$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

1

א) נשתמש בזהות:

$$a f(a^+)|0\rangle = \frac{df(a^+)}{da^+}|0\rangle$$

ניקח את שני ט״ס ונכתוב לפי הזהות:

$$a f(a^+)|0\rangle = \alpha f(a^+)|0\rangle$$

$$\frac{df(a^+)}{da^+}|0\rangle = \alpha f(a^+)|0\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{df}{da^+} = \alpha f$$

$$\Rightarrow f = e^{\alpha a^+}$$

f עד כדי קבוע. את הקבוע נמצא ע״י נרמול:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle 0|C^* e^{\alpha^* a} C e^{\alpha a^+}|0\rangle$$

$$= |C|^2 \langle 0|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha^* a)^n}{n!} e^{\alpha a^+}|0\rangle$$

אם נרצה להחליף את $a^n e^{\alpha a^+}$

נשתמש בזהות $[A, f(B)] = [A,B] f'(B)$

$$\Rightarrow a^n e^{\alpha a^+} = \alpha^n e^{\alpha a^+}$$

$$\Rightarrow \langle\alpha|\alpha\rangle = |C|^2 \langle 0|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^2}{n!} e^{\alpha a^+}|0\rangle$$

$$= |C|^2 e^{|\alpha|^2} \langle 0|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha a^+)^n}{n!}|0\rangle$$

$$= |C|^2 e^{|\alpha|^2} \underbrace{\langle 0|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}|n\rangle}_{1}$$

$$= |c|^2 e^{|\alpha|^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad c = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^{+}} |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} |n\rangle$$

$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ (ב) נסתכל על ש' הע"צ

$\langle\alpha| a^{+} = \alpha^{*} \langle\alpha|$ [illegible]:

$$\Rightarrow \langle\alpha| a^{+} a |\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{n}|\alpha\rangle$$

$$= \alpha\alpha^{*} \cancel{\langle\alpha|\alpha\rangle}_{=1}$$ [illegible]:

אורתונורמליים
לעצמם
([illegible])

$$\Rightarrow \quad \langle\hat{n}\rangle = |\alpha|^2$$

(ג) רק צריך לחשב את $\langle n^2 \rangle$

$$n^2 = a^{+}a\,a^{+}a = a^{+}(1 + a^{+}a)a$$

$$= a^{+}a + (a^{+})^2 a^2$$

$$\Rightarrow \quad \langle\alpha| n^2 |\alpha\rangle = |\alpha|^2 + \underbrace{\langle\alpha| a^{+2} a^2 |\alpha\rangle}_{|\alpha|^4}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta n = \sqrt{|\alpha|^2 + |\alpha|^4 - |\alpha|^4} = |\alpha|$$

(ד

$$D = e^{\alpha a^{+} - \alpha^{*} a}$$

$$\Rightarrow e^{\alpha a^{+}} e^{-\alpha^{*} a} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} |0\rangle$$

$$= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^{+}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^{*} a)^n}{n!} |0\rangle$$

a) הורסים את $|0\rangle$ ולכן נשאר רק אם $n=0$

$$\Rightarrow e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} |n\rangle = |\alpha\rangle$$

שווה 1

ב) נציג ונקבל:

$$D^\dagger(\alpha) = e^{\alpha^* a - \alpha a^\dagger}$$

$$= e^{-(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}$$

ולכן שמכפיל ב D יקבל 1

ג)

$$D(\alpha)D(\beta) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} e^{\beta a^\dagger - \beta^* a}$$

נחשב:

$$[\alpha a^\dagger - \alpha^* a, \beta a^\dagger - \beta^* a]$$

$$-\alpha\beta^* [a^\dagger, a] - \alpha^*\beta [a, a^\dagger]$$

$$= \alpha\beta^* - \alpha^*\beta$$

$$D(\alpha+\beta) = e^{(\alpha+\beta)a^\dagger - (\alpha+\beta)^* a} = e^{\alpha a^\dagger + \beta a^\dagger - \alpha^* a - \beta^* a}$$

