$$D_{\alpha\beta}(\bar{r}) = \frac{\partial^2\phi}{\partial r_\alpha \partial r_\beta} = \frac{\partial r}{\partial r_\beta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial r_\alpha}\right)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\partial_\alpha r = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\,\alpha$$

$$= \frac{\alpha}{r}$$

$$\Rightarrow D_{\alpha\beta}(\bar{r}) = \frac{\beta}{r}\left(\phi''\frac{\alpha}{r} - \phi'\frac{\alpha}{r^2}\right) \qquad \frac{\alpha}{r} = \hat{R}_\alpha$$

$$= \left(\phi'' - \frac{\phi'}{r}\right)\hat{R}_\alpha \hat{R}_\beta$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r_\alpha^2} = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\alpha}\right) \qquad \alpha=\beta \quad \text{אם} \quad \text{אבל}$$

$$= \cancel{\frac{\partial\phi}{\partial r_\alpha \partial r}}^{=0}\frac{\alpha}{r} + \frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\alpha}{r}\right) = \phi'\frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow D_{\alpha\beta}(\bar{r}) = \frac{\phi'}{r}\delta_{\alpha\beta} + \left(\phi'' - \frac{\phi'}{r}\right)\hat{R}_\alpha \hat{R}_\beta$$

$$\underline{\left(\frac{2\pi}{a}, k, 0\right)} \qquad \text{ב)}$$

$$D_{\alpha\beta}(\bar{R}_1) = k_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + (k_2 - k_1)\Big($$

בתרגול כבר היינו את למשוך 6 הנרג'ינלית

הדינמיות

$$D(\bar{R}_1) = D(\bar{R}_2) = \begin{pmatrix} \frac{\kappa_2+\kappa_1}{2} & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{2} & 0 \\ \frac{\kappa_2-\kappa_1}{2} & \frac{\kappa_2+\kappa_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_1 \end{pmatrix}$$

$\frac{a}{2}(1,-1,0)\cdot(k,k,0)$

$$D(\bar{R}_3) = D(-\bar{R}_4) = \begin{pmatrix} \frac{\kappa_2+\kappa_1}{2} & -\frac{\kappa_2-\kappa_1}{2} & 0 \\ -\frac{\kappa_2-\kappa_1}{2} & \frac{\kappa_2+\kappa_1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_5 = -\mathbf{R}_6 = \frac{a}{2}(1,0,1) \longrightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{\kappa_2+\kappa_1}{2} & 0 & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{2} \\ 0 & \kappa_1 & 0 \\ \frac{\kappa_2-\kappa_1}{2} & 0 & \frac{\kappa_2+\kappa_1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_7 = -\mathbf{R}_8 = \frac{a}{2}(1,0,-1) \longrightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{\kappa_2+\kappa_1}{2} & 0 & -\frac{\kappa_2-\kappa_1}{2} \\ 0 & \kappa_1 & 0 \\ -\frac{\kappa_2-\kappa_1}{2} & 0 & \frac{\kappa_2+\kappa_1}{2} \end{pmatrix}$$

לכן נותר לחשב רק את שני הצמודים הנותרים:

$$\bar{R}_9 = \frac{a}{2}(0,1,1)$$

$$D(\bar{R}_9) = D(-\bar{R}_{10}) = \kappa_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + (\kappa_2-\kappa_1)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa_2+\kappa_1}{2} & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{2} \\ 0 & \frac{\kappa_2-\kappa_1}{2} & \frac{\kappa_2+\kappa_1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D(\bar{R}_{11}) = D(-\bar{R}_{12}) = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa_2+\kappa_1}{2} & -\frac{\kappa_2-\kappa_1}{2} \\ 0 & -\frac{\kappa_2-\kappa_1}{2} & \frac{\kappa_2+\kappa_1}{2} \end{pmatrix}$$

כעת נסתכל על הארגומנטים של הסינוסים:

$$\bar{R}_1 = \frac{a}{2}(1,1,0) \rightarrow \frac{1}{2}\bar{k}\cdot\bar{R}_1 = \frac{a}{4}\left(\frac{2\pi}{a}+k\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{ka}{4}$$

$$\hat{R}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \qquad \Rightarrow \cos^2\left(\frac{a}{4}k\right)$$

