שאלה 1 – כוח אלקטרוסטטי בין גופים לא טעונים

א. השתמשו בביטוי עבור שדה חשמלי של דיפול כדי לחשב את האנרגיה הפוטנציאלית של זוג דיפולים $\mathbf{p}_1$ ו- $\mathbf{p}_2$ בקואור' $\mathbf{r}_1$ ו-$\mathbf{r}_2$, כתלות בוקטור $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

ב. מצאו את האנרגיה בכל אחד מהמצבים הבאים:

a) הדיפולים מקבילים זה לזה ול-**R**.
b) הדיפולים מקבילים זה לזה וניצבים ל-**R**.
c) הדיפולים אנטי מקבילים זה לזה ומקבילים ל-**R**.
d) הדיפולים אנטי מקבילים זה לזה וניצבים ל-**R**.
e) הדיפולים ניצבים זה לזה ול-**R**.

ג. מהו הכוח שדיפול אחד מפעיל על השני?

$$\bar E_{dip} = \frac{1}{r^3}\left[3(\bar p\cdot\hat r)\hat r - \bar p\right] = \frac{1}{r^5}\left[3(\bar p\cdot\bar r)\bar r - r^2\bar p\right]$$

יש לנו חופש בבחירת מע' הצירים לכן נציב את הראשית על דיפול 1, $\bar r_1$. ולכן השדה שיוצר דיפול 2 בראשית (על דיפול 1) הוא (כל מה שצריך לעשות זה להציב את הביטוי הכללי שכתוב למעלה לנק' $\bar r_2$ שם הדיפול נמצא):

$$\bar E_{2\to1}(\bar r) = \frac{1}{|\bar r-\bar R|^2}\left[3\big(\bar p_2\cdot(\bar r-\bar R)\big)(\bar r-\bar R) - |\bar r-\bar R|^2\bar p_2\right]$$

אם נניח ש$\bar r_1$ נמצא בראשית שרירותית אז ה-$\bar r$ שכתוב למעלה הוא $\bar r + \cancel{\bar r_1} - \bar r_1 + \bar r_2$ ששם בדיוק נמצא דיפול 2.

והביטוי לאנר':

$$U = -\bar E_2(0)\cdot\bar p_1 = -\frac{1}{R^5}\bar p_1\cdot\left[3\big(\bar p_2\cdot(\bar R)\big)\bar R - R^2\bar p_2\right]$$

$$= -\frac{1}{R^5}\left[3(\bar p_1\cdot\bar R)(\bar p_2\cdot\bar R) - R^2(\bar p_1\cdot\bar p_2)\right]$$

ב) a)

$$-\frac{1}{R^5}\left[3p_1p_2R^2 - p_1p_2R^2\right]$$

$$= -\frac{2p_1p_2}{R^3}$$

$$-\frac{1}{R^5}\left[3\cdot 0 - p_1 p_2 R^2\right] = \frac{p_1 p_2}{R^3} \qquad (b$$

$$-\frac{1}{R^5}\left[3 p_1 p_2 R^2 + p_1 p_2 R^2\right) = -\frac{4 p_1 p_2}{R^3} \qquad (c$$

$$-\frac{p_1 p_2}{R^3} \qquad (d$$

$$0 \qquad (e$$

$$F = -\nabla U \qquad (c$$

$$F_i = \partial_i \left\{ \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \left[3(p_1^x x + p_1^y y + p_1^z z)(p_2^x x + p_2^y y + p_3^z z) - (x^2+y^2+z^2)(p_1^x p_2^x + p_1^y p_2^y + p_1^z p_2^z) \right] \right\}$$

שאלה 2 – מומנט מגנטי של קליפה כדורית מסתובבת

א. נתונה קליפה כדורית ברדיוס R שמרכזה בראשית עם צפיפות מטען משטחית אחידה σ. הקליפה מסתובבת סביב ציר z במהירות זוויתית ω. מצאו את $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ו $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ בכל המרחב.

