תרגיל בית 7

תורת ההפרעות I

חומר קריאה: J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (2nd edition), Sections 5.1-5.2

1. חלקיק בעל מסה m נמצא בפוטנציאל הרמוני עם הפרעה

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k'x^2 \equiv H_0 + \frac{1}{2}k'x^2 .$$

התייחסו לאיבר $\frac{1}{2}k'x^2$ כהפרעה.

(א) חשבו את התיקון מסדר ראשון $\Delta E_n^{(1)}$ לרמת האנרגיה $E_n^{(0)}$ של H_0.

(ב) חשבו את התיקון מסדר שני $\Delta E_0^{(2)}$ לאנרגית מצב היסוד.

(ג) השוו את התוצאות שקיבלתם עם הפתרון המדויק. תחת אילו תנאים נאמר שהקירוב מסדר ראשון הוא מספיק טוב?

2. **(שאלת חובה)**
חלקיק טעון מאולץ לנוע על פני כדור בעל רדיוס R תחת השפעת שדה חשמלי קבוע. ההמילטוניאן הוא

$$H = \frac{L^2}{2MR^2} + q\mathcal{E}z .$$

חשבו את האנרגיות של חמשת המצבים בעלי $\ell = 2$ בסדר ראשון ושני ב-$q\mathcal{E}$.
(אם פתרתם יותר משני אינטגרלים פשוטים אתם לא בכיוון!)

3. *(הכנה לשאלה 4)* נסמן ב-$\mathcal{P}_x$ את אופרטור השיקוף ביחס למישור $x = 0$,

$$\mathcal{P}_x \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mathcal{P}_x^{-1} = \begin{pmatrix} -x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

(א) הראו באופן מפורש שהאופרטור המבצע פעולה זו הוא

$$\mathcal{P}_x = \mathcal{R}_{\hat{\mathbf{x}}}(\pi)\,\mathcal{P} ,$$

כאשר $\mathcal{P}$ הוא אופרטור השיקוף ביחס לראשית ו- $\mathcal{R}_{\hat{\mathbf{x}}}(\phi)$ הוא אופרטור הסיבוב סביב ציר $\hat{\mathbf{x}}$ בזווית ϕ.

(ב) חשבו את $\mathcal{P}_x L_z \mathcal{P}_x^{-1}$ והראו שמתקיים $L_z\mathcal{P}_x = -\mathcal{P}_x L_z$.

(ג) הראו כי עבור מצב תנע זוויתי $|\ell, m\rangle$ מתקיים

$$\mathcal{P}_x |\ell, m\rangle = |\ell, -m\rangle .$$

4. אטום מימן נתון תחת השפעת שדה חשמלי אחיד וחלש $\mathbf{E} = -\varepsilon_0\hat{\mathbf{z}}$ (התעלמו מספין). נסמן את ההפרעה ב-$V = e\varepsilon_0 z$ כך שההמלטוניאן המלא הוא

$$.H = H_0 + V = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + e\varepsilon_0 z$$

(א) הראו כי האופרטורים L_z ו-$\mathcal{P}_x$ (מהתרגיל הקודם) מתחלפים עם ההמילטוניאן. האם L^2 מתחלף עם ההפרעה?

(ב) נסמן ב-$|E,m\rangle$ את המצבים העצמיים המשותפים של H ו-L_z כך שמתקיים

$$\begin{cases} H\,|E,m\rangle = E\,|E,m\rangle \\ L_z\,|E,m\rangle = \hbar m\,|E,m\rangle \end{cases}$$

השתמשו בסימטריות מסעיף (א) כדי להוכיח שאם המצב $|E,m\rangle$ הוא מצב עצמי של H עם אנרגיה E אז גם המצב $|E,-m\rangle$ הוא מצב עצמי של H עם אותה האנרגיה. כלומר, המצבים $|E,\pm m\rangle$ מנוונים.

(ג) הסבירו באמצעות הסעיף הקודם את התוצאה שקיבלתם בהרצאה עבור פיצול רמת האנרגיה $n=2$.

כעת נתמקד ברמת האנרגיה $n=3$ של אטום המימן.

(ד) האם שדה בגודל $\varepsilon_0 \approx 10^4\,\mathrm{V/cm}$ יכול להיחשב כהפרעה קטנה לצורך חישוב התיקון מסדר ראשון לרמת האנרגיה $E_3^{(0)}$?

(ה) השתמשו בתוצאה מסעיף (ב) כדי לקבוע מהו מספר רמות האנרגיה המקסימלי אליו יכולה להתפצל הרמה $n=3$ תחת ההפרעה הנתונה.

