### מבוא לאסטרופיזיקה

# תרגיל כיתה מס' 1 – מנהלות, גוף שחור ומשוואת מצב

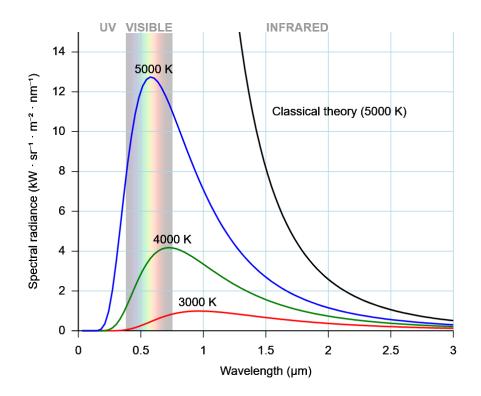
#### מנהלות ועוד

- מתרגל: אלון גורמן.
- יצירת קשר (לקביעת שעת קבלה או בעיות טכניות): <u>alongurman@gmail.com</u>. אני לרוב עונה מהר, אם פספסתי מייל אז לא להסס לשלוח שוב. אם צריך אשמח לשבת לפגישת זום ולעזור עם החומר.
  - תרגיל הכיתה יוקלט ורשימות הקורס יועלו למודל באופן מסודר.
- יתפרסם תרגיל בית שבועי. ישנה חובת הגשה של 9 מתוך 13 (70%) מתרגילי הבית ותקבלו שבוע להגיש את התרגיל.
- בכל תרגיל בית הבודקת תבדוק שניסיתם לפתור את כל השאלות ותבדוק שאלה מדגמית במלואה. אם תהיה שאלה של חישוב נומרי, היא תמיד תהיה שאלת חובה (בנוסף למדגמית) וזה יצויין בתרגיל הבית כדי שלא תשכחו.
- הקורס עמוס בחומר. כרגיל, מאד חשוב לא לפתוח פערים בחומר ולעמוד בלוח הזמנים של ההגשות.
  - ממש חשוב לי לעזור למי שצריכים להתמודד עם חומר מסובך ועם תרגילי בית, אבל בשביל שזה
     יעבוד עליכם.ן לשלוח מיילים עם שאלות, לקבוע איתי שעות קבלה, להגיע לתרגולים (ואם אפשר לפתוח מצלמות) ולשאול כמה שיותר שאלות. אל תתביישו!

# דוגמא מס' 1: חזרה על גוף שחור

גוף שחור הוא גוף שבולע את כל הקרינה הפוגעת בו. גוף שחור בשיווי משקל תרמי פולט קרינה עם ספקטרום שנקבע על ידי הטמפרטורה שלו באופן בלעדי. בקורס בפיזיקה תרמית ראיתם.ן כי ניתן למדל גוף שחור על ידי קופסא שחורה וחלולה עם חור מאד קטן שנמצאת בשיווי משקל תרמי עם גז הפוטונים שנמצא בתוכה, וקיבלתם שההספקטרום של הקרינה (שטף אנרגיה ליחידת תדר ליחידת זווית מרחבית) נתון על ידי חוק פלאנק

$$B(
u,T)=rac{2h
u^3}{c^2}rac{1}{e^{rac{h
u}{k_{
m B}T}}-1}$$



תוצאה זו הייתה שונה מהטיפול הקלאסי שהמניב את התפלגות שנתן חוק חזקה לא נכון בתדירויות נמוכות וכן נותן צפיפות אנרגיה אינסופית (UV catastrophy). חשוב לציין שבגוף שחור מתקבלת התוצאה המעניינת שגם מספר האכלוס של כל אנרגיה נקבע על ידי הטמפרטורה, ולא רק האנרגיה לדרגת חופש (כפי שמתקיים בגז אידאלי). משמעות הדבר היא שבגז פוטונים הפוטנציאל הכימי הוא אפס ומס' הפוטונים איננו גודלל שמור. לכן צפיפות האנרגיה הכוללת של גוף שחור נקבעת אך ורק על ידי הטמפרטורה.

כעת נתבונן בפוטונים הפוגעים באחת הדפנות של הקופסא ומוחזרים. התנע המועבר לדופן על ידי נפח קטן הוא

$$\delta P = \frac{2u\cos\theta}{c}\delta V$$
.

הכח הפועל על הדופן נתון על ידי החוק השני של ניוטון

$$F = rac{\Delta P}{\Delta t} pprox \sum_{ heta} igg(rac{\delta \Omega}{4\pi} rac{c \, \delta ec{P} \cdot \delta ec{A}}{\delta V}igg) 
ightarrow p = rac{2u}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} ig(\sin heta \cos^2 hetaig) d\phi d heta = rac{u}{3} \; .$$

כעת נרשום את החוק הראשון של התרמודינמיקה:

$$u = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T - p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - \frac{u}{3} \ ,$$

כאשר השתמשנו ביחסי מקסוול במעבר השני. קיבלנו אם כן

$$\frac{4}{3}u = T\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{V} = \frac{T}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_{V},$$

מה שמוביל לתוצאה

$$u=aT^4$$
.