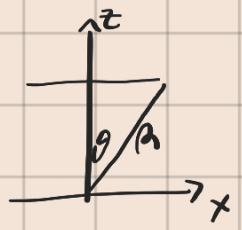
ב. מצאו את מומנט הדיפול המגנטי של הקליפה. כתבו את $\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r})$ ו $\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r})$ בכל המרחב, והראו שעבור $r > R$ הם זהים לפתרון המדויק שנמצא בסעיף א.

ג. היעזרו בסעיף הקודם כדי להוכיח שעבור התפלגות מטען בעלת סימטריה כדורית, שמסתובבת סביב ציר z במהירות זוויתית ω, כל המולטיפולים המגנטיים מתאפסים, פרט לדיפול.

א) נתחיל שלב-ג נרשום:

$$dI = \underbrace{R\omega}_{v}\sigma \underbrace{R\sin\theta d\theta}_{r}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{m} = \int d\bar{m} = \hat{z}\int \frac{\omega\sigma R^2 \sin\theta d\theta\, \pi(\sin\theta R)^2}{c}$$



כלומר לכל טבעת ב-θ מסויימת, היא ברדיוס $\sin\theta R$

והיא מסתובבת במהירות ωR והשטח שלה הוא $\pi(R\sin\theta)^2$

$$\Rightarrow \quad \bar{m} = \frac{4\pi\omega\sigma R^4}{3c}\hat{z} \qquad\qquad \hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{A}_{dip} = \frac{\bar{m}\times\hat{r}}{r^2} = \frac{m}{r^2}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ -\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{m}{r^2}\begin{pmatrix}0\\0\\-\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{m}{r^2}\sin\theta\,\hat{\varphi}$$

$$\bar{B}_{dip}(\bar{r}) = \frac{1}{r^3}\left[3(\bar{m}\cdot\hat{r})\hat{r} - \bar{m}\right]$$

$$= \frac{1}{r^3}\left[3m\cos\theta\,\hat{r} - m(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta})\right]$$

$$= \frac{m}{r^3}\left[2\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta}\right]$$

כעת נחשב את A ישירות, כדי להקל

על החישוב (כדי שהזווית בין $\bar{r}'$ ל- $\bar{r}$ תהיה

קלה) דווקא נשים את $\bar{r}$ על ציר $\hat{z}$

ואת $\bar{\omega}$ על ציר כללי שנבחר להיות במישור

xz. ויוצא:

$$J = \rho(r)\bar{v}(r) = \rho(\bar{\omega}\times\bar{r})$$

$$\rho = \sigma\delta(r-R)$$

$$\bar{\omega}\times\bar{r} = \begin{pmatrix}\omega\sin\eta\\ 0\\ \omega\cos\eta\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}R\sin\theta\cos\varphi\\ R\sin\theta\sin\varphi\\ R\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\omega R\cos\eta\sin\theta\sin\varphi\\ \omega R\cos\eta\sin\theta\cos\varphi-\omega R\sin\eta\cos\theta\\ \omega R\sin\eta\sin\theta\sin\varphi\end{pmatrix}$$

אך האינטגרל על φ נעלם כי $\int\sin\varphi = \int\cos\varphi = 0$

ולכן נשאר רק עם

$$\bar{A}(\bar{r}) = -\frac{\sigma}{c}\omega R\sin\eta\int\frac{\cos\theta'\sin\theta' d\theta'\,\delta(r'-R)\,r'^2 dr' d\varphi'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\theta'}}\hat{y}$$

אחרי אינטגרציה על r' ועל φ':

$$= -\frac{\sigma 2\pi}{c}\omega R^3\sin\eta\int\frac{\cos\theta'\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{r^2+R^2-2rR\cos\theta'}}\hat{y}$$

וזה בדיוק $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{r^2+R^2-2rRx}}$ כאשר $x=\cos\theta$

והפתרון שלו במחשבון אינטגרלים הוא:

$$= -\frac{2\pi}{c}\frac{\omega R^{\cancel{3}}\sigma\sin\eta}{3\cancel{R^2}r^2}\left[(R^2+r^2-Rr)(R+r)-(R^2+r^2+Rr)|R-r|\right]\hat{y}$$

