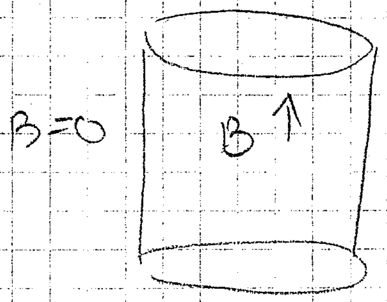
$H = \frac{1}{2m}\left(p - \frac{e}{c} A \right)$ 6.



$$B = \begin{cases} B\hat{z} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \qquad A = \begin{cases} \frac{Br}{2}\hat{\varphi} & r < R \\ \frac{BR^2}{2r} & r > R \end{cases}$$

<u>Inside</u> $A_r = 0 \quad A_z = 0 \quad A_\varphi = \frac{Br}{2}\hat{\varphi}$

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2 \nabla^2 + \frac{e}{c} 2i\hbar\, \bar{A}\cdot\bar{\nabla} + \left(\frac{e}{c}\right)^2 A^2 \right)\psi = E\psi \qquad (\nabla\cdot A = 0)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + i\cancel{2}\frac{e}{c}\frac{\hbar}{\cancel{2}m}\frac{Br}{2r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \left(\frac{e}{c}\right)^2 \frac{B^2 r^2}{2\cdot 4m} \right)\psi = E\psi$$

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + i\hbar\frac{\omega}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{m\omega^2 r^2}{8} \right)\psi = E\psi$$

<u>Outside</u> $A_r = 0 \quad A_z = 0 \quad A_\varphi = \frac{BR^2}{2r}$

$$\frac{1}{2m}\left(-\hbar^2 \nabla^2 + \frac{\cancel{2}ei}{c}\hbar \frac{BR^2}{\cancel{2}r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \left(\frac{e}{c}\right)^2 \left(\frac{BR^2}{2r}\right)^2 \right)\psi = E\psi$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{i\omega\hbar}{2}\frac{R^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{m\omega^2}{8}\frac{R^4}{r^2} \right)\psi = E\psi$$

נחפש פתרון בה הפרדת משתנים :

$$\psi = \rho(r)\cdot e^{i\alpha\varphi}\cdot e^{ikz}$$

$$\bar{\nabla}\cdot = \frac{1}{r}\frac{\partial(r\cdot A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\bar{\nabla}^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

המשוואות הופכות:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\alpha^2}{r^2}\right)+i\hbar\frac{\omega}{2}\,i\alpha+\frac{m\omega^2 r^2}{8}\right)\psi=E'\psi$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\alpha^2}{r^2}\right)+i\omega\hbar\frac{R^2\alpha}{2r^2}+\frac{m\omega^2}{8}\frac{R^4}{r^2}\right)\rho(r)=E'\rho$$

$$\left\{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\right]+\left(\frac{\hbar^2\alpha^2}{2mr^2}-\frac{\hbar\alpha\omega}{2}+\frac{m\omega^2 r^2}{8}\right)\right)\rho=E'\rho\right.$$

$$\left\{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\right]+\left(\frac{\hbar^2\alpha^2}{2mr^2}-\frac{\hbar\omega\alpha}{2}\frac{R^2}{r^2}+\frac{m\omega^2}{8}\frac{R^4}{r^2}\right)\right)\rho=E'\rho\right.$$

$$u(r)=\sqrt{r}\,\rho(r)$$

$$\frac{u(r)}{\sqrt{r}}=\rho(r)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\frac{u(r)}{\sqrt{r}}\right]=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{u'(r)}{\sqrt{r}}-\frac{u(r)}{2r^{3/2}}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\sqrt{r}\,u'(r)-\frac{u(r)}{2\sqrt{r}}\right]=\frac{1}{r}\left[\cancel{\frac{1}{2\sqrt{r}}u'(r)}+\sqrt{r}\,u''(r)\right.$$

$$\left.-\cancel{\frac{u'(r)}{2\sqrt{r}}}+\frac{u(r)}{2\cdot 2\,r^{3/2}}\right]$$

$$=\frac{u''(r)}{\sqrt{r}}+\frac{u(r)}{4\,r^{5/2}}$$

בחוץ:

