.1

(א) חשבו את רדיוס פרמי כתלות בצפיפות $k_F(n)$ עבור גז אלקטרונים חופשיים בדו-מימד.

$$nA = 2 \cdot \left(\frac{4\pi^{\cancel{2}}}{A}\right)^{-1} \cancel{\pi} k_F^2$$

$$n = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\pi}\,k_F^2$$

$$k_F = \sqrt{2\pi n}$$

ב)

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{A}\,\frac{d\Omega}{d\varepsilon}$$

$$\Omega = \cancel{2}\,\frac{A}{\cancel{4}_{2}\pi^{\cancel{2}}}\,\cancel{\pi}\,k^2 \qquad \varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$= \frac{A}{\cancel{2}\pi}\,\frac{\varepsilon 2m}{\hbar^2} \qquad \sqrt{\frac{\varepsilon 2m}{\hbar^2}} = k$$

$$= \frac{mA}{\pi\hbar^2}\,\varepsilon$$

$$\Rightarrow \boxed{g = \frac{m}{\pi\hbar^2}}$$

ג)

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon\, \underbrace{g(\varepsilon)}_{=\,const\,=\,C}\, f_{FD}(\varepsilon)$$

$$\frac{e^{-\beta\varepsilon}}{e^{-\beta\varepsilon}+e^{-\beta\mu}}$$

$$= \int_{0}^{\infty} d\varepsilon\; C\,\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\ln\left(e^{-\beta\varepsilon}+e^{-\beta\mu}\right) = -\beta\,\frac{e^{-\beta\varepsilon}}{e^{-\beta\varepsilon}+e^{-\beta\mu}} \qquad \leftarrow$$

$$\Rightarrow\; n = -\frac{C}{\beta}\int_{0}^{\infty} d\varepsilon\,\frac{d}{d\varepsilon}\ln\left(e^{-\beta\varepsilon}+e^{-\beta\mu}\right) = -\frac{C}{\beta}\left[\ln\left(e^{-\beta\mu}\right) - \ln\left(1+e^{-\beta\mu}\right)\right]$$

$$= -\frac{C}{\beta}\left[\ln\left(e^{-\beta\mu}\right) - \ln\left(1+e^{-\beta\mu}\right)\right]$$

$$= c\left[\mu + \ln\left(1+e^{-\beta\mu}\right)\right]$$

ומהקשרים נסיק:

$$k_F = \sqrt{2\pi n}$$

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \iff \sqrt{\frac{2\varepsilon_F m}{\hbar^2}} = k_F$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\cancel{2}\pi n} = \sqrt{\frac{\cancel{2}\varepsilon_F m}{\hbar^2}}$$

$$n = \cancel{\frac{m}{\pi\hbar^2}}\, \varepsilon_F = \cancel{\frac{m}{\pi\hbar^2}} \left[\mu + \beta \ln\left(1 + e^{-\beta\mu}\right) \right]$$

ב

$$n = \int d\varepsilon\, g(\varepsilon) f(\varepsilon)$$ (א

$$\Big\downarrow \partial_T$$

$$\frac{\partial n}{\partial T} \overset{\text{נתון}}{=} 0 = \int d\varepsilon\, g(\varepsilon) \frac{\partial f}{\partial T} = \int \frac{d\bar{k}}{4\pi^3} \frac{\partial f}{\partial T}$$

כיון ש $\frac{d\bar{k}}{4\pi^3} = g(\varepsilon)\, d\varepsilon$

$$C_V = \frac{\partial u}{\partial T}\Big|_n = \frac{\partial}{\partial T}\Big|_n \int \frac{d\bar{k}}{4\pi^3} \varepsilon(k) f(k)$$ (ב

נוסיף ונחסר μ:

$$= \frac{\partial}{\partial T} \int \frac{dk}{4\pi^3} (\varepsilon - \mu + \mu) f = \frac{\partial}{\partial T} \int dk'\, \mu f + \frac{\partial}{\partial T} \int dk' (\varepsilon - \mu) f$$

$$dk' = \frac{dk}{4\pi^3}$$

$$= \cancel{\mu \frac{\partial n}{\partial T}}^{\,=0} + \frac{\partial}{\partial T} \int dk' (\varepsilon - \mu) f = \int dk' (\varepsilon - \mu) \frac{\partial f}{\partial T}$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[f \ln f + (1-f) \ln(1-f) \right]$$ (ג

$$= f' \ln f + \cancel{f \frac{f'}{f}} + (-f') \ln(1-f) + \cancel{(1-f) \frac{-f'}{1-f}}$$

$$= f' \left(\ln f - \ln(1-f) \right) = f' \ln\left(\frac{f}{1-f} \right) = f' \beta (\mu - \varepsilon)$$