נכפיל ונחלק את $D(\alpha)D(\beta)$ ונקבל:

$$\frac{e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta}}{e^{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta}}$$

$$D(\alpha)D(\beta) = e^{\alpha a^\dagger + \beta a^\dagger - \alpha^* a - \beta^* a}$$

$$= D(\alpha+\beta)\, e^{\alpha^*\beta - \alpha\beta^*}$$

3

$$a_2 = U^\dagger a_0 U \qquad a_3 = U^\dagger a_1 U$$

$$U(\theta) = e^{i\frac{\theta}{2}(a_0^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_0)}$$

$$U^\dagger = e^{-i\frac{\theta}{2}(a_0 a_1^\dagger + a_1 a_0^\dagger)}$$

$$a_2 = e^{-i\frac{\theta}{2}(a_0 a_1^\dagger + a_1 a_0^\dagger)} a_0 e^{i\frac{\theta}{2}(a_0^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_0)}$$

$$[G, a_0] = \frac{\theta}{2}[a_0 a_1^\dagger + a_1 a_0^\dagger, a_0] = -\frac{\theta}{2} a_1$$

$$[G, a_1] = -\frac{\theta}{2} a_0 \qquad i^3 = -i$$

$$\Rightarrow a_2 = a_0 - i\frac{\theta}{2} a_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 a_0 + i\frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3 a_1 + \dots$$

$$= \cos\frac{\theta}{2} a_0 - i\sin\frac{\theta}{2} a_1$$

באותו אופן:

$$a_3 = a_1 - i\frac{\theta}{2} a_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 a_1 + i\frac{1}{3!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^3 a_0$$

$$= -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) a_0 + \cos\frac{\theta}{2} a_1$$

עבור 50:50 $\theta = -\frac{\pi}{2}$

בכתיב מטריצי:

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$$r = -i\sin\frac{\theta}{2} \qquad t = \cos\frac{\theta}{2}$$

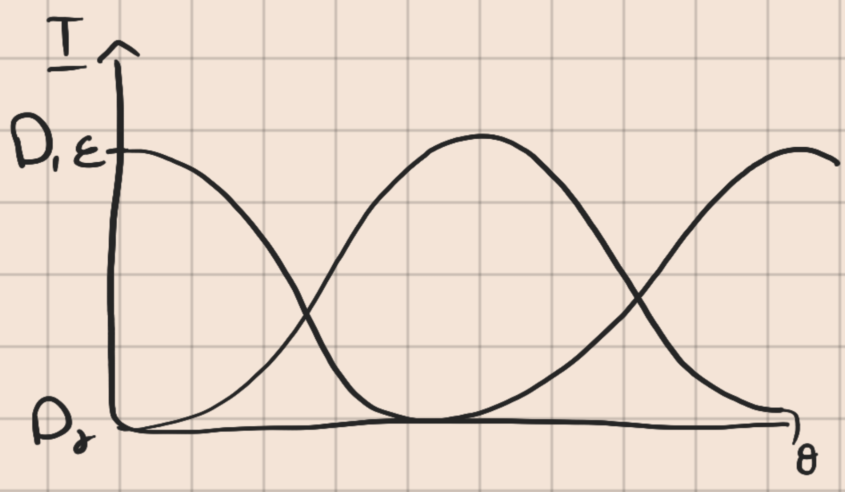
$$r' = -i\sin\frac{\theta}{2} \qquad t' = \cos\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \det = 1$$

ב) כי כרה דברים מתקדמים בזמן בתמונת הייזנברג. האופרטורים מתקדמים בזמן ע"י $e^{i\hat{G}} A e^{-iG}$ הפרופגטור בדיוק ככה: כאשר $\hat{G}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar}$. שם G רק הזמן לא במפורש בפרופגטור.

