1. נמקו עבור כל אחד מאלמנטי המטריצה הבאים האם הוא מתאפס או לא **מבלי לחשב אינטגרלים** ($|n\ell m\rangle$ הם המצבים העצמיים של אטום המימן):

(א) $\langle 3,1,-1|z^2|3,1,-1\rangle$ (ד) $\langle 3,2,1|xy|3,2,1\rangle$

(ב) $\langle 5,2,1|z^2|5,4,1\rangle$ (ה) $\langle 4,2,1|x^2-y^2|4,2,1\rangle$

(ג) $\langle 3,2,1|z|4,2,1\rangle$ (ו) $\langle n,\ell,\ell|x^2+y^2+z^2|n,\ell,-\ell\rangle$

$$\begin{cases} x = r\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(Y_{-1}^{(1)} - Y_1^{(1)}\right) \\ y = ir\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\left(Y_{-1}^{(1)} + Y_1^{(1)}\right) \\ z = r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_0^{(1)} \end{cases}$$

תחילה נכתוב את ההרמוניות ספריות:

$$x^2-y^2 = 2r^2\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\left(Y_2^{(2)} + Y_{-2}^{(2)}\right)$$

$$z^2 = r^2\cos^2\theta \quad \rightarrow \quad Y_0^2 = C\left(3\cos^2\theta - 1\right)$$

$$\Rightarrow z^2 \propto Y_0^2 + \overbrace{const}^{Y_0^0}$$

$$xy = r^2\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi$$

$$= \text{〃}\left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)$$

$$= \frac{r^2}{4i}\sin^2\theta\left(e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}\right)$$

$$\propto \frac{r^2}{4i}\left(Y_2^2 - Y_{-2}^2\right)$$

א) $\propto \langle 31\bar{1}|Y_0^2+Y_0^0|31\bar{1}\rangle \quad -1 \overset{?}{=} 0-1 \checkmark$

$2-1 \le 1 \le 2+1 \checkmark$

לא מתאפס!

ב) $\propto \langle 521|Y_0^2+Y_0^0|541\rangle$

האיבר של Y_0^0 בטוח מתאפס.

$1 \overset{?}{=} 0+1 \checkmark$

$2 \le 2 \le 6 \checkmark$

בנוסף מדובר פה מצבים עם זוגיות זהה ואופרטורים זוגיים לכן <u>לא מתאפס!</u>

ג) $\propto \langle 321|Y_0^1|421\rangle$

<u>מתאפס</u> כי מדובר בזוגיות זהה על אופרטור אי"ז.

ג) $\propto \langle 321|Y_2^2 - Y_{-2}^2|321\rangle$

$1 \overset{?}{=} 2+1$ ✗

לא מקיים $m'=m+q$ ולכן <u>מתאפס!</u>

ה) $\propto \langle 421|Y_2^2 + Y_{-2}^2|421\rangle$

<u>מתאפס</u> כמו סעיף קודם!

ו) $\propto \langle nl\,{-l}|r^2|nll\rangle \propto \langle nl\,{-l}|Y_0^0|nll\rangle$

$-l = 0 + l$

$-l \le l \le l$

מתקיים אם $l=0$ אחרת <u>מתאפס!</u>

2. אחד מרכיביו הכדוריים של טנזור הקוודרופול החשמלי הוא

$$Q = \frac{1}{2}\left(3z^2 - r^2\right)$$

נגדיר $Q_m \equiv \langle jm|Q|jm\rangle$. חשבו את היחסים Q_1/Q_0 ו-Q_{-1}/Q_0 עבור $j=1$.

