

תרגיל בית 5

אופרטורים טנזוריים

חומר קריאה: J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (2nd edition), Sections 3.11

1. נמקו עבור כל אחד מאלמנטי המטריצה הבאים האם הוא מתאפס או לא **מבלי לחשב אינטגרלים** $\langle n\ell m |$ הם המצבים העצמיים של אטום המימן):

$$\begin{array}{ll} \langle 3, 2, 1 | xy | 3, 2, 1 \rangle & (\text{ד}) \quad \langle 3, 1, -1 | z^2 | 3, 1, -1 \rangle & (\text{א}) \\ \langle 4, 2, 1 | x^2 - y^2 | 4, 2, 1 \rangle & (\text{ה}) \quad \langle 5, 2, 1 | z^2 | 5, 4, 1 \rangle & (\text{ב}) \\ \langle n, \ell, \ell | x^2 + y^2 + z^2 | n, \ell, -\ell \rangle & (\text{ו}) \quad \langle 3, 2, 1 | z | 4, 2, 1 \rangle & (\text{ג}) \end{array}$$

2. אחד מרכיביו הכדוריים של טנזור הקוודרופול החשמלי הוא

$$Q = \frac{1}{2} (3z^2 - r^2)$$

נגדיר $Q_m \equiv \langle jm | Q | jm \rangle$. חשבו את היחסים Q_1/Q_0 ו- Q_{-1}/Q_0 עבור $j = 1$.

3. נתון הטנזור T המוגדר כמכפלה חיצונית

$$T = \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}$$

כאשר \mathbf{r} הוא אופרטור המקום.

(א) כתבו במפורש את רכיביו הקרטזיים של הטנזור T . האם הוא פריק? מה המשמעות של היותו טנזור פריק או אי-פריק?

(ב) מצאו את רכיביו הכדוריים של הטנזור T במונחי הרכיבים הכדוריים של הוקטור \mathbf{r} .

4. נתון האופרטור הטנזורי $T = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ שרכיביו הקרטזיים הם T_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$)

(א) מה הם הערכים האפשריים של q ו- k ברכיביו הכדוריים $T_q^{(k)}$ של הטנזור?

(ב) תנו ביטוי כללי לחישוב הרכיבים הכדוריים $T_q^{(k)}$ במונחי הרכיבים הקרטזיים T_{ij} .

(ג) חשבו במפורש את $T_0^{(0)}$ ואת $T_0^{(2)}$ (השתמשו בטבלאות קלבש-גורדן). לדוגמא:

$$T_1^{(2)} = -\frac{1}{2} [T_{13} + T_{31} + i(T_{23} + T_{32})]$$

5. נתונים הרכיבים הכדוריים $T_q^{(k)}$ ו- $R_q^{(k)}$ של שני אופרטורים אי-פריקים מדרגה k . בונים מהם את האופרטור הבא

$$M \equiv \sum_q (-1)^q R_q^{(k)} T_{-q}^{(k)}$$

מהם כללי הברירה עבור האופרטור M ? כלומר אילו אלמנטים $\langle j'm' | M | jm \rangle$ לא מתאפסים? (הנחיה: בדקו תחילה כיצד M עובר טרנספורמצית סיבוב. האם הוא טנזור? אם כן, מה הדרגה שלו?)

6. נתון אלמנט מטריצה אחד $\langle 33|T_3^{(4)}|30\rangle \equiv \sigma$ מתוך 49 אלמנטי המטריצה של האופרטור $T_3^{(4)}$ בתת-מרחב $j = 3$. השלימו את שאר אלמנטי המטריצה במונחי σ :

$$\langle 3m'|T_3^{(4)}|3m\rangle = \begin{pmatrix} & |33\rangle & |32\rangle & |31\rangle & |30\rangle & |3\bar{1}\rangle & |3\bar{2}\rangle & |3\bar{3}\rangle \\ \langle 33| & - & - & - & \sigma & - & - & - \\ \langle 32| & - & - & - & - & - & - & - \\ \langle 31| & - & - & - & - & - & - & - \\ \langle 30| & - & - & - & - & - & - & - \\ \langle 3\bar{1}| & - & - & - & - & - & - & - \\ \langle 3\bar{2}| & - & - & - & - & - & - & - \\ \langle 3\bar{3}| & - & - & - & - & - & - & - \end{pmatrix}$$

הערה: הסימון $|3\bar{1}\rangle$ שקול ל $|3, -1\rangle$ רק בכתיבה נוחה יותר שחוסכת מקום.

7. (שאלת חובה) נתון רכיב כדורי $S_q^{(k)}$ של האופרטור S במונחי הרכיבים הקרטזיים של אופרטור המקום

$$S_q^{(k)} = \frac{s_0}{r^3} [x^3 - 3xy^2 - i(y^3 - 3yx^2)]$$

כאשר s_0 הוא קבוע. ענו על הסעיפים הבאים מבלי לפרק את הביטוי ל- $Y_m^{(\ell)}$:

(א) מצאו את k ו- q .

(ב) חשבו את $S_{q-1}^{(k)}$.

(ג) חשבו את היחס בין אלמנטי המטריצה (הנתונים בבסיס $|jm\rangle$)

$$\frac{\langle 4m|S_q^{(k)}|3, -1\rangle}{\langle 4m'|S_q^{(k)}|31\rangle} = ?$$

הערה: את מקדמי קלבש-גורדן שלא נמצאים בטבלה תוכלו למצוא בקישור

<https://www.wolframalpha.com/input/?i=Clebsch-Gordan+calculator>

בהצלחה!