ועבור $\bar{R}_2 = \frac{a}{2}(1,-1,0)$ נקבל גם $\cos^2\left(\frac{a}{4}k\right)$

אך גם עבור $\bar{R}_3 = \frac{a}{2}(1,-1,0)$ ו $\bar{R}_4$ נקבל $\cos^2\left(\frac{a}{4}k\right)$

לומר אם כך נקבל בסכום:

$$\tilde{K} = 2\left\{2\cos^2\left(\frac{a}{4}k\right)\begin{pmatrix}\kappa_1+\kappa_2 & 0 & 0\\ 0 & \kappa_1+\kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\kappa_1\end{pmatrix} + \sum_{i=5}^{12} D(\bar{R}_i)\sin\left(\frac{1}{2}\bar{k}\cdot\bar{R}_i\right)\right\}$$

עבור $i=5\dots8$ נקבל $\sin(\frac{\pi}{2})=1$

לכן עבכה:

$$\tilde{K} = 2\Bigg\{2\cos^2\left(\frac{a}{4}k\right)\begin{pmatrix}K_1+K_2 & 0 & 0\\ 0 & K_1+K_2 & 0\\ 0 & 0 & 2K_1\end{pmatrix}$$

$$+\,2\begin{pmatrix}K_1+K_2 & 0 & 0\\ 0 & 2K_1 & 0\\ 0 & 0 & K_1+K_2\end{pmatrix}$$

$$+\sum_{i=9}^{12} D(\bar{R}_i)\sin\left(\frac{1}{2}\bar{k}\cdot\bar{R}_i\right)\Bigg\}$$

ועבור $i=9\dots12$ נקבל $\sin(\frac{a}{4}k)$

לכן בסה״כ קיבלנו:

$$\tilde{K} = 4\Bigg\{\cos^2\left(\frac{a}{4}k\right)\begin{pmatrix}K_1+K_2 & 0 & 0\\ 0 & K_1+K_2 & 0\\ 0 & 0 & 2K_1\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}K_1+K_2 & 0 & 0\\ 0 & 2K_1 & 0\\ 0 & 0 & K_1+K_2\end{pmatrix}$$

$$\sin^2\left(\frac{a}{4}k\right)\begin{pmatrix}2K_1 & 0 & 0\\ 0 & K_1+K_2 & 0\\ 0 & 0 & K_1+K_2\end{pmatrix}\Bigg\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} m\omega_x^2 &= 4\left(1+\cos^2\left(\frac{a}{4}k\right)\right)(K_1+K_2) + 8\sin^2\left(\frac{a}{4}k\right)K_1\\ m\omega_y^2 &= 4(K_1+K_2)+8K_1 = 4(3K_1+K_2)\\ m\omega_z^2 &= 4\left(1+\sin^2\left(\frac{a}{4}k\right)\right)(K_1+K_2) + 8\cos^2\left(\frac{a}{4}k\right)K_1\end{aligned}}$$

$$(k,k,0)$$

עבור $\bar{R}_3=\frac{a}{2}(1,-1,0)=-\bar{R}_4$ נקבל

שהסכום מתאפס.

עבור R_1,R_2 נקבל $\sin^2(\frac{a}{2}k)$. לכן

המקדמים הלא-אלכסוניים לא יתבטלו.

$$\Rightarrow \tilde{K}=2\left\{\sin^2\left(\frac{a}{2}k\right)\begin{pmatrix} K_1+K_2 & K_2-K_1 & 0\\ K_2-K_1 & K_1+K_2 & 0\\ 0 & 0 & 2K_1\end{pmatrix}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=5}^{12}D(\bar{R}_i)\sin\left(\frac{1}{2}\bar{k}\cdot\bar{R}_i\right)\right\}$$

