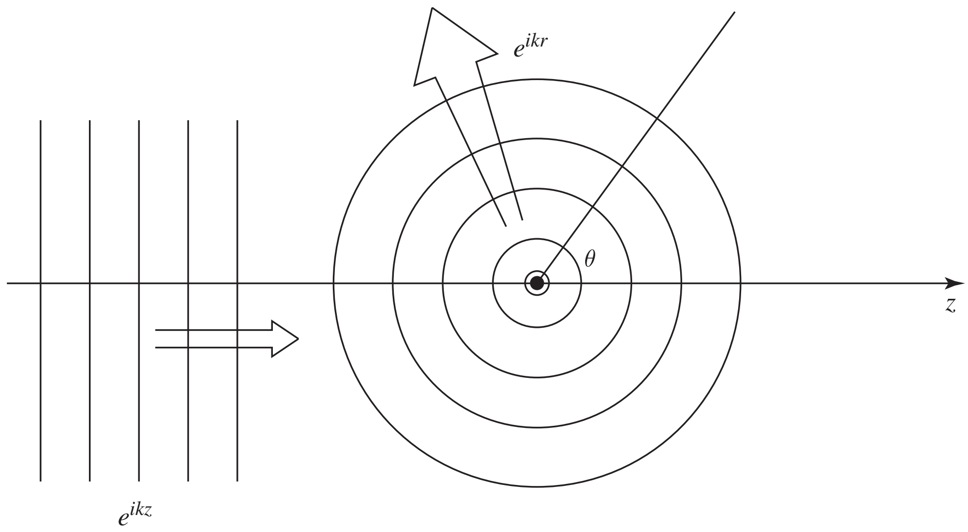
קוונטים 2 – תרגול 11
פיזורים I: קירוב בורן

מתרגל: זמיר הלר-אלגזי

תוכן העניינים

1 פיזורים

בבעיות פיזור גל מישורי (אלומת חלקיקים) בעל תנע מוגדר $\mathbf{k}_i$ מתפזר על-פני פוטנציאל V כלשהו בזווית θ.



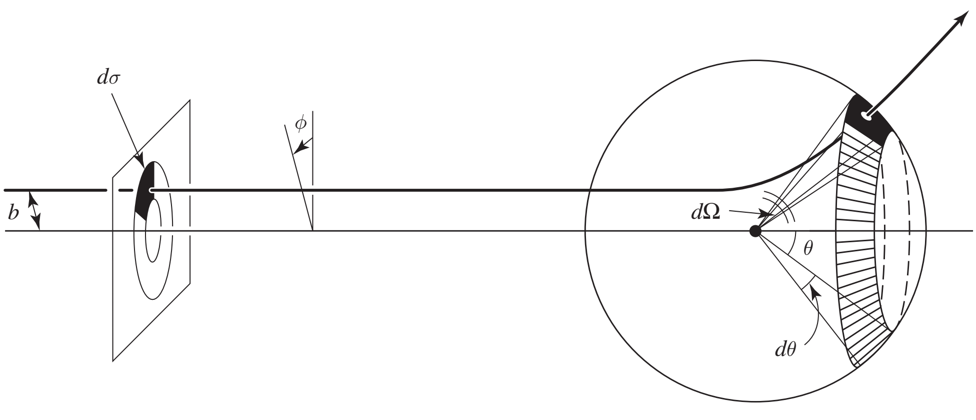
איור 1: פיזור של גל מישורי. לרוב נקבע $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{z}}$.

רחוק מאוד מהמפזר, נכתוב את פונקציית הגל כסופרפוזיציה של גל מישורי נכנס ϕ_0 וגל כדורי מתפזר ψ_s,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\approx |\phi_0\rangle + |\psi_s\rangle \\ \psi(\mathbf{r}) &\approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left\{ e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \right\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

כאשר $f(\theta, \phi)$ היא **אמפליטודת הפיזור**. $|\phi_0\rangle$ הוא הפתרון המתאים ל-H_0 של חלקיק חופשי.
חתך הפעולה הדיפרנציאלי (רחוק מהמפזר) הוא ריבוע האמפליטודה,

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2 \tag{1.2}$$



איור 2: המחשה של חתך פעולה דיפרנציאלי בפיזור קלאסי.

