קוונטים 2 – תרגול 3
סימטריות רציפות וסיבובים

מתרגל: זמיר הלר-אלגזי

תוכן העניינים

1 תזכורת – טרנספורמציות רציפות

תחת טרנספומרציה U (אוניטרית או אנטי-אוניטרית), מצבים $\left|\psi\right\rangle$ במרחב הילברט עוברים טרנספורמציה כך,

$$U : \left|\psi\right\rangle \longrightarrow \left|\psi'\right\rangle = U \left|\psi\right\rangle \tag{1.1}$$

ואילו אופרטורים O יעברו טרנספורמציה כך

$$U : O \longrightarrow O' = UOU^\dagger \tag{1.2}$$

אופרטור O הוא אינווריאנטי אם $O' = O \iff [O, U] = 0$. טרנספורמציה **סימטרית** משאירה את ההמילטוניאן אינווריאנטי, ומקיימת

$$[H, U] = 0 \tag{1.3}$$

נבחן טרנספורמציות רציפות $U(\theta)$ עם פרמטר רציף θ. ב-$\theta = 0$ הטרנספורמציה לא משנה כלום ושקולה לטרנספורמצית הזהות,

$$U(0) = 1 \tag{1.4}$$

הודות לרציפות ב-θ, אנחנו יכולים כעת לפתח את U אינפינטיסמלית סביב 0 עם פרמטר $\epsilon \ll 1$ ולכתוב

$$\boxed{U(\epsilon) \simeq 1 - \frac{i\epsilon}{\hbar}G} \tag{1.5}$$

כאשר G אופרטור כלשהו. $U(\epsilon)$ הוא אופרטור אוניטרי ולכן

$$1 = U(\epsilon)U^\dagger(\epsilon) \simeq \left(1 - \frac{i\epsilon}{\hbar}G\right)\left(1 + \frac{i\epsilon}{\hbar}G^\dagger\right) = 1 - \frac{i\epsilon}{\hbar}\left(G - G^\dagger\right) + O\left(\epsilon^2\right) \tag{1.6}$$

לכן G חייב להיות אופרטור הרמיטי, $G = G^\dagger$, והוא נקרא **היוצר ההרמיטי** של הטרנספורמציה $U(\theta)$.

הטרנספורמציה $U(\theta)$ היא הרכבה של N טרנספורמציות אינפינטסמליות $U(\epsilon)$ עם פרמטר $\epsilon = \theta/N$. בגבול הרצף ניקח $N \to \infty$, ולכן

$$U(\theta) = \lim_{N\to\infty}\left[U(\theta/N)\right]^N = \lim_{N\to\infty}\left[1 - \frac{1}{N}\frac{i\theta}{\hbar}G\right]^N = e^{-i\theta G/\hbar} \tag{1.7}$$

הטרנספורמציה הרציפה U היא אסקפוננט של היוצר ההרמיטי G.

המערכת סימטרית תחת טרנספורמציה רציפה אם

$$[H, G] = 0 \tag{1.8}$$

במקרה זה היוצר הוא גדול שמור,

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{1.9}$$

תרגיל 1

מצאו את היוצר של טרנספורמציית גליליי הקוונטית $\mathcal{B}\left(v\right)$ במימד אחד.

נמצא את $\mathcal{B}\left(v\right)$ מפעולת של טרנספורמציית גליליי על אופרטורי המיקום והתנע. לאחר הפעלת $\mathcal{B}\left(v\right)$ על חלקיק עם מסה m המיקום והתנע החדשים שנמדוד הם

$$\begin{cases} x\longrightarrow x'=\mathcal{B}\left(v\right)x\mathcal{B}^{\dagger}\left(v\right)=x-vt\\ p\longrightarrow p'=\mathcal{B}\left(v\right)p\mathcal{B}^{\dagger}\left(v\right)=p-mv \end{cases} \tag{1.10}$$

הפרמטר של הטרנספורמציה הוא המהירות v, ונסמן את היוצר שלה ב-G כך שהטרנספומרציה המלאה היא $\mathcal{B}\left(v\right)=\exp\left(-ivG/\hbar\right)$. נפרק אותה לטרנספורמציות איפינטיסמליות עם מהירות $v=\epsilon$, $\mathcal{B}\left(\epsilon\right)\simeq 1-i\epsilon G/\hbar$ ונפעיל אותה על x:

$$\mathcal{B}\left(\epsilon\right)x\mathcal{B}^{\dagger}\left(\epsilon\right)\simeq\left(1-\frac{i\epsilon}{\hbar}G\right)x\left(1+\frac{i\epsilon}{\hbar}G\right)=x+\frac{i}{\hbar}\epsilon\left[x,G\right]+\mathcal{O}\left(\epsilon^{2}\right)=x-\epsilon t \tag{1.11}$$

