1. חשבו את כל המצבים עבור חיבור של שני ספינים $s_1 = s_2 = 1$ **מבלי להשתמש בטבלת קלבש-גורדן**. איזה מהמצבים הם סימטריים ואיזה מהם אנטי-סימטריים תחת החלפת חלקיקים?

$$1 \otimes 1 = 0 \oplus 1 \oplus 2$$

נתחיל מהמקסימלי

$$|S_1 S_2\rangle = |11\rangle = |22\rangle = |JM\rangle \quad (1)$$

נפעיל J_-:

$$J_-|22\rangle = \sqrt{\underbrace{2(2+1)}_{6} - \underbrace{2(2-1)}_{-2}}\,|21\rangle$$

$$\text{אבל גם} = S_{1-}|11\rangle + S_{2-}|11\rangle = \sqrt{2}|01\rangle + \sqrt{2}|10\rangle$$

$$\Rightarrow \quad |21\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \quad (2)$$

$$J_-|21\rangle = \sqrt{6}|20\rangle = (S_{1-} + S_{2-})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\underbrace{S_{1-}|01\rangle}_{\sqrt{2}|-11\rangle} + \underbrace{S_{1-}|10\rangle}_{\sqrt{2}|00\rangle} + \underbrace{S_{2-}|01\rangle}_{\sqrt{2}|00\rangle} + \underbrace{S_{2-}|10\rangle}_{\sqrt{2}|1-1\rangle}\Big)$$

$$\Rightarrow \quad |20\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|-11\rangle + \underbrace{\frac{2}{\sqrt{6}}}_{\sqrt{\frac{4}{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1-1\rangle \quad (3)$$

$$J_-|20\rangle = \sqrt{6}|2-1\rangle = (S_{1-} + S_{2-})\left(\overset{0}{\frac{1}{\sqrt{6}}|-11\rangle} + \sqrt{\frac{2}{3}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1-1\rangle\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}|-10\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|0-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|-10\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}|0-1\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|-10\rangle + |0-1\rangle\right) \quad (4)$$

$$|2-2\rangle = |-1-1\rangle \quad (5)$$

והמצב הנמוך ביותר

נחפש את המצב המקסימלי במולטיפלט הבא: $|11\rangle$

הוא מאונך ל:

$$|21\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle + |01\rangle\right)$$

לכן:

$$|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle - |01\rangle\right) \quad (6)$$

נפעיל:

$$J_-|11\rangle = \sqrt{2}|10\rangle = (S_{1-} + S_{2-})\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle - |01\rangle\right)$$

$$= \left(|00\rangle - |00\rangle + |1-1\rangle - |-11\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \quad |1\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,-1\rangle - |-1\,1\rangle\right) \quad (7)$$

$$J_-|1\,0\rangle = \sqrt{2}\,|1\,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(S_{1-}+S_{2-}\right)\left(|1\,-1\rangle - |-1\,1\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\,|0\,-1\rangle - \sqrt{2}\,|-1\,0\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \quad |1\,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\,-1\rangle - |-1\,0\rangle\right) \quad (8)$$

והמצב האחרון חייב להיות: $|0\,0\rangle = |0\,0\rangle \quad (9)$

וקיבלנו 9 מצבים כמצופה.

2. העזרו בטבלת קלבש-גורדן, וכתבו את כל מצבי הסכום האפשריים עבור חלקיק עם תנע זוויתי מרחבי $\ell = 2$ וספין $s = 1$.