1.1 קירוב בורן

נסתכל על פיזורים אלסטיים (אנרגיה נשמרת) באנרגיות גבוהות. ללא מפזר ($V=0$) זה רק חלקיק חופשי $|\phi_0\rangle$ עם תנע $\mathbf{k}_i$ עם אנרגיה $E=\hbar^2k^2/2m$, כלומר

$$H_0|\phi_0\rangle = E|\phi_0\rangle \implies (E-H_0)|\phi_0\rangle = 0 \tag{1.3}$$

כאשר $H_0=p^2/2m$. נוסיף את הפוטנציאל המפזר V כך ש-$H=H_0+V$, ומכיוון שהפיזור אלסטי,

$$(H_0+V)|\psi\rangle = E|\psi\rangle \implies (E-H_0)|\psi\rangle = V|\psi\rangle \tag{1.4}$$

נחלק את $|\psi\rangle$ לסכום של חלקיק החופשי $|\phi_0\rangle$ וחלק מתפזר $|\psi_s\rangle$,

$$(E-H_0)(|\phi_0\rangle + |\psi_s\rangle) = (E-H_0)|\psi_s\rangle = V|\psi\rangle \tag{1.5}$$

האופרטור $(E-H_0)$ סינגולרי, ולכן נוסיף $+i\epsilon$ במכנה (**מרשם $i\epsilon$ של פיינמן** – Feynman's $i\epsilon$ prescription) ונמצא את $|\psi_s\rangle$:

$$|\psi_s\rangle = \frac{1}{E-H_0+i\epsilon}V|\psi\rangle = \hat{G}_+V|\psi\rangle \tag{1.6}$$

כאשר סימנו את **הפרופגטור** $\hat{G}_\pm \equiv (E-H_0\pm i\epsilon)^{-1}$. הצבה חזרה ב-$|\psi\rangle$ מניבה את **משוואת ליפמן-שווינגר** (Lippmann-Schwinger)

$$\boxed{|\psi\rangle = |\phi_0\rangle + \hat{G}_+V|\psi\rangle} \tag{1.7}$$

קשה לפתור אותה במדויק, אבל אם נפתחים בסדרים אנחנו רואים ש-$\left|\psi^{(N+1)}\right\rangle \sim \hat{G}V\left|\psi^{(N)}\right\rangle$, ולכן אפשר לפתור את המשוואה איטרטיבית בתורת ההפרעות,

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}\left(V^0\right):&\quad |\psi\rangle = |\phi_0\rangle\\
\mathcal{O}\left(V^1\right):&\quad |\psi\rangle = |\phi_0\rangle + \hat{G}V|\phi_0\rangle\\
\mathcal{O}\left(V^2\right):&\quad |\psi\rangle = |\phi_0\rangle + \hat{G}V|\phi_0\rangle + \hat{G}V\hat{G}V|\phi_0\rangle\\
&\vdots\\
\mathcal{O}\left(V^N\right):&\quad |\psi\rangle = \sum_{n=0}^{N}\left(\hat{G}V\right)^n|\phi_0\rangle
\end{aligned} \tag{1.8}$$

יש לאיטרטיביות הזו אינטרפרטציה דיאגרמטית יפה שהעניקה השראה לדיאגרמות פיינמן.
בקירוב מסדר 0 אין פיזור כלל, וב**קירוב בורן מסדר ראשון** אנחנו קוטעים את הטור בחזקה הראשונה,

$$\boxed{|\psi\rangle = |\phi_0\rangle + \hat{G}_+V|\phi_0\rangle} \tag{1.9}$$

כך גם קירוב בורן מסדר N קוטע את הטור בחזקה ה-N.

1.2 פונקצית גרין

נטיל את משוואת ליפמן-שווינגר בבסיס המקום $|\mathbf{r}\rangle$ ונתרכז בפרופגטור השמאלי ביותר,

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{r}|\psi\rangle &= \langle\mathbf{r}|\phi_0\rangle + \langle\mathbf{r}|\hat{G}\left(V + V\hat{G}V + V\hat{G}V\hat{G}V + \ldots\right)|\phi_0\rangle \\ \psi\left(\mathbf{r}\right) &= \phi_0\left(\mathbf{r}\right) + \int \mathrm{d}^3r' \ \langle\mathbf{r}|\hat{G}|\mathbf{r}'\rangle \ \langle\mathbf{r}'|\left(V + V\hat{G}V + V\hat{G}V\hat{G}V + \ldots\right)|\phi_0\rangle\end{aligned} \tag{1.10}$$