(זה בסה"כ האיבר הראשון בנוסחת BCH). נשווה את שני האגפים בסדר $\mathcal{O}\left(\epsilon\right)$ ונקבל:

$$\left[x,G\right]=i\hbar t\implies G=pt+f\left(x\right) \tag{1.12}$$

זכרו שבבסיס התנע $\left[x,F\right]=i\hbar\frac{\partial F}{\partial p}$. כעת נפעיל את הטרנספורמציה על p ונקבל

$$\mathcal{B}\left(\epsilon\right)p\mathcal{B}^{\dagger}\left(\epsilon\right)\simeq\left(1-\frac{i\epsilon}{\hbar}G\right)p\left(1+\frac{i\epsilon}{\hbar}G\right)=p+\frac{i}{\hbar}\epsilon\left[p,G\right]+\mathcal{O}\left(\epsilon^{2}\right)=p-m\epsilon \tag{1.13}$$

נשווה את שני האגפים בסדר $\mathcal{O}\left(\epsilon\right)$ ונקבל:

$$\left[p,G\right]=i\hbar m\implies G=-mx+g\left(p\right) \tag{1.14}$$

זכרו שבבסיס המיקום $\left[p,F\right]=-i\hbar\frac{\partial F}{\partial x}$. נשווה את שני הביטויים לקבלת היוצר

$$\boxed{G=pt-mx} \tag{1.15}$$

2 סיבובים

נניח שאנחנו מסובבים את מערכת הצירים בזווית φ סביב ציר $\hat{\mathbf{n}}$. במרחב הממשי $\mathbb{R}^3$ הטרנספורמציה הזו נעשית באמצעות מטריצת הסיבוב $R_{3\times 3}$. במרחב הילברט אופרטור הסיבוב $\mathcal{D}\left(\hat{\mathbf{n}},\varphi\right)$ מיישם את הסיבוב R על המצבים הקוונטים

$$|\alpha'\rangle = \mathcal{D}\left(\hat{\mathbf{n}},\varphi\right)|\alpha\rangle \tag{2.1}$$

שלעיתים מסומנת $\mathcal{D}\left(R\right)$. שימו לב ש-$R$ ו-$\mathcal{D}\left(R\right)$ פועלים במרחבים שונים; נבחר למשל $\hat{\mathbf{n}}=\hat{\mathbf{z}}$. במרחב $\mathbb{R}^3$ זו מטריצת הסיבוב המוכרת

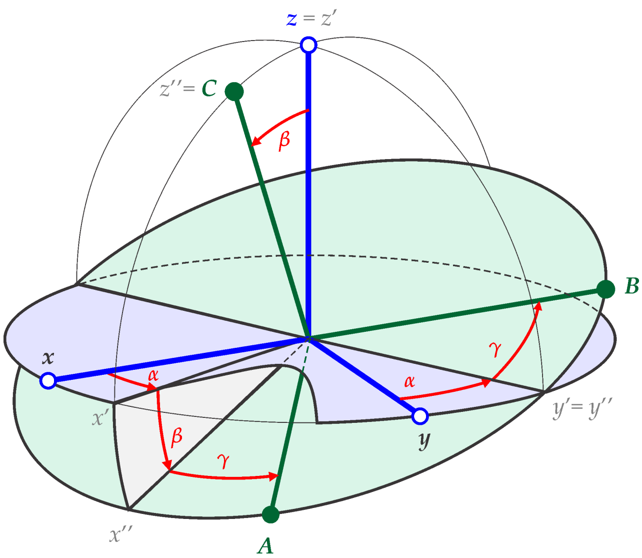
$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

בבסיס המלכסן את J_z, הסיבוב במרחב הילברט מיוצג על-ידי מטריצה $\infty\times\infty$

$$\mathcal{D}\left(\hat{\mathbf{z}},\theta\right) = \exp\left[-i\frac{\theta}{\hbar}J_z\right] = \left(\begin{array}{c|c|cc|ccc|c} & |0,0\rangle & \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle & \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle & |1,1\rangle & |1,0\rangle & |1,-1\rangle & \dots \\ \hline \langle 0,0| & 1 & & & & & & \\ \hline \left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right| & & e^{-i\theta/2} & & & & & \\ \left\langle\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right| & & & e^{i\theta/2} & & & & \\ \hline \langle 1,1| & & & & e^{-i\theta} & & & \\ \langle 1,0| & & & & & 1 & & \\ \langle 1,-1| & & & & & & e^{i\theta} & \\ \hline \vdots & & & & & & & \ddots \end{array}\right) \tag{2.3}$$

סיבוב כללי בזווית φ סביב הציר $\hat{\mathbf{n}}$ ניתן לפירוק לשלושה סיבובים המאופיינים על-ידי **זוויות אוילר**,

$$R\left(\alpha,\beta,\gamma\right) = R_{z'}\left(\gamma\right)R_{y'}\left(\beta\right)R_z\left(\alpha\right) \tag{2.4}$$



איור 1: זווית אוילר בייצוג הסטנדרטי $R\left(\alpha,\beta,\gamma\right) = R_{z'}\left(\gamma\right)R_{y'}\left(\beta\right)R_z\left(\alpha\right)$. להמחשה, הקליקו כאן.