(ד

$$\Rightarrow C_V = \int dk' (\varepsilon - \mu) \frac{\partial f}{\partial T} = -\beta \int dk' \frac{\partial}{\partial T} \left[f \ln f + (1-f) \ln(1-f) \right]$$

$$T \frac{\partial S}{\partial T} = -k_B \cancel{T} \int dk' \frac{\partial}{\partial T} \left[f \ln f + (1-f) \ln(1-f) \right]$$

אינטגרציה לפי T תביא את המבוקש, רק חשוב

לזכור שע"פ החוק השלישי $S(T=0) = 0$.

$$\omega(\bar{k}) = c|\bar{k}| = c\sqrt{k_x^2+k_y^2} = \frac{\pi}{L}cn \qquad \text{(א} \qquad 3$$

$$\varepsilon = \hbar\omega = \hbar c k = \hbar c \frac{\pi}{L} n \qquad k = \frac{\pi n}{L}$$

$2D$: ב ω_D

$$DF = 2N = \underbrace{\cancel{2}}_{\text{קיטוב}} \cdot \underbrace{\cancel{\tfrac{1}{4}}}_{\text{רבע מרחב}} \int_0^{n_{max}} \cancel{2}\pi n \, dn$$

$$= \pi \frac{n_{max}^2}{2}$$

$$n_{max} = \sqrt{\frac{4}{\pi} N}$$

$$\Rightarrow \underline{\omega_D = \frac{\pi}{L} c \sqrt{\frac{4}{\pi} N}}$$

$$\Omega = \underbrace{\cancel{2}}_{\text{קיטובים}} \cdot \frac{A}{\cancel{4}\pi^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{\pi} k_{max}^2 = \frac{A}{2\pi} \frac{\varepsilon^2}{(\hbar c)^2}$$

$$\Rightarrow \underline{g(\varepsilon) = \frac{1}{\pi(\hbar c)^2} \varepsilon}$$

$$u = \int d\varepsilon \, \varepsilon g(\varepsilon) f(\varepsilon) \qquad \text{(ב}$$

$$= \frac{1}{\pi(\hbar c)^2} \int_0^{\varepsilon_{max}} \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{e^{\beta\varepsilon}-1}$$

$$C_V = \frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial T} = \frac{1}{\pi(\hbar c)^2 \tau} \int_0^{\varepsilon_{max}} \frac{\varepsilon^3 e^{\beta\varepsilon} d\varepsilon}{(e^{\beta\varepsilon}-1)^2}$$

$$C_V = \frac{1}{\pi(\hbar c)^2} \tau^3 \int_0^{\tau x_{max}} \frac{x^3 e^x}{(e^x-1)^2} d\varepsilon$$

$$\beta\varepsilon = x$$
$$dx = \beta d\varepsilon$$
$$d\varepsilon = \tau dx$$
$$\varepsilon = \tau x$$

בטמפ׳ נמוכות $\tau \ll \Theta_D$ הגבול העליון שואף ל-∞

$\frac{7.2}{17} \approx 2$ $\qquad C_v \propto T^3$ $\qquad$ ולכן

ה) א)

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

$$\langle E_n\rangle = \left(\langle n\rangle + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

ההתפלגות המוכרת היא בדיוק פונק' הבולוס,

ונזכר שמקדמים איננה מחוץ גאוסי $\qquad \sum_s e^{\beta\varepsilon_s}$

$$\Rightarrow \quad \langle E_n\rangle = \left(\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

וקיבל החום הסגולי הוא $\frac{\partial\langle n\rangle}{\partial T}$, רק חשוב לסכום על