עבור $i=5\ldots8$ נקבל כמו מקודם $\sin^2(\frac{a}{4}k)$

$$\Rightarrow \tilde{K}=2\left\{\sin^2\left(\frac{a}{2}k\right)\begin{pmatrix} K_1+K_2 & K_2-K_1 & 0\\ K_2-K_1 & K_1+K_2 & 0\\ 0 & 0 & 2K_1\end{pmatrix}\right.$$

$$+2\sin^2\left(\frac{a}{4}k\right)\begin{pmatrix} K_1+K_2 & 0 & 0\\ 0 & 2K_1 & 0\\ 0 & 0 & K_1+K_2\end{pmatrix}$$

$$\left.+2\sin^2\left(\frac{a}{4}k\right)\begin{pmatrix} 2K_1 & 0 & 0\\ 0 & K_1+K_2 & 0\\ 0 & 0 & K_1+K_2\end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \tilde{K}=\begin{pmatrix} a & b & 0\\ b & a & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$$

$$a=2\sin^2\left(\frac{a}{2}k\right)(K_1+K_2)+4\sin\left(\frac{a}{4}k\right)(K_1+K_2)$$

$$+8\sin^2\left(\frac{a}{4}k\right)K_1$$

$$=2\sin^2\left(\frac{a}{2}k\right)(K_1+K_2)+4\sin\left(\frac{a}{4}k\right)(3K_1+K_2)$$

$$b=2\sin^2\left(\frac{a}{2}k\right)(K_2-K_1)$$

$$c=4\sin^2\left(\frac{a}{2}k\right)K_1+8\sin^2\left(\frac{a}{4}k\right)(K_1+K_2)$$

כך שצריך לפתור רק את הדטרמיננטה:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 - b^2 = 0$$

$$a-\lambda = \pm b$$

$$\lambda = a \pm b$$

$$a+b = 2\sin^2\left(\tfrac{a}{2}k\right)\left(\cancel{K_1}+K_2+K_2-\cancel{K_1}\right)+\dots$$

$$a-b = \text{''} \quad \left(K_1+\cancel{K_2}-\cancel{K_2}+K_1\right)+\dots$$

$$\boxed{\begin{aligned} m\omega_1^2 &= a+b = 4\sin^2\left(\tfrac{a}{2}k\right)K_2+4\sin\left(\tfrac{a}{4}k\right)\left(3K_1+K_2\right) \\ m\omega_2^2 &= a-b = 4\sin^2\left(\tfrac{a}{2}k\right)K_1+4\sin\left(\tfrac{a}{4}k\right)\left(3K_1+K_2\right) \\ m\omega_3^2 &= c = 4\sin^2\left(\tfrac{a}{2}k\right)K_1+8\sin^2\left(\tfrac{a}{4}k\right)\left(K_1+K_2\right) \end{aligned}}$$

$$\underline{(k,k,k)}$$

עבור $\bar{Q}_1,\bar{Q}_2$ נקבל $\sin^2\left(\tfrac{a}{2}k\right)$

כעת עבור כלם נקבל שהתרומות אינן מתבטלות

$$\tilde{K} = 2\sin^2\left(\tfrac{a}{2}k\right)\left\{ \begin{pmatrix} K_1+K_2 & K_2-K_1 & 0 \\ K_2-K_1 & K_1+K_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2K_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_1+K_2 & 0 & K_2-K_1 \\ 0 & 2K_1 & 0 \\ K_2-K_1 & 0 & K_1+K_2 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 2K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_1+K_2 & K_2-K_1 \\ 0 & K_2-K_1 & K_1+K_2 \end{pmatrix} \right\} \quad \begin{aligned} &2(K_1+K_2+K_1+K_2+2K_1) \\ &=2(4K_1+2K_2) \\ &=4(2K_1+K_2) \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{aligned} a &= 4\sin^2\left(\tfrac{a}{2}k\right)\left(2K_1+K_2\right) \\ b &= 2\sin^2\left(\tfrac{a}{2}k\right)\left(K_2-K_1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & b \\ b & a-\lambda & b \\ b & b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)\left[(a-\lambda)^2-b^2\right] - b\left[b(a-\lambda)-b^2\right]$$

