מבוא למצב מוצק תשפ"ג – תרגול 3
מודל דרודה-זומרפלד (המשך)

ספרות מומלצת:

- Ashcroft, Mermin: ch. 1–2
- Simon: ch. 4

1 המודל

ההבדל בין מודל ההולכה של זומרפלד למודל הקלאסי של דרודה מתבטא בשינוי יחיד. האלקטרונים עדיין מתוארים כגז חופשי של חלקיקים העוברים פיזורים עם זמן אופייני τ (פרמטר פנומנולוגי) בין פיזור לפיזור, והם עדיין מצייתים למשוואת התנועה (הקלאסית)

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathbf{p}}{\tau} + \mathbf{F}(t)$$

ההבדל לעומת מודל דרודה טמון בכך שמיד לאחר כל פיזור, גודל המהירות שבה האלקטרון מתפזר (בכיוון אקראי) נקבע לא לפי התפלגות בולצמן, אלא לפי התפלגות פרמי-דיראק:

$$P(v) \propto \left[e^{\beta\left(\frac{1}{2}mv^2-\mu\right)} + 1\right]^{-1}$$

המעבר ממודל דרודה למודל זומרפלד לפיכך לא משפיע על תוצאות שלא תלויות במהירות האלקטרונים – לדוגמה, מוליכות DC ו-AC, מקדם הול או תדירות הפלזמה.

קיבול חום של גז אלקטרונים

המעבר מהתפלגות אנרגיה קלאסית להתפלגות אנרגיה קוונטית משנה את התכונות הסטטיות של גז האלקטרונים. דוגמה בולטת היא התוצאה שנובעת מקירוב זומרפלד (ראו תזכורת לפיתוח הקירוב ב-moodle) עבור קיבול החום :

$$c_v = \frac{\pi^2}{3} k_B^2 g\left(\varepsilon_F\right) T = \frac{m k_F}{3\hbar^2} k_B^2 T = \frac{m\left(3\pi^2 n\right)^{1/3}}{3\hbar^2} k_B^2 T = \frac{\pi^2 n}{2\varepsilon_F} k_B^2 T$$

כאשר

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}$$

היא אנרגיית פרמי.

2 תרגילים

2.1 תרגיל: תיקון ה-thermopower באפקט זיבק

בתרגול הקודם גזרנו את הקשר הלינארי בין גרדיאנט טמפרטורה הנופל על מוליך ארוך לבין השדה החשמלי שנוצר בתגובה לו,

$$\mathbf{E} = Q \cdot \nabla T$$

וחישבנו את הביטוי לקבוע Q, המכונה thermopower, בעזרת מודל דרודה. מה הערך של Q כשהוא מחושב בעזרת מודל זומרפלד?

פתרון

את הקשר הלינארי הנ"ל מצאנו מתוך השוואה בין שתי מהירויות ממוצעות של האלקטרונים : $\mathbf{v}_E$ שמושפעת מהשדה החשמלי, ו-$\mathbf{v}_Q$ שמושפעת מגרדיאנט הטמפרטורה. המהירות הראשונה חושבה מתוך חוק אוהם, שכאמור לא משתנה בין מודל דרודה למודל זומרפלד (הוא נובע מאותה משוואת תנועה). החישוב של $\mathbf{v}_Q$, לעומת זאת, התבסס על תכונות שיווי המשקל של גז האלקטרונים שקובעות את גודל המהירות הממוצע מיד אחרי פיזור. בפרט מצאנו שמתקיים

$$\mathbf{v}_Q = -\frac{\tau c_v}{3mn} \nabla T$$

כאשר c_v הוא קיבול החום הסגולי, והוא שונה בין מודל דרודה למודל זומרפלד. הביטוי שהתקבל עבור Q הוא אם כך

$$Q = -\frac{c_v}{3ne}$$

וכאשר הצבנו את התוצאה הקלאסית $c_v = \frac{3}{2}nk_B$ קיבלנו

$$Q = -\frac{k_B}{2e} = -0.43 \times 10^{-4}\frac{\text{volt}}{\text{K}}$$

אם נציב במקום זאת את התוצאה הקוונטית $c_v = \frac{\pi^2 n}{2\varepsilon_F}k_B^2 T$, נקבל

$$Q = -\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{k_B}{e}\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right) = -1.42\left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right) \times 10^{-4}\frac{\text{volt}}{\text{K}}$$

בטמפרטורת החדר מתקיים $k_B T/\varepsilon_F \sim 0.01$, ולכן התוצאה של מודל זומרפלד קטנה בשני סדרי גודל מזו של מודל דרודה (ואכן התוצאה של זומרפלד תואמת היטב את התוצאות הניסיוניות במקרים סטנדרטיים).

