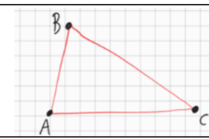
חוק האבל

כל הגלקסיות שאנו רואים (פרט לקרובות ביותר) מתרחקות מאיתנו במהירות שליניארית למרחק:
$$v = H_0 D$$
כאשר $H_0 \simeq 70\left[\frac{km}{s\,Mpc}\right] = 2.2\cdot 10^{-18}\left[\frac{1}{s}\right]$

חוק האבל תקף גם מנקודת המבט של גלקסיות אחרות:

אם אנו בנקודה A וישנן גלקסיות B,C המתרחקות מאיתנו בהתאם לחוק האבל, הן יתרחקו במהירות:
$$\vec v_{AB} = H_0\cdot\overrightarrow{AB},\ \vec v_{AC} = H_0\cdot\overrightarrow{AC}$$
אם נעבור להסתכל מנקודה B יתקיים:
$$\vec v_{BA} = -\vec v_{AB} = H_0\cdot\overrightarrow{BA}$$
$$\vec v_{BC} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}) = \vec v_{AC}-\vec v_{AB} = H_0\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}) = H_0\cdot\overrightarrow{BC}$$
ומכך מתקבל שאם חוק האבל מתקיים מנקודת המבט שלנו, הוא מתקיים מכל נקודה – כלומר אין ליקום מרכז ובפרט אנחנו לא מרכז היקום.



אם כל הגלקסיות מתרחקות, אז אם נלך אחורה בזמן כולן יצאו מאותה נקודה. זה קרה בזמן:
$$t_0 = \frac{|r|}{|v|}\approx\frac{1}{H_0}\simeq 14[Gyr]$$

המודל הקוסמולוגי

אם היקום אחיד אז חייבת להיות לו עקמומיות קבועה. ישנן שלושה מקרים אפשריים:
1. **יקום שטוח** – יכול להיות סופי או אינסופי.
2. **עקמומיות חיובית (יקום סגור)** – חייב להיות סופי, ספירה תלת ממדית.
3. **עקמומיות שלילית (יקום פתוח)** – משטח שבכל נקודה בו הוא בצורת אוכף.

עבור קליפה כדורית תלת מימדית עם רדיוס R ועקמומיות קבועה, כל נקודה על המשטח הדו-מימדי מקיימת:
$$x^2+y^2+z^2=R^2$$
$$xdx+ydy+zdz=0$$
$$\Longrightarrow dz^2 = \frac{(xdx+ydy)^2}{R^2-x^2-y^2}$$
אלמנט האורך שנותן את המרחק בין שתי נקודות סמוכות הוא:
$$dl^2 = dx^2+dy^2+dz^2 = dx^2+dy^2+\frac{(xdx+ydy)^2}{R^2-x^2-y^2} = R^2d\theta^2+R^2\sin^2\theta\,d\phi^2$$

היקום שלנו תלת מימדי -> המשטח תלת מימדי והמרחב ארבע מימדי:
$$x^2+y^2+z^2+w^2=R^2 \Rightarrow dl^2 = dx^2+dy^2+dz^2+\frac{(xdx+ydy+zdz)^2}{R^2-x^2-y^2-z^2}$$
מסמנים $r'=x^2+y^2+z^2$ בתור הקואו' הרדיאלית התלת מימדית ומקבלים:
$$dl^2 = \frac{dr'^2}{1-\frac{r'^2}{R^2}} + r'^2d\theta^2 + r'^2\sin^2\theta\,d\phi^2 = R^2\left(\frac{\frac{dr'^2}{R^2}}{1-k\frac{r'^2}{R^2}}+\frac{r'^2}{R^2}d\theta^2+\frac{r'^2}{R^2}\sin^2\theta\,d\phi^2\right)$$
בקואורדינטות חסרות יחידות $r=\frac{r'}{R}$:
$$dl^2 = R^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\phi^2\right)$$
במרחב מינקובסקי – **מטריקת FLRW** הינה:
$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 = c^2dt^2 - R^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2}+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\phi^2\right)$$
הקואורדינטות r,θ,ϕ אינן תלויות בזמן והיו "נעוצות" בנקודה נתונה במרחב (למשל גלקסיה), לכן הן קואורדינטות *comvoing*.

הסחה לאדום

קרן אור נעה במסלול בו $ds^2 = 0$ ולכן
$dl = cdt = R(t)\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$: $\int_{r_e}^{0}dl = c\int_{t_e}^{t_o}dt$

שני אותות נפלטים מאותו מקור בזמנים t_e ו- $t_e+\Delta t_e$ ומגיעים ב- t_o ו- $t_o+\Delta t_o$. עבור כל אחת:
$$\int_{t_e}^{t_o}\frac{dt}{R(t)} = \frac1c\int_{r_e}^0\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$
$$\int_{t_e+\Delta t_e}^{t_o+\Delta t_o}\frac{dt}{R(t)} = \frac1c\int_{r_e}^0\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}$$
ולכן:
$$\int_{t_e+\Delta t_e}^{t_o+\Delta t_o}\frac{dt}{R(t)} - \int_{t_e}^{t_o}\frac{dt}{R(t)} = 0$$
ניתן לחלק את האינטגרל השמאלי ולקבל:
$$\int_{t_o}^{t_o+\Delta t_o}\frac{dt}{R(t)} = \int_{t_e}^{t_e+\Delta t_e}\frac{dt}{R(t)}$$
בקירוב $R(t)$ קבוע באינטרוולים קצרים ולכן:
$$\frac{\Delta t_e}{R(t_e)} = \frac{\Delta t_o}{R(t_o)}$$
נזכר כי $\Delta t_e = \frac{1}{\nu_e} = \frac{\lambda_e}{c}$ ו- $\Delta t_o = \frac{1}{\nu_o} = \frac{\lambda_o}{c}$ ונקבל:
$$\frac{\Delta t_o}{\Delta t_e} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{R(t_o)}{R(t_e)} \equiv 1+z = 1+\frac{v}{c}$$

היקום שלנו

ניתן לסדר את משי' פרידמן (1) כך שתדגיש את יחס בין האיברים השונים כיום:
$$\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{kc^2}{R^2}+\frac{\Lambda c^2}{3}$$
$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho - \frac{kc^2}{R^2H_0^2}+\frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$$
מגדירים $\boldsymbol{a} = \frac{R}{R_0} = \frac{1}{1+z}$ ומחלקים את הצפיפות לקרינה וחומר $\rho = \rho_r+\rho_m$ כך ש:
$$\rho_r = \rho_{0,r}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-4} = \rho_{0,r}a^{-4}$$
$$\rho_m = \rho_{0,m}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3} = \rho_{0,m}a^{-3}$$
והמשוואה היא:
$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0,r}a^{-4}+\Omega_{0,m}a^{-3}+\Omega_{0,k}a^{-2}+\Omega_{0,\Lambda}$$
$$\Omega_{0,r} = \frac{\rho_{0,r}}{\rho_c},\ \Omega_{0,m} = \frac{\rho_{0,m}}{\rho_c},\ \Omega_{0,k} = \frac{kc^2}{R_0^2H_0^2}$$
$$\Omega_{0,\Lambda} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2},\ \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}\approx 0.9\cdot10^{-29}\left[\frac{g}{cm^3}\right]$$
עפ"י ההגדרה חייב להתקיים:
$$\Omega_{0,r}+\Omega_{0,m}+\Omega_{0,k}+\Omega_{0,\Lambda}=1$$
$$\Omega_{0,\Lambda}\approx0.69,\ \Omega_{0,m}\approx0.31$$
$$\Omega_{0,r}\approx5\cdot10^{-5},\Omega_{0,k}\approx0,\Omega_{0,b}\approx0.05$$

מתי צפיפויות שוות/מחליפות שליטה?
$$\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} = \frac{\Omega_{0,m}*a^{-3}}{\Omega_{0,\Lambda}} = \frac{\Omega_{0,m}}{\Omega_{0,\Lambda}}(1+z)^3\approx 2.22(1+z)^3 \overset{!}{=} 1\Rightarrow z\approx3$$

האנלוגיה הניוטונית של שתי המשוואות הראשונות:

נסתכל על אלמנט מסה m הנמצא במרחק R ממרכז איזור עם מסה M וצפיפות אחידה. משימור אנרגיה:
$$\frac{m\dot R^2}{2} - G\frac{mM}{R} = E$$
$$M = \frac43\pi R^3\rho \Rightarrow \dot R^2 = G\frac{8\pi}{3}\rho R^2+\frac{2E}{m}$$
$$\Rightarrow\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho+\frac{2E}{mR^2}$$
נזהה $\frac{2E}{m} = kc^2$ ומכך נקבל את המשוואה הראשונה שהיא משוואת שימור אנרגיה. משוואת התנועה של אלמנט המסה היא המקבילה למשוואה השנייה:
$$m\ddot R = -G\frac{mM}{R} = -\frac43\pi GR\rho m \Rightarrow \frac{\ddot R}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}$$
האיבר $3P$ חסר כי בפיזיקה ניוטונית לחץ לא משפיע על כבידה. קיום חומר מאט את התפשטות היקום בדיוק כמו שהוא מאט גוף המתרחק ממסה.