$$Q = \frac{1}{2}\left(3z^2 - r^2\right) = \frac{1}{\cancel{2}}\,\overset{2}{4}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\, r^2 Y_0^2$$

$$\frac{Q_1}{Q_0} = \frac{\langle 11|Y_0^2|11\rangle}{\langle 10|Y_0^2|10\rangle} = \frac{(2101|11)}{(2100|10)}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{10}}}{-\sqrt{\frac{2}{5}}} = -\sqrt{\frac{5}{20}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{Q_{-1}}{Q_0} = \frac{(210\,{-1}|1\,{-1})}{-\sqrt{\frac{2}{5}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{10}}}{-\sqrt{\frac{2}{5}}} = -\frac{1}{2}$$

3. נתון הטנזור T המוגדר כמכפלה חיצונית

$$T = \mathbf{r} \otimes \mathbf{r},$$

כאשר $\mathbf{r}$ הוא אופרטור המקום.

(א) כתבו במפורש את רכיביו הקרטזיים של הטנזור T. האם הוא פריק? מה המשמעות של היותו טנזור פריק או אי-פריק?

(ב) מצאו את רכיביו הכדוריים של הטנזור T במונחי הרכיבים הכדוריים של הוקטור $\mathbf{r}$.

$$T_{ij} = r_i r_j$$

$$T = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}$$

הוא חייב להיות פריק כי הרכיבים של $\vec{r}$ עוברים

טרנס׳ לשנויים כדוריים. כאמור מדובר ב"חיבור תנ"ז" של $1 \otimes 1$

ולכן ניתן לפרק לחיבור של 3 תתי מרחבים

$$1 \otimes 1 = |1-1| \oplus \cdots \oplus 2 = 0 \oplus 1 \oplus 2$$

ב) הרכיבים הכדוריים של $\vec{r}$ הם $r'_{0,\pm1}$

והמקדמים הם בדיוק CG כי מדובר במרחב

מכפלה של $1 \otimes 1$: $(11q_1q_2|kq)$

$$T^k_q = \sum_{q_1 q_2} (11q_1q_2|kq)\, r'_{q_1} r'_{q_2}$$

שיש 3 תתי מרחבים:

מכיוון שתמיד $r^q_{12} = r^1_{12}$ נשמיט את ה-1 למעלה:

$\underline{K=0}$:

$$T^0_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} r_1 r_{-1} - \frac{1}{\sqrt{3}} r_0 r_0 + \frac{1}{\sqrt{3}} r_{-1} r_1$$

$\underline{K=1}$:

$$T^1_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} r_0 r_{-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} r_{-1} r_0 = 0$$

כי זה דה כפל

$$T^1_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} r_1 r_{-1} - \frac{1}{\sqrt{2}} r_{-1} r_1 = 0$$

$$T^1_1 = \frac{1}{\sqrt2} r_1 r_0 - \frac{1}{\sqrt2} r_0 r_1 = 0$$

$k=2$:

$$T^2_2 = r_1 r_1 = (r_1)^2$$

$$T^2_1 = \frac{1}{\sqrt2}(r_1 r_0 + r_0 r_1) = \sqrt2\, r_1 r_0$$

$$T^2_0 = \frac{1}{\sqrt6} r_1 r_{-1} + \underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}}}_{\frac{2}{\sqrt6}} r_0 r_0 + \frac{1}{\sqrt6} r_{-1} r_1$$

$$T^2_{-1} = \sqrt2\, r_{-1} r_0$$

$$T^2_{-2} = (r_{-1})^2$$

4. נתון האופרטור הטנזורי $T = \mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$ שרכיביו הקרטזיים הם T_{ij} $(i,j=1,2,3)$

(א) מה הם הערכים האפשריים של q ו-k ברכיביו הכדוריים $T_q^{(k)}$ של הטנזור?

(ב) תנו ביטוי כללי לחישוב הרכיבים הכדוריים $T_q^{(k)}$ במונחי הרכיבים הקרטזיים T_{ij}.

