מרצה: רון ליפשיץ   מתרגל: נועם רימוק

תרגיל בית 10

שאלה 1 – טנזור התנע־אנרגיה וטנזור התנע הזוויתי של השדה הא״מ

א. בתרגול חישבנו את זרמי נתר הנובעים מסימטריה לטרנספורמציות לורנץ,

$$I^{\mu\nu\rho} = T^{\mu\nu}x^\rho - T^{\mu\rho}x^\nu + \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\rho}A^\nu - F^{\mu\nu}A^\rho\right),$$

והבאנו אותם לצורה הבאה

$$I^{\mu\nu\rho} = M^{\mu\nu\rho} - K^{\mu\nu\rho},$$

כאשר

$$M^{\mu\nu\rho} = \Theta^{\mu\nu}x^\rho - \Theta^{\mu\rho}x^\nu, \quad \text{ו-} \quad K^{\mu\nu\rho} = \tau^{\mu\nu}x^\rho - \tau^{\mu\rho}x^\nu + \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\nu}A^\rho - F^{\mu\rho}A^\nu\right).$$

הראו ש $\partial_\mu K^{\mu\nu\rho} = 0$ והסיקו מכך שגם $M^{\mu\nu\rho}$ מגדיר שישה זרמים שמורים. הראו זאת גם בחישוב מפורש של $\partial_\mu M^{\mu\nu\rho}$.

הנחיה: זכרו שהראנו בכיתה כי $\partial_\mu \tau^{\mu\nu} = 0$, ושאין זרמים בבעיה, ולכן $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$.

ב. חשבו במפורש את הרכיבים של $\Theta_{\mu\nu}$ והראו שהעקבה של $\Theta_{\mu\nu}$ מתאפסת, $\Theta^\mu{}_\mu = 0$. חשבו במפורש גם את הרכיבים של $M^{0\nu\rho}$ (אין צורך לחשב את כל הרכיבים של $M^{\mu\nu\rho}$).

ג. עברו לצפיפות הלגרנג׳יאן הכוללת את האינטראקציה עם ה-4-זרם,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{c}J^\mu A_\mu$$

והניחו שישנה סימטריה המתוארת על ידי פרמטר רציף s, עבורה

$$\left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s}\right|_{s=0} = \partial_\mu \Lambda^\mu.$$

הראו שבמקום משפט נתר מתקבל הביטוי

$$\partial_\mu I^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial J^\mu}\left.\frac{\partial J^\mu}{\partial s}\right|_{s=0} = 0,$$

כאשר I^μ מחושב כמו קודם,

$$I^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu A_\sigma\right)}\left.\frac{\partial A_\sigma}{\partial s}\right|_{s=0} - \Lambda^\mu.$$

ד. השתמשו בסעיף ג׳ עבור טרנספורמציות הזזה ולורנץ, כתבו את המשוואות שמתקבלות, והראו שניתן לעבור מהן למשוואות הבאות שלא תלויות בכיול:

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} + f^\nu = 0,$$
$$\partial_\mu M^{\mu\nu\rho} + x^\nu f^\rho - x^\rho f^\nu = 0$$

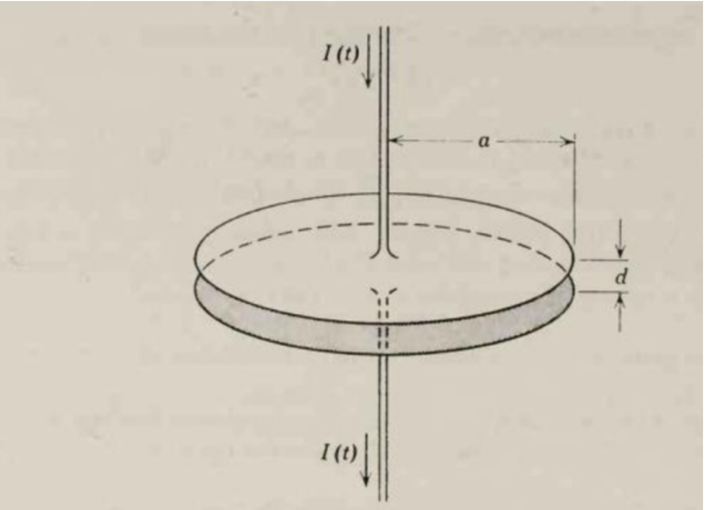
כאשר $f^\mu = \frac{1}{c}F^{\mu\nu}J_\nu$ היא צפיפות ה-4-כוח.

