תרגיל בית 3

סימטריות רציפות וסיבובים

חומר קריאה: J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (2nd edition), Sections 3.1-3.3

1. נתונה הטרנספורמציה $U(\lambda)=e^{-i\lambda G/\hbar}$ שהיוצר שלה הוא

$$G=\frac{1}{2}(xp+px),$$

כאשר x ו-p הם אופרטורי המקום והתנע.

(א) הראו כי טרנספורמציה אינפיניטסימלית משנה את האופרטורים x ו-p בצורה הבאה

$$\begin{cases}U(\epsilon)\,xU^{\dagger}(\epsilon)\approx(1-\epsilon)\,x\\ U(\epsilon)\,pU^{\dagger}(\epsilon)\approx(1+\epsilon)\,p\end{cases}$$

(ב) בהסתמך על תוצאת הסעיף הקודם, חשבו כיצד משנה טרנספורמציה *סופית* את האופרטורים x ו-p.

(ג) מצאו מה אופרטור הטרנספורמציה $U(\lambda)=e^{-i\frac{\lambda}{\hbar}G}$ מבצע כאשר הוא פועל על מצב מקום $|x\rangle$.

2. הוכיחו כי סיבוב בזוויות אוילר במערכת צירים הצמודה לגוף שקול לסיבוב בסדר הפוך במערכת צירים הצמודה למעבדה. כלומר, הראו ש-

$$R_{z'}(\gamma)\,R_{y'}(\beta)\,R_z(\alpha)=R_z(\alpha)\,R_y(\beta)\,R_z(\gamma).$$

3. המטריצה הבאה מתארת סיבוב עבור ספינור $\frac{1}{2}$ בבסיס המלכסן את S_z

$$\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}},\theta)=\frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

מצאו את כיוון ציר הסיבוב $\hat{\mathbf{n}}$ ואת זווית הסיבוב θ.

4. היעזרו בזהות שפיתחנו בתרגול כיתה 3 עבור תת-המרחב $j=1$,

$$e^{-i\theta J_y/\hbar}=1-i\sin\theta\frac{J_y}{\hbar}+(\cos\theta-1)\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2,$$

וחשבו את המטריצה $d^{(j=1)}_{m',m}$. בדקו את תשובתכם עם הערכים מטבלאות קלבש-גורדן.

5. חלקיק בעל ספין 1 נתון במצב

$$\langle m|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

בבסיס המלכסן את J_z. חשבו את הספינור המסובב, $\langle m|\psi'\rangle$, כאשר $|\psi'\rangle = \mathcal{D}(R)|\psi\rangle$, במקרים הבאים:

(א) R הוא סיבוב בזווית $\theta = \pi/2$ סביב ציר $\hat{\mathbf{z}}$.

(ב) R הוא סיבוב בזווית $\theta = \pi/2$ סביב ציר $\hat{\mathbf{y}}$.

6. **(שאלת חובה)**
הדינמיקה של חלקיק בעל תנע זוויתי $j = 1$ מוכתבת ע"י ההמילטוניאן

$$H = \epsilon\begin{pmatrix}2 & \frac{1-i}{2} & 0\\ \frac{1+i}{2} & 2 & \frac{1-i}{2}\\ 0 & \frac{1+i}{2} & 2\end{pmatrix},$$

כאשר המטריצה כתובה בבסיס המלכסן את J_z, ו-ϵ הוא קבוע.

(א) כתבו את ההמילטוניאן כסכום של רכיבים של $\mathbf{J}$ ו-J^2, כלומר

$$H = aJ^2 + b\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{a}}$$

כאשר $\hat{\mathbf{a}}$ וקטור כיוון כלשהו. מהן האנרגיות העצמיות של המערכת? (התשובה היא מיידית! אין צורך ללכסן את המטריצה.)

(ב) האם ההמילטוניאן סימטרי תחת טרנספורמציית סיבוב כללית?

(ג) באיזו זווית θ וסביב איזה ציר $\hat{\mathbf{n}}$ יש לסובב את $\hat{\mathbf{a}}$ כך שיפנה לכיוון $\hat{\mathbf{z}}$?

(ד) מהן זוויות אוילר α, β, γ המתאימות לסיבוב מהסעיף הקודם?

(ה) חשבו את מטריצת הסיבוב $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{n}}, \theta)$.

(ו) ודאו כי אכן טרנספורמציית הסיבוב שמצאתם מלכסנת את ההמילטוניאן. כלומר, הראו ש-

$$\mathcal{D}H\mathcal{D}^\dagger = \begin{pmatrix}\epsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & \epsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & \epsilon_3\end{pmatrix},$$

כאשר $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ הן האנרגיות העצמיות שמצאתם בסעיף (א).

בהצלחה!