<u>outside:</u>

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{u''(r)}{\sqrt{r}}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{u(r)}{4r^{5/2}}+\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\frac{u(r)}{r^{5/2}}-\frac{\hbar\omega_\alpha R^2}{2\,r^{5/2}}+\frac{m\omega^2 R^4}{8\,r^{5/2}}$$

$$=E'\frac{u(r)}{\sqrt{r}}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u''(r)+\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{4r^2}+\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\frac{1}{r^2}-\frac{\hbar\omega\alpha R^2}{2r^2}+\frac{m\omega^2 R^4}{8r^2}\right)u$$

$$=E'u$$

קיבלנו פוטנציאל אפס מחוץ:

$$V_{out}(r) = \left(\frac{\hbar^2}{2m4} + \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} - \frac{\hbar^2\omega\alpha R^2}{2} + \frac{m\omega^2R^4}{8}\right)\frac{1}{r^2}$$

$$\boxed{V_{out} = \left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{4}+\alpha^2\right) + \left(\frac{m\omega^2R^4}{8} - \frac{\hbar^2\omega\alpha R^2}{2}\right)\right]\frac{1}{r^2}}$$

עכשיו נעבור לפוטנציאל הפנים:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{u''(r)}{\cancel{\sqrt{r}}} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{u(r)}{4r^2}\frac{1}{\cancel{\sqrt{r}}} + \left(\frac{\hbar^2\alpha^2}{2mr^2} - \frac{\hbar\alpha\omega}{2} + \frac{m\omega^2r^2}{8}\right)\frac{u(r)}{\cancel{\sqrt{r}}}$$

$$= E'\frac{u(r)}{\cancel{\sqrt{r}}}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}u''(r) + \left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{4r^2} + \frac{\hbar^2\alpha^2}{2mr^2} + \frac{m\omega^2r^2}{8} - \frac{\hbar\alpha\omega}{2}\right)u(r)$$

$$= E'u(r)$$

$$\boxed{V_{in}(r) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{4}+\alpha^2\right)\frac{1}{r^2} + \left(\frac{m\omega^2r^2}{8} - \frac{\alpha\hbar\omega}{2}\right)}$$

$$V = \begin{cases} \frac{a_\alpha}{r^2} + \frac{bR^4}{r^2} - \frac{c_\alpha R^2}{r^2} & r > R \\ \frac{a_\alpha}{r^2} + br^2 - c_\alpha & r < R \end{cases}$$

עכשיו בעצם רוצים להוכיח שב $r<R$ הערך המינימלי הוא חיובי כך שיש לנו בעצם False vacuum

נגזור את הפוטנציאל עבור $r<R$

$$V' = -\frac{2a_\alpha}{r^3} + 2br = 0$$

$$\boxed{r^4 = \frac{a_\alpha}{b}}$$

$$r_{min} = \left(\frac{a_\alpha}{b}\right)^{1/4}$$

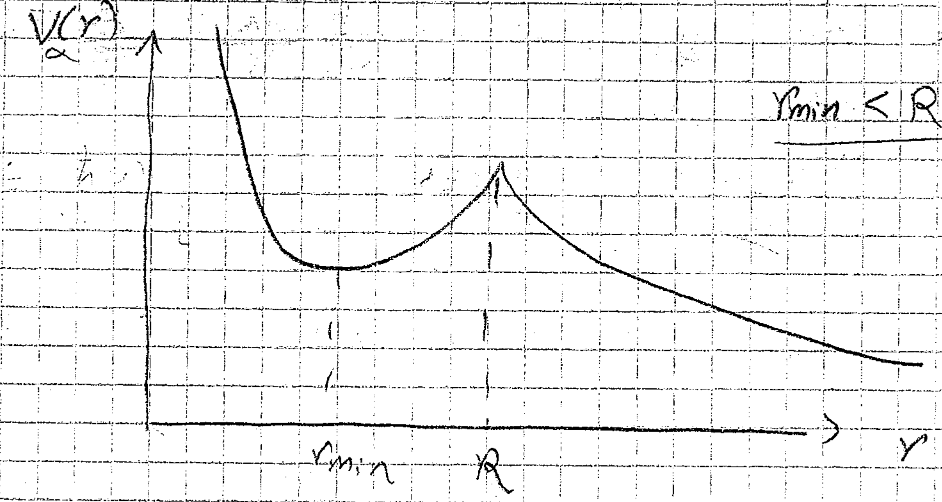
$$V(r_{min}) = \frac{a_\alpha}{\sqrt{\frac{a_\alpha}{b}}} + b\sqrt{\frac{a_\alpha}{b}} - c_\alpha =$$

$$= 2\sqrt{a_\alpha b} - c_\alpha = 2\cdot\sqrt{\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{\cancel{m}\omega^2}{8}\frac{\hbar^2}{2\cancel{m}}} - \frac{\alpha\hbar\omega}{2}$$