בייצוג הזה אנחנו מסובבים את מערכת הצירים ביחס לצירים המסובבים y' ו-z'. נעדיף להשתמש בייצוג השקול שם צירי הסיבוב קבועים,

$$R\left(\alpha,\beta,\gamma\right)=R_{z}\left(\alpha\right)R_{y}\left(\beta\right)R_{z}\left(\gamma\right) \tag{2.5}$$

מכאן שהסיבוב מיושם במרחב הילברט על-ידי

$$\mathcal{D}\left(\hat{\mathbf{n}},\varphi\right)=\mathcal{D}\left(\hat{\mathbf{z}},\alpha\right)\mathcal{D}\left(\hat{\mathbf{y}},\beta\right)\mathcal{D}\left(\hat{\mathbf{z}},\gamma\right)=e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}J_{z}}e^{-i\frac{\beta}{\hbar}J_{y}}e^{-i\frac{\gamma}{\hbar}J_{z}} \tag{2.6}$$

נמצא את הייצוג שלה בבסיס מצבי התנ"ז $|j,m\rangle$,

$$\langle j',m'|\mathcal{D}\left(R\right)|j,m\rangle=\ \langle j',m'|e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}J_{z}}e^{-i\frac{\beta}{\hbar}J_{y}}e^{-i\frac{\gamma}{\hbar}J_{z}}|j,m\rangle \tag{2.7}$$

זו חייבת להיות מטריצת בלוקים עם j קבוע, כלומר אלמנט המטריצה מתאפס בהכרח אם $j\neq j'$! סיבוב לא מערבב בין תתי-מרחבים עם j שונה. פיזיקלית אנחנו מבינים שסיבובים במרחב לא משנים את התנ"ז הכולל j, ומתמטית אנחנו רואים ש-$\mathcal{D}$ מורכב מאופרטורים J_y,J_z שלא משנים את j ב-$|j,m\rangle$ כי $[J^2,\mathbf{J}]=0$.

$$\langle j',m'|\mathcal{D}\left(R\right)|j,m\rangle=\begin{pmatrix}\boxed{\mathcal{D}_{m',m}^{(0)}} & & & \\ & \boxed{\mathcal{D}_{m',m}^{(1/2)}} & & \\ & & \boxed{\mathcal{D}_{m',m}^{(1)}} & \\ & & & \ddots\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

נסמן כל בלוק של $\mathcal{D}\left(R\right)$ על-ידי ערך ה-j שלו:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{m',m}^{(j)}&=\ \langle j,m'|e^{-i\frac{\alpha}{\hbar}J_{z}}e^{-i\frac{\beta}{\hbar}J_{y}}e^{-i\frac{\gamma}{\hbar}J_{z}}|j,m\rangle=e^{-i(m'\alpha+m\gamma)}\underbrace{\langle j,m'|e^{-i\frac{\beta}{\hbar}J_{y}}|j,m\rangle}_{d_{m',m}^{(j)}}\\&=e^{-i(m'\alpha+m\gamma)}d_{m',m}^{(j)}\left(\beta\right)\end{aligned} \tag{2.9}$$

במקרים $j=\frac{1}{2},1$ אפשר לחשב את החלק הלא טריוויאלי של אלמנטי המטריצה $d_{m',m}^{(j)}$ ישירות, ב-j גדול יותר החישוב נעשה קשה יותר. $d_{m',m}^{(j)}\left(\beta\right)$ מופיע בטבלאות קלבש-גורדן. שימו לב שלא כל אלמנטי המטריצה כתובים במפורשות, ואת החסרים מוצאים בעזרת הקשרים (שגם מופיעים בטבלא)

$$d_{m',m}^{(j)}=\left(-1\right)^{m-m'}d_{m,m'}^{(j)}=d_{-m,-m'}^{(j)} \tag{2.10}$$

תרגיל 2

הראו כי סיבוב של האופרטור x בזווית $\theta=\pi/2$ נותן את האופרטור y.