משוואות פרידמן

1. $\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{kc^2}{R^2}+\frac{\Lambda c^2}{3}$
2. $\frac{\ddot R}{R} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2+3P)+\frac{\Lambda c^2}{3}$
3. $\dot\rho c^2 = -3\frac{\dot R}{R}(\rho c^2+P)$

יקום נשלט חומר - $k=0,\Lambda=0$

החומר הוא גז **לא יחסותי** - $P\ll\rho c^2$.
משוואה 3 לאחר הצבת $P=0$:
$$-\left(\frac{\dot R}{R}\right) = \frac13\frac{\dot\rho}{\rho}\Longrightarrow\rho\propto R^{-3}$$
זו משוואת שימור מסה של חומר לא יחסותי (מסה=אנרגיה). ממשוואה 1 -
$$\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2\propto R^{-3}\to R^{\frac12}dR\sim dt\to R(t)\propto t^{\frac23}$$

יקום נשלט קרינה - $k=0,\Lambda=0$

החומר **יחסותי** (קרינה) - $u=\rho c^2 = 3P$.
משוואה 3 לאחר הצבת $P=\frac13\rho c^2$:
$$-\left(\frac{\dot R}{R}\right) = \frac14\frac{\dot\rho}{\rho}\Longrightarrow\rho\propto R^{-4}$$
ממשוואה 1 -
$$\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2\propto R^{-4}\to RdR\propto dt\to R(t)\propto t^{\frac12}$$

1. גם כאשר $k\neq0$ ו- $\Lambda\neq0$, בזמן t מספיק קטן האיבר של צפיפות האנרגיה של החומר/קרינה שולט. לכן שני הפתרונות שהוצגו קודם תקפים בהכרח ביקום המוקדם.
2. $R\xrightarrow[t\to0]{}0,\ \rho\xrightarrow[t\to0]{}\infty$: הייתה נקודת זמן בה הצפיפות הייתה אינסופית. נקודה זו נקראת המפץ הגדול וזו הנקודה בה מתחילים למדוד את הזמן ($t=0$). הזמן t מוגדר כזמן שמודד כל צופה שנמצא במנוחה בקואורדינטת co-moving.
3. בזמן מוקדם בהכרח צפיפות האנרגיה נשלטה ע"י קרינה ואח"כ היה מעבר לשליטה ע"י חומר. ההתפשטות ממשיכה עד $t\to\infty$ אך $\dot R\xrightarrow[t\to\infty]{}0$.

יקום נשלט עקמומיות - $k\neq0,\Lambda=0$

$k=1$: יגיע זמן בו יתקיים: $\frac{8\pi}{3}G\rho = \frac{kc^2}{R}$
ואז יתקיים $\frac{\dot R}{R}=0$ ו- $\ddot R<0$ מאחר באותו זמן תחל **התכווצות** שלא תיעצר ("*big crunch*").
מכיוון שיקום קורס כזה הוא בעל עקמומיות חיובית, נפח היקום הוא סופי אך לא חסום – **יקום סגור**.
$k=-1$: לאחר מספיק זמן:
$$\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2 = \frac{c^2}{R^2}\to\dot R = c$$
היקום ימשיך להתפשט לנצח בקצב קבוע, וזהו **יקום פתוח** אינסופי.

יקום נשלט אנרגיה אפלה - $\Lambda\neq0$

בזמן מוקדם הקבוע הקוסמולוגי Λ זניח אבל תמיד בזמן מאוחר הוא נהיה דומיננטי, ואז:
$$\left(\frac{\dot R}{R}\right)^2 = \frac{\Lambda c^2}{3}\to\frac{dR}{R} = \left(\frac{\Lambda c^2}{3}\right)^{\frac12}dt$$
$$R(t)\propto e^{\sqrt{\left(\frac{\Lambda c^2}{3}\right)}t} = e^{Ht}$$
כאשר $H=\frac{\dot R}{R}=const$.
כלומר קבוע קוסמולוגי מאיץ את התפשטות היקום באופן אקספוננציאלי.

חישוב גיל היקום
$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_{0,r}a^{-4}+\Omega_{0,m}a^{-3}+\Omega_{0,k}a^{-2}+\Omega_{0,\Lambda} = (E(a))^2$$
$$H = H_0E(a) = \frac{\dot a}{a} = \frac1a\frac{da}{dt}$$
$$\Rightarrow dt = \frac{1}{H_0}\frac{1}{aE(a)}da$$

גודל היקום הנראה
$$D = R_0\int_0^{r(t_0)}dr$$
כאשר dr זו הדרך בקואו' co-moving שקרן אור מתקדמת ב- dt.
עבור קרן אור - $cdt = dl = Rdr$:
$$D = R_0\int_0^{r(t_0)}dr = cR_0\int_0^{t_0}\frac{dt}{R(t)} = R_0ct_0^{\frac23}\int_0^{t_0}t^{-\frac23}\frac{dt}{R_0} = 3ct_0$$
הנחנו יקום נשלט חומר - $R(t)\simeq R_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac23}$.

מרחקים

$$E(z) = \begin{pmatrix}\Omega_r(1+z)^4+\Omega_m(1+z)^3\\+\Omega_{0,k}(1+z)^2+\Omega_\Lambda\end{pmatrix}^{\frac12}$$
$$\Rightarrow H = H_0E(z)$$

Proper Distance – המרחק בין שתי נקודות במרחק r *co – moving* בזמן נתון:
$$D_p(t) = R(t)\int_0^r\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = \begin{cases}R\sin^{-1}r & k=1\\ Rr & k=0\\ R\sinh^{-1}r & k=-1\end{cases}$$
כתלות בהסחה לאדום המרחק הינו:
$$D_p(z) = R(z)r = \frac{1}{1+z}\cdot\frac{c}{H_0}\int_0^z\frac{dz'}{E(z')}$$

Co-moving Distance – מוגדר כ- *Proper distance* היום:
$$D_c = D_p(z=0) = \frac{c}{H_0}\int_0^z\frac{dz'}{E(z')}$$
$$D_c\propto\begin{cases}z & z\ll1\\ const & z\gg1\end{cases}$$

Luminosity Distance-
$$D_L = D_c\cdot(1+z) = D_p\cdot(1+z)^2 = (1+z)\frac{c}{H_0}\int_0^z\frac{dz'}{E(z')}$$
עבור מקור עם בהירות L ברדשיפט z השטף הינו: $F=\frac{L}{4\pi D_L^2}$. האור שנפלט עובר הסחה לאדום כך שהאנרגיה הנצפית מופחתת בפקטור $\frac{1}{1+z}$. כמו כן הזמן מתארך ב- $(1+z)$ כך שהבהירות הנצפית מופחתת בפקטור דומה. שטח הכדור עליו מתפזר האור הוא $4\pi D_c^2$ ולכן:
$$F = \frac{L}{4\pi D_c^2(1+z)^2} = \frac{L}{4\pi D_L^2}$$

Angular Distance –
$$D_A = \frac{D_c}{1+z} = \frac{c}{(1+z)H_0}\int_0^z\frac{dz'}{E(z')}$$

שיקולים תרמודינמיים למשוואה (3):
$$dU = -PdV,\ U=\rho c^2\cdot V$$
$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho c^2V) = -P\frac{dV}{dt}$$
$$\dot\rho c^2V+\frac{\rho c^2dV}{dt} = -P\frac{dV}{dt}$$
$$\dot\rho c^2 = -\frac{\dot V}{V}(\rho c^2+P)$$
$$V\propto R^3\to\frac{dV}{V} = 3\frac{dR}{R}\to\frac{\dot V}{V} = 3\frac{\dot R}{R}$$
$$\dot\rho c^2 = -3\frac{\dot R}{R}(\rho c^2+P)$$

נגדיר $P=\omega\rho c^2$ כאשר $\omega=0$ לחומר קר, $\omega=1$ לחומר חם (גז אידיאלי), $\omega=-1$ לחומר אפל ו- $\omega=\frac13$ לקרינה.

Freeze Out

כשהיקום צפוף וחם ישנן כל הזמן אינטראקציות בין החלקיקים. כאשר היקום מתפשט, הצפיפות והטמפ׳ יורדות וכך גם הקצב של כל אחת מהאינטראקציות עד שכל אינטראקציה בתורה נפסקת.

קצב האינטראקציה הוא $\boldsymbol{\Gamma}$ ($[\Gamma]=\frac{1}{time}$), אינטראקציות מתקיימות כאשר הזמן האופייני t_{exp} בין האינטראקציות קטן מהזמן בו קבוע הסקלה של היקום מכפיל את עצמו. אם כך, האינטראקציות מפסיקות כאשר: $\Gamma\cdot t_{exp}\sim 1$

ביקום נשלט קרינה וחומר $t_{exp}\sim t\sim\frac{1}{H}$, ולכן:

$\frac{\Gamma}{H}\gg 1$ – כל חלקיק מבצע הרבה אינטר׳.

$\frac{\Gamma}{H}\ll 1$ – חלקיק לא מבצע אף אינטראקציה.

$\frac{\Gamma}{H}\sim 1$ – Freeze-Out.