כל ה- k-ים (שקול לסכום n) האפשריים

$$\Rightarrow \quad c_v = \frac{1}{V}\sum_k \frac{\partial}{\partial T}\langle E_n\rangle$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{k,s} \partial_T \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \qquad \omega_{k,s}$$

ב) בטמפ' גבוהות $T \gg \hbar\omega_D$ $\qquad \omega_D$ - תדירות דבאי

$$e^{\beta\hbar\omega} \approx 1 + \beta\hbar\omega$$

$$\Rightarrow \quad c_v \approx \frac{1}{V}\sum_{k,s}\frac{\partial}{\partial T}\frac{\cancel{\hbar\omega}}{\beta\cancel{\hbar\omega}} = \frac{1}{V}\sum_{k,s}\frac{\partial}{\partial T}k_B T$$

$$= \frac{k_B}{V}\sum_{k,s} 1$$

הסכום על כל הענפים האפשריות ועל כל k-ים האפשריים

עבור כל אחד שווה לסכום על כל ד"ח האפשריות

$$\Rightarrow \quad c_v \approx \frac{k_B}{V} 3N = 3 n k_B$$

ג) נפתח בקירוב יותר $e^{\beta\hbar\omega} \approx 1 + \beta\hbar\omega + \frac{1}{2}(\beta\hbar\omega)^2 + \frac{1}{3!}(\beta\omega\hbar)^3$

$$\Rightarrow \quad \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega}-1} \approx \frac{\cancel{\hbar\omega}}{\cancel{\beta\hbar\omega}\left(1+\frac{1}{2}\beta\omega\hbar+\frac{1}{3!}(\beta\omega\hbar)^2\right)}$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \rightarrow \frac{18\, k_B^3 T^2 \left((\hbar\omega)^2 + 2\hbar k_B T\omega + 2k_B^2T^2\right)}{\left[6(k_BT)^2 + 3\hbar\omega k_B T + (\hbar\omega)^2\right]^2}$$

ונקבל עד סדר שני בביטוי הנגזרת של:

$$k_B - \frac{(\hbar\omega)^2}{12kT^2} - \frac{\hbar^3\omega^3}{12k^2T^3} + O\left(\frac{1}{T^4}\right)$$

הסדר הראשון כי הביטוי הוא קבוע ולכן סדר

שני נותר:

$$c_v \approx \frac{1}{V}\sum k_B - \frac{(\hbar\omega)^2}{12k_BT^2}$$

$$= 3nk_B - \frac{\hbar^2}{12Vk_BT^2}\sum_{k,s}\omega^2$$

ב) ניתן לעבור מהסכום $\sum_{k,s}\omega^2$

לאינטגרל מהצורה: $\int \omega^2(k)\, dk$

3 מימדים

$$\rightarrow \frac{3V}{(2\pi)^3}\int \omega^2\, \underbrace{4\pi k^2}\, dk \leftarrow \omega = c|k|$$

K ספייס 3 כדוריות

$$= \frac{3V}{2\pi^2}\int \omega^2\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\frac{d\omega}{c}$$

$$= \frac{3V}{2\pi^2c^3}\int \omega^4\, d\omega$$

ויש השאלה היא שנדרש היו הגבולות הימניים

תדירות קטנה או לא. נניח שכן והיא ω_D

$$\Rightarrow \frac{3}{10}\frac{V}{\pi^2 c^3}\omega_D^5$$

ואז פשט מקבלים מספירת ד"ח

$$3N = \frac{3V}{(2\pi)^3}\int_0^{\omega_D} 4\pi k^2\,dk \qquad \omega = c\,|\vec{k}|$$

$$\Rightarrow \omega_D = c\left(\frac{6\pi^2 N}{V}\right)^{1/3}$$

לבסוף התיקון הוא

$$-\frac{3}{10}V\left(\frac{c}{\pi}\right)^2\left(\frac{6\pi N}{V}\right)^{5/3}$$

ה) ועבור מודל איינשטיין התיקון הוא

$$-\frac{\hbar^2}{12 V k_B T^2}\sum_{k,s}\omega_E^2 = -\frac{\hbar^2\omega_E^2}{4\cancel{12} V k_B T^2}\underbrace{\sum 1}_{\cancel{3}N} = \frac{\hbar^2 n\omega_E^2}{4 k_B T^2}$$