נחשב את האופרטור x לאחר הפעלת טרנספורמצית סיבוב בזווית θ כלשהי סביב ציר $\hat{\mathbf{z}}$, $\mathcal{D}\left(\hat{\mathbf{z}},\theta\right)$:

$$x\longrightarrow x'=\mathcal{D}x\mathcal{D}^{\dagger}=e^{-i\theta L_z/\hbar}xe^{i\theta L_z/\hbar} \tag{2.11}$$

כדי לחשב את x' נעזר בנוסחת BCH,

$$e^{A}Be^{-A}=B+[A,B]+\frac{1}{2!}[A,[A,B]]+\frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]]+\dots \tag{2.12}$$

נציב $A=-i\theta L_z/\hbar$ ו-$B=x$:

$$\mathcal{D}x\mathcal{D}^{\dagger}=x-\frac{i\theta}{\hbar}[L_z,x]+\frac{1}{2!}\left(\frac{i\theta}{\hbar}\right)^2[L_z,[L_z,x]]-\frac{1}{3!}\left(\frac{i\theta}{\hbar}\right)^3[L_z,[L_z,[L_z,x]]]+\dots \tag{2.13}$$

יחסי החילוף של $L_z=xp_y-yp_x$ עם x ו-y הם

$$\begin{aligned}[L_z,x]&=[xp_y-yp_x,x]=-y\,[p_x,x]=i\hbar y\\ [L_z,y]&=[xp_y-yp_x,y]=x\,[p_y,y]=-i\hbar x\end{aligned} \tag{2.14}$$

נציב ונקבל

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}x\mathcal{D}^{\dagger}=x+\theta y-\frac{1}{2}\theta^2x-\frac{1}{3!}\theta^3y+\dots=\left(1-\frac{1}{2}\theta^2+\dots\right)x+\left(\theta-\frac{1}{3!}\theta^3+\dots\right)y\\ &\implies x'=x\cos\theta+y\sin\theta\end{aligned} \tag{2.15}$$

בפרט, עבור $\theta=\pi/2$ נקבל

$$\boxed{x'=y} \tag{2.16}$$

כלומר, לאחר שסובבנו את מערכת הצירים ב-$\pi/2$ מעלות ציר x החדש הועתק לציר y המקורי.

תרגיל 3

ההמילטוניאן של חלקיק עם ספין $s=\frac{1}{2}$ נתון בבסיס המלכסן את S_z על-ידי המטריצה

$$H=\epsilon\begin{pmatrix}0 & e^{i\pi/4}\\ e^{-i\pi/4} & 0\end{pmatrix} \tag{2.17}$$

א. האם המערכת סימטרית תחת טרנספורמציית סיבוב כללית?

ב. מצאו את הטרנספורמציה המלכסנת את ההמילטוניאן. מהי טרנספורמציית הסיבוב המלכסנת את ההמילטוניאן? מצאו את זווית הסיבוב θ ואת ציר הסיבוב $\hat{\mathbf{n}}$.

ג. האם המערכת סימטרית תחת סיבוב סביב הציר $\hat{\mathbf{n}}$ שמצאתם? אם לא, האם קיים ציר שטרנספורמצית סיבוב סביבו לא תשנה את ההמילטוניאן?

א. כל מטריצה הרמיטית ניתנת לפירוק של מטריצות פאולי, ולכן אפשר לראות ש-H הוא למעשה סיבוב של $\mathbf{S}$:

$$H=\epsilon\begin{pmatrix}0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}}\\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}=\epsilon\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_y\right)=\epsilon\boldsymbol{\sigma}\cdot\underbrace{\frac{\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}}_{\hat{\mathbf{a}}}=\frac{2\epsilon}{\hbar}\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{a}} \tag{2.18}$$

זו אינטראקציית דיפול מגנטי של החלקיק עם שדה מגנטי בכיוון $\hat{\mathbf{a}}-$. יש ציר מועדף $\hat{\mathbf{a}}$ בבעיה, ולכן המערכת לא אינווריאנטית תחת סיבובים. בפרט, ניתן לראות ש-H לא מתחלף עם S_x, S_y או S_z.

ב. נלכסן את ההמילטוניאן: הע"ע הם כמובן $\pm\epsilon$, ומהו"ע אנחנו מזהים מיד את הטרנספורמציה המלכסנת

$$\begin{cases}|+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle+e^{-i\pi/4}|\downarrow\rangle\right)\\ |-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-e^{i\pi/4}|\uparrow\rangle+|\downarrow\rangle\right)\end{cases}\implies U=\begin{pmatrix}\uparrow & \uparrow\\ |+\rangle & |-\rangle\\ \downarrow & \downarrow\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} & 1\end{pmatrix} \tag{2.19}$$

U היא טרנספורמצית הסיבוב המבוקשת, שכן

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{1}-\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sigma_x}{\sqrt{2}}+\frac{\sigma_y}{\sqrt{2}}\right)=\cos\frac{\theta}{2}-i\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right)\sin\frac{\theta}{2}=e^{-\frac{i}{2}\theta\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}}=e^{-i\theta\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}/\hbar} \tag{2.20}$$

זווית הסיבוב וציר הסיבוב הם

$$\boxed{\theta=\frac{\pi}{2},\qquad \hat{\mathbf{n}}=\frac{\hat{\mathbf{x}}+\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}} \tag{2.21}$$

אכן, אם נסובב את מערכת הצירים ב-$\pi/2$ סביב $\hat{\mathbf{n}}$ ציר $\hat{\mathbf{z}}'$ החדש יפנה לכיוון $\hat{\mathbf{a}}$.

