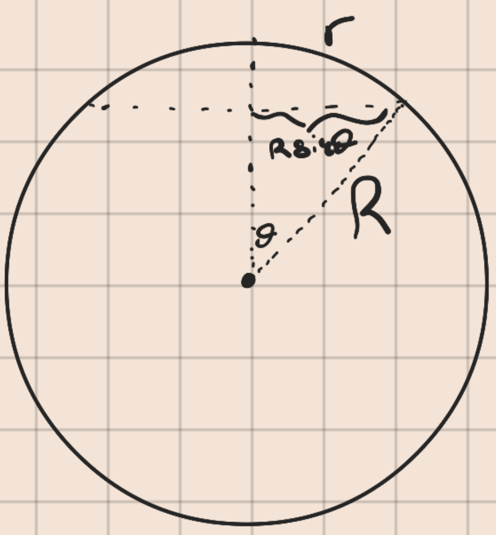
Q1



$$\frac{r}{R} = \theta$$

$$P = 2\pi R \sin\theta$$

$$P = 2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right)$$

במידה ו- R ניתן כדי שנוכל להבדיל במדידת
אורך עם העולם לא שטוח:

$$2\pi\left[r - R\sin\left(\frac{r}{R}\right)\right] > 1$$

צריך לפתור נומרית/גרפית... יוצא $r > 338\,km$

Q2

1)

$$\dot{\rho}c^2 = -3\frac{\dot{R}}{R}\left(\rho c^2 + P\right) \leftarrow P = \omega\rho c^2$$

$$\dot{\rho}\cancel{c^2} = -3\frac{\dot{R}}{R}\rho\cancel{c^2}(1+\omega)$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+\omega)\frac{\dot{R}}{R}$$

$$\ln\rho = -3(1+\omega)\ln R$$

$$\boxed{\rho = \frac{\rho_0}{R^{3(1+\omega)}}}$$

$\rho = \rho_0 R^{-4}$ ✓ $\quad 1+\omega = \frac{4}{3} \Leftarrow$ בדיקת שפיות קרינה

2)

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \propto \rho \propto R^{-3(1+\omega)}$$

$$\frac{\dot{R}}{R} \propto R^{-\frac{3}{2}(1+\omega)} \qquad \underbrace{-1 + \frac{3}{2}}_{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}\omega$$

$$R^{\frac{1}{2}(1+3\omega)}\,dR \propto dt$$

$$R^{\frac{3}{2}+\frac{3\omega}{2}} \propto t$$

$$R \propto t^{\frac{1}{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\omega}} = t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}$$

ועבור $\omega=-1$ הוא שואף ל Ω_Λ ונהיה ניגע
אקספוננציאלי.

Q3

1) Friedman II: $\dfrac{\ddot{R}}{R} = -\dfrac{4\pi G}{3}\underbrace{\left(\rho - \frac{3}{2}\rho\right)}_{-\frac{1}{2}\rho} > 0$

2) כבר ראינו שהאיבר של המסה הולך
לפי R^{-3}. ועבור $\omega=-\frac{1}{2}$ $\rho \propto R^{-\frac{3}{2}}$

$$\Rightarrow \boxed{H^2 = H_0^2\left[\Omega_m R^{-3} + \Omega_Q R^{-\frac{3}{2}}\right]}$$

3) $$\Omega_Q R^{-3/2} = \Omega_m R^{-3}$$

$$\frac{\Omega_Q}{\Omega_m} = R^{-3+\frac{3}{2}} = R^{-3/2} \qquad /(\ )^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{R_Q}{R_0} = \left(\frac{\Omega_Q}{\Omega_m}\right)^{-2/3} = \boxed{\left(\frac{\Omega_m}{\Omega_Q}\right)^{2/3}}$$

4) $\Omega_m + \Omega_Q = 1 \Rightarrow \Omega_Q = 0.7$

$$\Rightarrow \left[\frac{\Omega_m}{\Omega_Q}\right]^{2/3} = \underbrace{\left(\frac{0.3}{0.7}\right)^{2/3}}_{\alpha} = \frac{1}{1+z}$$

$$(1+z)\alpha = 1$$

$$1+z = \frac{1}{\alpha}$$

$$z = \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

$$\boxed{z = 0.76}$$

Q 4

1) 46 Glyr

$$D_H = \frac{c}{H_0}\int_0^1 \frac{da}{a^2\sqrt{\Omega_r a^{-4}+\Omega_m a^{-3}+\Omega_\Lambda}}$$