2×1

m_1	m_2	$J=3$	$J=2$	$J=1$	M
+2	+1	1			+3
+2	0	1/3	2/3		+2
+1	+1	2/3	−1/3		+2
+2	−1	1/15	1/3	3/5	+1
+1	0	8/15	1/6	−3/10	+1
0	+1	2/5	−1/2	1/10	+1
+1	−1	1/5	1/2	3/10	0
0	0	3/5	0	−2/5	0
−1	+1	1/5	−1/2	3/10	0
0	−1	2/5	1/2	1/10	−1
−1	0	8/15	−1/6	−3/10	−1
−2	+1	1/15	−1/3	3/5	−1
−1	−1	2/3	1/3		−2
−2	0	1/3	−2/3		−2
−2	−1	1			−3

$$2 \otimes 1 = 1 \oplus 2 \oplus 3$$

$$|3\,3\rangle = |2\,1\rangle$$
$$|3\,2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|2\,0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\,1\rangle$$
$$|3\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{15}}|2\,-1\rangle + \sqrt{\frac{8}{15}}|1\,0\rangle + \sqrt{\frac{2}{5}}|0\,1\rangle$$
$$|3\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|1\,-1\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|0\,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|-1\,1\rangle$$
$$|3\,-1\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}|0\,-1\rangle + \sqrt{\frac{8}{15}}|-1\,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{15}}|-2\,1\rangle$$
$$|3\,-2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|-1\,-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|-2\,0\rangle$$
$$|3\,-3\rangle = |-2\,-1\rangle$$

$$|2\,2\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|2\,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1\,1\rangle$$
$$|2\,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|2\,-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0\,1\rangle$$
$$|2\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,-1\rangle - |-1\,1\rangle\right)$$
$$|2\,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\,-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|-1\,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|-2\,1\rangle$$
$$|2\,-2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|-1\,-1\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|-2\,0\rangle$$

$$|1\,1\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}|2\,-1\rangle - \sqrt{\frac{3}{10}}|1\,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|0\,1\rangle$$
$$|1\,0\rangle = \sqrt{\frac{3}{10}}|1\,-1\rangle - \sqrt{\frac{2}{5}}|0\,0\rangle + \sqrt{\frac{3}{10}}|-1\,1\rangle$$
$$|1\,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}|0\,-1\rangle - \sqrt{\frac{3}{10}}|-1\,0\rangle + \sqrt{\frac{3}{5}}|-2\,1\rangle$$

3. הדינמיקה של אלקטרון הנמצא במצב התחלתי $\left|\ell = 1, s = \frac{1}{2}; m_\ell = 0, m_s = \frac{1}{2}\right\rangle$ מוכתבת על-ידי ההמילטוניאן

$$|J\,M\rangle = \left|\tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$H = \Delta\left(\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}\right),$$

כאשר Δ הוא קבוע חיובי.

(א) מהו מצב האלקטרון בזמן t כלשהו?

(ב) מהו ערך התצפית של האופרטור L_x כתלות בזמן?

$$(\bar{L}+\bar{S})^2 = L^2 + S^2 + 2\bar{L}\cdot\bar{S}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{L}\cdot\bar{S} = \frac{1}{2}\left(J^2 - L^2 - S^2\right) \qquad \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

$$\left|0\,\tfrac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\left|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$E_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}} = \frac{\Delta}{2}\left(\frac{15}{4}\hbar^2 - 2\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2\right) \Rightarrow e^{-i\frac{\Delta}{2}t/\hbar}$$

$$E_{\frac32 \frac12} = \frac{\Delta}{2}\left(\frac34\hbar^2 - 2\hbar^2 - \frac34\hbar^2\right) \Rightarrow e^{i\Delta t/\hbar}$$

$$\xrightarrow[\text{בזמן}]{\text{קידום}} \sqrt{\frac23}\, e^{-i\frac{\Delta}{2}t/\hbar}\left|\tfrac32\tfrac12\right\rangle - \frac{1}{\sqrt3}\, e^{i\Delta t/\hbar}\left|\tfrac12\tfrac12\right\rangle$$

