00\|$	X	α	X						
$\langle 10\|$	β^*	X	β						
$\langle 20\|$	X	β^*	X						
$\langle 11\|$				X	γ				
$\langle 21\|$				γ^*	X				
$\langle 1\bar{1}\|$						X	γ		
$\langle 2\bar{1}\|$						γ^*	X		
$\langle 22\|$								X	X
$\langle 2\bar{2}\|$								X	X

מ $m'=m$ נעלמים כל מה שסומן ב- |

מ זוגיות של l נעלמים כל ה- X.

נמלא את מה שחסר מ האינטגרלים הן תורמים:

ב-α יש $\varphi_0^{(1)}, \varphi_0^{*(0)}$ לכן הוא מתאים ל $\langle 00|z|10\rangle$

β $\varphi_0^{(2)}, \varphi_0^{*(1)}$ 〃 $\langle 10|z|20\rangle$

γ $\varphi_1^{(2)}, \varphi_1^{*(1)}$ 〃 $\langle 11|z|21\rangle$

נשים לב שבכללי $\varphi_m^{*(l)}\ \varphi_m^{(l)}$

$$\downarrow$$

$$e^{-im\varphi}\ e^{im\varphi}$$

אבל בהפיכת סימן לשניהם נקבל $e^{-i\varphi}$ $e^{i\varphi}$ כלומר אותו אינטגרל!

לכן גם $\langle \bar{2}|z|\bar{1}\rangle$ מתאים ל-γ

לסיכום מותר לציין שהמטריצה הרמיטית לכן מספיק

לחשב רק את האיברים ההרמיטיים.

ובכך סיימנו לכתוב את המטריצה!

ט) כעת נותר לכסון 2 מטריצות אחת 2x2

השנייה 3x3. בנוסף הכל ממשי (מהגיונות זוגיות) $\Leftarrow \gamma^* = \gamma,\ \beta^* = \beta,\ \alpha^* = \alpha$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \gamma \\ \gamma & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \gamma^2 = 0$$

$$\lambda^2 = \gamma^2$$

$$\lambda = \pm \gamma$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & -\lambda & \beta \\ 0 & \beta & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - \beta^2\right) - \alpha\left(-\lambda\alpha - 0\right) = 0$$

$$= -\lambda^3 + \lambda\beta^2 + \lambda\alpha^2$$

$$\lambda\left(\lambda^2 - \beta^2 - \alpha^2\right) = 0$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda^2 = \beta^2 + \alpha^2$$

$$\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}$$

לכן בבסיס המלוכסן:

	$\vert 00\rangle$	$\vert 10\rangle$	$\vert 20\rangle$	$\vert 11\rangle$	$\vert 21\rangle$	$\vert 1\bar{1}\rangle$	$\vert 2\bar{1}\rangle$	$\vert 22\rangle$	$\vert 2\bar{2}\rangle$
$\langle 00\vert$	$\sqrt{\beta^2+\alpha^2}$	0	0						
$\langle 10\vert$	0	0	0						
$\langle 20\vert$	0	0	$-\sqrt{\beta^2+\alpha^2}$						
$\langle 11\vert$				γ	0				
$\langle 21\vert$				0	$-\gamma$				
$\langle 1\bar{1}\vert$						γ	0		
$\langle 2\bar{1}\vert$						0	$-\gamma$		
$\langle 22\vert$								X	X
$\langle 2\bar{2}\vert$								X	X

והתיקונים:

$\underline{m=\pm1}$: $-\frac{a}{2}$, $+\frac{a}{2}$

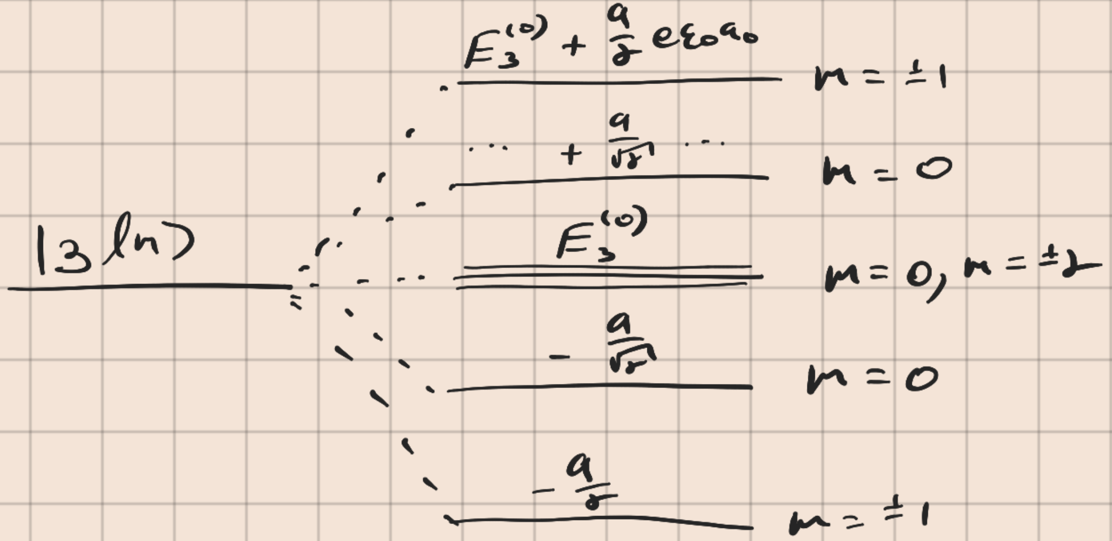
$\underline{m=\pm2}$: 0

$\underline{m=0}$: $\pm\sqrt{\frac{a\cdot6}{4}+a\cdot3} = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$

לבסוף, נשים לב שההפרעה ב r ע"י $\frac{r}{a_0}$,

ולכן צריך להכפיל הכל ב- a_0 כמו שעשינו בתרגיל

ג.



קיבלנו פיצול מ- 7 ל- 5, במקום ל- 6.

וזה כי יצא שהייתה אותה λ עבור $m=0$

ו- $m=\pm2$ ($\lambda=0$).