מבוא לאסטרופיזיקה - תרגול מס' 4

27 ביוני 2024

חזרה על מרחקים:

- מרחק קומובינג - המרחק בין שתי נקודות כיום. יכול לשמש למדידה של המרחק בינינו לבין גלקסיה ברדשיפט z (ניתן כמובן לחשב גם בין שני אובייקטים ברדשיפטים שונים, z_1 ו-z_2).

$$ds = 0 \Rightarrow cdt = Rdr$$

$$\frac{da}{adt} = H = H_0 E\left(a\right) \Rightarrow dt = \frac{da}{H_0 a E\left(a\right)}$$

$$a = \frac{1}{1+z} \Rightarrow da = -\frac{1}{\left(1+z\right)^2} dz = -a^2 dz$$

$$D_c = R_0 \int_0^{r(a)} dr = R_0 \int_{t(a)}^{t_0} \frac{c}{R\left(t'\right)} dt' = \int_{t(a)}^{t_0} \frac{c}{a\left(t'\right)} dt' = \int_a^1 \frac{c}{H_0 a^2 E\left(a\right)} da = \int_0^z \frac{c}{H_0 E\left(z\right)} dz.$$

- מרחק proper - המרחק בזמן בו נפלט האור. מתקיים

$$D_p = \frac{1}{1+z} D_c$$

- כאשר אנו מודדים את המרחק קומובינג בין שתי גלקסיות, זהו המרחק ביניהן כאשר גיל היקום הוא 13.7 מיליארד שנה. עם זאת, אם אני מסתכל על שתי גלקסיות מרוחקות ברדשיפט ששווה בקרוב ל-z ומודד את המרחק קומובינג ביניהן, בגלל שאני רואה אותן כפי שהיו בעבר, המרחק הפיזי ביניהן קטן בשל היות קבוע הסקאלה שונה. מרחק proper מתקן את זה באמצעות כפל בקבוע הסקאלה המתאים.

- שימו לב שיש שבביטוי של מרחק reporp הרדשיפט מופיע ביותר ממקום אחד ולא תמיד זה אותו הרדשיפט

$$D_p = \frac{1}{1+z} \int_{z_1}^{z_2} \frac{c}{H_0 E\left(z\right)} dz$$

הרדשיפט במכנה הוא הרדשיפט המתאים לגיל היקום בו אני מודד את המרחק, והרדשיפטים בגבולות האינטגרל הם הרדשיפטים של האובייקטים ביניהם אני מודד

את המרחק. השימוש הכי נפוץ של זה הוא מדידה של מרחק פיזי בין שני אובייקטים שהרדשיפט שלהם הוא דומה, כלומר מתקיים

$$|z_1 - z_2|\,, |z_1 - z|\,, |z_2 - z| \ll z$$

- מרחק בהירות (Luminosity) - המרחק שנמדוד לאובייקט אם ננסה להסיק את המרחק אליו מתוך הירידה בשטף בשל המרחק

$$f = \frac{L}{4\pi D_L^2}$$

$$D_L = (1+z)\, D_c$$

- מרחק זוויתי - המרחק שנמדוד למוט עם גודל פיזי (פרופר) x_p אם ננסה להסיק את המרחק אליו מתוך הגודל הזוויתי שלו

$$D_A = \frac{x_p}{\theta}$$

עבור יקום שטוח, זהו פשוט המרחק פרופר

$$D_A = \frac{1}{1+z} D_C$$

1) מבחן אלקוק פצ'ינסקי

נתון יקום שטוח עם חומר וקבוע קוסמולוגי ונתונים Ω_m ו-Ω_Λ כיום. נניח שאנו יודעים שצביר מסויים הוא כדורי והקוטר הפיזי שלו הוא d ושההסחה לאדום של הצביר היא z.

1. נסמן ב-$\Delta\theta$ את הגודל הזוויתי הנצפה של הצביר. רשמו ביטוי אינטגרלי עבור $\Delta\theta$ כתלות בנתוני השאלה. אין צורך לפתור את האינטגרל.