	3/2	1/2
	+1/2	+1/2
+1 −1/2	1/3	2/3
0 +1/2	2/3	−1/3

ב) נחזור לבסיס הקודם:

$$\sqrt{\frac23}\, e^{-i\frac{\Delta}{2}t/\hbar}\left(\frac{1}{\sqrt3}\left|1,-\tfrac12\right\rangle + \sqrt{\frac23}\left|0\tfrac12\right\rangle\right) - \frac{1}{\sqrt3}\, e^{i\Delta t/\hbar}\left(\sqrt{\frac23}\left|1-\tfrac12\right\rangle - \frac{1}{\sqrt3}\left|0\tfrac12\right\rangle\right)$$

$$\underbrace{\left(\frac{\sqrt2}{3}e^{-i\frac{\Delta}{2}t/\hbar} - \frac{\sqrt2}{3}e^{i\Delta t/\hbar}\right)}_{A_1}\left|1-\tfrac12\right\rangle + \underbrace{\left(\frac23 e^{-i\frac{\Delta}{2}t/\hbar} - \frac13 e^{i\Delta t/\hbar}\right)}_{A_0}\left|0\tfrac12\right\rangle$$

$$\frac12(L_+ + L_-)\left(A_1(t)\left|1-\tfrac12\right\rangle + A_0(t)\left|0\tfrac12\right\rangle\right) = \frac12\left(A_0\left|1\tfrac12\right\rangle + A_1\left|0-\tfrac12\right\rangle + A_0\left|-1\tfrac12\right\rangle\right)$$

והפעלה חזרה:

$$\left(A_1^*\left\langle 1-\tfrac12\right| + A_0^*\left\langle 0\tfrac12\right|\right)\frac12\left(A_0\left|1\tfrac12\right\rangle + A_1\left|0-\tfrac12\right\rangle + A_0\left|-1\tfrac12\right\rangle\right)$$

אין מרכיבים לא אורתוגונליים שמחכים דבר השני לכן $\langle L_x\rangle = 0$!

4. נתונים שלושה אלקטרונים במצבים מרחביים שונים. ניתן לרשום מצבי ספין לפי ערכים של S_z של כל חלקיק, כלומר .... $|m_1, m_2, m_3\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle,$. נגדיר את התנע הזוויתי של שני חלקיקים

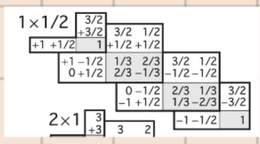
$$\mathbf{J}_{12} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2,$$

ואת התנע הזוויתי הכולל

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{12} + \mathbf{S}_3.$$

כתבו את המצב $\left|J_{12} = 1, J = \frac12, J_z = \frac12\right\rangle$ בבסיס $|m_1, m_2, m_3\rangle$ הנ"ל.

מכיוון שמחברים קודם את $0\oplus 1$ ונתון $J_{12} = 1$



נוכל להתייחס למרחב שלנו כעת כ- $1\otimes\frac12$.

אך נתון גם ש $J_z = \frac12$ כלומר $M = \frac12$

אך הנ״ל רכיב $J = \frac12$, לכן מקבלים:

$$\left|J = \tfrac12, M = J_z = \tfrac12\right\rangle = \sqrt{\frac23}\left|1-\tfrac12\right\rangle - \frac{1}{\sqrt3}\left|0\tfrac12\right\rangle$$

ונסתכל על המרחב שלנו:

triplet:

$$|11\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$$
$$|10\rangle = \frac{1}{\sqrt2}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) \quad \otimes \quad |\uparrow\rangle,\ |\downarrow\rangle$$
$$|1-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

האופציות היחידות שמביאות $J_z=\frac{1}{2}$ הם (האדום והכחול).

$$\Rightarrow \quad |m_{12}=1, m_3=-\tfrac{1}{2}\rangle = |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle$$

$$|m_{12}=0, m_3=\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$\Rightarrow \quad |J=\tfrac{1}{2}, J_{12}=1, J_z=\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