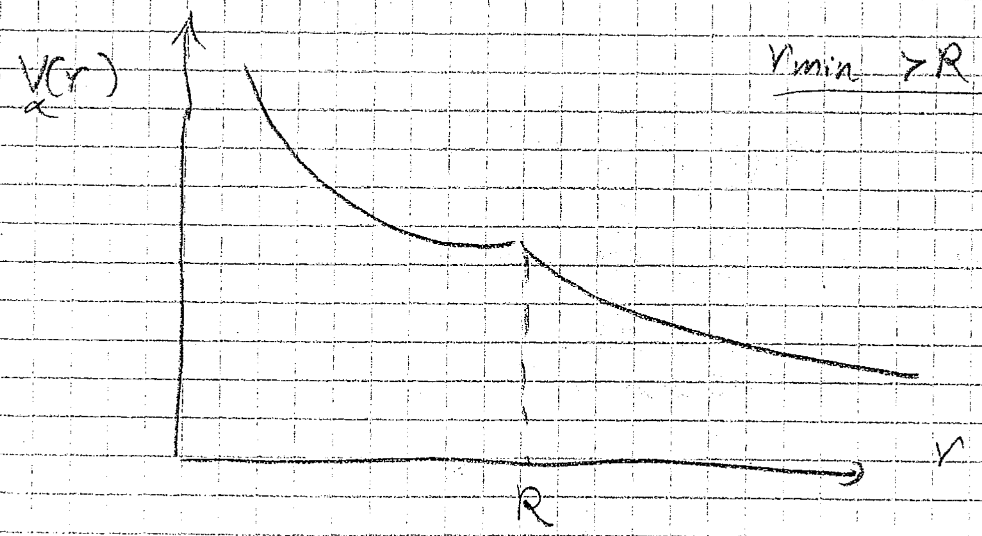
$$= \frac{2}{4}\hbar\omega\sqrt{\left(\alpha^2-\frac{1}{4}\right)} - \frac{\alpha\hbar\omega}{2} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\sqrt{\alpha^2-\frac{1}{4}} - \alpha\right)$$

הערך של הפוטנציאל במינימום יהיה חיובי עבור אלפות שליליות

עבור $r_{min} < R$

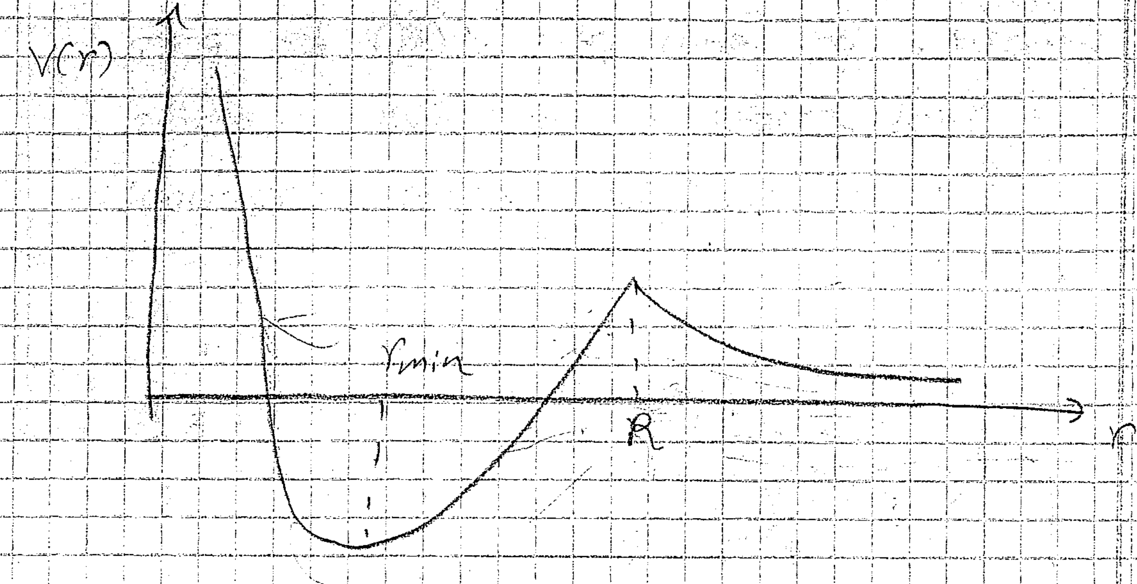


עבור $r_{min} > R$



כך שיש לנו רק false vacuum ולכן עבור α-ות שליליות לא יתקיים מצב קשור שכן הוא ודעך לבסוף.

