אלקטרומגנטיות אנליטית - תירגול #1 - חזרה ותזכורת

גרי רוזנמן - פרטים טכניים:

- כתובת המייל של המתרגל garytaulab@yahoo.com שעת קבלה: יום ד', 13:00-12:00
- שנקר פיזיקה 601, יש לתאם מראש.

- ציוני התרגילים מהווים 1% מהציון הסופי לתרגיל בית שקיבל ציון "עובר"

- הגשת תרגילי בית במודל

1 כתיב רכיבי, הגדרת $\delta_{ij}, \epsilon_{ijk}$

אנו נסתכל על וקטורים דרך הרכיבים שלהם:

$$\vec{\mathbf{A}} = (A_x, A_y, A_z) = (A_1, A_2, A_3)$$

מכפלה סקלרית והסכם הסכימה:

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = \sum_i A_i B_i \equiv A_i B_i$$

כמובן שאין משמעות לשמות של אינדקסים קשורים,

$$A_i B_i \equiv A_j B_j \equiv A_k B_k$$

אותיות לטיניות מסמנות אינדקס שרץ מ-1-3:

$$i, j, k = 1, 2, 3$$

נגדיר שני טנזורים חשובים, הדלתא של קרוניקר

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

וטנזור האפסילון

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk = 123, \text{ and cyc. perm.} \\ -1 & ijk = 213, \text{ and cyc. perm.} \\ 0 & \text{any two indices equal} \end{cases}$$

נשים לב כי

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki}$$

כפל וקטורי נוכל כעת לרשום באופן הבא:

$$(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}})_i \equiv \epsilon_{ijk} A_j B_k$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}(\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}})_x = (\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}})_1 &= \epsilon_{1jk} A_j B_k \\ &= \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 \\ &= A_2 B_3 - A_3 B_2 \\ &= A_y B_z - A_z B_y\end{aligned}$$

ובאופן דומה לשאר הרכיבים.

2 דוגמאות

2.1 בעיה

הראו כי

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

פיתרון

נתחיל מהעובדה שיש סכימה על k. לפיכך כל איבר שלא מתאפס חייב לקיים: $i, j \neq k$ וגם $l, m \neq k$, וכמו כן: $i \neq j$ ו־$m \neq l$. מכאן נובע כי יש לכל היותר k אחד מהסכום שבאמת תורם, נניח k_0, כי עבור ה־k האחרים, הם בהכרח שונים מ־k_0 ולפיכך שווים לאחד מה־i, j ומה־l, m.

עבור ה־k שתורם, לפיכך, או ש־$(i,j) = (l,m)$ או ש־$(i,j) = (m,l)$. במקרה הראשון $\epsilon_{ijk_0} = \epsilon_{lmk_0}$ ובמקרה השני $\epsilon_{ijk_0} = \epsilon_{mlk_0} = -\epsilon_{lmk_0}$, ולמעשה בזאת הוכחנו את הנוסחא, כי

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} &= \epsilon_{ijk_0} \epsilon_{lmk_0} \\ &= 1 \delta_{il} \delta_{jm} + (-1) \delta_{im} \delta_{jl} \\ &= \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}\end{aligned}$$

2.2 בעיה

הוכיחו כי $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ ניצב ל־$\mathbf{A}$ וגם ל־$\mathbf{B}$.

פיתרון

המכפלה הסקלרית $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$ היא:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= A_i(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_i\\ &= A_i\epsilon_{ijk}A_jB_k\\ &= \epsilon_{ijk}A_iA_jB_k\end{aligned}$$

עכשיו, i ו־j הם בסה`כ משתני סכימה ולכן אפשר להחליף ביניהם

$$\epsilon_{ijk}A_iA_jB_k = \epsilon_{jik}A_jA_iB_k$$

אבל זה שווה בדיוק

$$\begin{aligned}&= \epsilon_{jik}A_iA_jB_k\\ &= -\epsilon_{ijk}A_iA_jB_k\end{aligned}$$

כלומר

$$\epsilon_{ijk}A_iA_jB_k \equiv 0$$

באופן דומה מוכיחים כי $\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=0$. מ.ש.ל.

3 הגדרת הנגזרות הוקטוריות

אנו מגדירים את הפעולות הוקטוריות בעזרת האינדקסים. יהי $\mathbf{r}=(x,y,z)\equiv(x_1,x_2,x_3)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} &\equiv \partial_i\\ (\boldsymbol{\nabla}\Phi)_i &= \partial_i\Phi\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} &= \partial_iA_i = \partial A_x/\partial x + \partial A_y/\partial y + \partial A_z/\partial z\\ (\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})_i &= \epsilon_{ijk}\partial_jA_k\end{aligned}$$

4 הדלתא של דירק

נגדיר את פונקציית דלתא במימד אחד:

$$\delta(x)=\begin{cases}0, & if\, x\neq 0\\ \infty & if\, x=0\end{cases}$$

כאשר

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$$

שימו לב, היחידות של פונקציית דלתא הם $\frac{1}{length}$.

