Q1

$$\therefore n = \int n_\nu d\nu$$ נוכל לחשב ע״י (1

$$n_\nu = \frac{u_\nu}{h\nu} = \frac{8\pi}{c^3} \frac{\nu^2}{e^{h\nu/k_BT}-1}$$

$$\left(\frac{h/k_BT}{h/k_BT}\right)^2$$

$$\frac{h\nu}{k_BT} = x$$

$$dx = \frac{h}{k_BT} d\nu$$

$$n = \frac{8\pi}{c^3}\left(\frac{k_BT}{h}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x-1} dx = 2.4 \cdot \frac{8\pi}{(ch)^3} (k_BT)^3$$

$$a = \frac{4\sigma}{c}$$

$$\langle \varepsilon \rangle \left[\frac{J}{N_p}\right] = \frac{u\left[\frac{J}{m^3}\right]}{n\left[\frac{N_p}{m^3}\right]}$$ (2

$$= \frac{aT^4}{2.4 \cdot \frac{8\pi}{(ch)^3}(k_BT)^3} = \frac{1}{4.8\pi} \frac{\sigma}{k_B^3} \frac{1}{c^2h^3} T$$

Q2

$$E(z) = a^{-\frac{3}{2}} = (1+z)^{3/2}$$

$$\frac{1}{n}(1+x)^n \to (1+x)^{n-1}$$

1) $D_A = \frac{1}{1+z} D_c$

$$D_c = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} = \frac{c}{H_0} \int_0^z (1+z')^{-3/2} dz' = \frac{c}{H_0}(-2)\left.(1+z)^{-\frac{1}{2}}\right|_0^z$$

$$= \frac{c}{H_0}(-2)\left[\frac{1}{\sqrt{1+z}} - 1\right]$$

$$(1+z)^{-3/2} \to -\frac{3}{2}$$

$$D_A = \frac{2c}{H_0}\left[\frac{1}{1+z} - \frac{1}{(1+z)^{3/2}}\right]$$

2) $\partial_z D_A \sim \frac{3}{2(1+z)^{5/2}} - \frac{1}{(1+z)^2} \Rightarrow 3(1+z)^2 - 2(1+z)^{5/2} = 0$

נק' קיצון [illegible]

$$3(1+z)^2 = 2(1+z)^{5/2}$$

$$\frac{3}{2} = (1+z)^{1/2}$$

$$\frac{9}{4} = 1+z$$

$$\boxed{z = \frac{5}{4}}$$

Q3

1) זה פשוט $D_p = \frac{1}{1+z} D_c$ רק שצריך להתחשב

(בקבוע הסקאלה בכל נק' בדרך)

במרחק שהאור עבר בכל נק' בדרך לא להתייחס רק

להפרשים בקבוע הסקאלה, כלומר פשוט צריך לבחור

עם ה $\frac{1}{1+z}$ לאינטגרל:

$$D_{LT} = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')(1+z')}$$

2) זה בדיוק האינטגרל שפתרנו בתרגיל הקודם רק צריך

להחליף בין H_0 ל- t_0:

$$t_o = \int_{\text{תחילת היקום}}^{\text{עכשיו}} dt = \frac{1}{H_0} \int_\infty^1 \frac{da}{aE(a)} = \frac{1}{H_0} \int_\infty^0 -\frac{dz}{(1+z)} \frac{\cancel{1+z}}{E(z)} \to a^{-3/2} - (1+z)^{3/2}$$

$$= \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \sqrt{1+z} = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0}$$

$$\Rightarrow D_c = 3 c t_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right]$$

$$\left\{ \frac{c}{H_0} (-2) \left[\frac{1}{\sqrt{1+z}} - 1 \right] \right\}$$ מהקודם

Q5

1) $$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda a^{-3(1+\omega)}$$

2) עבור $\omega<-1$ מדובר בחזקה <u>חיובית</u> עבור

האנרגיה של Λ. ולכן כ a גדל רק האנרגיה של Λ

שנה:

$$H = H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}\, a^{-\frac{3}{2}(1+\omega)} \to a^{\frac{3}{4}}$$

לכן היקום ימשיך עד אינסוף וכל זמן ה co-moving יהיה

למעשה היקום שלה ולא יוכל להגיע עם d_k אינסופי.

$$\int_{\text{היום}}^{\infty} dt = \int_1^{\infty} \frac{da}{H_0 a E(a)} = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}\int_1^{\infty} a^{\frac{1}{2}(1+3\omega)}\, da = \frac{1}{H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \underbrace{\frac{1}{\frac{3}{2}(1+\omega)}}\, \underbrace{a^{\frac{3}{2}(1+\omega)}\Big|_1^{\infty}}_{-1}$$

$$\overset{\omega=-\frac{3}{2}}{=} \frac{4}{3}\frac{1}{H_0\sqrt{\underset{0.7}{\Omega_\Lambda}}} = 22.26\ \mathrm{Gyr}$$

Q6

$$l_c = \frac{h}{mc} \qquad l_s = \frac{2Gm}{c^2}$$

$$\frac{\hbar}{m c} = \frac{2Gm}{c^2}$$

$$[\mathrm{kg}]\ \sqrt{\frac{c\hbar}{2G}} = m_p = 8\cdot 10^{18}\ \mathrm{GeV} \qquad J = [F\cdot dr] = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{s^2}$$

$$\hbar\ [Js] = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{s}$$

$$l_p = \frac{\hbar}{m_p c} = \sqrt{\frac{2G\hbar}{c^3}} = 2.29\cdot 10^{-35}\ \mathrm{m}$$

$$\rho_p = \left(\frac{c\hbar}{2G}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{c^3}{2G\hbar}\right)^{3/2} = \frac{c^5}{4G^2\hbar} = 10^{96}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m^3}}$$

$$l_H = c t_p = 3\cdot 10^8 \cdot 10^{-44} = 3\cdot 10^{-36}\ \mathrm{m}$$

ויש פוטון אחד

כי האורך הגל מסבר

בגודל של l_p

$$u = \rho_p c^2 = aT^4 = \frac{4}{c}\sigma T^4$$

$$T_p = \left(\rho_p c^3 \frac{1}{4\sigma}\right)^{1/4} = 10^{32}\ \mathrm{K}$$