ג. לא, כי $H\propto\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{a}}$ ולכן $[H,\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}},\theta)]\neq 0$, ובדיוק ראינו שסביבו סביב $\hat{\mathbf{n}}$ הוא זה שלכסן את H מלכתחילה. המערכת אמנם לא סימטרית לכל הסיבובים, אך ברור שסיבובים סביב הציר המועדף $\hat{\mathbf{a}}$ לא ישנו דבר (ובפרט $[H,\mathcal{D}(\hat{\mathbf{a}},\theta)]=0$),

$$\boxed{\hat{\mathbf{a}}=\frac{\hat{\mathbf{x}}-\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}} \tag{2.22}$$

תרגיל 4

א. חשבו את אלמנטי המטריצה $\mathcal{D}^{\left(j=\frac{1}{2}\right)}_{m',m}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$.

ב. השתמשו ב-$\mathcal{D}^{\left(j=\frac{1}{2}\right)}_{m',m}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$ כדי למצוא מצב ספין $\left|\uparrow_{\hat{\mathbf{n}}}\right\rangle$ בכיוון כללי

$$\hat{\mathbf{n}}=\left(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta\right) \tag{2.23}$$

בבסיס המלכסן את S_z.

א. אלמנטי המטריצה של אופרטור הסיבוב עבור תת-המרחב $j=\frac{1}{2}$ הם

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{\left(j=\frac{1}{2}\right)}_{m',m}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)&=e^{-i(m'\alpha+m\gamma)}d^{(1/2)}_{m',m}\left(\beta\right)=e^{-i(m'\alpha+m\gamma)}\left\langle\tfrac{1}{2},m'\middle|e^{-i\beta S_y/\hbar}\middle|\tfrac{1}{2},m\right\rangle\\&=e^{-i(m'\alpha+m\gamma)}\left\langle\tfrac{1}{2},m'\middle|e^{-i\beta\sigma_y/2}\middle|\tfrac{1}{2},m\right\rangle\\&=e^{-i(m'\alpha+m\gamma)}\left\langle\tfrac{1}{2},m'\middle|\cos\left(\tfrac{\beta}{2}\right)-i\sigma_y\sin\left(\tfrac{\beta}{2}\right)\middle|\tfrac{1}{2},m\right\rangle\\&=\begin{pmatrix} & \left|m=+\frac{1}{2}\right\rangle & \left|m=-\frac{1}{2}\right\rangle\\ \left\langle m'=+\frac{1}{2}\right| & e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) & -e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\\ \left\langle m'=-\frac{1}{2}\right| & e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right) & e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.24}$$

ניתן לוודא שהחישוב שקיבלנו תואם את הערכים בטבלאות קלבש-גורדן.

ב. מצב ספין $\left|\uparrow_{\hat{\mathbf{n}}}\right\rangle$ בכיוון $\hat{\mathbf{n}}$ הוא למעשה סיבוב של $\left|\uparrow\right\rangle$ בכיוון $\hat{\mathbf{z}}$ עם זוויות אוילר $\alpha=\varphi,\beta=\theta,\gamma=0$:

$$\begin{aligned}\left|\uparrow_{\hat{\mathbf{n}}}\right\rangle=\mathcal{D}^{\left(j=\frac{1}{2}\right)}_{m',m}\left(\varphi,\theta,0\right)\left|\uparrow\right\rangle&=\begin{pmatrix}e^{-\frac{i}{2}\varphi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -e^{-\frac{i}{2}\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ e^{\frac{i}{2}\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & e^{\frac{i}{2}\varphi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}e^{-\frac{i}{2}\varphi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ e^{\frac{i}{2}\varphi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix}=e^{\frac{i}{2}\varphi}\begin{pmatrix}e^{-i\varphi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

זו בדיוק התוצאה שקיבלנו בתרגול הקודם, בלי שהיינו צריכים ללכסן את $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ בכלל. במקום לפתור את הבעיה מאפס, הבנו שרק צריך לסובב את הפתרון $\left|\uparrow_{\hat{\mathbf{z}}}\right\rangle$ שכבר הכרנו בעבר.

תרגיל 5

לאורך כל השאלה נעבוד בבסיס $|j=1,m\rangle$ של המצבים העצמיים של J^2 ושל J_z, המוגבל לתת-המרחב $j=1$.

א. השתמשו בתכונות המטריצה המייצגת את J_y בתת-המרחב $j=1$ כדי להוכיח כי אופרטור הסיבוב סביב ציר $\hat{\mathbf{y}}$ הינו

$$\mathcal{D}\left(\hat{\mathbf{y}},\theta\right)=1-i\sin\theta\frac{J_y}{\hbar}+\left(\cos\theta-1\right)\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 \tag{2.25}$$

ב. כתבו את המטריצה במפורש עבור זווית כללית. וודאו את התשובה עם טבלאות קלבש-גורדן.