$$+b\left[b^2-b(a-\lambda)\right]$$

$$(a-\lambda)^3-3b^2(a-\lambda)+2b^3=0$$

$$a^3-3b^2a+2b^3=(a-b)^2(a+2b)$$

$$\Rightarrow\quad (a-\lambda-b)^2(a-\lambda+2b)=0$$

$\lambda_1=a-b \rightarrow$ מנוון פעמיים

$\lambda_2=a+2b$

$$m\omega_{1,2}^2=a-b=\sin^2\left(\frac{a}{2}k\right)\left(8K_1+4K_2-2K_2+2K_1\right)$$

$$=\sin^2\left(\frac{a}{2}k\right)\left(10K_1+2K_2\right)$$

$$m\omega_3^2=a+2b=\sin^2\left(\frac{a}{2}k\right)\left(8K_1+4K_2+4K_2-4K_1\right)$$

$$=4\sin^2\left(\frac{a}{2}k\right)\left(K_1+2K_2\right)$$

2) א) יש 4 שכנים קרובים ביותר

אבל שוב לצפות תהיה אותה תרומה

כי יש סימטריה לשיקופים:

$a(1,0)$

$$D(\bar{R}_1)=K_T\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+(K_L-K_T)\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}K_L&0\\0&K_T\end{pmatrix}=D(\bar{R}_2)$$

$$D(\bar{R}_3)=D(\bar{R}_4)=\begin{pmatrix}K_T&0\\0&K_L\end{pmatrix}$$

ונקבל $\bar{K}$ לכל $\bar{k}=(k_x,k_y)$:

$$\bar{K}=2\left\{2\sin^2\left(\frac{a}{2}k_x\right)\begin{pmatrix}K_L&0\\0&K_T\end{pmatrix}\right.$$

$$+2\sin\left(\frac{a}{2}k_y\right)\begin{pmatrix}K_T & 0\\ 0 & K_L\end{pmatrix}\Bigg\}$$

$$=\begin{pmatrix}4\sin^2\left(\frac{a}{2}k_x\right)K_L+4\sin^2\left(\frac{a}{2}k_y\right)K_T & 0\\ 0 & 4\sin^2\left(\frac{a}{2}k_x\right)K_T+4\sin^2\left(\frac{a}{2}k_y\right)K_L\end{pmatrix}$$

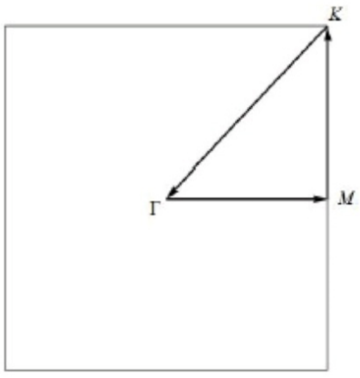
$$\boxed{\begin{aligned} m\omega_1^2 &= 4\sin^2\left(\frac{a}{2}k_x\right)K_L+4\sin^2\left(\frac{a}{2}k_y\right)K_T\\ m\omega_2^2 &= 4\sin^2\left(\frac{a}{2}k_x\right)K_T+4\sin^2\left(\frac{a}{2}k_y\right)K_L\end{aligned}}$$

ב)

(ב) שרטטו את יחס הנפיצה לאורך המסלול $\Gamma \to M \to K \to \Gamma$ באזור ברילואן הראשון (ראו איור).
הניחו כי $\kappa_L = 4\kappa_T$.

לבחור פרמטרים שיהיה
נוח לעבוד

$a=1$
$m=4$
$K_T=1$
$K_L=4$



$$\omega_1=\sqrt{4\sin^2\left(\tfrac{1}{2}k_x\right)+\sin^2\left(\tfrac{1}{2}k_y\right)}$$