עבור $r>R$: $[\ ] = 2R^3 \Leftarrow |R-r| = r-R$

$$\bar{A}(r>R) = -\frac{4\pi\sigma\omega R^4}{3c}\frac{\sin\eta}{r^2}\hat{y}$$

ועבור $r<R$ $\quad |R-r|=R-r \Leftarrow [\;]=2r^3$

$$\bar{A}(r<R) = -\frac{4\pi\sigma\omega R}{3c}\sin\eta\, r\,\hat{y}$$

כעת נוכל לחזור לעזר מן הקודמת: $-\omega R\sin\eta\,\hat{y} = (\bar{\omega}\times\bar{r})$

ושם היה לנו $\Leftarrow (\bar{\omega}\times\bar{r}) = -R\omega\sin\theta\,\hat{\varphi}$

$$\bar{A}(r>R) = \frac{4\pi\sigma\omega R^4}{3c}\frac{\sin\theta}{r^2}\hat{\varphi}$$

$$\bar{A}(r<R) = \frac{4\pi\sigma\omega R}{3c}\sin\theta\, r\,\hat{\varphi}$$

וזה בדיוק מה שקיבלנו מקודם עבור $r>R$.

ג) כיוון שאני לא מצליח למצוא את $\bar{A}(\bar{r})$ $\bar{B}(\bar{r})$ באופן

שלא אנליטי, אבל ההוכחה ברורה, כי הפוטנציאל בכלל

סימטריה כדורית הינו סכום של קליפות כאלה, ולכן האיברים היחידים

יהיו אלה עם המקדמים $\frac{1}{r^2}$ (עבור $\bar{A}(\bar{r})$).

שאלה 3 – הקשר בין רכיבים כדוריים וקרטזיים של מולטיפולים

בטאו את המולטיפולים הכדוריים החיצוניים M_{lm} עבור $l = 0,1,2$, באמצעות רכיבי המונופול Q, הדיפול p_i והקוואדרופול Q_{ij} הקרטזיים.

$$M_{lm} = \int Y^*_{lm}(\theta',\varphi')\, r'^{l} \rho(r')\, d^3r'$$

$$M_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(r)\, d^3r = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}$$

$$M_{10} = \int \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cos\theta\, r\, \rho(r)\, d^3r$$

$$= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int \frac{z}{\cancel{r}} \cancel{r}\, \rho(r)\, d^3r = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, p_z$$

$$M_{1\pm1} = \mp \int \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(\frac{x \pm iy}{r}\right) r\, \rho(r)\, d^3r$$

$$= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(p_x \pm i p_y\right)$$

$$M_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \int (z^2 - r^2)\, \rho(r)\, d^3r = \sqrt{}\; Q_{zz}$$

$$M_{2\pm1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \left(Q_{xz} \pm i Q_{yz}\right)$$

$$M_{2\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \int \underbrace{(x \pm iy)^2}_{x^2 - y^2 \pm 2ixy} \rho(r)\, d^3r = \sqrt{} \left(Q_{xx} - Q_{yy} \pm 2i Q_{xy}\right)$$

4 א) עבור קליפה כדורית R עם σ

$$\rho(r) = \sigma\, \delta(r - R)$$

נתחיל מהחיצוניים:

$$\varphi(r>R) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{M_l P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}}$$

$$M_l = \int r^l P_l(\cos\theta)\, \rho(r,\theta)\, \underbrace{d^3r}_{r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}$$

$$= 2\pi\sigma R^{l+2} \int P_l(\cos\theta) \underbrace{\sin\theta\, d\theta}_{d\cos\theta}$$

כי רק $P_0(x)$ לא מאונך ל-1

$$\int P_l(x) \cdot P_0(x)\, dx = 2\delta_{l0}$$

$$\Rightarrow M_l = 4\pi R^{l+2} \delta_{l0}$$

$$\Rightarrow \varphi(r>R) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sigma P_l(\cos\theta) 4\pi R^{l+2} \delta_{l0}}{r^{l+1}}$$