ג. השתמשו במטריצת הסיבוב שחישבתם בסעיף הקודם כדי לסובב את הוקטורים העצמיים של J_z לקבלת הוקטורים העצמיים של J_x.

ד. הראו מפורשות כי הוקטורים שקיבלתם הם אכן הוקטורים העצמיים של J_x.

א. לחישוב $\mathcal{D}\left(\hat{\mathbf{y}},\theta\right)=\exp\left(-i\theta J_y/\hbar\right)$ צריך לחשב את כל החזקות של J_y, אבל למעשה צריך לחשב רק שתיים: אם נעבוד בבסיס המלכסן את J_y,

$$\left[\frac{J_y}{\hbar}\right]_y=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}\implies\left[\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^3\right]_y=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&-1\end{pmatrix}=\left[\frac{J_y}{\hbar}\right]_y \tag{2.26}$$

התוצאה הזו לא תלויה בבסיס, כלומר מתקיים

$$\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^n=\begin{cases}J_y/\hbar & n\in\text{odd}\\ \left(J_y/\hbar\right)^2 & n\in\text{even}\end{cases} \tag{2.27}$$

החוקיות הזו מרמזת לנו שכדאי להפריד את הסכום באקספוננט לחזקות זוגיות ואי-זוגיות:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left(\hat{\mathbf{y}},\theta\right)=e^{-i\theta J_y/\hbar}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\theta)^n}{n!}\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^n\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i\theta)^{2n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i\theta)^{2n}}{(2n)!}\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^{2n}\\&=1-i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\theta^{2n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)+\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\theta^{2n}}{(2n)!}-1\right]\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2\\&=1-i\sin\theta\frac{J_y}{\hbar}+\left(\cos\theta-1\right)\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2\end{aligned} \tag{2.28}$$

כנדרש.

ב. בש"ב תשתמשו בנוסחא שבדיוק הוכחנו כדי לחשב את המטריצה הזו במפורש. כרגע נשתמש בטבלת קלבש-גורדן כדי לכתוב את המטריצה. נכתוב את הרכיבים שנתונים במפורש,

$$\mathcal{D}\left(\hat{\mathbf{y}},\theta\right)=d^{(j=1)}_{m',m}\left(\theta\right)=\begin{pmatrix}\frac{1+\cos\theta}{2}&-\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}&\frac{1-\cos\theta}{2}\\&\cos\theta&\\&&\end{pmatrix} \tag{2.29}$$

לפי הנוסחא $d^{(j)}_{m,m'} = (-1)^{m-m'} d^{(j)}_{m',m}$ אנחנו מבינים ש-$d^{(1)}_{1,0} = -d^{(1)}_{0,1}$ ו-$d^{(1)}_{1,-1} = d^{(1)}_{-1,1}$, כלומר

$$d^{(j=1)}_{m',m}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos\theta}{2} \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos\theta & \\ \frac{1-\cos\theta}{2} & & \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

מהנוסחא $d^{(j)}_{m',m} = d^{j}_{-m,-m'}$ אנחנו יודעים ש-$d^{(1)}_{1,0} = d^{(1)}_{0,-1}$, $d^{(1)}_{0,1} = d^{(1)}_{-1,0}$, וגם $d^{(1)}_{1,1} = d^{(1)}_{-1,-1}$ וקיבלנו

$$d^{(j=1)}_{m',m}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1-\cos\theta}{2} \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\cos\theta}{2} & \frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

ג. סיבוב סביב ציר $\hat{\mathbf{y}}$ בזווית $\pi/2$ יסובב את הו"ע של J_z לכיוון $\hat{\mathbf{x}}$ כך שיהיו הו"ע של J_x. מהסעיף הקודם אנחנו יודעים את $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{y}}, \pi/2)$,

$$\mathcal{D}\left(\hat{\mathbf{y}}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

ונפעיל אותה על הו"ע של J_z. הו"ע של J_x הם העמודות של $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{y}}, \pi/2)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\left(\hat{\mathbf{y}}, \frac{\pi}{2}\right)\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} &= \left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{|1, 1_x\rangle, |1, 0_x\rangle, |1, -1_x\rangle\right\} \end{aligned} \tag{2.33}$$

ד. נשתמש בפירוק $J_x = \frac{J_+ + J_-}{2}$ ונפעיל על $|1, 1_x\rangle$ בבסיס של J_z:

$$\begin{aligned} J_x |1, 1_x\rangle &= \frac{J_+ + J_-}{4}\left(|1, 1_z\rangle + \sqrt{2}\,|1, 0_z\rangle + |1, -1_z\rangle\right) \\ &= \frac{\hbar}{4}\left(2\,|1, 1_z\rangle + 2\sqrt{2}\,|1, 0_z\rangle + 2\,|1, -1_z\rangle\right) \\ &= \hbar \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{2}\\1\end{pmatrix} = \hbar\,|1, 1_x\rangle \end{aligned} \tag{2.34}$$

ובאופן דומה אפשר לבדוק את שאר הוקטורים...