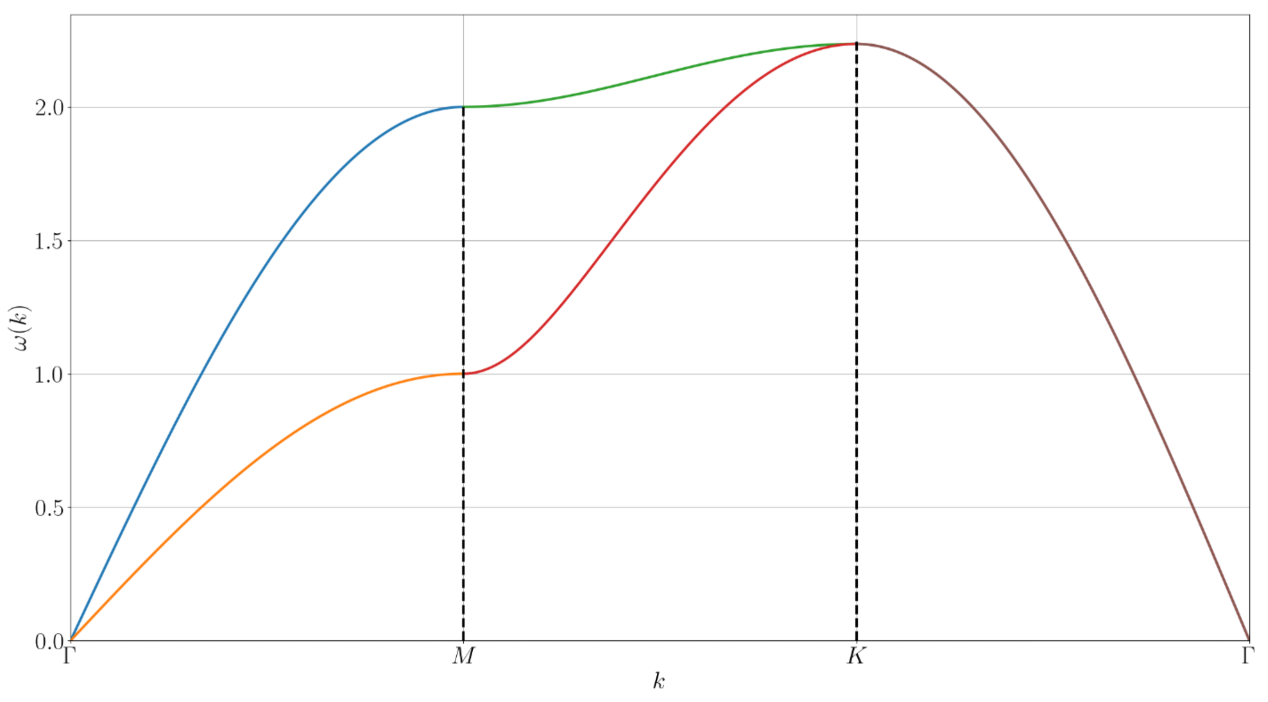
$$\omega_2=\sqrt{\sin^2\left(\tfrac{1}{2}k_x\right)+4\sin^2\left(\tfrac{1}{2}k_y\right)}$$

$\underline{\Gamma\to M:}$ $\quad k: 0\to\pi \qquad \bar{k}=(k,0)$

$\underline{M\to K:}$ $\quad k: \pi\to 2\pi \qquad \bar{k}=(\pi,k)$

$\underline{K\to\Gamma:}$ $\quad k: 2\pi\to 3\pi \qquad k=(k,k) \underset{\uparrow}{=} (-k,-k)$

סימטריה
זוגית


2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
$\omega(k)$
Γ
M
K
Γ
k

(ג) מצאו את המטריצה ממנה ניתן לחשב את הענפים ביחס הנפיצה בקירוב שכנים מסדר שני. קבועי הקפיץ האפקטיביים עבור שכנים קרובים ביותר הם כמתואר בסעיף (א), ועבור שכן מסדר שני $\mathbf{R}$ נסמן $D_{\alpha\beta}(\mathbf{R}) = \delta_{\alpha\beta}\eta_1 + [\eta_2-\eta_1]\left(\hat{\mathbf{R}}\right)_\alpha\left(\hat{\mathbf{R}}\right)_\beta$.

ג

פשוט צריך להוסיף את המטריצה הזו לקודמת.