2) 13.73 Gyr

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{da}{a\sqrt{\Omega_r a^{-4}+\Omega_m a^{-3}+\Omega_\Lambda}}$$

3) א) $0.31a^{-3} = 0.69$

$a_1 = \left(\frac{0.69}{0.31}\right)^{-1/3} = \left(\frac{0.31}{0.69}\right)^{1/3} \rightarrow \int_0^{a_1}$

$\Rightarrow$ 10.17 Gyr

ב) $0.31a^{-3} = 5\cdot10^{-5}a^{-4}$

$a_2 = \frac{5}{0.31}\cdot 10^{-5} \rightarrow \int_0^{a_2}$

$\Rightarrow$ 20,660 yr

4) 52.47 Gyr

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^{10} \frac{da}{a\sqrt{\Omega_r a^{-4}+\Omega_m a^{-3}+\Omega_\Lambda}}$$

```
nvim        4%  31%  46°C  English (US)  59%  59%  22-06 18:16

❯ python ex2.py
46.245326649943934 Glyr
13.73299146297261 Gyr
10.168335274744273 Gyr
20659.38255711885 yr
52.4732524023658 Gyr

~/Physics/YearC/SemB/Astro main* ❯
```

```python
import astropy.constants as c
import astropy.units as u
from scipy.integrate import quad

h0 = 68 * u.km/(1e6*u.pc*u.s)


def func(a):
    return 1/(a**2 * (5e-5*a**-4 + 0.31*a**-3 + 0.69)**0.5)


def func2(a):
    return 1/(a * (5e-5*a**-4 + 0.31*a**-3 + 0.69)**0.5)


# Q1
int = quad(func, 0, 1)[0]

res = int*c.c.to("km/s")/h0
print(res.to("Glyr"))


# Q2
int = quad(func2, 0, 1)[0]

res = int/h0
print(res.to("Gyr"))


# Q3
int = quad(func2, 0, (0.31/0.69)**(1/3))[0]

res = int/h0
print(res.to("Gyr"))


# Q4
int = quad(func2, 0, (5/0.31)*1e-5)[0]

res = int/h0
print(res.to("yr"))


# Q5
int = quad(func2, 0, 10)[0]

res = int/h0
print(res.to("Gyr"))
```

```
NORMAL  main  ex2.py                utf-8  python  93%  45:16
"~/Physics/YearC/SemB/Astro/ex2.py" 48L, 657B written
```

Q 5

אנרגי' ליח' נפח ÷ אנרגיה ממוצעת לפוטון

1) $n_p\left[\frac{N}{m^3}\right] \sim \frac{u\left[\frac{J}{m^3}\right]}{\langle u\rangle\left[\frac{J}{N}\right]} = \frac{aT^4}{k_B T} = \frac{4\sigma}{ck_B}T^3 = 10^9\,\frac{1}{m^3}$

כדי להגיע לצפיפות בריונים נצטרך להשתמש ב ρ_c היא' של $\frac{מסה}{נפח}$

$n_b = \Omega_B\rho_c = 0.04\,\frac{3H_0^2}{8\pi G}\left[\frac{מסה}{נפח}\right] \div \underbrace{\text{מסה של בריון}}_{m_p} = 0.22$

$\Rightarrow \frac{n_b}{n_p} = \frac{0.22}{10^9} = 2\cdot10^{-10}$

2) פתרנו בתרגיל הקודם.

3) כדיון אם מספר הפוטונים לא משתנה $T\sim R^{-1}$ $u\sim R^{-4} \Leftarrow$ $u\sim T^4$

Q 7

1) נניח כי $\Omega_r = 0.8$, $\Omega_\Lambda = 0.1$ ונשווה:

$$\Omega_r a^{-4} = \Omega_\Lambda$$

$$a^{-4} = \frac{1}{8} = 2^{-3 \cdot -\frac{1}{4}}$$

$$a = 2^{3/4}$$

$$\Rightarrow R = R_0 2^{3/4}$$

2) $$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{da}{aE(a)} = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{da}{a\sqrt{a^{-4}}} = \frac{1}{H_0}\int_0^1 a\,da = \frac{1}{2H_0} = 48.88\ \mathrm{Gyr}$$

3) $$D_H = \frac{c}{H_0}\int_0^1 \frac{da}{a^2E(a)} = \frac{c}{H_0}\int_0^1 da = \frac{c}{H_0} = 30\ \mathrm{Gpc}$$

4) $$t' = \frac{1}{H_0}\int_1^{2^{3/4}} a\,da = \frac{1}{2H_0}\left[2^{3/2} - 1\right] = 89.4\ \mathrm{Gyr}$$