(ג) חשבו במפורש את $T_0^{(2)}$ ואת $T_0^{(0)}$ (השתמשו בטבלאות קלבש-גורדן). *לדוגמא:*

$$T_1^{(2)} = -\frac{1}{2}\left[T_{13}+T_{31}+i\left(T_{23}+T_{32}\right)\right]$$

א) כמו מקודם מדובר על "חיבור תנ״ז"

של $1\otimes 1$ ולכן $k = 0,1,2$

$-2 \le q \le 2$

(בהתאם לכ q מתאים לכל k)

ב) כמו מקודם

$$T^k_q = \sum_{q_1 q_2} (1 1 q_1 q_2 | k q)\, u^1_{q_1} v^1_{q_2}$$

ואת u^1_q מקבלים מהגרסה פורמלית

שראינו בכיתה:

$$u^1_1 = -\frac{u_x + i u_y}{\sqrt2}$$

$$u^1_{-1} = \frac{u_x - i u_y}{\sqrt2} \Rightarrow u^1_q = \begin{pmatrix} u^1_1 \\ u^1_0 \\ u^1_{-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{i}{\sqrt2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{i}{\sqrt2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

$$u^1_0 = u_z$$

ואז u'_q ספציפי כה הסכולם

$$u'_q = U_{qi}\, u_i$$

ובסה"כ:

$$T^{12}_q = \sum_{q_1 q_2} (11 q_1 q_2 | kq)\, \underbrace{U_{q_1 i} U_{q_2 j} T_{ij}}_{A_{q_1 q_2} = UTU^T}$$

$$UTU^T = U\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{11}+iT_{12}) & T_{13} & \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{11}-iT_{12}) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{21}+iT_{22}) & T_{23} & \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{21}-iT_{22}) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{31}+iT_{32}) & T_{33} & \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{31}-iT_{32}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left[T_{11}-T_{22}+i(T_{12}+T_{21})\right] & -\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{13}+iT_{23}) & -\frac{1}{2}\left[T_{11}+T_{22}+i(T_{21}-T_{12})\right] \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{31}+iT_{32}) & T_{33} & \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{31}-iT_{32}) \\ -\frac{1}{2}\left[T_{11}+T_{22}+i(T_{12}-T_{21})\right] & \frac{1}{\sqrt{2}}(T_{13}-iT_{23}) & \frac{1}{2}\left[T_{11}-T_{22}-i(T_{12}+T_{21})\right] \end{pmatrix} \to A_{q_1 q_2}$$

ואז נקבל:

$$T^2_1 = \sum_{q_1 q_2} (11 q_1 q_2 | 21)\, A_{q_1 q_2}$$

מאופקר ב $1\otimes 1$ עם $JM=21$ ל' $q_1 q_2 = \begin{cases} 1,0 \\ 0,0 \end{cases}$

ולכן

$$T^2_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{10} + \frac{1}{\sqrt{2}} A_{01}$$

צריך לזכור שה q-ים מקורי: $A_{q_1 q_2}$ מסודרים:

	1	0	-1
1		A_{10}	
0	A_{01}		
-1			

$$T_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(T_{13} + i T_{23}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(T_{31} + i T_{32}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-T_{13} - iT_{23} - T_{31} - iT_{32}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(T_{13} + T_{31} + i\left(T_{23} + T_{32}\right)\right) \checkmark$$

אוווו

!כוווו

סבבון

$$T_0^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(A_{1-1} - A_{00} + A_{-11}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}\left[T_{11} + T_{22} + i\left(T_{21} - T_{12}\right)\right] - T_{33} - \frac{1}{2}\left[T_{11} + T_{22} + i\left(T_{12} - T_{21}\right)\right]\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-T_{11} - T_{22} - T_{33}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}\, Tr\left(T_{ij}\right)$$

$$T_0^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(A_{1-1} + A_{-11}\right) + \frac{2}{\sqrt{6}} A_{00}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left[-\frac{1}{2}\left[T_{11} + T_{22} + i\left(T_{21} - T_{12}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[T_{11} + T_{22} + i\left(T_{12} - T_{21}\right)\right] + 2\, T_{33}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-T_{11} - T_{22} + 2\, T_{33}\right)$$