הפרופגטור $\hat{G}_\pm$ הוא למעשה **פונקצית גרין** $G_\pm \equiv \frac{\hbar^2}{2m}\hat{G}_\pm$ של משוואת הלמהולץ, היא התרומה של "מקור" נקודתי (פונקצית דלתא) לפונקצית הגל. ואכן, בחישוב מפורש אנחנו רואים שאלמנטי המטריצה של $G_\pm$ בבסיס המקום הם גלים כדוריים,

$$G_\pm\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) = \frac{\hbar^2}{2m}\langle\mathbf{r}|\hat{G}_\pm|\mathbf{r}'\rangle = \frac{\hbar^2}{2m}\left\langle\mathbf{r}\middle|\frac{1}{E - H_0 \pm i\epsilon}\middle|\mathbf{r}'\right\rangle = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{\pm ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{1.11}$$

כאשר $k_i = k$ התנע ההתחלתי של החלקיק המפוזר. G_+ (G_-) מתאים לגלים כדוריים יוצאים (נכנסים).
נניח בנוסף שהפוטנציאל תחום באזור קטן[1] ולכן $r \gg r'$. נקרב $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{r}'\cdot\hat{\mathbf{r}}$ ונקבל כי

$$G_+\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) \simeq -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}e^{-ik\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'} = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}e^{-i\mathbf{k}_f\cdot\mathbf{r}'} \tag{1.12}$$

כאשר זיהינו את וקטור מספר הגל המפוזר $\mathbf{k}_f = k\hat{\mathbf{r}}$ (הפיזור אלסטי ולכן $k_f = k_i = k$). נקבל שפונקצית הגל היא

$$\begin{aligned}\psi\left(\mathbf{r}\right) &= \phi_0\left(\mathbf{r}\right) - \frac{2m}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int \mathrm{d}^3r'\, e^{-i\mathbf{k}_f\cdot\mathbf{r}'}\langle\mathbf{r}'|\left(V + V\hat{G}V + V\hat{G}V\hat{G}V + \ldots\right)|\phi_0\rangle \\ &= \frac{1}{\left(2\pi\right)^{3/2}}e^{i\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikr}}{r}\int \mathrm{d}^3r'\left(2\pi\right)^{3/2}\langle\mathbf{k}_f|\mathbf{r}'\rangle \ \langle\mathbf{r}'|\left(V + V\hat{G}V + V\hat{G}V\hat{G}V + \ldots\right)|\mathbf{k}_i\rangle \\ &= \frac{1}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\left\{e^{i\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left(2\pi\right)^3\left\langle\mathbf{k}_f\middle|\left(V + V\hat{G}V + V\hat{G}V\hat{G}V + \ldots\right)\middle|\mathbf{k}_i\right\rangle\frac{e^{ikr}}{r}\right\}\end{aligned} \tag{1.13}$$

אנחנו מזהים את אמפליטודת הפיזור בקירוב בורן מסדר n:

$$\boxed{f^{(n)}_{\mathrm{Born}}\left(\mathbf{k}_f,\mathbf{k}_i\right) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\left(2\pi\right)^3\left\langle\mathbf{k}_f\middle|V\left(\hat{G}_+V\right)^{n-1}\middle|\mathbf{k}_i\right\rangle} \tag{1.14}$$

בקירוב בורן מסדר ראשון אמפליטודת הפיזור היא טרנספורם פורייה של הפוטנציאל (הפוטנציאל לוקאלי),

$$\begin{aligned}\left(2\pi\right)^3\langle\mathbf{k}_f|V|\mathbf{k}_i\rangle &= \left(2\pi\right)^3\int \mathrm{d}^3r'\,\mathrm{d}^3r''\,\langle\mathbf{k}_f|\mathbf{r}'\rangle \ \underbrace{\langle\mathbf{r}'|V|\mathbf{r}''\rangle}_{V(r')\delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r}'')} \ \langle\mathbf{r}''|\mathbf{k}_i\rangle \\ &= \int \mathrm{d}^3r'\,V\left(r'\right)e^{-i\left(\mathbf{k}_f-\mathbf{k}_i\right)\cdot\mathbf{r}'} = \tilde{V}\left(\mathbf{q}\right)\end{aligned} \tag{1.15}$$

כאשר סימנו את **התנע המועבר** $\mathbf{q} \equiv \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i$. אמפליטודת הפיזור בקירוב בורן הראשון היא

$$\boxed{f^{(1)}\left(\theta,\phi\right) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\tilde{V}\left(\mathbf{q}\right)} \tag{1.16}$$

[1] שימו לב שקירוב זה אפשרי רק עבור הפרופגטור האחרון. הפרופגטורים הפנימיים מקשרים בין מיקומים *בתוך* הפוטנציאל.