4) א) עבור אור קלאסי ראינו כי

(ע"פ הניסוי כאו"ט ה)



ב)

$$|0\rangle_0|\alpha\rangle_1 \xrightarrow{BS_1} \left|\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_2\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_3$$

כעת רק מה שהגיע לגלאי "3" עבר

$$\xrightarrow{\theta} e^{i\theta a_3^\dagger a_3}\left|\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_2\left|\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_3$$

פאזה

$$= e^{i\theta n_3}\left|\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_2 \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^m}{m!}a_3^{\dagger m}|0\rangle_3 = \left|\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_2 \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^m}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!}a_3^{\dagger m}a_3^{n}|m\rangle_3$$

$$= \left|\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_2\left|e^{i\theta}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_3$$

אלו שניהם חופפים פאזה של $\frac{\pi}{2}$ בגלל המראה

אבל זה לא פאזה יחסית לכן נתעלם ממנה.

(תלוי אם סיבוב הפאזה הוא רק פאזה גלובלית)

כעת נמיר את גלאים "2" ו-"3" ל- "1" ו-"0"

בגלל המיקומים שלהם לפני BS_2:

$$\hat{D}_1 \qquad\qquad \hat{D}_0$$

$$\left|\frac{i\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_1\left|e^{i\theta}\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right\rangle_0 = \exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\alpha a_1^\dagger + i\alpha^* a_1\right)\right]\exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\theta}\alpha a_0^\dagger - e^{-i\theta}\alpha^* a_0\right)\right]|0\rangle_0|0\rangle_1$$

כי הצמוד הוא $-\frac{i\alpha^*}{\sqrt{2}}$

נמצא את הטרנס' ההופכית:

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}a_0 + \frac{i}{\sqrt{2}}a_1$$

$$\pm \quad i a_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}a_0 + \frac{i}{\sqrt{2}}a_1$$

$$a_2 - i a_3 = \sqrt{2}\, a_0 \qquad a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a_2 - i a_3\right)$$

$$a_2 + i a_3 = \sqrt{2}\, i a_1 \qquad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i a_2 + a_3\right)$$

$$\exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\alpha a_1^\dagger + i\alpha^* a_1\right)\right] = \exp\left\{\frac{1}{2}\left[i\alpha\left(i a_2^\dagger + a_3^\dagger\right) + i\alpha^*\left(-i a_2 + a_3\right)\right]\right\}$$

חילופים

$$= \exp\left[\frac{1}{2}\left(-\alpha a_2^\dagger + i\alpha a_3^\dagger + \alpha^* a_2 + i\alpha^* a_3\right)\right]$$

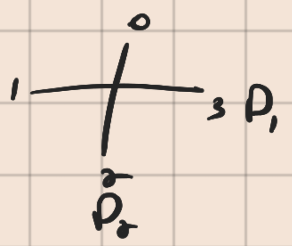
$$= D_2\left(-\frac{\alpha}{2}\right) D_3\left(\frac{i\alpha}{2}\right)$$

$$= \exp\left[\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}\alpha a_2^{\dagger} + ie^{i\theta}\alpha a_3^{\dagger} - e^{-i\theta}\alpha^{*} a_2 + ie^{-i\theta}\alpha^{*} a_3\right)\right]$$

$$= D_2\left(\frac{\alpha}{2}e^{i\theta}\right) D_3\left(\frac{i\alpha}{2}e^{i\theta}\right)$$

$$\Rightarrow D_2\left(\frac{\alpha}{2}(e^{i\theta}-1)\right) D_3\left(\frac{i\alpha}{2}(e^{i\theta}+1)\right) |0\rangle_2 |0\rangle_3$$

$$= \left|\frac{\alpha}{2}(e^{i\theta}-1)\right\rangle_2 \left|\frac{i\alpha}{2}(e^{i\theta}+1)\right\rangle_3$$



אפשר להיות ש $|\alpha|^2$ עבור שתי היציאות

שוה למצב הקלאסי