הקצב של כל אינטראקציה הוא:

$$\boldsymbol{\Gamma=\sigma v n}$$

σ – חתך פעולה (שטח אפקטיבי של החלקיקים המשתתפים באינטראקציה).

v – מהירות יחסית בין החלקיקים.

n – צפיפות החלקיקים.

בתהליכים רבים σ תלוי במהירות ואז אם יש התפלגות מהירויות - $\Gamma=\langle\sigma v\rangle\cdot n$, אך גם בתהליכים רבים הצירוף σv הוא בערך קבוע.

Big Bang Nucleosynthesis

תנאי התחלה – יחס נויטרונים לפרוטונים $\Delta E=(m_n-m_p)c^2=1.29[MeV]$.
התהליכים שמשנים את מספר הפרוטונים והנויטרונים הם: $n\leftrightarrow p+e^-\nu_e$

$$\nu_e+n\leftrightarrow p+e^- \quad ;e^++n\leftrightarrow p+\bar{\nu}_e$$

אלו כולן אינטראקציות של הכוח החלש. כל זמן שיש אינטראקציות נשמר שיווי משקל כך ש:

$$\frac{n_n}{n_p}=\left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{\Delta E}{kT}}\cong e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$$

יחס זה קופא בטמפרטורה $T_{fo}\approx 0.8\,[MeV]$ ובזמן זה היחס הינו:

$$\left(\frac{n_n}{n_p}\right)_{fo}\cong e^{-\frac{1.29}{0.8}}\cong 0.2$$

מרגע זה ועד שנבנים גרעינים, ניוטרונים חופשיים דועכים לפרוטונים ומספר הניוטרונים יקיים:

$$n_n\propto e^{-\frac{t_{nuc}-t_{fo}}{\tau}}$$

כאשר $\tau=887[sec]$.

__היווצרות הליום מניוטרונים חופשיים__

צפיפות ההליום הינה $n_{He}=\frac{n_n}{2}$, כך שהחלק היחסי של ההליום ממסת החומר הינו:

$$Y_{He}=\frac{4n_{He}}{n_p+n_n}=\frac{2n_n}{n_p+n_n}\approx 0.25$$

היחס הנ״ל תלוי ביחס בין בריונים לפוטונים ולכן בכמות הבריונים ביקום, מתקיים:

$$\frac{n_n}{n_p}\approx 0.16\cdot(\Omega_B h^2)^{0.04}$$

כך שמדידה של Y_{He} זו מדידה של Ω_B.

__קרינת הרקע הקוסמית (CMB)__

קרינה שמקורה בשלבים המוקדמים של היקום המקיפה אותנו מכל עבר.

תדירות אופיינית - $170[GHz]$.

טמפרטורה - $\langle T\rangle=2.72548\,[K]$.

__פלקטואציות בקרינה הרקע__

$$\frac{\delta T(\theta,\phi)}{\langle T\rangle}=\frac{T-\langle T\rangle}{\langle T\rangle}$$

מפת הפלקטואציות היא מפה דו-ממדית המוטלת על ספירה, לכן נוח לכתוב אותה כסכום של Y_{lm}:

$$\frac{\delta T(\theta,\phi)}{\langle T\rangle}=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}a_{lm}Y_{lm}(\theta,\phi)$$

עידן פלאנק

__אורך גל קומפטון__ – אורך הגל המינימלי לחלקיק במסה m מתקבל במהירות c:

$$l_c=\frac{h}{mc}$$

__רדיוס שוורצשילד__ – המרחק ממנו אף גוף או קרינה לא יכולים להמלט משדה כבידה של מסה. עבור חלקיק במסה m:

$$l_s=\frac{2Gm}{c^2}$$

כאשר $l_s=l_c$ נדרשת תיאוריית כבידה קוונטית: $l_s=l_c\rightarrow m=\sqrt{\frac{hc}{2G}}$

__מסת פלאנק:__

$$m_p=\sqrt{\frac{\hbar c}{G}}\simeq 2\cdot 10^{-5}[g]=10^{19}[GeV]$$

__אורך פלאנק:__

$$l_p=\frac{\hbar}{m_p c}=\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}\simeq 10^{-33}[cm]$$

__זמן פלאנק:__

$$t_p=\frac{l_p}{c}=5\cdot 10^{-44}\,[sec]$$

יכולים תיאורטית לחשב את התפתחות היקום החל מ- $t=t_p$, אבל מאחר והטמפרטורה בזמן זה היא $T_p=10^{19}[GeV]$ אז זו ספקולציה. אם מניחים שהיקום מתפשט כיקום נשלט קרינה:

$$T=T_p\left(\frac{t}{t_p}\right)^{-\frac{1}{2}}\ ;\ k_BT=1MeV\left(\frac{t}{1s}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow T(10^{-37}[sec])\approx 10^{16}[GeV]$$

וזו האנרגיה בה הכוח החזק והחלש מתאחדים. זמן זה נקרא $GUT\ era$.

CMB Recombination

תהליך היינון שיחבור שמתבצע זמן הריקומבינציה הינו: $p+e\leftrightarrow H+\gamma$

$$\Delta E=(m_p+m_e)c^2-m_Hc^2=13.6\,[eV]$$

הגדלים שיש להציב במשוואת saha הם:

$$x=\frac{1}{2}\quad ,\eta=5\cdot 10^{-10}$$

$$g_p=g_e=2\quad ,g_H=4$$

$x=\frac{1}{2}$ זהו השלב של אמצע תהליך השיחבור (חצי מיוננים וחצי משוחברים), ויתר הערכים הם קבועים. מתקבל $T_{rec}\approx 3700[K]$.
גיל היקום בזמן תהליך זה:

$$1+z_{rec}=\frac{T_{rec}}{T_{CMB}}\Rightarrow z_{rec}\approx 1350$$

$$\Rightarrow t_{rec}\sim 300{,}000[years]$$

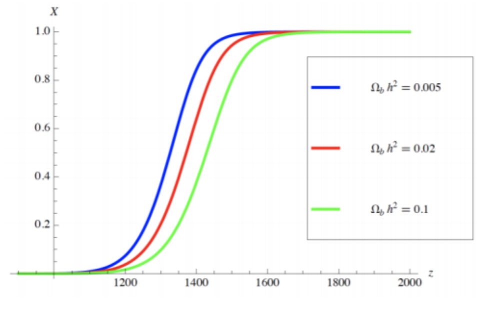
ברדשיפט גבוה היינון הוא יינון מלא וברדשיפט נמוך הוא אפסי. מספר הבריונים ביקום משפיע גם כן ומתבטא בערך של η במשוואת saha.

פחות או יותר במקביל מתרחשים שלושה תהליכים פיזיקליים שונים בעלי חשיבות גדולה להתפתחות היקום:

__ריקומבינציה__ – הפרוטונים והאלקטרונים משתחברים ויוצרים מימן ניטרלי ($z_{rec}\approx 1300$).

__פיזור אחרון__ – מנקודה זו ואילך פוטונים חופשיים לנוע מבלי להתפזר על אלקטרונים חופשיים ($z_{ls}\approx 1100$).

__היפרדות הגז מהקרינה__ – מפסיקים תהליכי יינון, שיחבור ופיזורים. הגז והקרינה מתנהגים כגזים נפרדים עם טמפרטורות שונות, מקדם אדיאבטי שונה והתפלגות צפיפויות שונה ($z_{dec}\approx 1100$).



הריקומבינציה היא לא תהליך מיידי. אם נבחר $x=0.9$ כסופו ונציב במשוואת סהה, כתחילת התהליך ב- $x=0.1$ מתקבל $z_{x=0.9}\approx 1480$ ו- $z_{x=0.1}\approx 1250$. הזמן שעבר הוא בערך $\Delta t_{rec}\approx 70{,}000[years]$. כלומר $\frac{\Delta t_{rec}}{t_{rec}}\approx\frac{1}{4}$, זה לא תהליך מיידי אך הוא קצר למדיי.
המעבר מהתפשטות נשלטת קרינה להתפשטות נשלטת חומר היא ב- $z\approx 3700$, לכן הריקומבינציה מתרחשת כשההתפשטות כבר **נשלטת חומר**.

משוואת המבנה של כוכב

__ש״מ הידרוסטטי__: $\frac{dP}{dr}=-\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$

__שימור מסה__: $\frac{dm}{dr}=4\pi r^2\rho(r)$

__זרימת אנרגיה בקרינה__: $\frac{dT}{dr}=-\frac{3L(r)\kappa(r)\rho(r)}{4\pi r^2 4acT^3(r)}$

__שימור אנרגיה__: $\frac{dL}{dr}=4\pi r^2\mathcal{E}(r)\rho(r)$

__תנאי שפה__: $m(r=0)=0\ \ ;m(r=r_*)=m_*$
$L(r=0)=0\ ;P(r=r_*)=0$

משוואת היינון של saha

עבור תהליך מהצורה $\boldsymbol{A+B\leftrightarrow C+\gamma}$ (למשל יינון ושחבור), נרצה לדעת את יחס הצפיפויות כתלות בטמפרטורה T (למשל אחוז יינון). תחת ההנחה של ש״מ תרמי וכך ש- $m_A,m_B,m_C\gg\frac{kT}{c^2}$, כלומר חלקיקים לא יחסותיים. בש״מ:

$$n_i=g_i\left(\frac{m_ikT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{\mu_i-m_ic^2}{kT}}$$

כך ש g – = מספר דרגות החופש ו- μ = הפוטנציאל הכימי.
ש״מ דורש - $\mu_A+\mu_B=\mu_C+\mu_\gamma=\mu_C$:

$$\frac{n_C}{n_A\cdot n_B}=\frac{g_C}{g_Ag_B}\left(\frac{m_Am_BkT}{2\pi m_C\hbar^2}\right)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{m_Cc^2-(m_A+m_B)c^2}{kT}}$$

נגדיר $\Delta E=(m_A-m_B)c^2-m_Cc^2$ ונקבל:

$$n_C=\frac{g_C}{g_Ag_B}n_An_B\left(\frac{m_Am_BkT}{2\pi m_C\hbar^2}\right)^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{\Delta E}{kT}}$$

אם זה התהליך היחיד שמשתתפים בו A,B ו-C כך ש- $n_A=n_B$ ו-C נוצר רק בתהליך זה, אז $n=n_A+n_C$ הוא גודל שמור, ונניח גם $m_A\approx m_C$.