2 תרגילים

תרגיל 1

מפזרים חלקיק בעל מסה m ותנע $\mathbf{k}$ על פוטנציאל (ספרה "רכה")

$$V(r)=\begin{cases}V_0 & r<r_0\\ 0 & r>r_0\end{cases} \tag{2.1}$$

א. חשבו את חתך הפעולה הדיפרנציאלי בקירוב בורן הראשון.

ב. חשבו את חתך הפעולה הכולל בגבול של אנרגיות נמוכות. בטאו את התשובה במונחי אנרגית החלקיק הנכנס E.

א. בקירוב בורן הראשון חתך הפעולה הדיפרנציאלי נתון ע"י טרנספורם פורייה של הפוטנציאל,

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2\left|\tilde{V}(\mathbf{q})\right|^2 \tag{2.2}$$

נחשב את טרנספורם פורייה של הפוטנציאל (זכרו ש-$\mathbf{r}'$ סוכם על מיקומי ה"מקורות" של V),

$$\begin{aligned}\tilde{V}(\mathbf{q})&=\int V(\mathbf{r}')\,e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'}\,\mathrm{d}^3r'=2\pi\int_0^{r_0}\int_{-1}^{1}V_0e^{-iqr'x}\,\mathrm{d}x\,r'^2\,\mathrm{d}r'\\&=2\pi V_0\int_0^{r_0}\frac{e^{iqr'}-e^{-iqr'}}{iqr}r'^2\,\mathrm{d}r'=\frac{4\pi V_0}{q}\int_0^{r_0}\sin(qr')\,r'\,\mathrm{d}r'\\&=-\frac{4\pi V_0}{q^2}\int_0^{r_0}r'\,\mathrm{d}\left[\cos(qr')\right]=-\frac{4\pi V_0}{q^2}\left[r'\cos(qr')\Big|_0^{r_0}-\int_0^{r_0}\cos(qr')\,\mathrm{d}r'\right]\\&=-\frac{4\pi V_0}{q^2}\left[r_0\cos(qr_0)-\frac{\sin(qr_0)}{q}\right]=\frac{4\pi r_0^3V_0}{qr_0}\left[\frac{\sin(qr_0)}{(qr_0)^2}-\frac{\cos(qr_0)}{qr_0}\right]\\&=4\pi r_0^3V_0\frac{j_1(qr_0)}{qr_0}\end{aligned} \tag{2.3}$$

בשלב האחרון זיהינו את פונקצית בסל הכדורית הראשונה $j_1(x)=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}$. חתך הפעולה הדיפרנציאלי הוא

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(q)=\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2\left|4\pi r_0^3V_0\frac{j_1(qr_0)}{qr_0}\right|^2=\left(\frac{2mV_0r_0^3}{\hbar^2}\right)^2\left[\frac{j_1(qr_0)}{qr_0}\right]^2 \tag{2.4}$$

הביטוי הזה נתון במונחי התנע המועבר $q=|\mathbf{k}_f-\mathbf{k}_i|$, אך בפועל נמדוד בניסוי את זווית הפיזור θ, היא הזווית בין $\mathbf{k}_i$ ל-$\mathbf{k}_f$. לכן