יש 4 שכנים מסדר שני ושוב שיקוף

לזוג אותה תרומה.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

$$\bar{R}_1 = \frac{a}{2}(1,1) \qquad \bar{R}_2 = \frac{a}{2}(-1,-1)$$

$$\bar{R}_3 = \frac{a}{2}(-1,1) \qquad \bar{R}_4 = \frac{a}{2}(1,-1)$$

$$D(R_1) = D(R_2) = \eta_1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + (\eta_2-\eta_1)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{\eta_2+\eta_1}{2} & \frac{\eta_2-\eta_1}{2}\\ \frac{\eta_2-\eta_1}{2} & \frac{\eta_2+\eta_1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\bar{k}\cdot\bar{R}_1 = \frac{1}{2}(k_x,k_y)\frac{a}{2}(1,1) = \frac{a}{4}(k_x+k_y)$$

$$\frac{1}{2}\bar{k}\cdot\bar{R}_3 = \qquad (-1,1) = \frac{a}{4}(k_x-k_y)$$

כך שבסך הכל נקבל מטריצה:

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix}4\sin^2\left(\frac{a}{2}k_x\right)K_L + 4\sin^2\left(\frac{a}{2}k_y\right)K_T & 0\\ 0 & 4\sin^2\left(\frac{a}{2}k_x\right)K_T + 4\sin^2\left(\frac{a}{2}k_y\right)K_L\end{pmatrix}$$

$$+4\sin^2\left(\frac{a}{4}(k_x+k_y)\right)\begin{pmatrix}\frac{\eta_2+\eta_1}{2} & \frac{\eta_2-\eta_1}{2}\\ \frac{\eta_2-\eta_1}{2} & \frac{\eta_2+\eta_1}{2}\end{pmatrix}$$

$$+4\sin^2\left(\frac{a}{4}(k_x-k_y)\right)\begin{pmatrix}\frac{\eta_2+\eta_1}{2} & -\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\\ -\frac{\eta_2-\eta_1}{2} & \frac{\eta_2+\eta_1}{2}\end{pmatrix}$$

ואפשר להגדיר את ה-η-ות כגורם משולב ולקבל

ביטוי יפה פחות מסודר יותר, לפחות מבחינת שריגה:

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} 4\sin^2\left(\frac{a}{2}k_x\right)K_L + 4\sin^2\left(\frac{a}{2}k_y\right)K_T & 0 \\ 0 & 4\sin^2\left(\frac{a}{2}k_x\right)K_T + 4\sin^2\left(\frac{a}{2}k_y\right)K_L \end{pmatrix}$$

$$+2\left[\sin^2\left(\frac{a}{4}(k_x+k_y)\right)+\sin^2\left(\frac{a}{4}(k_x-k_y)\right)\right](\eta_1+\eta_2)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$+2\left[\sin^2\left(\frac{a}{4}(k_x+k_y)\right)-\sin^2\left(\frac{a}{4}(k_x-k_y)\right)\right](\eta_1-\eta_2)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

$$\omega(k) = \begin{cases} v_L k \\ v_T k \end{cases}$$

3

(א) נייטרון בעל תנע $\mathbf{p}_{\text{in}} = \frac{\pi\hbar}{a}\left(\frac{3}{2},0,0\right)$ מפוזר על ידי פונון בקיטוב אורכי לתנע $\mathbf{p}_{\text{out}} = \frac{\pi\hbar}{a}(1,1,0)$. קבעו את v_L.

$$\frac{p'^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \pm \hbar\omega_s\left(\pm\frac{\mathbf{p}'-\mathbf{p}}{\hbar}\right)$$

$$\bar{p}' - \bar{p} = \frac{\pi\hbar}{a}\left(-\frac{1}{2},1,0\right)$$

$$k = |\bar{k}| = \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{\pi}{a}$$

$$\frac{p'^2}{2m} = \frac{\frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}\cancel{2}}{\cancel{2}M_n} = \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2M_n}$$

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{\frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}\frac{9}{4}}{2M_n} = \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2M_n}\frac{9}{8}$$