__יינון מרמת אנרגיה בודדה__ - A -יונים, B – אלקטרונים, C – אטומים ניטרליים. נסמן $x=\frac{n_A}{n}=\frac{n_A}{n_A+n_C}$ ואז נקבל:

$$\frac{1-x}{x^2}=\frac{n_cn}{n_A^2}=\frac{g_C}{g_Ag_B}n\left(\frac{m_Am_BkT}{2\pi m_C\hbar^2}\right)^{-\frac{3}{2}}e^{\frac{\Delta E}{kT}}$$

אפשר לכתוב זאת עם היחס בין חלקיקים לפוטונים – $\eta=\frac{n}{n_\gamma}$:

$$n_\gamma\approx\frac{at^4}{3kT}=\frac{\pi^2}{45}\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3$$

$$\Rightarrow\frac{1-x}{x^2}=\frac{g_C}{g_Ag_B}\frac{\pi^{\frac{7}{2}}2^{\frac{3}{2}}}{45}\eta\left(\frac{kT}{m_Bc^2}\right)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{\Delta E}{kT}}$$

כאשר $\eta\ll 1$ המעבר מ-$x=1$ ל- $x=0$ מתרחש ב- $\Delta E\gg kT$ וזהו מעבר חד מאוד, כמעט כמו מעבר פאזה.

__פיתוח משי׳ ש״מ הידרוסטטי__ - השמש צריכה כוח כלשהו שיתנגד לכבידה. על מנת לראות זאת נחשב את זמן הקריסה של השמש אם ישנה רק כבידה.
אלמנט מסה m במנוחה על שפת השמש נופל כלפי המרכז: $\frac{1}{2}mv^2=G\frac{mM}{r}-G\frac{mM}{r_0}$

$\leftarrow dr=\left[2Gm\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\right]^{\frac{1}{2}}dt$. **זמן הנפילה החופשית** הינו:

$$t_{ff}=\int_0^{t_{ff}}dt=\int_{r_0}^{0}\frac{dr}{\left[2Gm\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{\pi^2r_0^3}{8Gm}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{3\pi}{32G\rho}\right)^{\frac{1}{2}}\Longrightarrow t_{ff}\sim\frac{1}{\sqrt{\rho G}}$$

בשמש $\rho\approx 1[\frac{gr}{cm^3}]$ ולכן $t_{ff}\cong 1[hr]$.מכאן ניתן להסיק כי בשמש יש כוח שמתנגד לכבידה ← גראדינט לחץ, $\frac{dP}{dr}=-\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$.

__המשפט הויראלי__ - נכפיל את משוואת ש״מ ב- $4\pi r^3dr$ ונבצע אינטגרציה מ- 0 ל- r_*:

$$\int_0^{r_*}4\pi r^3\frac{dP}{dr}dr=-\int_0^{r_*}\frac{Gm(r)\rho(r)}{r}4\pi r^2dr$$

אינטגרציה בחלקים על צד שמאל נותנת: $(P(r)4\pi r^3)|_0^{r_*}-3\int_0^{r_*}P(r)4\pi r^2dr$
האיבר הראשון מתאפס מכיוון שעל שפת הכוכב $P(r_*)=0$ ובמרכז $r=0$.
האיבר השני הוא $3\bar{P}V$ כאשר $\bar{P}=\frac{\int PdV}{V}=-\frac{1}{3}\frac{E_{gr}}{V}\Leftrightarrow\langle P\rangle V=-\frac{1}{3}\Omega$. *
תחת הנחת גז אדיאבטי מונואטומי קלאסי: $P=nk_BT\ ;\ PV=Nk_BT$, מקדם אדיאבטי γ: $PV^\gamma=const$. עבור גז מונואטומי קלאסי $\gamma=\frac{5}{3}$.
ולכן האנרגיה התרמית הכוללת של הכוכב מקיימת: $\bar{P}V=\frac{2}{3}E_{th}^{tot}\ \Longrightarrow E_{th}^{tot}=-\frac{E_{gr}}{2}$
והאנרגיה הכללית על הכוכב הינה: $E=E_{th}^{tot}+E_{gr}=-E_{th}^{tot}=\frac{E_{gr}}{2}<0$
המשמעות של כך הינה **שכוכב שמאבד אנרגיה מתחמם** – לכוכב יש קיבול חום שלילי.

ניתן **באמצעות המשפט הויראלי** להעריך **את הטמפ׳ והלחץ בשמש**:

$$E_G\sim -G\frac{m_\odot^2}{R_\odot}\ \rightarrow\bar{P}\sim\frac{\frac{1}{3}E_G}{\frac{4}{3}\pi R_\odot^3}=\frac{G}{4\pi}\frac{m_\odot^2}{R_\odot^4}\cong 10^9[Atm]$$

$$kT\approx m_p\frac{\bar{P}}{\rho}\approx\frac{\bar{P}R_\odot^3\frac{4}{3}\pi}{m_\odot}m_p\approx 9\cdot 10^{-10}[erg]\ \ \Longrightarrow T_\odot\sim 7\cdot 10^6[K]$$

$E_{gr}=\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}$

*בהינתן משי׳ מצב - $(\gamma-1)U=-\frac{1}{3}\Omega$.

$$\Gamma(z)=n_e(z)\sigma_Tc=x(z)(1+z)^3n_{B,0}\sigma_Tc=4\cdot 10^{21}s^{-1}x(z)(1+z)^3$$

$n_{B,0}\approx 2\cdot 10^{-7}\,cm^2$. $H(z)\approx H_0\sqrt{\Omega_{m,0}}(1+z)^{3/2}$. פיזורים מפסיקים כש- $\frac{\Gamma(z)}{H(z)}\approx 1$ - $x(z)(1+z)^{3/2}\approx 300$. $x(z)$ ממשי׳ סאהא ואם משנים את אנרגיית היינון מציבים פשוט ערך עבור ΔE. $T(z)=T_{cmb}(1+z)$ (טמפ׳ דרגת יינון).

$l=\frac{180^\circ}{\theta}$. הזווית המקסי׳ ($l$ המיני׳) בה יופיע שיא ב- c_l - $\theta=\frac{D}{D_A}$
כאשר $D=\frac{c_l}{H}=\frac{c}{\sqrt{3}H}$ ו- D_A מרחק זוויתי. ביקום נשלט חומר $H\propto(1+z)^{3/2}$ ו- $D_A\propto(1+z)^{-1}$ ולכן $\theta\propto(1+z)^{-1/2}$.

מעבר אנרגיה ודיפוזיה

הכוכב מאבד אנרגיה לסביבה כתוצאה מזרימת חום מבפנים החוצה. המשוואה המתארת את זרימת החום הינה **משוואת הדיפוזיה**:
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \vec\nabla\cdot(D\vec\nabla u)$$
שטף – אנרגיה ליח' שטח ליח' זמן: $F = -D\frac{\partial u}{\partial x}$
$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}Adx = \big(F(x)-F(x+dx)\big)A$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$
המשוואה מתקבלת כאשר D לא תלוי ב-x.

במקרה בו D קבוע ובזמן $t=0$ האנרגיה מרוכזת במקום אחד, כלומר $u(t=0) = E_0\delta(x)$, הפתרון הינו גאוסיאן:
$$u(x,t) = \frac{E_0}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$
רוחב הגאוסיאן הוא $(\langle x^2\rangle)^{\frac12} = \sqrt{Dt}$.

משחררים חלקיקים רבים בראשית ב- $t=0$. חלקיק נע במהירות v מרחק $|r|=l$ (מהלך חופשי) ואז משנה א כיוון התנועה באופן רנדומי. לכל חלקיק המיקום לאחר N צעדים יהיה:
$$\vec R_i = \vec r_{i1}+\vec r_{i2}+\vec r_{i3}+\cdots+\vec r_{iN}$$
מתקיים:
$$\langle R^2\rangle = \langle \vec R_i\cdot\vec R_i\rangle = \underbrace{\langle r_{i1}^2\rangle}_{l^2} + \langle r_{i2}^2\rangle+\cdots$$
$$+\langle r_{iN}^2\rangle + \underbrace{\langle \vec r_{i1}\cdot\vec r_{i2}\rangle}_{0} + \langle \vec r_{i1}\cdot\vec r_{i3}\rangle+\cdots = Nl^2$$
ולכן - $(\langle R^2\rangle)^{\frac12} = \sqrt N l$ -> $N = \frac{R^2}{l^2}$.
מספר הצעדים בזמן t הוא $N(t) = \frac{vt}{l}$ ולכן $(\langle R^2\rangle)^{\frac12} = \sqrt{vlt}$. כלומר $D\simeq v\cdot l$ מתאים ל- $(\langle x^2\rangle)^{\frac12}\simeq\sqrt{Dt}$.

