פתרון משוואת לפלאס בקואורדינטות כדוריות

✳ משוואת לפלאס בקואורדינטות כדוריות

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\varphi\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0$$

✳ הפרדת משתנים

הצבה של מכפלת הפונקציות $\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{U(r)}{r}Y(\theta,\phi) = \frac{U(r)}{r}P(\theta)Q(\phi)$, וכפל בביטוי $r^2\sin^2\theta/UPQ$, מאפשרים לבצע הפרדה לשלוש משוואות של ערכים עצמיים, שמצומדות רק דרך הערכים העצמיים שלהן.

שתי משוואות זוויתיות:

1. עבור ϕ: $\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\phi^2} = -m^2Q$, שפתרונותיה $Q_m(\phi) = e^{im\phi}$, כאשר m מספר שלם.

2. עבור θ: $\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}P = -l(l+1)P$.

זו משוואת לג׳נדר המוכללת (generalized Legendre equation) במשתנה $\cos\theta$. פתרונותיה הם פונקציות לג׳נדר הנלוות (associated Legendre functions), $P_l^m(\cos\theta)$, כאשר $l \geq 0$ מספר שלם. המשוואה עבור $m = 0$ היא משוואת לג׳נדר הרגילה, שפתרונותיה הם פולינומי לג׳נדר, $P_l(\cos\theta)$ (פרטים נוספים בעמוד 2).

מכפלת שני הפתרונות הללו נותנת את הפתרונות לחלק הזוויתי של משוואת לפלאס. לאחר נרמול מתקבלות ההרמוניות הכדוריות,

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)\,e^{im\phi}.$$

משוואה רדיאלית:

3. עבור r: $r^2\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}r^2} = l(l+1)U$, כאשר הע״ע $l(l+1)$ מוכתב על ידי פתרון החלק הזוויתי.

הצבה מהצורה $U(r) = r^\lambda$, נותנת את הפתרון הכללי $U(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l}$.

✳ הפתרון הכללי למשוואת לפלאס בקואורדינטות כדוריות:

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_{lm}r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right)Y_{lm}(\theta,\phi).$$

✳ סימטריה אזימותית

במקרה הפרטי של סימטריה אזימותית, או חוסר תלות בזווית ϕ, האיבר השלישי במשוואת לפלאס נופל, ונותרים רק הפתרונות עם $m = 0$, כלומר

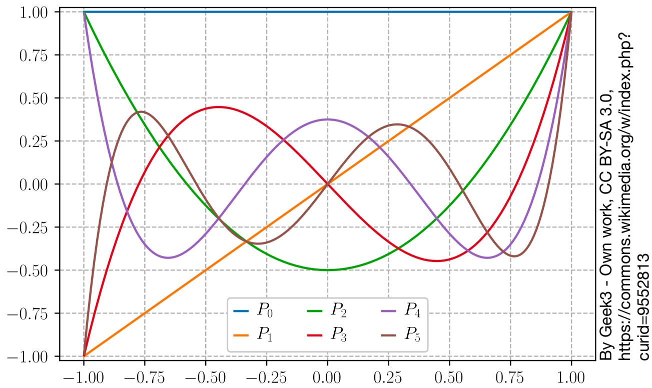
$$\varphi(r,\theta,\phi) = \varphi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_lr^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta).$$

פרטים נוספים לגבי הפתרונות

✳ **פולינומי לג׳נדר (מוגדרים עבור $-1 \leq x = \cos\theta \leq 1$)**

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x; \quad P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right); \quad P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right);$$

ואת היתר ניתן לייצר ע״י יחס הרקורסיה $(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x)$.



אורתוגונליות ושלמות של פולינומי לג׳נדר

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_l(x)P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} \quad \longleftrightarrow \quad \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2}P_l(x)P_l(y) = \delta(x-y)$$

פירוק לטור בפולינומי לג׳נדר

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x) \quad \longrightarrow \quad A_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)\mathrm{d}x$$

✳ **פונקציות לג׳נדר הנלוות**

$$P_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)$$

✳ **הרמוניות כדוריות**

כמה הרמוניות כדוריות ראשונות (הגדרה בעמוד הקודם)

$$Y_{00}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_{20}(\Omega) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$Y_{10}(\Omega) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad Y_{2\pm1}(\Omega) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\phi}$$

$$Y_{1\pm1}(\Omega) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi} \qquad Y_{2\pm2}(\Omega) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\phi}$$

<u>אורתוגונליות ושלמות של הרמוניות כדוריות</u>

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \;\; Y^*_{l'm'}(\theta,\phi) Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) = \delta(\phi-\phi')\delta(\cos\theta-\cos\theta')$$

<u>פירוק לטור בהרמוניות כדוריות</u>

$$f(\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} A_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi) \quad \longrightarrow \quad A_{lm} = \int \mathrm{d}\Omega Y^*_{lm}(\theta,\phi)f(\theta,\phi)$$

<u>משפט החיבור של הרמוניות כדוריות</u>

$$P_l\left(\cos\gamma\right) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \,,$$

כאשר $\cos\gamma = \hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}' = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\left(\phi-\phi'\right)$.

עבור $\gamma = 0$ מתקבל כלל הסכימה $\sum_{m=-l}^{l}\left|Y_{lm}\left(\theta,\phi\right)\right|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}$.

<u>פיתוח המרחק ההופכי בין שתי נקודות בהרמוניות כדוריות</u>

$$G\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) = \frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \,,$$

כאשר $r_< = \min\{r,r'\}$, ו-$r_> = \max\{r,r'\}$.

זוהי גם פונקצית גרין, המבוטאת באמצעות הרמוניות כדוריות, בבעיה ללא שפות שבה הפוטנציאל דועך לאפס באינסוף.

<u>פונקצית גרין בנוכחות כדור מוליך ברדיוס a</u>

$$G_a\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) = \frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|} - \frac{1}{\left|\frac{r'}{a}\mathbf{r}-\frac{a}{r'}\mathbf{r}'\right|} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{a^{2l+1}}{(rr')^{l+1}}\right)Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi) \,.$$

שימו לב שהביטוי שבסוגריים המרובעים מתאפס כאשר $r = a$ או $r' = a$.

<u>פונקצית גרין בין שתי קליפות כדוריות מוליכות ברדיוסים $a < b$</u>

$$G_{a<b}\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}}\left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right) \,.$$