עבור α-ות טיפוסיות הפוטנציאל נראה כך:



אם עומק הבור איננו עמוק מספיק למצב הראשון
לא נקבל מצבים קשורים.

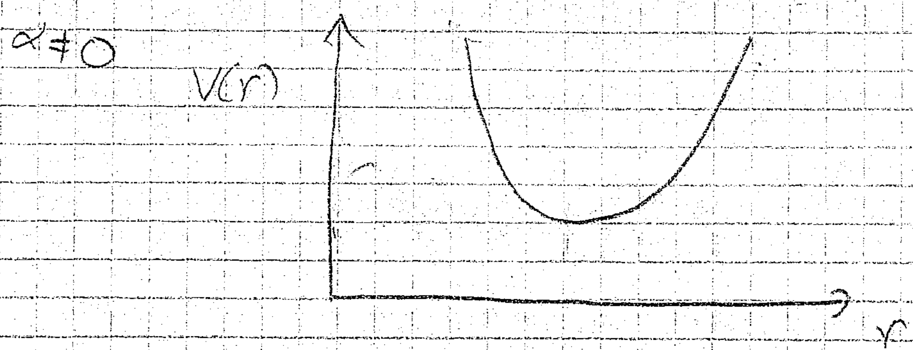
נערוך פיתוח של הפוטנציאל ב-r_{min}

$$m\omega_0^2 = V'' = \left(+\frac{3\cdot 2a_\alpha}{r^4} + 2b\right)\Bigg|_{r=r_{min}} = \frac{6a_\alpha}{r_{min}^4} + 2b$$

$$= \frac{6a_\alpha}{a_\alpha/b} + 2b = 8b = m\omega^2$$

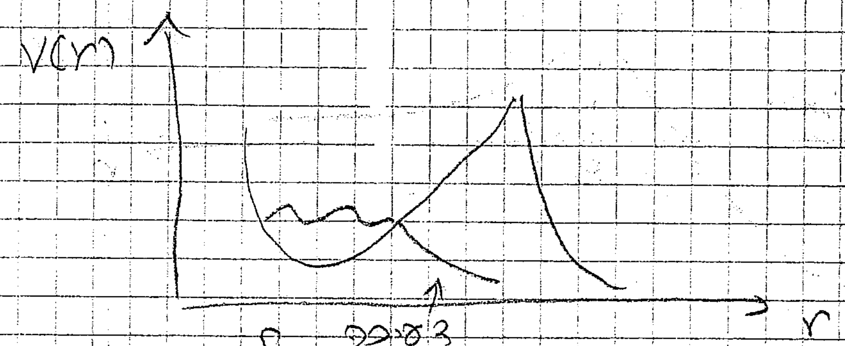
$$\left|\frac{\hbar\omega}{2}\left(\sqrt{\alpha^2-\frac{1}{4}} - \alpha\right)\right| < \frac{\hbar\omega_0}{2}$$

הבור שטוח שכן ולכן רמת היסוד שעל-0. כך שאין
מצבים קשורים גם במקרה זה.
כל שכן הרמות הנוספות נפסלים מאותו שיקול
עבור $R \to \infty$ אנחנו מקבלים פוטנציאל:



מה שנותן לנו ספקטרום בדיד בהכרח.

במעבר מרצף למס' דיסקרטי של רמות אנרגיה
הערך של $V(R)$ ילך ויגדל רק כשהמצבים הבודדים
הולכים ומתרחקים מהאפשרות לרצף
וההסתברות דועכת אקספוננציאלית.



דועכת
ו אקספוננציאלית
כשמצבים מגיעים לרצף

<u>קיוון</u> - נובע מכך שהמעבר ממצבי רצף להיות מצבי
שונים דיסקרטיים ולכן חייב להיות קיוון שיגביל
בערכי האנרגיה. בנוסף יש קיוון בטבע.