5. הדינמיקה של שני חלקיקים בעלי ספין $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$ מתוארת על ידי ההמילטוניאן הבא

$$H = A\left(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2\right) + B\left(g_1 S_1^z + g_2 S_2^z\right),$$

כאשר A, B, g_1 ו-g_2 הם קבועים. אין דרגות חופש מרחביות. *(הערה: בהמשך אנו נראה שזהו ההמילטוניאן המתאר את האינטראקציה בין הספין של הפרוטון והאלקטרון באטום מימן תחת השפעת שדה מגנטי חיצוני B).*

(א) כתבו את אלמנטי המטריצה של ההמילטוניאן בבסיס הסכום (כלומר, בסיס סינגלט וטריפלט).

(ב) מהן האנרגיות העצמיות? *(רמז: עליכם ללכסן רק מטריצה 2×2.)*

(ג) כתבו את המצבים העצמיים של ההמילטוניאן בבסיס הסכום.

$$H = \frac{A}{2}\left(J^2 - S_1^2 - S_2^2\right) + B\left(g_1 S_{1z} + g_2 S_{2z}\right)$$

$$\langle JM'|H|JM\rangle = \langle JM'|\frac{A}{2}\left(J^2 - S_1^2 - S_2^2\right) + B\left(g_1 S_{1z} + g_2 S_{2z}\right)|JM\rangle$$

$$= \frac{A}{2}\hbar^2\left(J(J+1) - m_1^2 - m_2^2\right)\delta_{mm'} + B\langle JM'|g_1 S_{1z} + g_2 S_{2z}|JM\rangle$$

האיבר הראשון אלכסון, כדי למצוא את האיבר השני נפעיל על המצבים (יש רק 4):

$$\left(g_1 S_{1z} + g_2 S_{2z}\right)|00\rangle = \left(g_1 S_{1z} + g_2 S_{2z}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(g_1 \tfrac{\hbar}{2}|\uparrow\downarrow\rangle - g_2\tfrac{\hbar}{2}|\uparrow\downarrow\rangle + g_1\tfrac{\hbar}{2}|\downarrow\uparrow\rangle - g_2\tfrac{\hbar}{2}|\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left[(g_1 - g_2)|\uparrow\downarrow\rangle + (g_1 - g_2)|\downarrow\uparrow\rangle\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2}(g_1 - g_2)|10\rangle$$

כאילו אופניק כלפי:

$$(g_1 S_{1z} + g_2 S_{2z})|10\rangle = (g_1 S_{1z} + g_2 S_{2z})\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left(g_1|\uparrow\downarrow\rangle - g_2|\uparrow\downarrow\rangle - g_1|\downarrow\uparrow\rangle + g_2|\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left[(g_1 - g_2)|\uparrow\downarrow\rangle - (g_1 - g_2)|\downarrow\uparrow\rangle\right]$$

$$= \frac{\hbar}{2}(g_1 - g_2)|00\rangle$$

כלומר המצבים $|10\rangle$ ו- $|00\rangle$ מתערבבים ביניהם, כלומר

ההמילטוניאן ינקד להאות S. נרשום את החלק הרלוונטי בבלוק

את זה:

$$\begin{array}{c|cccc} & \overset{\uparrow\uparrow}{|11\rangle} & \overset{\downarrow\downarrow}{|1{-1}\rangle} & |10\rangle & |00\rangle \\ \hline \langle 11| & \alpha+\beta_+ & 0 & 0 & 0 \\ \langle 1{-1}| & 0 & \alpha-\beta_+ & 0 & 0 \\ \langle 10| & 0 & 0 & \alpha & \beta_- \\ \langle 00| & 0 & 0 & \beta_- & -3\alpha \end{array}$$

$$\langle 11|H|11\rangle = \frac{A}{2}\left[1(1+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right] + \frac{B}{2}\hbar(g_1+g_2) = \frac{A}{4}\hbar^2 + \frac{B\hbar}{2}(g_1+g_2)$$

