תרגיל בית 1

חזרה על קוונטים 1

1. אלקטרון מצוי בשדה קולומבי של פרוטון. מודדים את האנרגיה של האלקטרון ומתקבל הערך $E=-1.511\,\mathrm{eV}$. (*להזכירכם: אנרגיה של אלקטרון באטום מימן* $E_n=-\frac{13.6\,\mathrm{eV}}{n^2}$)

   (א) כעת מודדים את רכיב y של התנע הזויתי של האלקטרון, L_y. מהן התוצאות האפשריות?

   (ב) במדידת L_y התקבל הערך $-\hbar$. כעת מודדים את L^2. מהן התוצאות האפשריות?

   (ג) אם לאחר מדידת L^2 ימדדו שוב את L_y, האם תוכל להתקבל התוצאה 0? הסבירו.

   (ד) אם לאחר מדידת L^2 ימדדו דווקא את L_x, האם תוכל להתקבל התוצאה 0? הסבירו.

2. הוכיחו כי בהצגת המקום

$$e^{i\frac{L_z}{\hbar}\theta_0}\psi(\varphi)=\psi(\varphi+\theta_0).$$

   (רמז: פתחו את האקספוננט לטור והשתמשו בעובדה ש- $L_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$.)

3. בתרגיל זה נוכיח כי הערכים העצמיים של רכיב z של התנע הזוויתי המרחבי L_z חייבים להיות כפולה שלמה של $\hbar$ (בניגוד לתנע הזוויתי הפנימי S_z שיכול לקבל גם ערכים חצי-שלמים). הסיבה לכך נעוצה בעובדה שהתנע הזוויתי המרחבי $\mathbf{L}$ בנוי מהקאורדינטות המרחביות $\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mathbf{p}$, ובפרט

$$L_z=xp_y-yp_x.$$

   (א) נגדיר את האופרטורים הבאים

$$\begin{cases}Q_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\dfrac{1}{\alpha}p_y\right)\\ P_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(p_x-\alpha y\right)\end{cases},\qquad\begin{cases}Q_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{1}{\alpha}p_y\right)\\ P_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(p_x+\alpha y\right)\end{cases}$$

   כאשר α הוא קבוע *(מה היחידות שלו?)*. הוכיחו כי אלו קואורדינטות קנוניות, כלומר, הוכיחו כי מתקיימים יחסי החילוף הבאים

$$\begin{cases}[Q_1,Q_2]=[P_1,P_2]=0\\ [Q_n,P_m]=i\hbar\delta_{nm}\end{cases},$$

   כאשר $n,m=1,2$.

   (ב) הראו כי ניתן לכתוב את L_z באמצעות האופטורים מהסעיף הקודם כך

$$L_z=\left(\frac{P_1^2}{2\alpha}+\frac{1}{2}\alpha Q_1^2\right)-\left(\frac{P_2^2}{2\alpha}+\frac{1}{2}\alpha Q_2^2\right).$$

   (ג) הסיקו מכך כי הערכים העצמיים של L_z הם $(n-k)\,\hbar$ כאשר n ו-k הם מספרים שלמים. או במילים אחרות, אם נסמן $m\equiv n-k$ אז הערכים העצמיים של L_z הם $m\hbar$, כלומר, כפולה שלמה של $\hbar$. (*רמז: המלטוניאן של אוסצילטור הרמוני.*)

4. **(תרגיל חובה) *רמות לנדאו:***
חלקיק חסר ספין בעל מטען חשמלי q מאולץ לנוע על מישור $x-y$. מפעילים שדה מגנטי קבוע בניצב למישור התנועה $\mathbf{B}=B_0\hat{\mathbf{z}}$. ההמילטוניאן המתאים הוא:

$$H=\frac{1}{2m}\left(\mathbf{p}-\frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2.$$

בכיתה פתרנו בכיול לנדאו השובר את הסימטריה בין x ו-y. כעת נפתור בכיול הסימטרי בו

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}\mathbf{B}\times\mathbf{r}.$$

(א) הראו כי הוא מקיים $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}=0$ וכן $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}=\mathbf{B}$.

(ב) הציבו את $\mathbf{A}$ בהמילטוניאן וכתבו את ההמלטוניאן כפונקציה של רכיבי $\mathbf{r}$ ו-$\mathbf{p}$ הקרטזיים.

(ג) מהן סקלות האורך, האנרגיה והזמן בבעיה? עברו למשתנים חסרי מימד, והראו שהמילטוניאן המתקבל הוא

$$H=\frac{1}{2}\left[\left(p_x+\frac{1}{2}y\right)^2+\left(\frac{1}{2}x-p_y\right)^2\right].$$

(ד) נגדיר משתנים קנוניים חדשים (למעשה הוכחתם שהם קנוניים בשאלה הקודמת)

$$\begin{cases}Q_1=\frac{1}{2}x+p_y\\ P_1=p_x-\frac{1}{2}y\end{cases},\qquad\begin{cases}Q_2=\frac{1}{2}x-p_y\\ P_2=p_x+\frac{1}{2}y\end{cases}$$

מהם ניתן לבנות אופרטורי העלאה והורדה (קנוניים גם הם)

$$\begin{cases}a=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_1+iP_1\right)\\ a^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_1-iP_1\right)\end{cases},\qquad\begin{cases}b=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_2+iP_2\right)\\ b^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_2-iP_2\right)\end{cases}$$

הראו כי ההמילטוניאן במונחי אופרטורי ההעלאה וההורדה החדשים $H=b^\dagger b+\frac{1}{2}$. הסבירו מדוע המערכת מנוונת ניוון אינסופי.

(ה) הראו כי ניתן לכתוב את L_z באמצעות האופטורים מהסעיף הקודם כך $L_z=a^\dagger a-b^\dagger b$.

(ו) הראו כי $[L_z,H]=0$ והסיקו מכך שניתן לאפיין את מצבי המערכת באמצעות הערכים העצמיים של $N=b^\dagger b$ ו-L_z (כלומר $|n,m\rangle$). מהן האנרגיות העצמיות של המערכת? באיזה מספר קוונטי הן לא תלויות?

(ז) הוכיחו כי $b^\dagger$ הוא אופרטור הורדה והאופטור $a^\dagger$ הוא אופרטור העלאה ביחס לערכים העצמים של L_z. כלומר, הראו ש-$b^\dagger|m\rangle\propto|m-1\rangle$ ו-$a^\dagger|m\rangle\propto|m+1\rangle$.

בהצלחה!