הנחיה: שימו לב שכעת $\partial_\mu \tau^{\mu\nu} \neq 0$ ולעובדה ש- J_ν הוא 4-וקטור ולכן מושפע מהטרנספורמציה.

מרצה: רון ליפשיץ מתרגל: נועם רימוק

שאלה 2 – קבל גלילי עם מטען משתנה

קבל לוחות מעגלי ברדיוס a ורוחב $d \ll a$ מחובר למקור זרם כבאיור. הזרם הוא $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$.
כשהזרם מגיע/יוצא מהלוחות, הוא טוען/מפרק את הלוחות באופן אחיד.



From Jackson, ClassicalElectrodynamics2nd, ch6

א. בהנחה שבזמן $t = 0$ אין מטען על הלוחות, מצאו את צפיפות המטען המשטחית על כל אחד מהלוחות, כתלות בזמן.
ב. הניחו ש-ω קטנה מאוד, כך שמדובר בתהליך קוואזי-סטטי, כלומר ניתן להניח בכל זמן נתון שהצפיפויות המשטחיות קבועות בזמן. מצאו את השדה החשמלי בין הלוחות (שימו לב שהלוחות מאוד גדולים, אז אפשר להתייחס אליהם כאל מישורים אינסופיים).
ג. השתמשו בחוק אמפר האינטגרלי,
$\oint_{\partial S} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{4\pi}{c} \iint_S \left(\mathbf{J} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \cdot d\mathbf{a}$,
כדי למצוא את הרכיב $B_\phi(\mathbf{r}, t)$ בין הלוחות.
ד. מצאו את וקטור פוינטינג בין הלוחות, כתלות בנתוני הבעיה, וב-$B_\rho(\mathbf{r}, t)$ שאותו לא חישבנו.
ה. חשבו את כמות האנרגיה שיוצאת מנפח גלילי ברדיוס $R \ll a$ וגובה d במרכז הקבל, באמצעות שטף וקטור פוינטינג. האם אנרגיה זו חיובית או שלילית?

שאלה 3 – קרינה מחלקיק

השתמשו בנוסחאות שפיתחנו בתרגול ל- $\frac{dP(t')}{d\Omega}$ ו- $P(t')$ כדי להשלים פרטים חסרים מהפיתוחים בהרצאה.

א. חלקיק עם מטען q נע בקו ישר $\boldsymbol{\beta} = \beta\hat{\mathbf{z}}$. הראו שבמערכת החלקיק

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^5},$$

$$P(t') = \frac{2}{3}\frac{q^2 a^2}{c^3}\gamma^6,$$

והראו שהזווית בה יתקבל הספק מקסימלי מקיימת

$$\cos\theta_{max} = \frac{\sqrt{1+15\beta^2}-1}{3\beta}.$$

ב. חלקיק עם מטען e נע במעגל במהירות זוויתית קבועה. נניח שבזמן t' המהירות בכיוון $\hat{\mathbf{z}}$ והתאוצה בכיוון $\hat{\mathbf{x}}$. הראו שבמערכת החלקיק

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2}{4\pi c^3} \frac{1}{(1-\beta\cos\theta)^3}\left(1 - \frac{\sin^2\theta\cos^2\phi}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2}\right),$$

$$P(t') = \frac{2}{3}\frac{e^2 a^2}{c^3}\gamma^4.$$

שרטטו את $\frac{dP}{d\Omega}$ כתלות ב-θ עבור $\phi = 0$ ו- $\phi = \frac{\pi}{2}$, ועבור מבחר ערכי β שונים.