① א) רכיב $\mu=0$:

$$m\frac{dU^0}{d\tau} = \frac{q}{c}(\bar E\cdot\bar V) = \frac{1}{c}(\bar f\cdot\bar V) = \frac{1}{c}\frac{dE}{dt}$$

רכיב $\mu=i$:

$$m\frac{dU^i}{d\tau} = \frac{q}{c}\left(F^{i0}U_0 + F^{ij}U_j\right) = \frac{q}{c}\gamma(c\bar E + \bar V\times\bar B)$$

רק $\bar E$ מבצע עבודה כי $(\bar V\times\bar B)\perp\bar V$

לכן הדבר ישלום בהגדרה ← $\bar f\cdot\bar V$.

ב) קודם שים לב ש $\frac{d\gamma}{dt}\propto\bar a\cdot\bar V$

עכשיו $a\propto\bar V\times\bar B$ לכן $\frac{d\gamma}{dt}=0$

$$\Rightarrow \quad \gamma m_0\dot{\bar V} = \frac{qB}{c}\bar V\times\hat z$$

$$\Rightarrow \quad \dot V_x = \frac{qB}{\gamma c m_0}V_y$$

$$\dot V_y = -\frac{qB}{\gamma c m_0}V_x \qquad \omega_c \equiv \frac{qB}{\gamma c m_0}$$

$$\ddot V_y = -\frac{qB}{\gamma c m_0}\dot V_x$$

$$\ddot V_y = -\left(\frac{qB}{\gamma c m_0}\right)^2 V_y$$

$$\Rightarrow \quad V_y = R\cos(\omega_c t+\varphi) \xrightarrow{t=0} R\cos\varphi = V_{y0}$$

$$\Rightarrow V_x = R\sin(\omega_c t+\varphi) \xrightarrow{t=0} R\sin\varphi = V_{x0}$$

$$tg\,\varphi = \frac{V_{x0}}{V_{y0}}$$

$$\Rightarrow \bar r = \int\bar V dt = \cancel{\bar r_0}^{=0} + R\left[-\cos(\omega_c t+\varphi) + \sin(\omega_c t+\varphi)\right]$$

בגבול הלא יחסותי $\gamma\approx1 \Rightarrow \omega_c = \frac{qB}{mc}$

ומקבלים תנועה את המעגל של ציקלוטרון עם ω_c

שאלה 2 – הטנזור הדואלי

א. הראו שהטנזור הא"מ הדואלי $(F^*)^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ מתקבל מהטנזור הא"מ $F^{\mu\nu}$ ע"י ההחלפה $\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}\to -\boldsymbol{E}$.

ב. הראו ש- $(F^*)^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = -4\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$.

ג. הראו ש-$(F^*)^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ הוא נגזרת שלמה, או במילים אחרות 4-דיברגנס של 4-וקטור, כלומר שקיים f_μ כך ש: $F^{*\mu\nu}F_{\mu\nu} = \partial^\mu f_\mu$.

ד. הוסיפו את $(F^*)^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ לפעולה בכל זאת (עם מקדם כלשהו), ומצאו את משוואות אוילר לגראנז' החדשות. הוכיחו באמצעותן כי $\partial_\mu(F^*)^{\mu\nu} = 0$. מהן המשוואות הפיזיקליות הנובעות מזהות זו?

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$(F^*)^{0i} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{0ijk}F_{jk} + \varepsilon^{0ikj}F_{kj}\right) = \frac{1}{2}\left(-B_i - B_i\right) = -B_i$$

$$\Rightarrow \quad E_i \to -B_i$$

$$(F^*)^{12} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{1230}F_{30} + \varepsilon^{1203}F_{03}\right) = \frac{1}{2}\left(-E_z - E_z\right) = -E_z$$

$$(F^*)^{13} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{1302}F_{02} + \varepsilon^{1320}F_{20}\right) = \frac{1}{2}\left(E_y + E_y\right) = E_y$$

$$(F^*)^{23} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^{2310}F_{10} + \varepsilon^{2301}F_{01}\right) = -E_x$$

ג

$$F^{*\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\right)\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\left(\partial_\alpha A_\beta\partial_\mu A_\nu - \overset{1}{\partial_\alpha A_\beta\partial_\nu A_\mu} - \overset{2}{\partial_\beta A_\alpha\partial_\mu A_\nu} + \overset{3}{\partial_\beta A_\alpha\partial_\nu A_\mu}\right)$$

אך ניתן להחליף את כולם לאותו סדר ושים לב

שכולם יהיו עם + כי 1,2 שמחליפים פעם 1 ו 3 מוחלף פעמיים

$$\Rightarrow 2\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu A_\nu\partial_\alpha A_\beta = 2\partial_\mu\underbrace{\left[\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}A_\nu\partial_\alpha A_\beta\right]}_{f^\mu}$$

ב)

$F^{*\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}$

$\mu\nu\alpha\beta$: 0123 : 0

$\frac{1}{2} F_{23} F_{01} = \frac{1}{2} -B_x E_x$

כלומר כל פרמוטציה זוגית/אי זוגית נותנת $\frac{1}{8} E_i B_i$

$\mu\nu\alpha\beta$
1023

$-\frac{1}{2} -B_x - E_x$

$-\frac{1}{2} E_x B_x$: 0132

$-\frac{1}{2} E_x B_x$: 1032

אחלוף כל הבדיקות אותם איברים עם
3201
3210
2301
2310

כלומר יש 8 אופציות לכל $\mu\nu\alpha\beta$ ולכן

$(F^*)^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{8}{2} E_i B_i = -4 \bar{E}\cdot\bar{B}$ סה"כ