$$= 4\pi\sigma R^2 \frac{1}{r} = \frac{Q}{r}$$

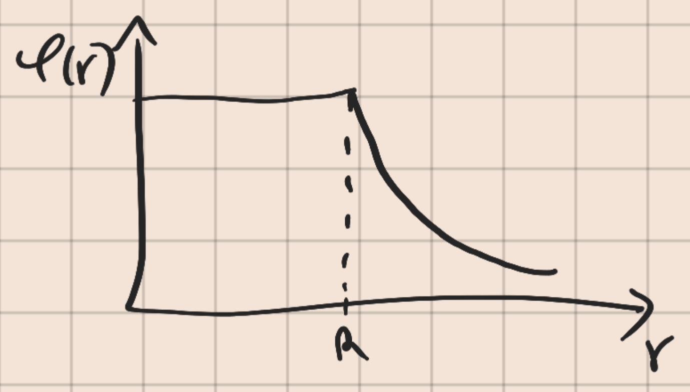
כמצופה

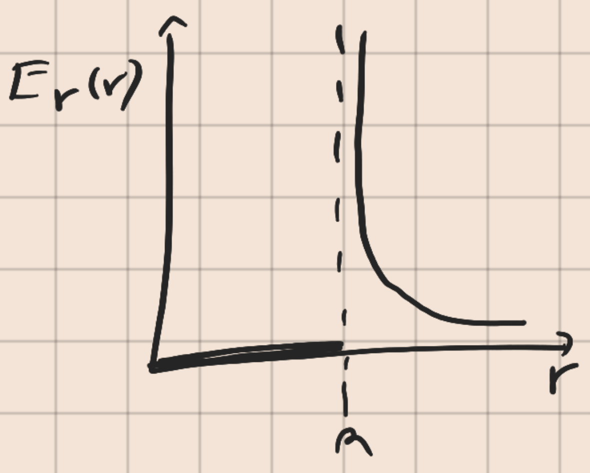
ועבור הפנימ"ים

$$\varphi(r<R) = \sum_{l=0}^{\infty} \bar{M}_l r^l P_l(\cos\theta)$$

$$\bar{M}_l = \int \frac{r^2}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)\, \rho(r,\theta)\, d^3r = \sigma 4\pi R\, \delta_{l0}$$

$$\Rightarrow \varphi(r<R) = \sum_{l=0}^{\infty} 4\pi R\, \delta_{l0}\, r^l P_l(\cos\theta) = 4\pi\sigma R \cdot \frac{R}{R} = \frac{Q}{R}$$





ג)

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\alpha r^2}$$

נחלק לקליפות ברדיוס r ואז נסכום:

לקליפה ברדיוס r' יש את

הפוטנציאל הפנימי של כל הקליפות מחוצה

לה, ואת הפוט' החיצוני של כל

הקליפות מתוכה.

$$\Rightarrow \varphi(r) = \int_0^r \frac{4\pi r'^2 \rho(r')}{r} dr' + \int_r^\infty 4\pi r' \rho(r') dr'$$

$$= \frac{4\pi}{r} \int_0^r r'^2 \rho_0 e^{-\alpha r'^2} dr' + 4\pi \rho_0 \int_r^\infty r' e^{-\alpha r'^2} dr'$$

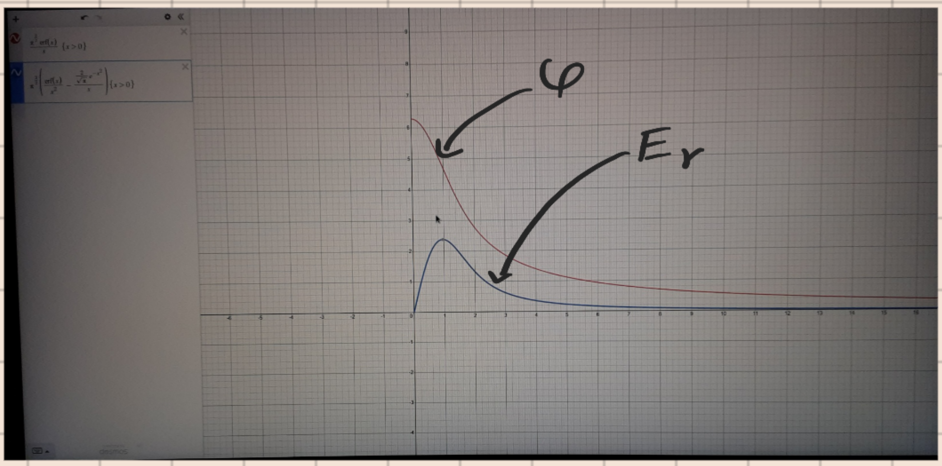
$$= \frac{\cancel{4}\pi}{r} \frac{\rho_0}{\cancel{4}\alpha^{3/2}} \left[\sqrt{\pi}\, \mathrm{erf}(\sqrt{\alpha} r) \cancel{- 2\sqrt{\alpha} r e^{-\alpha r^2}}\right]$$