2. נסמן ב-z_1 את ההסחה לאדום לגלקסיות בצביר שהכי קרובות אלינו וב-z_2 את ההסחה לאדום לאלו שהכי רחוקות מאתנו, $z_2 - z_1 \ll z$, רשמו את הקשר בין d ל-$(D_p(z_2) - D_p(z_1))$.

3. רשמו את $\Delta z = z_2 - z_1$ כתלות בנתוני השאלה.

4. נניח שאנו יודעים שהיקום שטוח עם חומר וקבוע קוסמולוגי אבל לא יודעים מהם Ω_m ו-Ω_Λ. כמו כן, אנו יודעים שהצביר כדורי אבל לא יודעים מהו d. האם ניתן למצוא את Ω_m ו-Ω_Λ מתוך מדידה של $\frac{\Delta\theta}{\Delta z}$? נמקו.

פתרון:

1. המרחק הזוויתי ביקום שטוח נתון על ידי

$$D_A = \frac{c}{(1+z)\,H_0}\int_0^z \frac{dz'}{E\left(z'\right)}$$

ומכאן ניתן לחשב את הגודל הזוויתית באמצעות

$$\Delta\theta = \frac{d}{D_A}.$$

2. הקוטר הפיזי הוא הגודל של הצביר (המרחק בין הנקודה הרחוקה ביותר לקרובה ביותר) ברגע שנפלט האור, לכן

$$d = \frac{D_c\left(z_2\right)}{1+z_2} - \frac{D_c\left(z_1\right)}{1+z_1} \approx \frac{\left(D_c\left(z_2\right) - D_c\left(z_1\right)\right)}{1+z}.$$

3.

$$(1+z)d = D_c\left(z_2\right) - D_c\left(z_1\right) = \frac{c}{H_0}\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz'}{E\left(z'\right)} \approx \frac{c}{H_0}\frac{\Delta z}{E\left(z\right)}$$

ולכן

$$\Delta z = \frac{d\left(1+z\right)E\left(z\right)H_0}{c}.$$

4.

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta z} = \frac{1}{E\left(z\right)\int_0^z \frac{dz'}{E(z')}}.$$

ניתן לראות שיחס זה לא תלוי בקבוע האבל או ב-d. הוא תלוי רק ב-z (אשר ניתן למדוד בתצפיות), ב-Ω_m (זכרו ש-$\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$).

2) אינפלציה ועידן פלאנק

מצאו חסם עליון עבור $1 - \Omega_{p,k}\left(t_p\right)$ על מנת שהיקום לא יסתיים ב-big crunch בין זמן פלאנק $t_p \approx 5\times10^{-44}$s ותחילת האינפלציה t_i? חשבו זאת עבור $t_i = 10^{-36}$s וכן עבור $t_i = 10^{-26}$s.

הבהרה לגבי הסימונים - אנחנו עובדים כאן עם אינדקס תחתון p כאנלוג לאינדקס תחתון 0 שמופיע בד"כ במשוואות פרידמן, כלומר משוואת פרידמן חסרת המימדים היא

$$\left(\frac{H}{H_p}\right)^2 = \Omega_{p,r}a^{-4} + \Omega_{p,m}a^{-3} + \Omega_{p,k}a^{-2} + \Omega_\Lambda$$

וכן

$$a=\frac{R}{R_p}.$$

פתרון:

ראשית נשים לב שעבור יקום ללא קבוע קוסמולוגי, אם הצפיפות גדולה מהצפיפות הקריטית, יש זמן עבורו $H\left(t_c\right)=0$ ולאחר מכן תהיה התכווצות שהיא פשוט היפוך בזמן של ההתפשטות. איך ניתן לראות זאת? משוואת פרידמן חסרת המימדים נותנת לנו

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2=\Omega_{0,m}a^{-3}+\Omega_{0,k}a^{-2}$$

ומהשוואת אגף ימין ל-0 (במקרה של צפיפות גדולה מהצפיפות הקריטית המחובר השני הוא שלילי) ניתן למצוא את קבוע הסקאלה המקסימלי אליו יגיע היקום. משום ש-H מופיע רק בחזקה שניה, ומהצורה של משוואת פרידמן השנייה

$$\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3}\left(\rho+\frac{3P}{c^2}\right)$$