עבור פוטונים - $\langle v\rangle = \frac c3$ (המהירות מתחלקת ל-3 ממדים) ו- $\langle l\rangle = \frac{1}{n\sigma}$, כאשר n צפיפות המפזרים ו- σ חתך הפעולה לפיזור. נקבל:
$$D = v\cdot l = \frac{c}{3n\sigma} = \frac{c}{3\kappa\rho}$$
κ חתך פעולה ליחידת מסה ו- ρ צפיפות המסה.
הדרך היא $R = Nl$ והזמן $t = \frac{Nl}{v} = \frac{R^2}{lv}$ כאשר מס' המהלכים הוא $N\sim R^2/l^2$.
שטף האנרגיה ליחידת זמן דרך רדיוס r:
$$L = 4\pi r^2F = -4\pi r^2D\frac{\partial u}{\partial r}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{L}{4\pi r^2D} = -\frac{3\kappa\rho L}{4\pi cr^2}$$
נוסיף מקור אנרגיה $\mathcal E(r)$ (אנרגיה ליח' זמן ליח' מסה):
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 = \vec\nabla\cdot(D\vec\nabla u)+\mathcal E(r)\rho(r)$$
$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\left(-\frac{L}{4\pi r^2}\right)+\mathcal E(r)\rho(r)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial r} = 4\pi r^2\mathcal E(r)\rho(r)$$
נניח כי בכוכבים האנרגיה זורמת בדיפוזיה של קרינה. צפיפות האנרגיה של קרינה: $u = aT^4$
מהירות פוטון ממוצעת בכיוון רדיאלי: $\langle v_r\rangle = \frac c3$, מהלך חופשי: $l = \frac{1}{n\sigma} = \frac{1}{\kappa\rho}$.
$$\frac{du}{dr} = \frac{du}{dT}\frac{dT}{dr} = 4aT^3\frac{dT}{dr}$$
$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{3\kappa\rho L}{4\pi cr^2}$$
$$\Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{3L(r)\kappa(r)\rho(r)}{4\pi r^2 4acT^3(r)}$$

עומק אופטי - $\tau = \frac xl$, הסיכוי שחלק יתקדם מרחק x לפני שהוא יתפזר הוא $e^{-\tau}$. כל אובייקט שמגיעה ממנו קרינה מחולק לשני איזורים: $\tau\gg1$ – עמוק אופטית/אטום. $\tau\ll1$ – דק אופטית/שקוף. בגבול זה מקרבים $e^{-\tau}\cong 1-\tau$. זמן - $t = \tau x/v$.

הרכב כוכבים

X – מסת המימן, Y – מסת ההליום, Z – מסת יתר היסודות.
בשמש $X\approx0.71, Y\approx0.27$ ו- $Z\approx0.02$.

משוואות מצב
הלחץ בשמש מורכב מלחץ של הגז ולחץ של הקרינה. את הגז ניתן לקרב לגז מונואטומי קלאסי מיונן: $P = nk_BT$
כאשר $n = n_e+n_{ion}\equiv\frac{\rho}{\mu m_p}$ (μ משקל מולקולרי ממוצע).
עבור גז מיונן n:
מימן – שני חלקיקים למסת פרוטון.
כל יסוד אחר – מס' פרוטונים 1+, כלומר $\frac A2+1$.
$$n\cong 2n_H+3n_{He}+\sum_{j>2}\frac A2 n_j$$
$$=\frac{\rho}{m_p}\left(2X+\frac34Y+\frac12Z\right)$$
$$=\frac{\rho}{2m_p}\left(3X+\frac12Y+1\right)$$
$$\mu\cong\frac{4}{2+6X+Y}\underset{if\ Z\approx0\to X+Y=1}{\cong}\frac{4}{3+5X}$$
בשמש $\mu\approx0.6$.

לחץ קרינה - $P_r = \frac13aT^4$.
לחץ הגז – $P_g = Nk_BT = \frac{\rho}{\mu m_p}k_BT$
לחץ כולל - $P = P_r+P_g$

אטימות

פיזור תומסון – κ_T: פיזור של אלקטרון חופשי בגבול אנרגי' נמוכות בו $v_e\ll c$ ו- $h\nu\ll m_ec^2$.
$$\kappa_T = \frac{n_e\sigma_T}{\rho} = \frac{\sigma_T}{2m_p}(1+X) = 0.2(1+X)\left[\frac{cm^2}{gr}\right]$$
כאשר: $\sigma_T = \frac{8\pi}{3}r_e^2\cong6.65\cdot10^{-25}[cm^2]$
$$r_e\cong\frac{e^2}{m_ec^2} = 2.8\cdot10^{-13}[cm]$$
מצב היינון של גז תלוי חזק בטמפ' וחלש יותר בצפיפות. עבור $\rho<10^{-5}\left[\frac{gr}{cm^3}\right]$ – מימן מיונן לגמרי ב- $10{,}000\ K$ בערך.
עבור $\rho\approx100\left[\frac{gr}{cm^3}\right]$ וטמפ' $10^7\ K$ (כמו במרכז השמש) – הגז מיונן לגמרי.

בליעה free free - κ_{ff}: אינטראקציה קולומבית בין שני חלקיקים חופשיים.
משוואת מעבר הקרינה:
$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu-\alpha(\nu)I_\nu$$
$I_\nu = \frac{dE}{dtdAd\nu d\Omega}$ - האנרגיה העוברת דרך dA ליחידת זמן dt ליחידת תדר $d\nu$ בכיוון $d\Omega$.
j_ν – פליטה ליחידת נפח ליחידת זמן ליחידת תדר ליחידת זווית מרחבית.
$\alpha(\nu) = n\sigma(\nu) = \rho\kappa(\nu)$ – בליעה ליחידת אורך.
בש"מ תרמי $\frac{dI_\nu}{ds}=0$ ו- $I_\nu = B_\nu$ ← פליטה ובליעה משתווים ולכן מתקבל **חוק קירכהוף**:
$$\alpha_{BB}(\nu) = \frac{j_{\nu,BB}}{B_\nu}$$
אטימות רוסלנד κ_R מקיימת:
$$\frac{1}{\kappa_R} = \frac{\int_0^\infty\frac{1}{\kappa(\nu)}\frac{dB_\nu}{dT}d\nu}{\int_0^\infty\frac{dB_\nu}{dT}d\nu}$$
עבור $\kappa(\nu)\propto\nu^{-n}$ מתקבל $\kappa_R\propto T^{-n}$.
חוק קרמר:
$$\kappa_{R,ff}\propto\rho T^{-\frac12}\nu^{-3}\cong10^{23}\frac{\rho}{T^{3.5}}\left[\frac{cm^2}{gr}\right]$$

בליעה bound free - κ_{bf}: בליעת פוטון בעת יינון: $\kappa_{bf}\propto\frac{\rho}{T^{3.5}}$
בליעה מולקולות H – משמעותי בטמפ' נמוכות ($\sim4000K$) בד"כ בכוכבים עם מסה נמוכה.
הגדלים המוצגים הם עבור גז מיונן, כשהגז לא מיונן (טמפ' נמוכות מ-$8000K$) האטימות נמוכה בהרבה והתהליכים נוספים יכולים להיות דומיננטיים (למשל האופציה הרביעית).
במרכז השמש - $\rho\sim100\left[\frac{gr}{cm^3}\right]$ ו- $T=1.5\cdot10^7[K]$ ולכן $\kappa_{ff}\approx1\left[\frac{cm^2}{gr}\right]$ כך ש- $\kappa_{ff}\approx\kappa_T$.
בכוכבים מסיביים יותר (חמים יותר צפופים פחות) κ_T דומיננטי, במסיבים פחות κ_{ff} ו- κ_{bf}.

