$$\Omega_R = \sqrt{\Delta^2 + \frac{|V|^2}{\hbar^2}}$$ 1

סביר $\quad \frac{|V|^2}{\hbar^2} \ll 1 \iff |V| \ll \hbar$

או $\quad \frac{|V|^2}{\hbar^2} \ll \Delta^2 \iff |V| \ll \hbar\Delta$

נקבל $\Omega_R = \Delta$ ואז נקבל את הביטוי

מתוחת ההפרעות

$$\Omega_R t = \sqrt{\Delta^2 t^2 + t^2 \frac{|V|^2}{\hbar^2}}$$

לכן סביר $\quad t^2\frac{|V|^2}{\hbar^2} \ll 1 \iff t \ll \frac{\hbar}{|V|}$

או $\quad t^2\frac{|V|^2}{\hbar^2} \ll \Delta^2 \iff t \ll \frac{\hbar}{|V|}\Delta$

נקבל את הביטוי.

$$\begin{vmatrix} 1+S_3-\lambda & S_1-iS_2 \\ S_1+iS_2 & 1-S_3-\lambda \end{vmatrix} = (1+S_3-\lambda)(1-S_3-\lambda) - (S_1-iS_2)(S_1+iS_2)$$

$$= 1 - \cancel{S_3} - \lambda + \cancel{S_3} - S_3^2 - \cancel{S_3\lambda} - \lambda + \cancel{S_3\lambda} + \lambda^2$$

$$- S_1^2 - i\cancel{S_1 S_2} + i\cancel{S_1 S_2} - S_2^2$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - S_3^2 - S_1^2 - S_2^2$$

$$\lambda_\pm = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1 - S_3^2 - S_1^2 - S_2^2)}}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2} = 1 \pm |\bar{S}| \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \pm \frac{|\bar{S}|}{2}}$$

כדי לקיים את הדרישה שהעצמיים של ρ בין אפס

לאחד ומקיים $\quad \frac{1-S_3}{2} \le 1$

$$1 - S_3 \le 2$$

$$-1 \le S_3 \le 1 \Rightarrow 0 \le S_3^2 \le 1$$

כמקודם גם כאן נקבל $\quad 0 \le S_i^2 \le 1$

ולכן גם $|\vec{s}| \le 1$ (כי ברור ש $|\vec{s}| \ge 0$)

רק עבור $|\vec{s}| = 1$ נקבל ע"ע $0, 1$

והם בדיוק מתאימים למצבים $|g\rangle, |e\rangle \Leftrightarrow |0\rangle, |1\rangle$

$$\hat{\rho}|g\rangle = 0 \cdot |g\rangle = 0$$
$$\hat{\rho}|e\rangle = 1|e\rangle = |e\rangle$$

ואלה המצבים הטהורים היחידים. של המערכת.

אחרת נקבל ע"ע אחרים, שזה בדיוק $\hat{\rho}$,

$\hat{\rho}$ מייצג את ההסתברות למצבים.

ולכן עבור $\vec{s}$ ערך אחר $|\vec{s}|<1$ נקבל

מצב מעורב.

3

$$|\psi\rangle\langle\psi| = \left[\cos\tfrac{\theta}{2}|e\rangle + e^{i\varphi}\sin\tfrac{\theta}{2}|g\rangle\right]\left[\cos\tfrac{\theta}{2}\langle e| + e^{-i\varphi}\sin\tfrac{\theta}{2}\langle g|\right]$$

$$= \cos^2\tfrac{\theta}{2}|e\rangle\langle e| + \sin^2\tfrac{\theta}{2}|g\rangle\langle g| + e^{-i\varphi}\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}|e\rangle\langle g|$$

$$+ e^{i\varphi}\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}|g\rangle\langle e|$$

$$\Rightarrow \hat{\rho} = \begin{pmatrix} \sin^2\frac{\theta}{2} & e^{-i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & \cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1+S_3}{2} = \sin^2\tfrac{\theta}{2}$$

$$1 + S_3 = 2\sin^2\tfrac{\theta}{2}$$

$$S_3 = 2\sin^2\tfrac{\theta}{2} - 1 = -\cos\theta$$

$$\frac{S_1 + iS_2}{2} = e^{-i\varphi}\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}$$

$$S_1 + iS_2 = e^{i\varphi}\sin\theta = \sin\theta\cos\varphi + i\sin\theta\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} S_1 &= \sin\theta\cos\varphi \\ S_2 &= \sin\theta\sin\varphi \end{aligned}$$

4 (א

$$(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})^2 = (n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z)(n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} n_i^2\sigma_i^2 + n_xn_y\underbrace{(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x)}_{=0} + \text{וכו'}$$

כל הקומבינציות לאיברים מהצורה הזו מתאפסים כי זוגי

$$= \sum_{i=1}^{3} n_i^2\sigma_i^2 \underset{\sigma_i^2=\mathbb{1}}{=} \mathbb{1}\sum_{i=1}^{3} n_i^2 \underset{|\hat{n}|=1}{=} \mathbb{1}$$

$$e^{-i\varphi\hat{n}\cdot\bar{\sigma}} = \sum \frac{(-i\varphi\hat{n}\cdot\bar{\sigma})^n}{n!}$$

אם נוציא מכל האיברים האי-זוגיים $\hat{n}\cdot\bar{\sigma}$ נקבל סינוס

ואם נוציא מכל האיברים הזוגיים $(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})^2$ נקבל קוסינוס

$$\Rightarrow \quad e^{-i\varphi\hat{n}\cdot\bar{\sigma}} = \cos(\varphi)\mathbb{1} - i\sin(\varphi)(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})$$

ב(i ללא B ורק עם ν:

$$H_I = -\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\nu)\sigma_y$$

עם t_1:

$$-i\left(-\frac{1}{2}\cancel{\mathrm{Im}(\nu)}\sigma_y\right)\frac{1}{\cancel{\hbar}}\frac{\pi\cancel{\hbar}}{2\cancel{\mathrm{Im}(\nu)}}$$

$$= i\frac{\pi}{4}\sigma_y \Rightarrow e^{-i(-\frac{\pi}{4})\sigma_y} \to \varphi = -\frac{\pi}{4}, \quad \hat{n} = (0,1,0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

עם B ובלי ν:

$$H_I = \frac{1}{2}B\sigma_z$$

$$-i\frac{1}{2}\cancel{B}\sigma_z\frac{\pi\cancel{\hbar}}{\cancel{B}}\frac{1}{\cancel{\hbar}} = -i\frac{\pi}{2}\sigma_z \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \hat{n} = (0,0,1)$$

$$\Rightarrow e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_z} = -i\sigma_z = \begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\ \cdot&\cdot\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i&-i\\-i&i\end{pmatrix} = \frac{-i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix} = e^{-i\frac{\pi}{2}}U_H$$

ב) ii) אם כ מתי:

$$H_I = \frac{1}{2}\left(Re(v)\sigma_x + B\sigma_z\right)$$

$$U_H = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_z \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \hat{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$U_H = e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{n}\cdot\bar{\sigma}}$$

$$\varphi(\hat{n}\cdot\bar{\sigma}) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_z\right)$$

$$H_I t/\hbar = \frac{t}{2\hbar}\left(Re(v)\sigma_x + B\sigma_z\right)$$

$$\frac{\pi}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{t\,Re(v)}{\cancel{2}\hbar} = \frac{t\,B}{\cancel{2}\hbar}$$

$$t = \frac{\pi\hbar}{\sqrt{2}Re(v)}$$ — ! $B = Re(v)$ סדיר

נקבל את מה שאנחנו רוצים.