ניתן לראות כי $a\left(t\right)$ היא פונקציה עם סימטריה להיפוך בזמן סביב t_c.
במקרה של השאלה שלנו, עבור זמנים מוקדמים כמו בשאלה היקום נשלט קרינה ולכן

$$\begin{cases}1-\Omega_{p,k}=\Omega_{p,r}\\ a\propto t^{1/2}\end{cases}.$$

לכן נוכל לכתוב

$$\begin{cases}\Omega_r\propto a^{-4}\propto t^{-2}\\ \Omega_k\propto a^{-2}\propto t^{-1}\end{cases}.$$

ה-big crunch יתחיל כאשר

$$\Omega_r+\Omega_k=0$$

ולכן עלינו לדרוש

$$\Omega_r+\Omega_k>0.$$

כעת נזכר כי

$$\Omega_{p,r}+\Omega_{p,k}=1$$

ונפתור

$$0<\Omega_{p,r}a^{-4}+\Omega_{p,k}a^{-2}=a^{-2}\left(\Omega_{p,r}a^{-2}+(1-\Omega_{p,r})\right)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1-a^{-2}}>\Omega_{p,r}.$$

כעת נותר להבחין כי

$$a\propto t^{1/2}$$

ולכן

$$a=\left(\frac{t}{t_p}\right)^{1/2}.$$

מכאן שאם נדרוש

$$\frac{1}{1-a\left(t_p\right)^{-2}}>\Omega_{p,r}$$

נקבל את הדרוש. נציב

$$a=\left(\frac{t_i}{t_p}\right)^{1/2}$$

ונקבל

$$\Omega_{p,r}<\frac{1}{1-\frac{t_p}{t_i}}\lesssim\begin{cases}1+5\times10^{-8} & t_i=10^{-36}\text{s}\\ 1+5\times10^{-18} & t_i=10^{-26}\text{s}\end{cases}$$

3) נרות סטנדרטיים

מגניטודה היא דרך לתאר את הבהירות של אובייקט אסטרונומי בסקאלה לוגריתמית. מגניטודה נצפית (apparent magnitude) מוגדרת באופן הבא

$$m=-5\,\text{log}_{100}\left(\frac{F}{F_0}\right)=-2.5\,\text{log}_{10}\left(\frac{F}{F_0}\right),$$

כאשר F הוא השטף המתקבל מהאובייקט ו-F_0 הוא שטף רפרנס ידוע כלשהו. במבט ראשון ההגדרה הזו די מוזרה אבל היא נתפרה כדי להתאים למדידות של אסטרונומים בעת העתיקה. מגניטודה אבסולוטית מוגדרת להיות המגניטודה במרחק של 10 pc (היא מייצגת את הבהירות האינטרינזית של האובייקט). ידיעה של שתי המגניטודות, נצפית ואבסולוטית, מאפשרות לנו למצוא את המרחק לאובייקט באמצעות הנוסחא

$$100^{\frac{m-M}{5}}=\frac{F_{10}}{F}=\left(\frac{d}{10\text{ pc}}\right)^2.$$

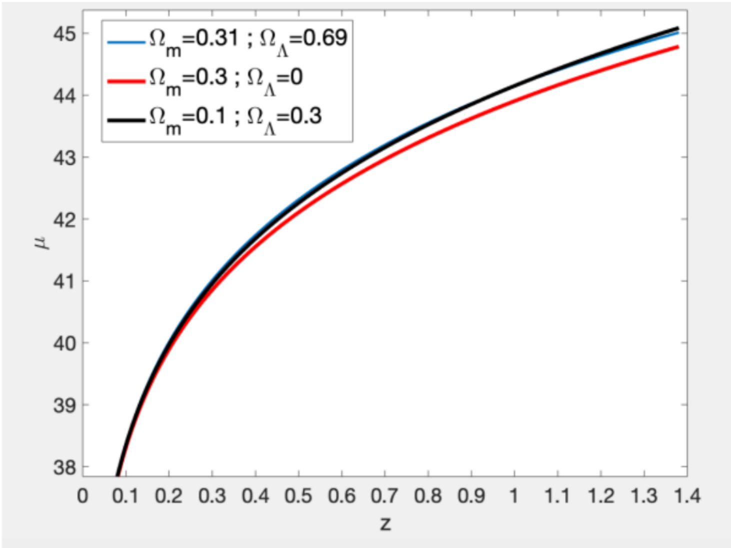
distance modulus מסומן על ידי μ והוא סקאלה לוגריתמית של המרחק