ייצור אנרגיה

האנרגיה התרמית של השמש:
$$E_{th} = -\frac12E_g = \frac12\frac{GM_\odot^2}{R_\odot}\approx2\cdot10^{48}[erg]$$
זמן קלווין הלמהולץ – הזמן בו נקרנת רוב האנרגיה התרמית של השמש:
$$\tau_{KH} = \frac{E_{th}}{L_\odot}\cong5\cdot10^{14}[s] = 1.6\cdot10^7[yr]$$
השמש קיימת כבר $4.56[Gyr]$ ולכן דרוש מקור אנרגיה אחר.

p-p chain - מקור האנרגיה העיקרי הוא אנרגיה גרעינית המשתחררת כאשר ארבע אטומי מימן הופכים לאטום הליום. זהו המסלול הדומיננטי בו היתוך כזה יכול להתבצע:
$$p+p\to d+e^++\nu_e\quad\left(\frac{1}{10\ yr}\ per\ particle\right)$$
$$p+d\to{}^3H_e+\gamma\quad\left(\frac{1}{1\ sec}\ per\ particle\right)$$
$${}^3H_e+{}^3H_e\to{}^4H_e+p+p\quad\left(\frac{1}{3\cdot10^5\ yr}\ per\ particle\right)$$
האנרגיה המשתחררת:
$$[m(4p)-m({}^4H_e)]c^2 = 25.7[MeV] = 0.7\%\,m(4p)c^2$$

ריאקציות גרעיניות – מתאפשרות בזכות **מנהור קוונטי**. ההסתברות למנהור היא **פקטור גאמה**:
$$g(E) = e^{-\sqrt{\frac{E}{E_G}}}$$
אנרגיית גאמוב - $E_G = (\pi\alpha Z_AZ_B)^22\mu c^2$
והאנרגיה היא $E = \frac12mv^2$.
$\mu = \frac{m_Am_B}{m_A+m_B}$ – מסה מצומצמת ו- $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ קבוע המבנה הדק. v – מהירות יחסית.
עבור שני פרוטונים (p-p) $Z_A=Z_B=1$ ו- $\mu = \frac{m_p}{2}$. עבור $E = 1[keV]$:
$$E_G = \left(\frac{\pi}{137}\right)^2m_pc^2\approx500[keV]$$
$$\to g(E)\approx e^{-22}\approx10^{-10}$$
קצב ההתנגשויות תלוי **בחתך הפעולה** לאינטר':
$$\sigma_{AB}(E) = \frac{S_0}{E}e^{-\sqrt{\frac{E}{E_G}}}$$
S_0 נמצא מניסויים ובד"כ תלוי חלש ב-E.
התלות הכללית ב- $\frac1E$ נובעת מעקרון אי הוודאות – $\Delta x\propto\frac1p\to\sigma\propto\Delta x^2\propto\frac{1}{\Delta p^2}\propto\frac1E$.
מספר הריאקציות של גרעין A העובר דרך dx בשדה עם צפיפות n_B של גרעינים מסוג B הינו:
$$dN_A = n_B\sigma_{AB}dx\ \Rightarrow\ \frac{dN_A}{dt} = n_B\sigma_{AB}v_{AB}$$
כאשר v_{AB} זו המהירות היחסית בין הגרעינים.
קצב ההתנגשויות ליחידת זמן ליחידת נפח הוא:
$$R_{AB} = n_An_B\sigma_{AB}v_{AB}$$
אם האנרגיה המשתחררת בהתנגשות היא Q אז **האנרגיה ליח' זמן ליח' מסה** היא:
$$\mathcal E = \frac{R_{AB}Q}{\rho} = \frac{n_An_B}{\rho}\sigma_{AB}v_{AB}Q = \frac{\rho X_AX_B}{m_p^2A_AA_B}\sigma_{AB}v_{AB}Q$$
כאשר $n_A = \rho\frac{X_A}{m_pA_A}$ ו- $n_B = \rho\frac{X_B}{m_pA_B}$.

לגרעינים ישנה התפלגות מהירויות ולכן יש למצע על כל המהירויות -
$\mathcal E = \frac{\rho X_AX_B}{m_p^2A_AA_B}\langle\sigma_{AB}v_{AB}\rangle Q$, כאשר:
$$\langle\sigma v\rangle = \int_0^\infty\sigma vf(v)dv$$
$f(v)$ - צפיפות ההסתברות למהירות יחסית v. בכוכב לכל סוג גרעינים ישנה התפלגות מקסוול בולצמן המתאימה למסה שלו. ניתן להראות שהמהירות היחסית של שתי אוכלוסיות בולצמניות גם היא בולצמנית עם מסה מצומצמת $\mu = \frac{m_Am_B}{m_A+m_B}$:
$$f(v)dv = 4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac32}v^2e^{-\frac{\mu v^2}{2kT}}dv$$
נשתמש בקשר $E = \frac12\mu v^2$ ו- $dE = \mu vdv$:
$$\langle\sigma v\rangle = \left(\frac{8}{\pi\mu}\right)^{\frac12}\frac{S_0}{(kT)^{\frac32}}\int_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}}e^{-\sqrt{\frac{E_G}{E}}}dE$$
חישוב יותר מדויק נותן:
$$\mathcal E\approx\frac{\rho X_AX_B}{m_p^2A_AA_B\sqrt\mu}QS_0\frac{E_G^{\frac13}}{(kT)^{\frac23}}e^{-3\left(\frac{E_G}{4kT}\right)^{\frac13}}$$

קצב הריאקציות $p-p$ בשמש:
הקצב נקבע ע"י $p+p\to d+e^++\nu_e$ ולכן:
- $S_0\cong4\cdot10^{-46}[cm^2\cdot keV]$
- $E_G\cong500[keV]$
- $kT\approx1[keV]$
- $e^{-3\left(\frac{E_G}{4kT}\right)^{\frac13}} = 3\cdot10^{-7}$
- $Q\approx26[MeV] = 4\cdot10^{-5}[erg]$
- $\rho\approx100\left[\frac{gr}{cm}\right]$

מהצבה במשוואה - $\mathcal E\approx15\left[\frac{erg}{sec\cdot gr}\right]$.
הבעירה מתבצעת בליבת שמש שמסתה ~ $m_{burn} = 0.2M_\odot$.
קצב ייצור האנרגיה הגרעינית:
$$Q_{tot}\approx\mathcal E\cdot m_{burn}\sim15\cdot\frac{2\cdot10^{33}}{5}\sim6\cdot10^{33}\left[\frac{erg}{s}\right]$$
שטף האנרגיה מהשמש הוא $3.8\cdot10^{33}\left[\frac{erg}{s}\right]$
← תהליך זה מתאים כמקור האנרגיה.
הזמן בין שתי אינטרקציות של פרוטון מסוים:
$$\frac{1}{\tau_{pp}} = \frac{\mathcal E}{Q}\cdot m_p = \frac{15}{26\cdot1.6\cdot10^{-6}}\cdot1.6\cdot10^{-24}\cong5\cdot10^{-19}\left[\frac{1}{sec}\right]$$
$$\to\tau_{pp}\approx10^{18}[sec]\approx3\cdot10^{10}[yr]$$

שטף של ניוטרינו
קצב ייצור הניוטרינו בשמש:
$$R_\nu = \frac{L_\odot}{26MeV}\approx2\cdot10^{38}\left[\frac{1}{sec}\right]$$
השטף על פני כדור הארץ:
$$f_\nu\approx\frac{R_\nu}{4\pi(1AU)^2}\approx7\cdot10^{10}\left[\frac{1}{s\cdot cm^2}\right]$$
חתך פעולה אופייני של ניוטרינו: $\sigma\sim10^{-45}[cm^{-2}]$ באנרגיה של $0.25[MeV]$.
העומק האופטי של בן אדם הוא - $\tau\sim l\cdot n\cdot\sigma = 100\cdot10^{24}\cdot10^{-45} = 10^{-19}$, לכן ניוטרינו "פוגע" בנו כל $\frac{1}{\tau\cdot f_\nu}\approx1.5\cdot10^8[sec]\approx5[yr]$.

CNO Cycle - מעגל תהליכים המייצרים ניוטרינו המגיעים לכדור הארץ:
- $p+{}^{12}C\to{}^{13}N+\gamma$
- ${}^{13}N\to{}^{13}C+e^++\nu_e$
- $p+{}^{13}C\to{}^{14}N+\gamma$
- $p+{}^{14}_{7}N\to{}^{15}_{8}O+\gamma$
- ${}^{15}O\to{}^{15}N+e^++\nu_e$
- $p+{}^{15}N\to{}^{12}C+{}^4He$

עבור $p + {}^{12}C \to {}^{13}N + \gamma$ נקבל:

$$E_G \approx (\pi\alpha Z_A Z_B)^2 2\nu c^2 \underbrace{\approx}_{\substack{\mu=m_p\\ Z_A=6\\ Z_B=1}} 33[MeV]$$

בהשוואה ל-

$E_G = 660[keV]$: $p+p \to d + e^+ + \nu_e$.

היחס בין קצב הריאקציות הוא:

$$\frac{R(p+p)}{R(p+{}^{12}C)} \propto \frac{S_0(p+p)}{S_0(p+{}^{12}C)} e^{-3\cdot\frac{33^{\frac{1}{3}}-0.66^{\frac{1}{3}}}{(4\cdot 0.001)^{\frac{1}{3}}}}$$

$$= \frac{S_0(p+p)}{S_0(p+{}^{12}C)} 10^{19}$$

מאחר והאינטרקציות ב- CNO לא כוללות כוח חלש - $\frac{S_0(p+p)}{S_0(p+{}^{12}C)} \approx 10^{-22}$.

בשמש הריאקציות נשלטות ע"י $p+p$, בכוכבים עם $m > 1.2M_\odot$ הריאקציה השולטת היא CNO.

כוכבים פוליטרופיים

פתרון למשוואות הכוכב עבור $\boldsymbol{P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}}$.