קודם כל נשים לב שהסימן המתאים הוא -

לכן נפלט פונון, נציב ונשווה:

$$\frac{\pi^2\hbar^2}{a^2M_n} = \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2M_n}\frac{9}{8} - \hbar v_L\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{\pi}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{\hbar} V_L \frac{\sqrt{3}}{2} \cancel{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{8} \frac{\pi^2 \hbar^2}{a^2 M_n}$$

$$\boxed{V_L = \frac{1}{4\sqrt{3}} \frac{\pi \hbar}{a M_n}}$$

(ב) ניוטרון בעל תנע $\mathbf{p}_{\text{in}} = \frac{\pi\hbar}{a}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$ מפוזר על ידי פונון בקיטוב רוחבי לתנע $\mathbf{p}_{\text{out}} = \frac{\pi\hbar}{a}\left(-2, \frac{1}{2}, 0\right)$.
קבעו את v_T.

$$p_{out}^2 > p_{in}^2$$

$$\Downarrow$$

נפלט פונון

$$\Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\hbar}\Delta E = \frac{1}{\hbar}\frac{1}{2m}\left(p'^2 - p^2\right)$$

$$= \frac{\pi^2 \hbar}{a^2 2 M_n} \underbrace{\left(4\tfrac{1}{4} - \tfrac{3}{4}\right)}_{3\frac{1}{2}} = \frac{7}{4}\frac{\pi^2 \hbar}{a^2 M_n}$$

$$\bar{p}' - \bar{p} = \frac{\pi\hbar}{a}\left(-2 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

זה לא ב BZ1 צריך להזיז ב G.

האורך של BZ הוא $\frac{2\pi}{a}$ לכן נקבל

$$\bar{k} = \frac{\pi}{a}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$|\bar{k}| = \frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\pi}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{V_L \cancel{\frac{\pi}{a}} = \frac{7}{4}\frac{\pi^2 \hbar}{a^2 M_n}}$$

4. בהרצאה ובתרגול התמקדנו במקרה של פיזור חד-פונוני: עבור פיזור של ניוטרונים עם $\mathbf{p}$ התחלתי נתון, מדידה של אנרגיית הניוטרונים המפוזרים בכיוון ספציפי וקבוע (הכיוון של $\mathbf{p}'$) תראה שיאים חדים בהסתברות למדוד ערכים מסוימים של אנרגיה (התלויים בגודל של $\mathbf{p}'$) בעקבות פיזורים חד-פונוניים. במלים אחרות, למשוואה $\frac{p'^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \pm \hbar\omega_s\left(\pm\frac{\mathbf{p}'-\mathbf{p}}{\hbar}\right)$, אשר נובעת מחוקי השימור, קיים מספר סופי של פתרונות (בדידים) עבור p' (ולכן עבור E') מרגע שקבענו את הכיוון של $\mathbf{p}'$.

כעת, במקרה של פיזור דו-פונוני, רשמו את משוואות השימור המתאימות עבור **בליעת 2 פונונים**, והראו כי מדידת האנרגיות המתקבלות עבור כיוון מסוים של פיזור תתן רצף של אנרגיות מותרות. הסיקו כי ניתן למדוד את יחס הנפיצה של הפונונים רק באמצעות הפיזורים החד-פונוניים.

$$E' = E \pm \hbar\omega_s(\mathbf{k})$$
$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} \pm \hbar\mathbf{k} + \hbar\mathbf{G}$$

פיזור
פונון אחד

$$
\begin{cases}
E' = E \pm \hbar\omega^{\pm}_{s_1}(\bar{k}_1) \pm \hbar\omega^{\pm}_{s_2}(\bar{k}_2) \\
\bar{p}' = \bar{p} \pm \hbar\bar{k}_1 \pm \hbar\bar{k}_2 + \hbar G
\end{cases}
$$

בעצם כדי לפתור את מע' המש' הנ"ל צריך
למצוא $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ שייתנו את $\bar{p}'$, אבל יש
אינסוף כאלו. ולכן דרישת E נקבל רק את
E' אפשריות.
כלומר ההסתברות לקבלת E' אפשרית
גדולה ולכן לא נראה פיקים מובחנים אלו רעש
באופן מסו"מ. רעש זה יתווסף לפיזורים
מפוננים בודדים (פיקים מובחנים).