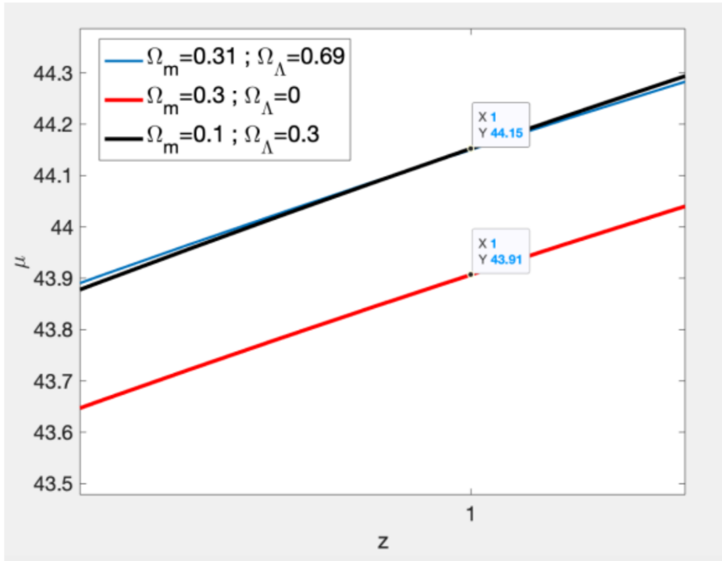
$$\mu = 5\,\text{log}_{10}\left(\frac{d}{10\text{ pc}}\right)$$

והוא מקיים

$$\mu = m - M.$$

במרחקים קוסמולוגים נצטרך להתחשב בהתפשטות היקום ולהציב D_L במקום d.
נרות סטנדרטים הינם אובייקטים אסטרונומיים עם בהירות ידועה. הראו כי באמצעות תצפיות בנרות סטנדרטים ניתן למדוד האם היקום מאיץ. נצייר את הגרף $\mu\left(z\right)$ עבור מספר יקומים שונים:





נבחין כי נתקיים:

$$\frac{H}{H_0} = \left(\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_k (1+z)^2 + \Omega_\Lambda\right)^{0.5}$$

$$\frac{H}{H_0} = (0.1 \times 8 + 0.6 \times 4 + 0.3)^{0.5} = 1.87$$

$$\frac{H}{H_0} = (0.31 \times 8 + 0.69)^{0.5} = 1.78$$

$$\frac{H}{H_0} = (0.3 \times 8 + 0.7 \times 4)^{0.5} = 2.28$$

כלומר היקומים השונים יכולים לקבל קבוע האבל דומה מאד ברדשיפט 1.
ביקומים הפתוחים כאן היה צריך להתחשב בכך ולהשתמש בביטוי

$$D_L = (1+z)\frac{c}{H_0\sqrt{\Omega_k}} \sinh\left(\sqrt{\Omega_k}\int_0^z \frac{dz'}{E(z')}\right).$$

כעת נתונות לנו מדידות מרחק באמצעות נרות סטנדרטים בהסחה לאדום של 0.1 ו-1.
מה הדיוק הנדרש ממדידות אלה על מנת להבדיל בין המודלים?

פתרון:

הערכים ב-$z = 0.1$ זהים בכל היקומים. ב-$z = 1$ ביקום א' חיוורת ב- 0.24 mag ביחס ליקום ב' וזהות בכל רמת רגישות שניתן למדוד לאלו שביקום ג'. על מנת לפסול מודל בוודאות יש לקבל תוצאה שאינה קונסיסטנטית ב-5σ (6×10^{-5}). לכן על מנת להבדיל בין יקום א' ל-ב' בוודאות יש למדוד את היחס בין $\mu\left(z = 0.1\right)$ ו-$\mu\left(z = 1\right)$ בדיוק של כ-0.05 mag. בין יקום א' ויקום ג' לא ניתן להבדיל באופן מעשי בשיטה זו.