מגדירים משתנים חסרי יחידות:

$$\rho = \rho_c\theta^n \,, P = P_c\theta^{n+1}$$

כאשר $0 \le \theta \le 1$ (0 בחוץ 1 בפנים).

$d\rho = \rho_c n\theta^{n-1}d\theta \,, \rho^{\frac{n-1}{n}} = \rho_c^{\frac{n-1}{n}}\theta^{n-1}$.

$$\frac{K(n+1)}{4\pi G n}\frac{1}{\rho_c^{\frac{n-1}{n}}}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{1}{\theta^{n-1}}\rho_c n\theta^{n-1}\frac{d\theta}{dr}\right) = -\rho_c\theta_n$$

$$\frac{K(n+1)}{4\pi G\rho_c^{\frac{n-1}{n}}}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\theta}{dr}\right) = -\theta^n$$

נגדיר $\alpha^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G\rho_c^{\frac{n-1}{n}}}$ ונחליף משתנים ל- $r = \alpha\xi \,, dr = \alpha d\xi$ ונקבל את **משוואת Lane-Emden**:

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n$$

תנאי שפה: $\theta'(\xi=0)=0$ ו- $\theta(0)=1$ ($\rho(r=0)=\rho_c$). כמו כן, $\theta=0$ עבור ξ סופי.

בהינתן פתרון ניתן למצוא פרמטרים של הכוכב:

$$m_* = \int_0^{R_*} 4\pi r^2\rho dr = 4\pi\alpha^3\rho_c\int_0^{\xi_1}\xi^2\theta^n d\xi$$

$$= -4\pi\alpha^3\rho_c\int_0^{\xi_1}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)d\xi =$$

$$= -4\pi\alpha^3\rho_c\xi_r^2\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi_1} \underbrace{=}_{R_*=\alpha\xi_1}$$

$$-4\pi\frac{R_*^3}{\xi_1}\rho_c\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi_1}$$

$$= -\frac{4}{3}\pi R_*^3 \underbrace{\rho_c\left[\frac{3}{\xi_1}\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi_1}\right]}_{\text{קבועים}}$$

נגדיר קבוע $\delta_n = -\xi_1^2\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi_1}$ ונציב $\rho_c = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G\alpha^2}\right]^{\frac{n}{n-1}}$:

$$\left(\frac{m}{\delta_n}\right)^{n-1} = (-4\pi\alpha^3)^{n-1}\left[\frac{(n+1)K}{4\pi G\alpha^2}\right]^n$$

$$= \alpha^{n-3}\frac{1}{4\pi}\left[\frac{(n+1)K}{G}\right]^n$$

$$\alpha = \frac{R_*}{\xi_1} \to \left(\frac{m_*}{\delta_n}\right)^{n-1}\left(\frac{R_*}{\xi_1}\right)^{3-n}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{(n+1)\kappa}{G}\right]^n$$

$$\Rightarrow m_* \propto R_*^{-\frac{3-n}{n-1}} \,, R_* \propto m^{-\frac{n-1}{3-n}}$$

עבור $1 < n < 3$ כאשר המסה גדלה הרדיוס קטן ובנוסף עבור $n = 3$ המסה לא תלויה ברדיוס ומתקבל - $m = 4\pi\delta_3\left(\frac{\kappa}{\pi G}\right)^{\frac{3}{2}}$.

n	ξ_1	δ_n
1.0	3.14	3.14
1.5	3.65	2.71
2.0	4.35	2.41
2.5	5.36	2.19
3.0	6.90	2.02

$n=0, \quad \theta = 1-\frac{\xi^2}{6}, \qquad \xi_1 = \sqrt{6} \approx 2.45,$

$n=1, \quad \theta = \frac{\sin\xi}{\xi}, \qquad \xi_1 = \pi \approx 3.14,$

$n=5, \quad \theta = \left(1+\frac{\xi^2}{3}\right)^{-1/2}, \qquad \xi_1 = \infty.$

כוכבים הומולוגיים

כוכבים עבורם ניתן להניח שיש פרופילים גלובאליים וחסרי מימדים של טמפרטורה, צפיפות, רדיוס וכו (f_i), כפונקציה של משתנה חסר מימדים ($x = \frac{m}{M}$ אך אפשר גם אופציות אחרות). תחילה צריכים משתנה חסר ממדים שבו יהיו תלויות הפונקציות – נבחר את $x = \frac{m}{m_*}$ ($\underbrace{0}_{\text{מרכז}} \le x \le \underbrace{1}_{\text{קליפה}}$). נכתוב את המשוואת הדיפרנציאליות כתלות ב- dm במקום dr - $dm = 4\pi r^2\rho dr$.

1. $\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$
2. $\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2\rho}$
3. $\frac{dT}{dm} = -\frac{3\kappa L}{4ac(4\pi r^2)^2 T^3}$
4. $\frac{dL}{dm} = \mathcal{E}$

בנוסף נניח כי $\kappa = const$, $\mathcal{E} = q_0\rho T^\alpha$ ($\alpha \cong 4$ עבור p-p chain ו- $\alpha \cong 17$ עבור CNO) ומשוואת מצב $P = \frac{k_B}{\mu m_p}\rho T$ (נשלט לחץ גז) כאשר μ קבוע (הרכב אחיד).

תמיד אפשר לפרק את הפתרון באופן הבא:

$r = f_R(x)\tilde{R} \;;\; P = f_P(x)\tilde{P}$

$\rho = f_\rho(x)\tilde{\rho} \;;\; T = f_T(x)\tilde{T} \;; L = f_L(x)\tilde{L}$

עם תנאי השפה:

$$f_R(0) = f_L(0) = f_P(1) = 0$$

כאשר $\tilde{R}, \tilde{P}, \tilde{T}, \tilde{\rho}, \tilde{L}$ קבועים עם ממדים מתאימים. מכיוון ש- $dm = m_* dx$, **משוואות המבנה** יהפכו להיות:

1. <u>ש"מ הידרוסטטי</u>:

$$\frac{df_P}{dx} = -\frac{x}{4\pi f_r^4} \;;\; \tilde{P} = -\frac{Gm_*^2}{\tilde{R}^4}$$

2. <u>שימור מסה</u>:

$$\frac{df_R}{dx} = \frac{1}{4\pi f_r^2 f_\rho} \;; \tilde{\rho} = \frac{m_*}{\tilde{R}^3}$$

3. <u>זרימת אנרגיה בקרינה</u>:

$$\frac{df_T}{dx} = \frac{-3f_L}{4f_T^3(4\pi f_r^2)^2};\; \tilde{L} = \frac{ac}{\kappa}\frac{\tilde{T}^4\tilde{R}^4}{M_*}$$

4. <u>שימור אנרגיה</u>:

$$\frac{df_L}{dx} = f_p f_T^\alpha \;;\; \tilde{L} = q_0\tilde{\rho}\tilde{T}^\alpha m_*$$

5. <u>משוואת מצב</u>:

$$f_P = f_\rho f_T \;;\; \tilde{T} = \frac{\mu m_p}{k_B}\frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}}$$

קיבלנו חמש משוואות אלגבריות ל- $\tilde{R}, \tilde{P}, \tilde{T}, \tilde{\rho}, \tilde{L}$ שניתן לפתור וארבע משוואות דיפרנציאליות ל- $f_R, f_P, f_T, f_L, f_\rho$ שגם הן פתירות, עם משוואת מצב ותנאי שפה $f_R(0) = f_L(0) = f_P(1) = 0$.

ממשוואת המצב והדרישה $T(R_*) \neq 0$ מתקבל גם $f_\rho(1) = 0$.

$R_* = \tilde{R}f_R(1) \,; L_* = \tilde{L}f_L(1)$

$T_* = \tilde{T}f_T(1) \,;\; \rho_c = \tilde{\rho}f_\rho(0)$

$T_c = \tilde{T}f_R(0) \,; P_c = \tilde{P}f_P(0)$

מפתרון המשוואות האלגבריות מתקבל:

$$\tilde{T} = \frac{\mu m_p G}{k_B}\frac{m_*}{\tilde{R}}$$

$$\tilde{L} = \frac{ac}{\kappa}\left(\frac{\mu m_p G}{k_B}\right)^4 m_*^3$$

$$\to L_* = \tilde{L}f_L(1) \propto m_*^3$$

$$\tilde{R} \propto q_0^{\frac{1}{\alpha+3}} m_*^{\frac{\alpha-1}{\alpha+3}} \propto \begin{cases} m_*^{\frac{3}{7}} & \alpha = 4 \\ m_*^{\frac{4}{5}} & \alpha = 17 \end{cases}$$

$$\tilde{\rho} \propto m_*^{\frac{6-2\alpha}{3+\alpha}}$$

$\alpha > 3$ - ρ_c יותר נמוך בכוכבים עם מסה גדולה יותר.

$$\tilde{P} \propto m_*^{\frac{10-2\alpha}{\alpha+3}} \,, \tilde{T} \propto m_*^{\frac{4}{\alpha+3}}$$

הגדלים שהכי קל לצפות בהם הם L ו- T, מהקשר $L_* = 4\pi\sigma R_*^2 T_*^4$.

$$R_* \propto L_*^{\frac{\alpha-1}{3(\alpha+3)}} \Leftarrow \begin{cases} L \propto m_*^3 \\ R \propto m_*^{\frac{\alpha-1}{\alpha+3}} \end{cases}$$

$$T_*^4 \propto \frac{L_*}{R_*^2} \propto L_*^{1-\frac{2(\alpha-1)}{3(\alpha+3)}} = L_*^{\frac{\alpha+11}{3(\alpha+3)}}$$

$$L_* \propto T^{\frac{12(\alpha+3)}{\alpha+11}} = \begin{cases} T^{5.6} & \alpha = 4 \\ T^{8.6} & \alpha = 17 \end{cases}$$

זמן חיים – $\tau_{ms} \propto \frac{m_*}{L_*} \propto m_*^{-2}$.