$$2 - \frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

ונסמן

$$\beta_\pm = \frac{B\hbar}{2}(g_1 \pm g_2) \qquad \alpha = \frac{A}{4}\hbar^2$$

$$\langle 1{-1}|H|1{-1}\rangle = \alpha - \beta_+$$

$$\langle 10|H|10\rangle = \alpha + \langle 10|\beta_+|00\rangle = \alpha$$

$$\langle 00|H|00\rangle = \frac{A}{2}\hbar^2\left(-\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}A\hbar^2 = -3\alpha$$

$$\langle 10|H|00\rangle = \beta_- = \langle 00|H|10\rangle$$

נלכסן רק את הבלוק הנותר:

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & \beta_- \\ \beta_- & -3\alpha-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-\alpha)(3\alpha+\lambda) - \beta_-^2 = 0$$

$$\underline{3\alpha\lambda} + \lambda^2 - 3\alpha^2 \underline{-\alpha\lambda} - \beta_-^2 = 0$$

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda - \underset{4(3\alpha^2+\beta_-^2)}{3\alpha^2 - \beta_-^2} = 0$$

$$\lambda_\pm = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta_-^2 + 12\alpha^2}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 + \beta_-^2}$$

$$\Rightarrow \quad E_\pm = -\frac{A\hbar^2}{4} \pm \sqrt{\frac{A^2\hbar^4}{4} + \frac{B^2\hbar^2}{4}(g_1-g_2)^2} = -\frac{A\hbar^2}{4} \pm \frac{\hbar^2}{2}\sqrt{A^2 + \frac{B^2}{\hbar^2}(g_1-g_2)^2}$$

והערכים העצמיים של המצבים העצמיים $|11\rangle, |1{-1}\rangle$:

$$E_{1\pm} = \alpha \pm \beta_+ = \frac{A\hbar^2}{4} \pm \frac{B\hbar}{2}(g_1+g_2)$$

<u>E_+:</u>

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + \sqrt{4\alpha^2+\beta_-^2} & \beta_- \\ \beta_- & -2\alpha - \sqrt{4\alpha^2+\beta_-^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftarrow$$

$$\Downarrow$$

$$|+\rangle \propto \beta_-|10\rangle - \left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2+\beta_-^2}\right)|00\rangle$$

בדיוק באותו אופן עבור E_-: $\quad |-\rangle \propto \beta_-|10\rangle + \left(\sqrt{4\alpha^2+\beta_-^2} - 2\alpha\right)|00\rangle$

ורק נותר לנרמל:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{\beta_-^2 + \left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2+\beta_-^2}\right)^2}} \left(\beta_-|10\rangle - \left(2\alpha + \sqrt{4\alpha^2+\beta_-^2}\right)|00\rangle\right)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{\beta_-^2 + \left(\sqrt{4\alpha^2+\beta_-^2} - 2\alpha\right)^2}} \left(\beta_-|10\rangle + \left(\sqrt{4\alpha^2+\beta_-^2} - 2\alpha\right)|00\rangle\right)$$

וכמובן שהם $|11\rangle, |1{-1}\rangle$ מ"ע.

6. העזרו בתוצאה שקיבלנו בשאלה מספר 5 בתרגול כיתה 4, ומצאו את מקדמי קלבש-גורדן עבור חיבור תנ"ז מרחבי ℓ כלשהו עם ספין $s=\frac{1}{2}$ עבור המצב $\left|J=\ell-\frac{1}{2}, M\right\rangle$ עבור M כלשהו. ודאו את התוצאה שקיבלתם עבור מצב כלשהו (לבחירתכם) מטבלת קלבש-גורדן.

$$|J=\ell-\tfrac{1}{2}, M\rangle = \alpha_M |M-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + \beta_M |M+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$J_- |\ell-\tfrac{1}{2}, M\rangle = \hbar\sqrt{(\ell-\tfrac{1}{2}+M)(\ell+\tfrac{1}{2}-M)}\, |\ell-\tfrac{1}{2}, M-1\rangle$$

