מבוא למצב מוצק תשפ"ג: תרגיל בית 1

.1

(א) חשבו את רדיוס פרמי כתלות בצפיפות $k_F(n)$ עבור גז אלקטרונים חופשיים בדו-מימד.

(ב) חשבו את צפיפות המצבים ליחידת שטח $g(\varepsilon)$ עבור גז דו-מימדי של אלקטרונים חופשיים הכלואים בתחום בשטח $A = L \times L$. הראו כי היא קבועה בתחומים $\varepsilon > 0$ ו-$\varepsilon < 0$.

(ג) השתמשו בהגדרה של צפיפות האלקטרונים

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon \, g(\varepsilon) \, f_{FD}(\varepsilon)$$

והסיקו כי הפוטנציאל הכימי מקיים את הקשר

$$\mu + k_B T \ln\left(1 + e^{-\mu/k_B T}\right) = \varepsilon_F$$

.2 נסמן בתור $s = S/V$ את צפיפות האנטרופיה. בשאלה זו נוכיח שעבור גז אלקטרונים חופשיים (בתלת-מימד) מתקיים

$$s = -k_B \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{4\pi^3} \left[f \ln f + (1-f) \ln (1-f)\right]$$

כאשר סימנו בקיצור $f = f_{FD}(\varepsilon(\mathbf{k}), T)$ (התפלגות פרמי-דיראק).

(א) הראו שבהינתן צפיפות גז n מוגדרת (שאינה משתנה עם T), מתקיים

$$\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{4\pi^3} \cdot \frac{\partial f}{\partial T} = 0$$

(ב) השתמשו בתוצאת הסעיף הקודם ובהגדרת קיבול החום הסגולי

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_n$$

על מנת לבטא אותו באופן הבא:

$$c_v = \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{4\pi^3} \left(\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu\right) \frac{\partial f}{\partial T}$$

כאשר u צפיפות האנרגיה ו-μ הפוטנציאל הכימי.

(ג) הראו שמתקיים

$$-\frac{\partial}{\partial T} \left[f \ln f + (1-f) \ln (1-f)\right] = \frac{\varepsilon(\mathbf{k}) - \mu}{k_B T} \cdot \frac{\partial f}{\partial T}$$

בנוסף, הסבירו מדוע בגבול $T \to 0$ הביטוי $f \ln f + (1-f) \ln (1-f)$ מתאפס לכל $\mathbf{k}$.

(ד) לבסוף, השתמשו בתוצאות הסעיפים הקודמים, בזהות התרמודינמית

$$c_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_n$$

ובחוק השלישי של התרמודינמיקה ($s \to 0$ כאשר $T \to 0$) על מנת לקבל את התוצאה המבוקשת עבור s.

3. נתון מוצק איזוטרופי דו-מימדי עם צפיפות אטומים n ליחידת שטח. בהתאם להנחת מודל Debye, נניח כי יחס הנפיצה של תדירות התנודות ההרמוניות במוצק הוא $\omega\left(\mathbf{k}\right) = c\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = ck$.

(א) חשבו את צפיפות המצבים $g(\omega)$ (זכרו להגדיר תדירות קיטעון ω_D).

(ב) כתבו ביטוי אינטגרלי עבור קיבול החום הסגולי c_v של המוצק, וחשבו אותו בגבול של טמפרטורות נמוכות. תוכלו להשתמש בתוצאה הבאה:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \frac{x^3 e^x}{\left(e^x - 1\right)^2} \approx 7.2$$

4. במסגרת מודל קוונטי כללי לתנודות הרמוניות במוצק, אופני תנודה נורמליים עם תדירויות $\omega_s(\mathbf{k})$ תורמים תרומות בלתי-תלויות לגדלים תרמודינמיים, כגון אנרגיה. כפי שצוין בנספח לתרגיל הכיתה, רמות האנרגיה של כל אופן תנודה נתונות על ידי

$$E_{\mathbf{k},s} = \left(n_{\mathbf{k},s} + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_s(\mathbf{k})$$

כאשר $n_{\mathbf{k},s} = 0, 1, 2, \ldots$.

(א) הראו שהממוצע התרמי של האנרגיה של כל אופן תנודה נתון על ידי

$$\left\langle E_{\mathbf{k},s} \right\rangle = \left[\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_s(\mathbf{k})} - 1} + \frac{1}{2}\right] \hbar\omega_s(\mathbf{k})$$

הסיקו מכך שקיבול החום הסגולי של המוצק הוא

$$c_v = \frac{1}{V}\sum_{\mathbf{k},s}\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{\hbar\omega_s(\mathbf{k})}{e^{\beta\hbar\omega_s(\mathbf{k})}-1}\right]$$

(ב) כזכור, במוצק תלת-מימדי מספר אופני התנודה נתון על ידי $3N$, כאשר N מספר האטומים במוצק. הראו שבגבול בו הטמפרטורה T גבוהה (ביחס למה היא צריכה להיות גבוהה?) מתקבל חוק דולון-פטי,

$$c_v \sim 3nk_B$$

כאשר $n = N/V$.

(ג) הראו שבטמפרטורה גבוהה התיקון הקוונטי המוביל לחוק דולון-פטי הוא

$$c_v \sim 3nk_B - \frac{\hbar^2}{12Vk_BT^2}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\omega_s(\mathbf{k})\right)^2$$

(ד) חשבו במפורש את התיקון הנ"ל לחוק דולון-פטי עבור מודל Debye (הדרכה: עברו מסכום על אופני תנודה לאינטגרל על ω תוך שימוש בתוצאה שהוצגה בכיתה עבור צפיפות המצבים $g(\omega)$).

(ה) חשבו במפורש את התיקון הקוונטי לחוק דולון-פטי אם לכל אופני התנודה תדירות זהה ω_E (מודל איינשטיין).