כאשר האטימות השולטת היא קרמר, $\kappa \propto \rho T^{-\frac{7}{2}}$, ו- $\alpha = 4$ אז:

$$\tau_{ms} \propto m_*^{-4.5} \,, R_* \propto m_*^{\frac{1}{3}} \,,$$
$$L_* \propto T_*^4 \,, L_* \propto m_*^{5.5}$$

ננסים לבנים

שרידי כוכב סדרה ראשית שמסתו הייתה כ- $8M_\odot$ או פחות. לא מתרחש בהם היתוך גרעיני ומורכבים בעיקר מגז בצפיפות בה הלחץ הוא לחץ ניוון אלקטרונים. המסה שלהם היא מסדר גודל של מסת שמש (מתרחש איבוד מסה בשלבים הקודמים בהתפתחות הכוכב), רדיוס אופייני או רדיוס ארץ ($\sim 7\times 10^8[cm]$), והם חיוורים מאוד. הם קורנים אנרגיה תרמית.

משוואת המצב המתקבלת עבורם בגבול הלא יחסותי הינה:

$$P_e = K\rho^{\frac{5}{3}} \,;\; K = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{h^2}{20m_e m_p^{\frac{5}{3}}}\left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{5}{3}}$$

זוהי משוואה פוליטרופית עם $n = \frac{3}{2}$.

חומר בצפיפות קוונטית:

$$\lambda = \frac{h}{p} \underbrace{=}_{p^2=2mE} \frac{h}{(2mE)^{\frac{1}{2}}} \underbrace{=}_{E=\frac{3}{2}k_BT} \frac{h}{(3mk_BT)^{\frac{1}{2}}}$$

בטמפ' נתונה $\lambda \propto m^{-\frac{1}{2}}$ – אלקטרונים "תופסים נפח" גדול יותר, והאופי הקוונטי של האלקטרונים חשוב כאשר המרחק בין החלקיקים הוא $\frac{\lambda}{2}$, כלומר:

$$n \sim \left(\frac{\lambda_e}{2}\right)^{-3} = \frac{8(3m_ek_BT)^{\frac{3}{2}}}{h^3}$$

או צפיפות מסה: $\rho_q = m_p n =$

$$\frac{8m_p(3m_ek_BT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} = 620\left(\frac{T}{1.5\cdot 10^7 K}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{gr}{cm^3}\right]$$

במרכז השמש - $\rho \approx 150\left[\frac{gr}{cm^3}\right]$.

עבור $\rho \ge \rho_q$ הגז מנוון.

<u>**מסת צ'נדראסקאר**</u> – המסה המקסימלית שבה ננס לבן יכול להיות. מתקבלת עבור $n = 3$ וערכה $M_{ch} \approx 1.44M_\odot$.

$$\rho_B \approx \Omega_B\rho_{0,c} \,; n_B = \frac{\rho_B}{m_pc^2}$$

$$\eta = \frac{n_B}{n_\gamma} \approx 10^{-9} \;;\; n_\gamma = \frac{aT_0^3}{\frac{3}{2}k_B}$$

בריאקציות גרעיניות – זמן צריכת האנרגיה:

$$t = \frac{E}{L} = \frac{\frac{m_i-m_f}{m_i}{}_*Mc^2}{L}$$

$$\rho_{0,r} = aT_0^4c^2 = \rho_{0,c}\Omega_{0,r}$$

		$t = 0\,[sec]$		$t = 1\,[sec]$		
	comoving cor'	Physical cor'	$d[cm]$	Physical cor'	$d[cm]$	$v\,[\frac{cm}{sec}]$
O	(1,3)	(1,3)	0	(2,6)	0	0
A	(0,3)	(0,3)	1	(0,6)	2	1
B	(1,5)	(1,5)	2	(2,10)	4	2
C	(1,0)	(1,0)	3	(2,0)	6	3
D	(5,3)	(5,3)	4	(10,6)	8	4

כאשר המרחק d הוא מהראשית (O), ו- $v = \dot{a}\cdot d$.

גוף שחור

אנרגיה ליח' נפח ליח' תדר:

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1}$$

אנרגיה ליח' תדר ליח' שטח:

$$I_\nu = \frac{c}{4\pi}u_\nu = \frac{2\nu^2}{c^2}\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_BT}}-1} \equiv B_\nu$$

קירוב **ריילי ג'ינס** ($h\nu \ll k_BT$):

$$B_\nu \cong \frac{2\nu^2k_BT}{c^2} = 2ck_BT\lambda^{-4}$$

קירוב **Wien tail** ($h\nu \ll k_BT$): $B_\nu \cong e^{-\frac{h\nu}{k_BT}}$.

שטף ליח' תדר (אנרגיה ליח' שטח ליח' תדר) שמגיע לצופה במרחק r: $f_\nu = \pi I_\nu$.

סך שטף האנרגיה ליח' תדר הנפלט מכוכב:

$$L_\nu = f_\nu 4\pi R_*^2$$

חוק סטפן בולצמן: אנרגיה ליחידת נפח של גוף שחור

$$u = aT^4$$

הספק קרינה של גוף שחור:

$$f = \int f_\nu d\nu = \frac{c}{4}aT^4 = \sigma_BT^4$$

כוכבי נויטרונים

כוכב בו ניוון של נויטרונים מתנגד לכח הכבידה. את הרדיוס של כוכב נויטרונים ניתן להעריך ע"י שימוש במשוואת מצב של חומר מנוון לא יחסותי, כמו לננס לבן כאשר מסת האלקטרון מוחלפת במסת הנויטרון והיחס $\frac{Z_{ns}}{A_{NS}} = 1$.

$$R_{NS} = R_{WD}\frac{m_e}{m_n}\left(\frac{\frac{Z_{NS}}{A_{NS}}}{\frac{Z_{WD}}{A_{Wd}}}\right)^{\frac{5}{3}} \approx 12km\left(\frac{M_{NS}}{M_\odot}\right)^{\frac{5}{3}}$$

מסה מקבילה למסת צ'נדרסקר ניתן לקבל ע"י החלפת $\frac{Z}{A}$:

$$M_{ch,NS} = M_{ch,WD}\left(\frac{\frac{Z_{NS}}{A_{NS}}}{\frac{Z_{WD}}{A_{Wd}}}\right)^2 \approx 5M_\odot$$

<u>**אופק עתידי**</u> – המרחק $co\text{-}moving$ המקסימלי r_∞ שאותו יכול לעבור פוטון אם נשלח בזמן t:

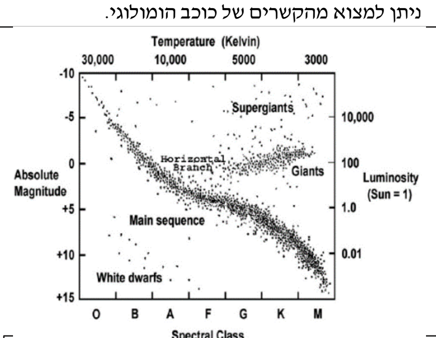
$$\int_0^{r_\infty} dr = \int_t^\infty \frac{cdt'}{R(t')}$$

אם $R(t)$ גדל לאט יותר מ- t האינטגרל מתבדר, אם $R(t)$ גדל מהר יותר מ- t. אם עד עכשיו היקום היה נשלט חומר $R \propto t^{2/3}$ אז היקום הנראה גדל, בעתיד ישלט אנרגיה אפלה, $R \propto e^{Ht}$, היקום הנראה יקטן.

דיאגרמת HR

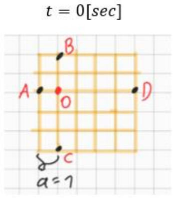
גרף לוגריתמי של בהיכרות כפונקציה של טמפרטורה של כוכבים המחלקת את הכוכבים לסוגים שונים.

<u>**חישוב זמן חיים של צביר**</u> – מניחים שכל הצביר נוצר באותו זמן. אם נתבונן בכוכב בדיוק בנקודת הפיתול (בה הכוכבים מפסיסים להיות על הסדרה הראשית) נדע בהירות של כוכב שזמן החיים שלו על הסדרה הראשית בדיוק נגמר. לכן: $T = \frac{\epsilon M}{L}$, כאשר ϵ הוא יעילות המרת המסה לארגיה ואת הקשר בין M ל- L ניתן למצוא מהקשרים של כוכב הומולוגי.



קואורדינטת comoving – קבועה במרחב.
קואורדינטת פיזיקלית – מושפעת מהתרחבות היקום (ובכללי מכל שינוי בגודל המרחב).

$t = 0[sec]$



$t = 1[sec]$