פונקציית הדלתא בשלושה מימדים:

$$\delta^3(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$

פונקציה זו שווה ל־0 בכל מקום חוץ מבראשית, שם היא הולכת לאינסוף כך ש:

$$\int_{all\ space} dV\, \delta(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z)dxdydz = 1$$

5 דוגמאות

5.1 בעיה

הראו כי $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) = 0$.

פיתרון

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) &= \partial_i(\epsilon_{ijk}\partial_j A_k)\\ &= \epsilon_{ijk}\partial_i\partial_j A_k \equiv 0\end{aligned}$$

כי יש לנו סכום של טנזור אנטי־סימטרי עם $\partial_i\partial_j = \partial_j\partial_i$ הסימטרי, ולכן הוא מתאפס.

6 אלקטרוסטטיקה

באלקטרוסטטיקה, משוואות מקסוול עבור השדה החשמלי הינן:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} &= 0\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} &= 4\pi\rho\end{aligned}$$

ניתן לכן להגדיר את הפוטנציאל החשמלי:

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$$

אשר יקיים את משוואת פואסון

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho$$

6.1 בעיה

רשמו את צפיפות המטען הנפחית $\rho(\mathbf{r})$ של המערכות הבאות:

1. מטען נקודתי q הממוקם בנקודה $\mathbf{r}_0$.
2. מישור אינסופי הטעון בצפיפות מטען משטחית אחידה σ ב־$z=0$.

פיתרון

אנחנו משתמשים בפונקצית δ כדי לייצג צפיפויות `נפחיות` של דברים ממימד נמוך יותר:

1. התשובה היא

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

כי אינטגרל על צפיפות המטען צריך לתת את המטען הכולל

$$\begin{aligned} Q_{total} &= \int dV\, \rho(\mathbf{r}) \\ &= \int dV\, q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ &= q \int dV\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \\ &= q \end{aligned}$$

2. התשובה היא, בקואורדינטות קרטזיות,

$$\rho(\mathbf{r}) = \sigma\delta(z)$$

נבדוק כי לאחר אינטגרציה אכן מתקבל המטען הכולל

$$\begin{aligned} Q_{total} &= \int dV\, \sigma\delta(z) \\ &= \sigma \int (dxdy) \int dz\delta(z) \\ &= \sigma \cdot A \end{aligned}$$

כפי שצריך.

משאלה זו ניתן להסיק את הפוטנציאל של מטען נקודתי. המשוואה שהפוטנציאל מקיים הינה:

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho = -4\pi q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

ניזכר כי (ראה נספח)

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

וכך נקבל

$$\Phi = \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

נספח

נוכיח את הטענה הבאה:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

ראשית נגדיר

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \equiv f(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$$

נמצא את הפונקציה f ע`י חלוקת המרחב לשניים:

1. ב־ $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$ אפשר פשוט להפעיל את האופרטור ∇^2 ולקבל:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) = 0$$

כלומר ־ f מתאפסת באזור זה.

2. עבור $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ הנגזרת של $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}$ לא מוגדרת, ולכן בנקודה זו נצטרך לנקוט בגישה שונה. נסתכל על האינטגרל הבא:

$$\int dV \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right)$$

כאשר האינטגרל הוא על נפח כדורי סביב הראשית $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. נשתמש במשפט הדיברגנס:

$$= \int d\vec{S} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right)$$

$d\vec{S}$ הוא אלמנט שטח על קליפת הכדור בכיוון ניצב לשפת המשטח, כלומר בכיוון $\hat{\mathbf{r}}$.

גם $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\right)$ הוא בכיוון $\hat{\mathbf{r}}$. ובסה`כ נקבל:

$$= \int dS\left(-\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}\right) = \int d\Omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2\left(-\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2}\right) = -4\pi$$

כלומר

$$\int dV f(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|) = -4\pi$$

עכשיו אנחנו יודעים שתי תכונות של הפונקציה f:

1. היא מתאפסת בכל המרחב פרט לראשית.
2. אינטגרל עליה נותן 1 (עד כדי קבוע).

וזוהי בדיוק ההגדרה של פונקציית הדלתא!
לכן נקבל כי

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}\right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$$