$$H = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{H}_i$$ 1

$$\mathcal{H}_i |n\rangle_i = \varepsilon_n |n\rangle_i$$

בוזונים

עבור פונק' הגל Ψ חייבת להיות סימטרית.

האנרגי' של מצב היסוד היא $N\varepsilon_0$ כי כלם יכולים לשבת ברמת היסוד.

ולכן פונק' הגל Ψ עבור $N=3$:

$$\Psi = |0\rangle_1 |0\rangle_2 |0\rangle_3$$

וקל לראות שהיא סימטרית תחת P_{ij}

פרמיונים

Ψ א"ס וחוק האיסור של פאולי יכריח אותם לשבת ברמות האנרגי' אבל הספין "יתן ל-2 לשבת בכל רמת אנרג' מבלי להפר את חוק האיסור של פאולי, לכן:

$$E_0 = 2\sum_{i=1}^{N/2} \varepsilon_i$$

ועבור $N=3$ נשתמש בדטרמיננטת סלייטר:
ולא נשכח את הספין שיאפשר לשניים לשבת ברמת היסוד

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} |0\uparrow\rangle_1 & |0\uparrow\rangle_2 & |0\uparrow\rangle_3 \\ |0\downarrow\rangle_1 & |0\downarrow\rangle_2 & |0\downarrow\rangle_3 \\ |1\rangle_1 & |1\rangle_2 & |1\rangle_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \Big[|0\uparrow\rangle_1 \left(|0\downarrow\rangle_2 |1\rangle_3 - |0\downarrow\rangle_3 |1\rangle_2\right) - |0\uparrow\rangle_2 \left(|0\downarrow\rangle_1 |1\rangle_3 - |0\downarrow\rangle_3 |1\rangle_1\right) + |0\uparrow\rangle_3 \left(|0\downarrow\rangle_1 |1\rangle_2 - |0\downarrow\rangle_2 |1\rangle_1\right) \Big]$$

ואפשר לראות שקיבלנו את כל הפרמוטציות האפשריות

וניתן לראות שמס' אי"ז של פרמוטציות קיבלו סימן

אי'ן. נסתכל למשל על האיבר $|1\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3$

איך נגיע אליו מ 1,2,3 ? נפעיל $P_{23}P_{13}P_{12}$

וזה מספר אי"ז של פרמוטציות ולכן הוא קיבל מינוס.

גם ובמקרה שיש מספר אי"ז של פרמיונים אז

$$E_0 = 2\sum_{i=1}^{N/2}\varepsilon_i + \varepsilon_{\frac{N}{2}+1}$$

(2) א) מצב היסוד: $|0,0\rangle \otimes \chi_{singlet}$

עם אנרג'

$$2E_0 = 2\left(0+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$
$$= \hbar\omega$$

ב) אחד ב $|1\rangle$ והשני ב-$|0\rangle$, !לא אפשר

להיות מצב סימטרי וגם אנטי סימטרי בבה:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle + |01\rangle\right) \otimes \chi_{singlet}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|10\rangle - |01\rangle\right) \otimes \chi_{triplet}$$

והאנרג':

$$E = E_0 + E_1$$
$$= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{3}{2}\hbar\omega$$
$$= 2\hbar\omega$$

③ נכתוב שהמיר עבור H במרחב הספין

$$S^2 = (\bar{S}_1+\bar{S}_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\bar{S}_1\cdot\bar{S}_2$$

$$S_1\cdot S_2 = \frac{1}{2}\left[S^2 - S_1^2 - S_2^2\right]$$

$$\Rightarrow H = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{P_2^2}{2m} - \frac{\gamma}{2}\left[S^2 - S_1^2 - S_2^2\right]$$

ולמצב היסוד:

$$|11\rangle \otimes \chi_{singlet}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

כל כיוון נותן n^2 ובסכום במצב היסוד של כל הכיוון

$$\Rightarrow E_0 = 6\,\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} - \frac{\gamma}{2}\left[0 - \left(\tfrac{1}{2}\hbar\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\hbar\right)^2\right] \cdot \underline{6} \quad \text{הכל}$$

$$-\frac{1}{4}\hbar^2 - \frac{1}{4}\hbar^2 = -\frac{1}{2}\hbar^2$$

$$= 3\,\frac{\pi^2\hbar^2}{mL^2} + \frac{\gamma}{4}\hbar^2$$

ולמצב המעורר הראשון:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|12\rangle + |21\rangle) \otimes \chi_{triplet}$$