2) $-\frac{1}{c} J^{\mu} = -\frac{1}{4\pi}\partial_\nu F^{\mu\nu} + \partial_\nu \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \underbrace{(F^{*\mu\nu} F_{\mu\nu})}_{}$

$\underbrace{\partial\partial_\mu\left[\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu \partial_\alpha A_\beta\right]}$

$-\frac{1}{c} J^{\mu} = -\frac{1}{4\pi}\partial_\nu F^{\mu\nu} + \partial_\mu\left(2\underbrace{\varepsilon^{\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta}\right)$

$\frac{1}{2}\varepsilon\partial_\alpha A_\beta - \frac{1}{2}\varepsilon\partial_\beta A_\alpha$
$\parallel$
$(F^*)^{\mu\nu}$

$(F^*)^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \partial_\mu (F^*)^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \underline{0i:}\ \partial_0(-B_i) \\ \underline{i0:}\ \partial_i B_i \end{array}\right\} \bar{\nabla}\cdot\bar{B} - \frac{1}{c}\partial_t\bar{B}$

$\underline{12:}\ \partial_x E_z$ $\underline{13:} -\partial_x E_y$ $\underline{21:}\ \partial_y - E_z$ $\underline{23:}\ \partial_y E_x$ $\underline{31:}\ \partial_z E_y$ $\underline{32:} -\partial_z E_x$

$\cancel{\bar{\nabla}\cdot\bar{B}}^{=0} - \frac{1}{c}\partial_t\bar{B} - \bar{\nabla}\times\bar{E} = 0 \Rightarrow$ חוק פרדיי

שאלה 3 – כיול

נתון 4-פוטנציאל A^μ. ברצוננו לבצע טרנספורמציית כיול לפוטנציאל חדש $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu\chi$. מצאו את המשוואה הדיפרנציאלית שעל χ לקיים (כתלות ב-A^μ) כדי שיתקבל:

א. כיול קולון שבו $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0$

ב. כיול לורנץ שבו $\partial_\mu A'^\mu = 0$

א) צ״ל:

מעניין אותנו רק הרכיב המרחבי:

$$\partial_i\left(A^i + \partial^i\chi\right) = 0$$

$$\partial_i A^i + \partial_i\partial^i\chi = 0$$

$$\boxed{\partial_i\partial^i\chi = -\partial_i A^i}$$

ב) $\partial_\mu\left(A^\mu + \partial^\mu\chi\right) = 0 \Rightarrow \partial_\mu A^\mu = -\partial_\mu\partial^\mu\chi$

כלומר בקולון:

$$\nabla^2\chi = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

ובלורנץ:

$$\frac{1}{c}\partial_t A^0 + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2\chi - \nabla^2\chi\right)$$

שאלה 4 – פעולה פחות פשוטה

בעולם דמיוני שבו רק שני ממדים מרחביים, קיים שדה א"מ שמתואר ע"י הפעולה הבאה:

$$S = \int \mathcal{L}\, dV dt$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{c}A_\mu J^\mu - \frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + k\mathcal{E}^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho$$

$$A_\rho \partial_\nu A_\mu$$

כאשר כעת $\mu = 0,1,2$ ו-k מקדם כללי כלשהו.

א. האם הפעולה נשמרת תחת טרנספורמציות כיול?

ב. מהן משוואות אוילר-לגראנג' החדשות במונחי $F^{\mu\nu}$? האם עדיין מתקיים עקרון הסופרפוזיציה?

א)

$$\partial_\nu A'_\rho = \partial_\nu(A_\rho + \partial_\rho \chi) = \partial_\nu A_\rho + \partial_\nu\partial_\rho\chi$$

$$\Rightarrow A'_\mu \partial_\nu A'_\rho = (A_\mu + \partial_\mu\chi)(\partial_\nu A_\rho + \partial_\nu\partial_\rho\chi)$$

$$= A_\mu\partial_\nu A_\rho + A_\mu\partial_\nu\partial_\rho\chi + \partial_\nu A_\rho \partial_\mu\chi + \partial_\mu\partial_\nu\partial_\rho\chi$$

$$\partial_\nu(\partial_\rho\chi A_\mu) + \partial_\nu(\partial_\rho\partial_\mu\chi)$$

$$= \partial_\nu(A_\mu\partial_\rho\chi + \partial_\rho\partial_\mu\chi)$$

כאשר הוכח התוספת הינו נגזרת מלאה של פונק'

לכן הפעולה נשמרת!

ב) מש' E-L:

$$-\frac{1}{c}J^\mu + k\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho = -\frac{1}{4\pi}\partial_\nu F^{\nu\mu} + \partial_\nu k\varepsilon^{\rho\nu\mu}A_\rho$$

$$\frac{1}{c}J^\mu = \frac{1}{4\pi}\partial_\nu F^{\nu\mu} + 2k\varepsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho$$

לא עקרון הסופ' אינו נשמר.