5. נתונים הרכיבים הכדוריים $R_q^{(k)}$ ו-$T_q^{(k)}$ של שני אופרטורים אי-פריקים מדרגה k. בונים מהם את האופרטור הבא

$$.M \equiv \sum_q (-1)^q R_q^{(k)} T_{-q}^{(k)}$$

מהם כללי הברירה עבור האופרטור M? כלומר אילו אלמנטים $\langle j'm'|M|jm\rangle$ לא מתאפסים? (*הנחיה: בדקו תחילה כיצד M עובר טרנספורמציית סיבוב. האם הוא טנזור? אם כן, מה הדרגה שלו?*)

נסובב את M:

$$M' = \sum_q (-1)^q \underbrace{\mathcal{D} R_q^{(k)} \mathcal{D}^\dagger}_{\sum_{q'} D^k_{q'q} R^k_{q'}} \underbrace{\mathcal{D} T^k_{-q} \mathcal{D}^\dagger}_{\sum_{q''} D^k_{-q''-q} T^k_{-q''}}$$

נסתכל על

$$D_{q'q} D_{-q''-q} = D_{q'q} D_{q''q}$$

$$= D_{q'q} (-1)^{q-q''} D_{qq''} = (-1)^{q-q''} \delta_{q'q''}$$

$$M' = \sum \underbrace{(-1)^q (-1)^{q-q''}}_{(-1)^{2q-q''} = (-1)^{q''}} \delta_{q'q''} R_{q'} T_{-q''}$$

$$= \sum (-1)^{q'} R_{q'} T_{-q'}$$

$$\Rightarrow \quad M = M'$$

כלומר M סקלר תחת סיבובים.

לכן $\langle j'm'|M|jm\rangle$ מקיים

$$\langle j'm'|M|jm\rangle = \delta_{mm'} \delta_{jj'} \langle jm|M|jm\rangle$$

6. נתון אלמנט מטריצה אחד $\langle 33|T_3^{(4)}|30\rangle \equiv \sigma$ מתוך 49 אלמנטי המטריצה של האופרטור $T_3^{(4)}$ בתת-מרחב $j=3$. השלימו את שאר אלמנטי המטריצה במונחי σ:

$$\langle 3m'|T_3^{(4)}|3m\rangle = \begin{array}{c} \\ \langle 33| \\ \langle 32| \\ \langle 31| \\ \langle 30| \\ \langle 3\bar{1}| \\ \langle 3\bar{2}| \\ \langle 3\bar{3}| \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} |33\rangle & |32\rangle & |31\rangle & |30\rangle & |3\bar{1}\rangle & |3\bar{2}\rangle & |3\bar{3}\rangle \end{array} \\ \begin{pmatrix} - & - & - & \sigma & - & - & 0 \\ - & - & - & - & -\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma & - & - \\ - & - & - & - & - & \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma & - \\ - & - & - & - & - & - & -\sigma \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix} \end{array}$$

כל השאר אפסים

הערה: הסימון $|3\bar{1}\rangle$ *שקול ל* $|3,-1\rangle$ *רק בכתיבה נוחה יותר שחוסכת מקום.*

$$\langle 33|T_3^4|30\rangle = (3403|33)\langle 3\|T^4\|3\rangle = \sigma$$

גורם אלמנט המטריצה המצומצם הינו

$$\langle 3\|T^4\|3\rangle = -\sqrt{\frac{22}{7}}\,\sigma$$

wolfram-מ

$$\Rightarrow \langle 3m'|T_3^4|3m\rangle = -\sqrt{\frac{22}{7}}\,\sigma\,(433m|3m')$$