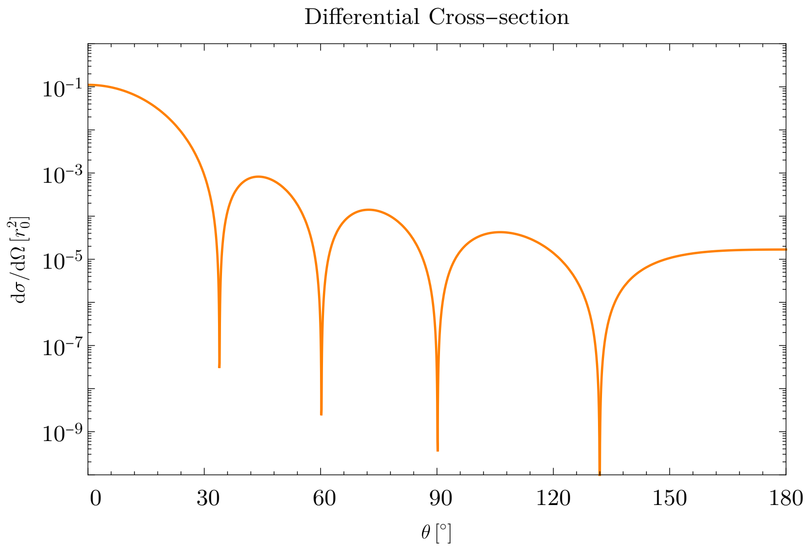
$$q=\sqrt{k_f^2+k_i^2-2k_ik_f\cos\theta} \tag{2.5}$$

ומכיוון שהפיזור אלסטי $k_i=k_f=k$ ולכן

$$q=k\sqrt{2(1-\cos\theta)}=2k\sin\frac{\theta}{2} \tag{2.6}$$

כתלות בזווית הפיזור θ, חתך הפעולה הדיפרנציאלי הוא

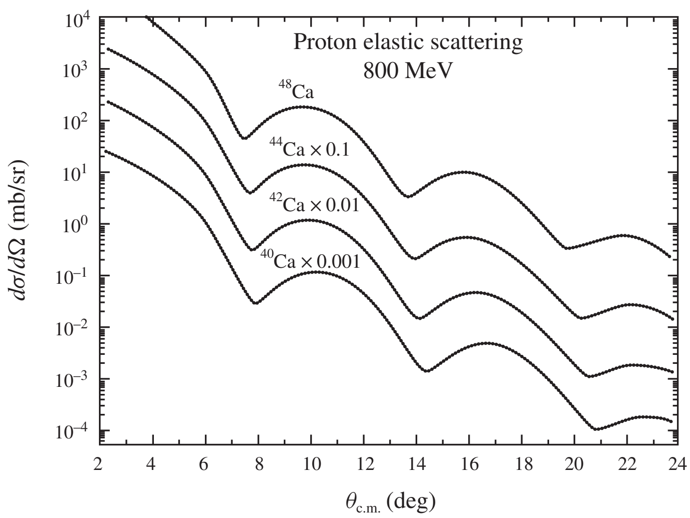
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\theta) = \left(\frac{2mV_0r_0^3}{\hbar^2}\right)^2\left[\frac{j_1\left(2kr_0\sin\frac{\theta}{2}\right)}{2kr_0\sin\frac{\theta}{2}}\right]^2} \tag{2.7}$$



איור 3: חתך הפעולה הדיפרנציאלי כתלות ב-θ ביחידות חסרי-מימדים: האנרגיה נמדדת ביחידות של $\hbar^2/2mr_0^2$, k ביחידות של $1/r_0$ ו-$\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ ביחידות של r_0^2. בגרף זה $k = 7.7/r_0$.

אם נציב את הגלאי בזוויות מסוימות לא נמדוד חלקיקים בכלל. זאת תוצאה של התאבכות הורסת בין חלקים שונים של הגל המתפזר. זה יקרה בערך כש-

$$2kr_0\sin\frac{\theta}{2} \approx n\pi, \qquad n\in\mathbb{N} \tag{2.8}$$



איור 4: חתך הפעולה הדיפרנציאלי בפיזורי פרוטון על גרעינים של איזוטופים של סידן. מיקומי האפסים משתנים בין האיזוטופים כי רדיוסם r_0 משתנה, וגדל ככל שמספר הניוטרונים בגרעין עולה.