זה לא משנה איזה מצב מבין אלו (מצבי הספין)

ונבחר תמיד היותר שלו מרכיבה לכן סימטרים

נבחר למשל $|\uparrow\uparrow\rangle$ ולכן

$$S^2 = \hbar^2\, 1(1+1) = 2\hbar^2$$

והמצב המעורר הראשון יהיה שרק באחד הכיוונים $n=2$

ולכן $5\cdot 1 + 1\cdot 2^2 = 9$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2mL^2} - \frac{\gamma}{2}\left[2\hbar^2 - \frac{1}{4}\hbar^2 - \frac{1}{4}\hbar^2\right]$$

$$2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{3}{4}\gamma\hbar^2$$

ונרצה ש:

$$E_1 > E_0$$

$$3\alpha + \frac{1}{4}\gamma < \frac{9}{2}\alpha - \frac{3}{4}\gamma$$

$$\frac{9}{2} - 3 = \frac{9-6}{2} = \frac{3}{2}$$

$$0 < \gamma < \frac{3}{2}\alpha = \frac{3}{2}\frac{\pi^2}{mL^2}$$

$$H=\frac{p^2}{2M}+\lambda x^2$$ 4

$|n\rangle$ עם תדירות ω ומסה m $\Leftarrow$ פרמטר

$\alpha=\frac{m\omega}{\hbar}$ ולכן נ'ה

$$\langle n|H|n\rangle=\frac{1}{2M}\langle n|p^2|n\rangle+\lambda\langle n|x^4|n\rangle \Leftarrow$$

$$=\frac{1}{2M}\hbar^2\alpha\left(n+\frac{1}{2}\right)+\lambda\frac{3}{4\alpha^2}\left(1+2n(n+1)\right)$$

נגזור לפי α:

$$=\frac{1}{2M}\hbar^2\left(n+\frac{1}{2}\right)-\lambda\frac{6}{4\alpha^3}\left(1+2n(n+1)\right)\overset{!}{=}0$$

$$\frac{1}{2M}\hbar^2\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha^3=\lambda\frac{3}{2}\left(1+2n(n+1)\right)$$

$$\alpha^3=\frac{\frac{3\lambda(1+2n(n+1))}{\cancel{2}}}{\frac{\hbar^2(n+\frac{1}{2})}{\cancel{2}M}}$$

$$\boxed{\alpha_0^n=\left(\frac{3\lambda M\left(1+2n(n+1)\right)}{\hbar^2\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)^{1/3}}$$

א) עבור מצב היסוד נציב $n=0$

$$\Rightarrow \quad a_0^0=\left(\frac{6\lambda M}{\hbar^2}\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow E_0(a_0^0)=\frac{\hbar^2}{4M}\left(\frac{6\lambda M}{\hbar^2}\right)^{1/3}+\frac{3}{4}\lambda\left(\frac{\hbar^2}{6\lambda M}\right)^{2/3}$$

$$=\frac{6^{1/3}+3\cdot 6^{-2/3}}{4}\left(\frac{\lambda\hbar^4}{M^2}\right)^{1/3}$$

$$\approx \underline{\underline{0.68}}$$

מאוד קרוב!

ב) ועבור מצב המעורר הראשון: $n=1$

$$\alpha_0' = \left(\frac{15\lambda M}{\frac{3\hbar^2}{2}} \right)^{1/3} = \left(\frac{10\lambda M}{\hbar^2} \right)^{1/3}$$

$$\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{10\lambda M}{\hbar^2} \right)^{1/3} \frac{3}{2} + \frac{15}{4}\lambda \left(\frac{\hbar^2}{10\lambda M} \right)^{2/3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3 \cdot 10^{1/3} + 15 \cdot 10^{-2/3}}{4} \approx 2.424 > 0.68$$

✓