45. Clebsch-Gordan Coefficients, Spherical Harmonics, and d Functions

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

	J	J ...
	M	M ...
m_1 m_2	Coefficients	
m_1 m_2		

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^\ell_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

1/2×1/2

m_1	m_2	$J=1$, $M=+1$
+1/2	+1/2	1

m_1	m_2	$J=1$, $M=0$	$J=0$, $M=0$
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=1$, $M=-1$
−1/2	−1/2	1

1×1/2

m_1	m_2	$J=3/2$, $M=+3/2$
+1	+1/2	1

m_1	m_2	$J=3/2$, $M=+1/2$	$J=1/2$, $M=+1/2$
+1	−1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	−1/3

m_1	m_2	$J=3/2$, $M=-1/2$	$J=1/2$, $M=-1/2$
0	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	1/3	−2/3

m_1	m_2	$J=3/2$, $M=-3/2$
−1	−1/2	1

2×1

m_1	m_2	$J=3$, $M=+3$
+2	+1	1

m_1	m_2	$J=3$, $M=+2$	$J=2$, $M=+2$
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	−1/3

m_1	m_2	$J=3$, $M=+1$	$J=2$, $M=+1$	$J=1$, $M=+1$
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	2/5	−1/2	1/10

m_1	m_2	$J=3$, $M=0$	$J=2$, $M=0$	$J=1$, $M=0$
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	$J=3$, $M=-1$	$J=2$, $M=-1$	$J=1$, $M=-1$
0	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5

m_1	m_2	$J=3$, $M=-2$	$J=2$, $M=-2$
−1	−1	2/3	1/3
−2	0	1/3	−2/3

m_1	m_2	$J=3$, $M=-3$
−2	−1	1

1×1

m_1	m_2	$J=2$, $M=+2$
+1	+1	1

m_1	m_2	$J=2$, $M=+1$	$J=1$, $M=+1$
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=2$, $M=0$	$J=1$, $M=0$	$J=0$, $M=0$
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3

m_1	m_2	$J=2$, $M=-1$	$J=1$, $M=-1$
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=2$, $M=-2$
−1	−1	1

2×1/2

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+5/2$
+2	+1/2	1

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+3/2$	$J=3/2$, $M=+3/2$
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+1/2$	$J=3/2$, $M=+1/2$
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-1/2$	$J=3/2$, $M=-1/2$
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-3/2$	$J=3/2$, $M=-3/2$
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-5/2$
−2	−1/2	1

3/2×1/2

m_1	m_2	$J=2$, $M=+2$
+3/2	+1/2	1

m_1	m_2	$J=2$, $M=+1$	$J=1$, $M=+1$
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4

m_1	m_2	$J=2$, $M=0$	$J=1$, $M=0$
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=2$, $M=-1$	$J=1$, $M=-1$
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4

m_1	m_2	$J=2$, $M=-2$
−3/2	−1/2	1

3/2×1

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+5/2$
+3/2	+1	1

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+3/2$	$J=3/2$, $M=+3/2$
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	−2/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=+1/2$	$J=3/2$, $M=+1/2$	$J=1/2$, $M=+1/2$
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-1/2$	$J=3/2$, $M=-1/2$	$J=1/2$, $M=-1/2$
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-3/2$	$J=3/2$, $M=-3/2$
−1/2	−1	3/5	2/5
−3/2	0	2/5	−3/5

m_1	m_2	$J=5/2$, $M=-5/2$
−3/2	−1	1

$$d^{\,j}_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^{\,j}_{m,m'} = d^{\,j}_{-m,-m'}$$

3/2×3/2

m_1	m_2	$J=3$, $M=+3$
+3/2	+3/2	1

m_1	m_2	$J=3$, $M=+2$	$J=2$, $M=+2$
+3/2	+1/2	1/2	1/2
+1/2	+3/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=3$, $M=+1$	$J=2$, $M=+1$	$J=1$, $M=+1$
+3/2	−1/2	1/5	1/2	3/10
+1/2	+1/2	3/5	0	−2/5
−1/2	+3/2	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	$J=3$, $M=0$	$J=2$, $M=0$	$J=1$, $M=0$	$J=0$, $M=0$
+3/2	−3/2	1/20	1/4	9/20	1/4
+1/2	−1/2	9/20	1/4	−1/20	−1/4
−1/2	+1/2	9/20	−1/4	−1/20	1/4
−3/2	+3/2	1/20	−1/4	9/20	−1/4

m_1	m_2	$J=3$, $M=-1$	$J=2$, $M=-1$	$J=1$, $M=-1$
+1/2	−3/2	1/5	1/2	3/10
−1/2	−1/2	3/5	0	−2/5
−3/2	+1/2	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	$J=3$, $M=-2$	$J=2$, $M=-2$
−1/2	−3/2	1/2	1/2
−3/2	−1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=3$, $M=-3$
−3/2	−3/2	1