נזכור ש: $m' = m+3$ לפי רק

האלמנטים שנמצאים 3 מעל האלכסון לא

מתאפסים

$$\langle 32|T_3^4|3\bar{1}\rangle = -\sqrt{\frac{22}{7}}\,\sigma \cdot -\frac{\sqrt{\frac{7}{11}}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma$$

$$\langle 31|T_3^4|3\bar{2}\rangle = -\sqrt{\frac{22}{7}}\,\sigma\,\frac{\sqrt{\frac{7}{11}}}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma$$

$$\langle 30|T_3^4|3\bar{3}\rangle = -\sqrt{\frac{22}{7}}\,\sigma\,\sqrt{\frac{7}{22}} = -\sigma$$

7. **(שאלת חובה)**
נתון רכיב כדורי $S_q^{(k)}$ של האופרטור S במונחי הרכיבים הקרטזיים של אופרטור המקום

$$S_q^{(k)} = \frac{s_0}{r^3}\left[x^3 - 3xy^2 - i\left(y^3 - 3yx^2\right)\right],$$

כאשר s_0 הוא קבוע. ענו על הסעיפים הבאים **מבלי** לפרק את הביטוי ל-$Y_m^{(\ell)}$:

(א) מצאו את k ו-q.
(ב) חשבו את $S_{q-1}^{(k)}$.
(ג) חשבו את היחס בין אלמנטי המטריצה (הנתונים בבסיס $|jm\rangle$)

$$\frac{\langle 4m|S_q^{(k)}|3,-1\rangle}{\langle 4m'|S_q^{(k)}|31\rangle} = ?$$

הערה: את מקדמי קלבש-גורדן שלא נמצאים בטבלה תוכלו למצוא בקישור
.https://www.wolframalpha.com/input/?i=Clebsch-Gordan+calculator

$$x(x^2-3y^2) - iy(y^2-3x^2)$$

מכיר את איברי האלכסון של הקוודרופול הישן:

$$3r_ir_j - r^2\delta_{ij}$$

$$x^3 - 3xy^2 - iy^3 + i3yx^2$$

$$x^3 + 3x(iy)^2 + (iy)^3 + 3(iy)x^2$$

$$a^3 + 3ab^2 + b^3 + 3ba^2 = (a+b)^3$$

$$\Rightarrow S_q^k = \frac{s_0}{r^3}(x+iy)^3 = \frac{s_0}{r^3}2\sqrt{2}\left(-r_1'\right)^3$$

$$r_1' = -\frac{x+iy}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow k=3 \qquad q=3$$

ב)

$$[S_-, S_3^3] = \hbar\sqrt{\underbrace{3(3+1)}_{12} - \underbrace{3(3-1)}_{6}}\;S_2^3 \qquad =6$$

ונ 3 2 שלי

$$[S_-, C(r_1')^3] = -C[(r_1')^3, S_-] =$$

מכיוון ש:

$$[r_1, [r_1, S_-]] = [r_1, \# r_0] = 0$$

$$= -c\,3\,(r_1')^2\,[r_1', S_-] = 3c\,(r_1')^2\,[S_-, r_1']$$

$$= 3c\hbar\sqrt{2}\,(r_1')^2\,r_0'$$

$$\Rightarrow \cancel{\hbar}\,\sqrt{6}\,S_2^3 = \cancel{3}\sqrt{2}\,\cancel{\hbar}\,\frac{S_0}{r^3}\,\overset{\sqrt{6}}{\cancel{2\sqrt{2}}}\,(r_1')^2\,r_0'$$

$$S_2^3 = 2\sqrt{6}\,\frac{S_0}{r^3}\underbrace{(r_1')^2\,r_0'}$$

$z\,(x+iy)^2$

$$\frac{(333\bar{1}|4m')^{\,\to 2}}{(3331|4m')_{\,\to 4}} = \quad \begin{matrix} m = 3-1 \\ m' = 3+1 \end{matrix}$$

: Sbk Cd

$$= \frac{3\sqrt{\frac{3}{77}}}{\sqrt{\frac{3}{11}}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

: Wolfram - M