כאשר את קבוע הקרינה a מצאתם בקורס בפיזיקה תרמית.

# דוגמא מס' 2: כוכב כגוף שחור

שאלה: נתון כוכב ברדיוס R, טמפרטורה T. מהי בהירות הכוכב P.

פיתרון: בהנחה של שהקרינה איזוטרופית, שטף האנרגיה ליחידת זווית מרחבית הינו

$$B(T) = \frac{c}{4\pi}u = \frac{c\,a}{4\pi}T^4$$

כאשר במעבר השני השתמשנו בקשר בין צפיפות האנרגיה והטמפרטורה של גוף שחור אותו תוכיחו בתרגיל הבית, ו-a הוא קבוע הקרינה. על מנת למצוא את שטף האנרגיה נבצע אינטגרל זוויתי

$$f(T)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}rac{c\,a}{4\pi}T^4\cos heta\,d\Omega=rac{ca}{4}T^4\equiv\sigma T^4$$

-כאשר הפקטור hetaכסא לוקח בחשבון את ההפחתה בשטף המגיע למשטח בhetaוויות פגיעה שונות, ו

$$\sigma = \frac{ca}{4}$$

הוא קבוע סטפן-בולצמן. נמצא את הבהירות על ידי אינטגרל על פני הכוכב:

$$L = \int d\Omega R^2 f = 4\pi\sigma R^2 T^4$$

### דוגמא מס' 3: שיווי משקל תרמי

שאלה: מהי טמפרטורת כדור הארץ בשיווי משקל תרמי?

פיתרון: בשיווי משקל תרמי, הספק הבליעה והפליטה של כדור הארץ שווים

$$P_{\oplus}(\downarrow) = P_{\oplus}(\uparrow)$$
.

על מנת לחשב את הספק הבליעה נניח שטף  $S_0$  המגיע מהשמש ויעילות בליעה  $(1-\alpha)$  כלשהי. חתך מנת לחשב את הספק הצליעה של דיסק ברדיוס ארץ ולכן הארץ הוא חתך פעולה של דיסק ברדיוס ארץ ולכן

$$P_{\oplus}(\downarrow) = (1-\alpha)S_0\pi R_{\oplus}^2$$
.

הספק הפליטה, בהנחת גוף שחור, הינו

$$P_{\oplus}(\uparrow) = 4\pi\sigma R_{\oplus}^2 T_{\oplus}^4$$
.

נשווה את הביטויים ונקבל

$$T_{\oplus} = \left\lceil rac{(1-lpha)S_0}{4\sigma} 
ight
ceil^{1/4}.$$

את השטף  $\mathit{S}_0$  נחשב באמצעות חלוקה של הבהירות בריבוע המרחק בין ארץ והשמש

$$S_0 = \sigma T_\odot^4 igg(rac{R_\odot}{1 {
m AU}}igg)^2 \,.$$

אם נציב למשל  $\alpha=0.3$  נקבל

$$T_{\oplus} = \! \left \lceil rac{(1-lpha)}{4} 
ight 
ceil^{1/4} \! \left (rac{R_{\odot}}{1 {
m AU}} 
ight )^{1/2} \! T_{\odot} \simeq 255^{\circ} {
m K} = -18^{\circ} {
m C} \; .$$

בתרגיל הבית תבצעו תיקונים לחישוב זה ותקבלו הסבר ראשון ופשטני לאופן הפעולה של אפקט החממה כמנגנון שמעלה את הטמפרטורה של כדור הארץ.

## דוגמא מס' 4 – אינטגרל לחץ

נראה דרך נוספת למציאת הקשר בין האנרגיה ללחץ. נסתכל על גז בקופסא עם אורך צלע L. קצב הפגיעה של של חלקיקי הגז בדופן המאונכת לציר z הוא

$$\frac{v_z}{L}$$

והתנע המועבר לקופסא בכל פגיעה הוא  $2p_z$ . לכן הכח הפועל על הדופן הוא

$$F = 2 \frac{p_z v_z}{L}$$

והלחץ של N חלקיקים הוא

$$P = \frac{F}{2L^2} = \frac{N}{L^3} < p_z v_z > .$$

עבור התפלגות איזוטרופית

$$< p_x v_x > = < p_y v_y > = < p_z v_z > = \frac{}{3}$$

$$P = \frac{n}{3} = \frac{1}{3} \int \vec{v} \cdot \vec{p} n(\vec{p}) d\vec{p} = \frac{1}{3m} \int |\vec{p}|^2 n(\vec{p}) d\vec{p}.$$

כעת נכתוב את האנרגיה בגבול הלא יחסותי

$$E_k = \frac{|\vec{p}|^2}{2m}$$

ונקבל

$$P = \frac{2}{3}u$$