2.2 תרגיל: אוסילציות פלזמה

עבור איזו תדירות ω ייתכנו אוסילציות של צפיפות המטען של האלקטרונים במתכת, $\rho(t) = \rho(\omega)\,e^{-i\omega t}$? הניחו גבול תדירויות גבוהות $\omega\tau \gg 1$ (לחילופין, גבול של מתכת נקייה מאוד).

פתרון

נקשר את הביטוי המבוקש לצפיפות המטען אל צפיפות הזרם באמצעות משוואת הרציפות,

$$\nabla\cdot\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} = i\omega\rho(\omega)\,e^{-i\omega t}$$

ניתן להסיק מכך שהתלות של הזרם בזמן תהיה מהצורה $\mathbf{J}(t) \propto e^{-i\omega t}$ — זרם AC בתדירות ω, כאשר בסיטואציה כזו מתקיים לפי מודל דרודה

$$\mathbf{J} = \frac{\sigma_D}{1-i\omega\tau}\mathbf{E}$$

נשתמש בחוק גאוס $\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho$ כדי לקבל

$$i\omega\rho(\omega)\,e^{-i\omega t} = \nabla\cdot\mathbf{J} = \frac{\sigma_D}{1-i\omega\tau}\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{4\pi\sigma_D}{1-i\omega\tau}\rho(\omega)\,e^{-i\omega t}$$

מתקבלת המשוואה

$$i\omega\rho(\omega)=\frac{4\pi\sigma_D}{1-i\omega\tau}\rho(\omega)\approx i\frac{4\pi\sigma_D}{\omega\tau}\rho(\omega)$$

כאשר הקירוב תקף בגבול של תדירויות גבוהות. קיבלנו אם כן את הדרישה

$$0=\left(1-\frac{4\pi\sigma_D}{\omega^2\tau}\right)\rho(\omega)=\left(1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\rho(\omega)$$

כאשר הצבנו את הביטוי לתדירות הפלזמה, $\omega_p^2\equiv\frac{4\pi ne^2}{m}$. לדרישה זו יש פתרון לא טריוויאלי רק במקרה בו $\omega=\omega_p$. לפיכך גל של צפיפות מטען במתכת יכול להתקדם **כל עוד תדירותו היא תדירות הפלזמה** ω_p.

הערה גם אוסילציות הפלזמה ניתנות לקוונטוט כאשר סקלות האנרגיה בבעיה דורשות זאת. החלקיק המתאים לקוונטוט הזה נקרא **פלזמון**, נושא אנרגיה של $\hbar\omega_p$ ויכולה להיות לו באופן כללי השפעה על תהליכים אלקטרוניים במתכת (אבל לא נעסוק בתהליכים כאלו בקורס).

2.3 חימום Joule

נתונה מתכת שעליה פועל שדה חשמלי אחיד וקבוע $\mathbf{E}$. ידוע לנו כי ההתנגדות של המתכת מובילה לדיסיפציה: אובדן אנרגיה של האלקטרונים לחום. במודל המיקרוסקופי של דרודה, אובדן האנרגיה קורה בשל הפיזורים שגורמים לאלקטרונים "לשכוח" את התנע שהיה להם לפני הפיזור.

1. בהינתן שני פיזורים עוקבים שהפרש הזמן ביניהם הוא t, חשבו את האנרגיה שאובדת בממוצע בפיזור השני מבין השניים.
2. מודל דרודה מניח שההסתברות לפיזור בפרק זמן אינפיניטסימלי $\mathrm{d}t$ היא $\mathrm{d}t/\tau$. הראו שנובע מכך כי ההסתברות לכך שאורכו של פרק הזמן בין שני פיזורים עוקבים ייפול בין t לבין $t+\mathrm{d}t$ היא $e^{-t/\tau}\frac{\mathrm{d}t}{\tau}$.
3. חשבו את האנרגיה הממוצעת, ליחידת נפח וליחידת זמן, שהאלקטרונים מאבדים בשל פיזורים. הראו שבמוליך באורך L ועם שטח חתך A התוצאה מובילה לביטוי הידוע עבור הספק האנרגיה המומר לחום, I^2R.