2×3/2

m_1	m_2	$J=7/2$, $M=+7/2$
+2	+3/2	1

m_1	m_2	$J=7/2$, $M=+5/2$	$J=5/2$, $M=+5/2$
+2	+1/2	3/7	4/7
+1	+3/2	4/7	−3/7

m_1	m_2	$J=7/2$, $M=+3/2$	$J=5/2$, $M=+3/2$	$J=3/2$, $M=+3/2$
+2	−1/2	1/7	16/35	2/5
+1	+1/2	4/7	1/35	−2/5
0	+3/2	2/7	−18/35	1/5

m_1	m_2	$J=7/2$, $M=+1/2$	$J=5/2$, $M=+1/2$	$J=3/2$, $M=+1/2$	$J=1/2$, $M=+1/2$
+2	−3/2	1/35	6/35	2/5	2/5
+1	−1/2	12/35	5/14	0	−3/10
0	+1/2	18/35	−3/35	−1/5	1/5
−1	+3/2	4/35	−27/70	2/5	−1/10

m_1	m_2	$J=7/2$, $M=-1/2$	$J=5/2$, $M=-1/2$	$J=3/2$, $M=-1/2$	$J=1/2$, $M=-1/2$
+1	−3/2	4/35	27/70	2/5	1/10
0	−1/2	18/35	3/35	−1/5	−1/5
−1	+1/2	12/35	−5/14	0	3/10
−2	+3/2	1/35	−6/35	2/5	−2/5

m_1	m_2	$J=7/2$, $M=-3/2$	$J=5/2$, $M=-3/2$	$J=3/2$, $M=-3/2$
0	−3/2	2/7	18/35	1/5
−1	−1/2	4/7	−1/35	−2/5
−2	+1/2	1/7	−16/35	2/5

m_1	m_2	$J=7/2$, $M=-5/2$	$J=5/2$, $M=-5/2$
−1	−3/2	4/7	3/7
−2	−1/2	3/7	−4/7

m_1	m_2	$J=7/2$, $M=-7/2$
−2	−3/2	1

2×2

m_1	m_2	$J=4$, $M=+4$
+2	+2	1

m_1	m_2	$J=4$, $M=+3$	$J=3$, $M=+3$
+2	+1	1/2	1/2
+1	+2	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=4$, $M=+2$	$J=3$, $M=+2$	$J=2$, $M=+2$
+2	0	3/14	1/2	2/7
+1	+1	4/7	0	−3/7
0	+2	3/14	−1/2	2/7

m_1	m_2	$J=4$, $M=+1$	$J=3$, $M=+1$	$J=2$, $M=+1$	$J=1$, $M=+1$
+2	−1	1/14	3/10	3/7	1/5
+1	0	3/7	1/5	−1/14	−3/10
0	+1	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−1	+2	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1	m_2	$J=4$, $M=0$	$J=3$, $M=0$	$J=2$, $M=0$	$J=1$, $M=0$	$J=0$, $M=0$
+2	−2	1/70	1/10	2/7	2/5	1/5
+1	−1	8/35	2/5	1/14	−1/10	−1/5
0	0	18/35	0	−2/7	0	1/5
−1	+1	8/35	−2/5	1/14	1/10	−1/5
−2	+2	1/70	−1/10	2/7	−2/5	1/5

m_1	m_2	$J=4$, $M=-1$	$J=3$, $M=-1$	$J=2$, $M=-1$	$J=1$, $M=-1$
+1	−2	1/14	3/10	3/7	1/5
0	−1	3/7	1/5	−1/14	−3/10
−1	0	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−2	+1	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1	m_2	$J=4$, $M=-2$	$J=3$, $M=-2$	$J=2$, $M=-2$
0	−2	3/14	1/2	2/7
−1	−1	4/7	0	−3/7
−2	0	3/14	−1/2	2/7

m_1	m_2	$J=4$, $M=-3$	$J=3$, $M=-3$
−1	−2	1/2	1/2
−2	−1	1/2	−1/2

m_1	m_2	$J=4$, $M=-4$
−2	−2	1

$$d^{\,1}_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{\,1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,1}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2} \qquad d^{\,1}_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}} \qquad d^{\,1}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,2}_{2,2} = \Big(\frac{1+\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^{\,2}_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{\,2}_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta$$

$$d^{\,2}_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{\,2}_{2,-2} = \Big(\frac{1-\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^{\,2}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1)$$

$$d^{\,2}_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\,\cos\theta$$

$$d^{\,2}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1)$$

$$d^{\,2}_{0,0} = \Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

Figure 45.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974).