$$\cancel{+ 4\pi \rho_0 \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha r^2}}$$

$$= \rho_0 \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} \frac{1}{r} \mathrm{erf}(\sqrt{\alpha} r)$$

וברור שקיים רק E_r:

$$\bar{E}(r) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}\hat{r} = \rho_0 \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} \left[\frac{\mathrm{erf}(\sqrt{\alpha} r)}{r^2} - 2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{e^{-\alpha r^2}}{r}\right]$$



$$\rho(r,\theta) = \sigma_0 \cos\theta\, \delta(r-R) \qquad \text{(א} \qquad \text{ט}$$

$$\varphi(r>R) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{M_\ell P_\ell(\cos\theta)}{r^{\ell+1}}$$

$$M_\ell = \int r^\ell P_\ell(\cos\theta)\, \rho(r,\theta)\, \underbrace{d^3r}_{r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi}$$

$$= 2\pi\sigma_0 R^{\ell+2} \int P_\ell(\cos\theta) \underbrace{\sin\theta\, d\theta}_{d\cos\theta}$$

אם כן $P_1(x)$ הינו ממש ל- $\cos\theta$

$$\int P_\ell(x) \cdot P_1(x)\, dx = \frac{2}{3}\delta_{\ell 1}$$

$$\Rightarrow \quad M_\ell = \sigma_0 \frac{4}{3}\pi R^{\ell+2} \delta_{\ell 0}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(r>R) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sigma_0 P_\ell(\cos\theta) \frac{4}{3}\pi R^{\ell+2} \delta_{\ell 1}}{r^{\ell+1}}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi\sigma_0 R^3 \cos\theta}{r^2} \qquad = \frac{\sigma_0 V_{sphere} \cos\theta}{r^2}$$

ולגבי הפנימי:

$$\varphi(r<R) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \bar{M}_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta)$$

$$\bar{M}_\ell = \int \frac{r^2}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta)\, \rho(r,\theta)\, d\cos\theta\, d\varphi = \frac{4}{3}\pi\sigma_0 \frac{1}{R^{\ell-1}} \delta_{\ell 1}$$

$$\Rightarrow \varphi(r<R) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{4}{3}\pi\sigma_0 \frac{1}{R^{\ell-1}} \delta_{\ell 1} r^\ell P_\ell(\cos\theta) = \frac{4}{3}\pi\sigma_0 r\cos\theta$$

ב) מכיוון ש $\ell=1$ אך יש רק את הדיפול

לכן נחשב:

$$\bar{p} = \int \bar{r} \rho(\bar{r})\, d^3r$$

$$= \int (r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\,\sigma_0\cos\theta\, r^2\,\delta(r-R)\,\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

שוב האינטגרלים על $\sin\varphi$ ו-$\cos\varphi$ ייתנו אפס

ונשאר רק עם רכיב $\hat{z}$:

$$= \hat{z} R^3 \sigma_0 2\pi \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{4}{3}\pi\sigma_0 R^3 \hat{z}$$

$$\hat{z} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$$

$$\bar{E} = \frac{1}{r^3}\left[3(\bar{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \bar{p}\right] = \frac{1}{r^3}\left[4\pi\sigma_0 R^3\cos\theta\,\hat{r} - \frac{4}{3}\pi\sigma_0 R^3\left(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r^3}\left[\frac{8}{3}\pi\sigma_0 R^3\cos\theta\,\hat{r} + \frac{4}{3}\pi\sigma_0 R^3\sin\theta\,\hat{\theta}\right]$$