ב. חתך הפעולה הכולל מתקבל מאינטגרציה של חתך הפעולה הדיפרנציאלי על פני כל זוויות הפיזור,

$$\sigma_{\text{tot}} = \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\theta)\,\mathrm{d}(\cos\theta) \tag{2.9}$$

כשהפוטנציאל ספרי-סימטרי, אין תלות ב-ϕ. נעבור חזרה מאינטגרציה על θ לאינטגרציה על q, שהיא יותר נוחה,

$$\mathrm{d}(\cos\theta) = \mathrm{d}\left[2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1\right] = 2\,\mathrm{d}\left(\frac{q}{2k}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}(q^2)}{2k^2} = \frac{q\,\mathrm{d}q}{k^2} \tag{2.10}$$

גבולות האינטגרציה הם $q_{\min} = 0$ ו-$q_{\max} = 2k$ וקיבלנו

$$\boxed{\sigma_{\text{tot}} = \frac{2\pi}{k^2} \int_0^{2k} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(q)\,q\,\mathrm{d}q} \tag{2.11}$$

התוצאה הזו נכונה לכל פיזור אלסטי מפוטנציאל ספרי-סימטרי. נותר רק לחשב את האינטגרל,

$$\sigma_{\text{tot}} = \left(\frac{2mV_0r_0^3}{\hbar^2}\right)^2 \underbrace{\frac{2\pi}{k^2}\int_0^{2k}\left[\frac{j_1(qr_0)}{qr_0}\right]^2 q\,\mathrm{d}q}_{I(k)} \equiv \left(\frac{2mV_0r_0^3}{\hbar^2}\right)^2 I(k) \tag{2.12}$$

נגדיר משתנה חסר-יחידות $x \equiv qr_0$,

$$I(k) = \frac{2\pi}{(kr_0)^2}\int_0^{2kr_0}\left[\frac{j_1(x)}{x}\right]^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{(kr_0)^2}\int_0^{2kr_0}\left[\frac{\sin x}{x^3} - \frac{\cos x}{x^2}\right]^2 x\,\mathrm{d}x \tag{2.13}$$

בגבול של אנרגיות נמוכות $kr_0 \ll 1$ (אורכי גל ארוכים) נפתח בטור טיילור את האינטגרד (לחילופין $j_l(x) \approx x^l/(2l+1)!!$)

$$I(k) \approx \frac{2\pi}{(kr_0)^2}\int_0^{2kr_0}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\right)\right]^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{(kr_0)^2}\int_0^{2kr_0}\frac{x}{9}\,\mathrm{d}x = \frac{4\pi}{9} \tag{2.14}$$

קיבלנו שחתך הפעולה הכולל לא תלוי באנרגיה (בגבול של אנרגיות נמוכות),

$$\boxed{\sigma_{\text{tot}}(kr_0 \ll 1) \approx \left(\frac{2mV_0r_0^3}{\hbar^2}\right)^2 \frac{4\pi}{9} = 4\pi\left(\frac{2mV_0r_0^3}{3\hbar^2}\right)^2} \tag{2.15}$$

תרגיל 2

אורך גל דה-ברוי של ניוטרונים n *קרים* הוא בין $1-10\,\text{Å}$. אחד השימושים בניוטרונים אלו הוא חקירת נזקים בחומר. נתעניין בניוטורונים קרים בעלי אורך גל דה-ברוי $\lambda = 1.4\,\text{Å}$.

א. מהי האנרגיה של ניוטרון כזה? מהי האנרגיה של פוטון בעל אותו אורך גל?

מפזרים את קרן הניוטרונים על גביש מחזורי קובי בעל N אטומים. המיקום של האטום ה-n בשריג נתון ע"י

$$\mathbf{r}_n = n_1 a\hat{\mathbf{x}} + n_2 a\hat{\mathbf{y}} + n_3 a\hat{\mathbf{z}} \tag{2.16}$$

הניחו פיזור אלסטי וכי חתך הפעולה הדיפרנציאלי לפיזור מאטום בודד ידוע $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{at}}(\mathbf{q})$ (כאשר $\mathbf{q} = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i$).

ב. מהו חתך הפעולה הדיפרנציאלי לפיזור מהגביש? השתמשו בקירוב בורן הראשון.

ג. הניחו כי החלקיקים פוגעים בגביש עם תנע $\hbar k$ בזווית θ ביחס למישור $z=0$, כך שמישור הפגיעה הוא $z-y$. מהם ערכי k עבורם מתקבל פיזור מקסימלי?

ד. בטמפרטורות גבוהות מאוד, כבר לא ניתן להתייחס אל הגביש כסטטי. דרך אחת לקחת בחשבון את התופעה הזו היא להניח שהמיקומים היחסיים של האטומים $\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m$ מתפלגים בצורה אחידה. תחת הנחה זו, מצאו את חתך הפעולה לפיזור מהגביש.