פתרון

1. נסמן ב-$\mathbf{v}_1$ את המהירות איתה יצא האלקטרון מהפיזור הראשון, אז כעבור פרק זמן t מהירותו היא $\mathbf{v}_1-\frac{e}{m}\mathbf{E}t$. אם הוא יוצא מהפיזור השני עם מהירות $\mathbf{v}_2$, האנרגיה שאבדה עקב הפיזור היא

$$\Delta\varepsilon=\frac{1}{2}m\left(\mathbf{v}_1-\frac{e}{m}\mathbf{E}t\right)^2-\frac{1}{2}m\left(v_2\right)^2=\frac{1}{2}m\left(v_1\right)^2-et\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{E}+\frac{\left(eEt\right)^2}{2m}-\frac{1}{2}m\left(v_2\right)^2$$

בממוצע, $\left\langle (v_2)^2 \right\rangle = \left\langle (v_1)^2 \right\rangle$ (זו אותה התפלגות שיווי משקל) וגם $\langle \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{E} \rangle = 0$ (משום שכיוון המהירות לאחר הפיזור הוא אקראי). לפיכך קיבלנו שהאנרגיה שאובדת בממוצע היא

$$\Delta\varepsilon = \frac{(eEt)^2}{2m}$$

2. לצורך החישוב, נכפול את ההסתברות P_1 לכך ש<u>לא</u> התרחש פיזור בתוך אינטרוול הזמן $[0,t]$ בהסתברות P_2 לכך ש<u>כן</u> התרחש פיזור בפרק הזמן $[t, t+\mathrm{d}t]$. אם נחלק את $[0,t]$ ל-N אינטרוולים אינפי' באורך $\mathrm{d}t$ ($t = N \cdot \mathrm{d}t$), הרי שההסתברות לכך שבכל אינטרוול כזה לא התרחש פיזור היא $1 - \mathrm{d}t/\tau$, וההסתברות לכך שלא התרחש פיזור באינטרוול הכולל היא אם כך

$$P_1 = \left(1 - \frac{\mathrm{d}t}{\tau}\right)^N = \left(1 - \frac{t}{\tau} \cdot \frac{1}{N}\right)^N$$

ובגבול $N \to \infty$ אכן נקבל $P_1 \to e^{-t/\tau}$. מצד שני, $P_2 = \mathrm{d}t/\tau$ לפי הגדרה. לכן ההסתברות המבוקשת היא בסה"כ $P = P_1 \cdot P_2 = e^{-t/\tau}\frac{\mathrm{d}t}{\tau}$, כנדרש.

3. נשתמש בתוצאות שני הסעיפים הקודמים כדי להעריך את אובדן האנרגיה הממוצע בפיזור של אלקטרון:

$$\langle \Delta\varepsilon \rangle = \int_0^\infty \frac{(eEt)^2}{2m} \cdot e^{-t/\tau}\frac{\mathrm{d}t}{\tau} = \frac{(eE\tau)^2}{2m}\int_0^\infty x^2 e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{(eE\tau)^2}{m}$$

הזמן הממוצע בין פיזורים הוא τ, ומספר האלקטרונים ליחידת נפח הוא n, ולכן האנרגיה שאובדת ליחידת נפח וליחידת זמן היא

$$\langle \Delta\varepsilon \rangle \cdot \frac{n}{\tau} = \frac{ne^2\tau}{m}E^2 = \sigma_D E^2$$

במוליך באורך L ועם שטח חתך A ההספק שאובד הוא אם כך $\mathcal{P} = \sigma_D E^2 LA$. ההתנגדות במוליך כזה נתונה על ידי

$$R = \rho\frac{L}{A} = \frac{L}{\sigma A}$$

ולפיכך

$$\mathcal{P} = \frac{E^2L^2}{R} = \frac{V^2}{R} = I^2 R$$

כנדרש.