ומצד שני:

$$(L_- + S_-)\left(\alpha_M |M-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + \beta_M |M+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$=$$

$$\alpha_M \hbar\sqrt{(\ell+M-\tfrac{1}{2})(\ell-M+\tfrac{3}{2})}\, |M-\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + \hbar\underbrace{\cancel{\sqrt{(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1)}}}_{1\cdot 1}{}^{=1}\, \alpha_M |M-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$+ \beta_M \hbar\sqrt{(\ell+M+\tfrac{1}{2})(\ell-M+\tfrac{1}{2})}\, |M+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\Rightarrow |\ell-\tfrac{1}{2}, M-1\rangle = \alpha_M$$

משהו כאן לא הסבר, נשתמש
מאורתוגונליות:

אם

$$|J=\ell-\tfrac{1}{2}, M\rangle = \alpha_M' |M-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + \beta_M' |M+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

ו-:

$$|J=\ell+\tfrac{1}{2}, M\rangle = \alpha_M |M-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle + \beta_M |M+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

אז כדי שיהיו אורתוגונליים מה שצריך זה:

$$\alpha_M' = \beta_M \qquad \beta_M' = -\alpha_M$$

$$\Rightarrow |J=\ell-\tfrac{1}{2}, M\rangle = \sqrt{\frac{\ell-M+\frac{1}{2}}{2\ell+1}}\, |M-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{\ell+M+\frac{1}{2}}{2\ell+1}}\, |M+\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle$$

7. **(שאלת חובה)**
אלקטרון באטום נמצא באורביטל בעל ℓ כלשהו. צימוד ספין-מסילה קובע $J = \ell - 1/2$, וידוע כי $M = j$. חשבו את ערך התצפית של μ_z אופרטור מומנט הדיפול המגנטי

$$\mu_z = \frac{\mu_B}{\hbar}\left(L_z + 2S_z\right).$$

$$\langle \ell-\tfrac12, j \,|\, \mu_z \,|\, \ell-\tfrac12, j\rangle$$

שתמש בסעיף הקודם כדי לחשב:

$$\frac{\mu_B}{\hbar}(L_z+2S_z)\left[\underbrace{\sqrt{\frac{\ell-j+\frac12}{2\ell+1}}}_{\alpha}\,|j-\tfrac12,\tfrac12\rangle - \underbrace{\sqrt{\frac{\ell+j+\frac12}{2\ell+1}}}_{\beta}\,|j+\tfrac12,-\tfrac12\rangle\right]$$

$$\mu_B\left[\left(\alpha(j-\tfrac12)+\alpha\right)|j-\tfrac12,\tfrac12\rangle - \left(\beta(j+\tfrac12)-\beta\right)|j+\tfrac12,-\tfrac12\rangle\right]$$

$$\Rightarrow \quad \langle \mu_B\rangle = \mu_B\left[\alpha^2\left[j-\tfrac12+1\right]+\beta^2\left[j+\tfrac12-1\right]\right]$$

$$= \mu_B\frac{\ell-j+\frac12}{2\ell+1}\left(j+\tfrac12\right) + \mu_B\frac{\ell+j+\frac12}{2\ell+1}\left(j-\tfrac12\right)$$

$$= \frac{\mu_B}{2\ell+1}\Big(\ell j - \cancel{j^2} + \cancel{\tfrac12 j} + \cancel{\tfrac12\ell} - \cancel{\tfrac12 j} + \cancel{\tfrac14}$$

$$+\ell j + \cancel{j^2} + \cancel{\tfrac12 j} - \cancel{\tfrac12\ell} - \cancel{\tfrac12 j} - \cancel{\tfrac14}\Big)$$

$$= \mu_B\frac{2\ell j}{2\ell+1}$$