א. האנרגיה של הניוטרון היא

$$E_{\text{n}}(\lambda) = \frac{p^2}{2m_{\text{n}}} = \frac{(h/\lambda)^2}{2m_{\text{n}}} \simeq 42\,\text{meV} \tag{2.17}$$

לעומת זאת, פוטון באותו אורך גל הוא הרבה יותר אנרגטי

$$E_\gamma(\lambda) = cp = \frac{hc}{\lambda} \simeq 8.9\,\text{keV} \tag{2.18}$$

ב. נסמן את הפוטנציאל של אטום בודד ב-$V_{\text{at}}(\mathbf{r})$. הפוטנציאל הכולל הוא

$$V(\mathbf{r}) = \sum_n V_{\text{at}}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n) = V_{\text{at}}(\mathbf{r}) * \left[\sum_n \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n)\right] \tag{2.19}$$

חתך הפעולה בקירוב בורן נתון ע"י טרנספורם פורייה של הפוטנציאל. האמפליטודה היא

$$\begin{aligned} f(\mathbf{q}) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\tilde{V}(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \sum_n V_{\text{at}}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_n)\, e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'}\, \mathrm{d}r' \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\sum_n e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} \underbrace{\int V_{\text{at}}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_n)\, e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_n)}\,\mathrm{d}r'}_{\tilde{V}_{\text{at}}(\mathbf{q})} = \underbrace{-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\tilde{V}_{\text{at}}(\mathbf{q})}_{f_{\text{at}}(\mathbf{q})} \sum_n e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} \\ &= f_{\text{at}}(\mathbf{q})\sum_n e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n} \end{aligned} \tag{2.20}$$

מתרגל: זמיר הלר-אלגזי

שימו לב שזה פשוט טרנספורם פורייה של קונבולוציה. לכן חתך הפעולה מהגביש המלא הוא

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{crystal}} = |f(\mathbf{q})|^2 = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{at}} (\mathbf{q}) \left|\sum_n e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n}\right|^2 \tag{2.21}$$

עבור כל ציר בנפרד האיבר הריבוע הוא טור הנדסי,

$$\sum_{n_i} e^{-in_i a q_i} = \frac{1-e^{-iq_i a N^{1/3}}}{1-e^{-iq_i a}} = \frac{e^{-iq_i a N^{1/3}/2}}{e^{-iq_i a/2}} \frac{\sin\left(q_i a N^{1/3}/2\right)}{\sin\left(q_i a/2\right)} \tag{2.22}$$

כאשר $i=x,y,z$. בסה"כ קיבלנו

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{crystal}} (\mathbf{q}) = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{at}} (\mathbf{q}) \prod_{i=1}^{3} \frac{\sin^2\left(q_i a N^{1/3}/2\right)}{\sin^2\left(q_i a/2\right)}} \tag{2.23}$$

ג. וקטור הגל יוצא מוחזר מהמישור $z=0$, ולכן וקטורי הגל הפוגעים והיוצאים הם

$$\mathbf{k}_i = (0, k\cos\theta, -k\sin\theta), \qquad \mathbf{k}_f = (0, k\cos\theta, k\sin\theta) \tag{2.24}$$

התנע המועבר הוא

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i = (0,0,2k\sin\theta) \tag{2.25}$$

לכן חתך הפעולה הוא

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{crystal}} (\mathbf{q}) = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{at}} (\mathbf{q}) \frac{\sin^2\left(N^{1/3} k a \sin\theta\right)}{\sin^2\left(k a\sin\theta\right)}} \tag{2.26}$$

הפיזור מקסימלי כאשר

$$\boxed{ka\sin\theta = n\pi \iff 2a\sin\theta = n\lambda} \tag{2.27}$$

זהו **תנאי בראג**.

ד. כאשר $\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m$ מתפלג אקראית, האוסצילציות בסכום הבא יתאפסו

$$\left|\sum_n e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n}\right|^2 = \sum_n \left|e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_n}\right|^2 + \underbrace{\sum_{n\neq m} e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_m)}}_{\to 0} = N \tag{2.28}$$

לכן במקרה הזה חתך הפעולה של הגביש הוא רק סכום ישר,

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{crystal}} (\mathbf{q}) = N \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{at}} (\mathbf{q})} \tag{2.29}$$