(ו) כתבו את ההצגה המטריצית של ההפרעה בבסיס $|n\ell m\rangle$ עבור תת-המרחב $n=3$. כלומר חשבו את אלמנטי המטריצה $\langle 3\ell' m'|V|3\ell m\rangle$. **אין צורך לפתור אינטגרלים**, השתמשו בתוצאות האינטגרלים המצורפים לתרגיל.
(הדרכה: השתמשו בשיקולי זוגיות ובעובדה ש-$[L_z,z]=0$ כדי להחליט אילו אלמנטי מטריצה לא מתאפסים. כתבו את $z = r\cos\theta$, וסדרו את הבסיס כך שתתקבל מטריצת בלוקים. ***התשובה הסופית נמצאת בדף הבא.****)*

(ז) חשבו את התיקונים מסדר ראשון לרמת האנרגיה $E_3^{(0)}$. מהו הניוון של כל אחת מהרמות? האם הפיצול של $E_3^{(0)}$ תואם את מה שחזיתם משיקולי סימטריה? *(שימו לב שכל המצבים בתת מרחב $n=3$ מנוונים. עליכם ללכסן את ההפרעה בתת מרחב המנוון כדי למצוא את פיצול הרמות.)*

נתונים האינטגרלים הבאים:

$$\alpha = \int_0^\infty R_{3,0}(r)\,\frac{r}{a_0}R_{3,1}(r)\,r^2\,\mathrm{d}r \int Y_0^{(0)*}(\theta,\varphi)\cos\theta\, Y_0^{(1)}(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\Omega = -3\sqrt{6}/2$$

$$\beta = \int_0^\infty R_{3,1}(r)\,\frac{r}{a_0}R_{3,2}(r)\,r^2\,\mathrm{d}r \int Y_0^{(1)*}(\theta,\varphi)\cos\theta\, Y_0^{(2)}(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\Omega = -3\sqrt{3}$$

$$\gamma = \int_0^\infty R_{3,1}(r)\,\frac{r}{a_0}R_{3,2}(r)\,r^2\,\mathrm{d}r \int Y_1^{(1)*}(\theta,\varphi)\cos\theta\, Y_1^{(2)}(\theta,\varphi)\,\mathrm{d}\Omega = -9/2$$

הדרכה לסעיף (ו), שאלה 4:

במקום הסידור הרגיל של הבסיס $|\ell m\rangle$ לפי ℓ,

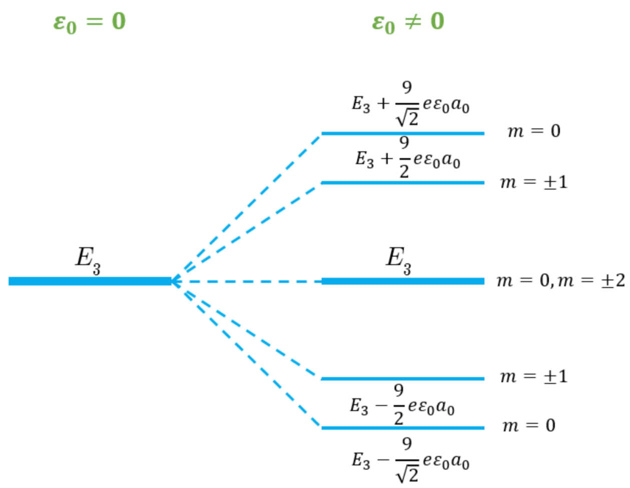
$$\left\{\underbrace{\{|0,0\rangle\}}_{\ell=0},\underbrace{\{|1,1\rangle\,,|1,0\rangle\,,|1,-1\rangle\}}_{\ell=1},\underbrace{\{|2,2\rangle\,,|2,1\rangle\,|2,0\rangle\,,|2,-1\rangle\,,|2,-2\rangle\}}_{\ell=2}\right\}$$

סדרו את הבסיס לפי m (זאת מפני שההפרעה מלוכסנת בבסיס $|m\rangle$ כי z מתחלף עם L_z, אבל $[z,L^2]\neq 0$) באופן הבא:

$$\left\{\underbrace{\{|0,0\rangle\,,|1,0\rangle\,,|2,0\rangle\}}_{m=0},\underbrace{\{|1,1\rangle\,,|2,1\rangle\}}_{m=1},\underbrace{\{|1,-1\rangle\,,|2,-1\rangle\}}_{m=-1},\underbrace{\{|2,2\rangle\}}_{m=2},\underbrace{\{|2,-2\rangle\}}_{m=-2}\right\}$$

לכאורה אנחנו אמורים לקבל מטריצה עם $9^2=81$ רכיבים. אך כללי הברירה של זוגיות והסימטריה בבעיה מביאים אותנו לחישוב *3 איברים בלבד!* (אלה הם האינטגרלים α,β,γ הנתונים בשאלה). המטריצה המלאה אמורה להראות כך: (באדום הבלוקים הרלוונטים, כמובן שאין צורך לכתוב את כל המטריצה הגדולה, אלא רק את שתי המטריצות שלא מתאפסות. העבודה מסתכמת בלכסון שתי מטריצות בלבד! 2×2 ו- 3×3)

$$V=e\varepsilon_0 a_0\;\begin{array}{c} \\ \langle 0,0| \\ \langle 1,0| \\ \langle 2,0| \\ \langle 1,1| \\ \langle 2,1| \\ \langle 1,-1| \\ \langle 2,-1| \\ \langle 2,2| \\ \langle 2,-2| \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc} |0,0\rangle & |1,0\rangle & |2,0\rangle & |1,1\rangle & |2,1\rangle & |1,-1\rangle & |2,-1\rangle & |2,2\rangle & |2,-2\rangle \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^* & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$



בהצלחה!