שאלה 4

א. למצוא נוס ועוס של אופרטורים בוזוניים $\psi(r)$
לחשב את ערכי התצפית של האופרטור $\hat{N}$ ו- $\hat{H}$ עם אינטראקציה
דו גופית) עם הנוס שמצאנו.

נרצה למצוא את הנוס של $\hat{\psi}(r)$ ולכן נגדיר CO אורתונורמלי
של פונקציות $\varphi_i(\vec{r})$ ונשתמש באופרטורי יצירה והשמדה

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{\psi}(\vec{r}) &= \sum_i \varphi_i(\vec{r})\hat{a}_i \\ \hat{\psi}^{+}(r) &= \sum_i \varphi_i^{*}(r)a_i^{+}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}a_i &= \int \psi(r)\varphi_i^{*}(r)d^3r \\ \hat{a}_i^{+} &= \int \psi^{+}(r)\varphi_i(r)d^3r\end{aligned}}$$

כאשר יחסי החילוף שמקיימים האופרטורים הבוזוניים
הם:

$$[\psi(\vec{r}),\psi^{+}(r')] = \delta^3(r-r')$$

$$[a_i,a_j^{+}] = \int d^3r\,d^3r'[\psi(r')\varphi_i^{*}(r'),\psi^{+}(r)\varphi_j(r)] =$$

$$= \int d^3r\,d^3r' \underbrace{[\psi(r'),\psi^{+}(r)]}_{\delta(r-r')}\varphi_i^{*}(r')\varphi_j(r)$$

$$= \int \underbrace{\varphi_i^{*}(r)\varphi_j(r)d^3r}_{\text{CO אורתונורמלי}} = \delta_{ij}$$

$$[a_i,a_j] = 0 = [a_i^{+},a_j^{+}]$$

כעת אנחנו רוצים את הנוס של האופרטורים הפרמיוניים
שבהם אלו יהיו מצבים קוהרנטיים.
נגדיר CO מצבים.

נגדיר מצבי מספר

$$|\{n_i\}\rangle = \sum_{n_i}{}' \frac{(a_i^+)^{n_i}}{\sqrt{n_i!}}|0\rangle = |n_1, n_2 \dots\rangle$$

בהמשך נגדיר מצבים קוהרנטיים של האופרטור ψ
תוך שימוש במצבים הקוהרנטיים של $\{a_i\}$

$$a_i|\alpha_i\rangle = \alpha_i|\alpha_i\rangle$$

מצב קוהרנטי שמוגדר ע"י:

$$|\alpha_i\rangle = e^{-\frac{|\alpha_i|^2}{2}+\alpha_i\hat{a}_i^+}|0\rangle$$

$$|\{\alpha_i\}\rangle = \underbrace{\prod_i |\alpha_i\rangle}_{\text{מכפלה טנזורית אינסופית}}$$

$$\psi(r)|\{\alpha_i\}\rangle = \sum_j{}' \varphi_j(r)\, a_j^+ |\{\alpha_i\}\rangle =$$

$$= \sum_j{}' \varphi_j(r)\, \alpha_j\, |\{\alpha_i\}\rangle$$

כך שהמ"ע של האופרטור $\psi(r)$ הם ה- $|\{\alpha_i\}\rangle$
והע"ע המתאימים הם:

$$\psi_r = \sum_j \varphi_j(r)\alpha_j$$

<u>הערה</u>: הראו בתרגול ~~של~~ שמצבים קוהרנטים פורסים את המרחב ולכן כל מצב מספר יכול להיות מורכב מקומבינציה לינארית של מצבים קוהרנטיים. (מצבים קוהרנטיים פורסים את כל מרחב הפוק).

נחשב את ערך התוחלת של אופרטור המס':

$$\hat{N} = \int d^3r\, \psi^+(r)\psi(r)$$

$$\langle N\rangle = \int \langle\{\alpha_i\}|\, \psi^+(r)\psi(r)\, |\{\alpha_i\}\rangle dr =$$

$$= \int \langle\{\alpha_i\}| \sum_j \varphi_j^*(r) a_j^+ \sum_k \varphi_k(r) a_k^+ |\{\alpha_i\}\rangle$$

$$= \sum_{j,k}{}' \int \langle\{\alpha_i\}|\ \varphi_j^*(r)\varphi_k(r)\, a_j^+ a_k\, |\{\alpha_i\}\rangle\, dr$$

רק אם j=k תורם

$$= \sum_j{}' \int \varphi_j^*(r)\varphi_j(r)\ \alpha_j^*\alpha_j = \sum_j{}' |\alpha_j|^2$$

$$\boxed{\langle N\rangle = \sum_j{}' |\alpha_j|}$$

$$H = H_0 + V_{int}$$

ניקח המילטוניאן כללי:

$$H = \sum_i{}' \epsilon_i a_i^+ a_i + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{ijkl}{}' V_{ijkl}\, a_i^+ a_j^+ a_k a_l}_{\text{2-body interaction}} \qquad \boxed{\langle i j|V_{ijkl}|kl\rangle}$$

הערה: נניח שבחרתי את הפונקציות $\varphi_i(r)$ כך שהן מלכסנות את H_0 (לא חייבים לעשות את זה אבל נוח לעשות בחירה זו)

$$\langle H_0\rangle = \sum_j \langle\{\alpha_i\}|\ \varepsilon_j a_j^+ a_j\ |\{\alpha_j\}\rangle =$$

$$= \sum_j \varepsilon_j |\alpha_j|^2$$

$$\langle V_{int}\rangle = \langle\{\alpha_n\}| \sum_{ijkl} V_{ijkl}\, a_i^+ a_j^+ a_k a_l |\{\alpha_n\}\rangle$$

$$= \sum_{ijkl}{}' V_{ijkl}\, \alpha_i^* \alpha_j^* \alpha_k \alpha_l$$

$$\rightarrow \boxed{\langle H\rangle = \sum_j{}' \varepsilon_j |\alpha_j|^2 + \sum_{ijkl} V_{ijkl}\, \alpha_i^*\alpha_j^*\alpha_k\alpha_l}$$

ט. לתאר דברים דומים ושונים בין קוונטיזציה שניה ושל אוסילטור הרמוני ותאורו במונחים של a, a^+

	ראשונה	שנייה
ההמילטוניאן	$H=\sum_{a=1}^{N}\left(\frac{p_a^2}{2m}+\frac{1}{2}m_a\omega_a^2x^2\right)$ $=\sum_{a=1}^{N}\hbar\omega_a(a_a^+a+1/2)$	$\mathcal{H}=\int\psi^+(x)\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}\omega^2 m x^2\right)\psi(x)\,dx$ המילטוניאן חד-חלקיקי. $=\sum \epsilon_n a_n^+a_n$
האנסמבל	שתאור מספר קבוע של חלקיקים - אנסמבל הרמוני שתאור חלקיקים זהים מהמכול של אינסוף אותו אנסמבל.	מתאר מספר כלשהו שנאור של חלקיקים ברמה מסוימת חלקיקים שמתארים את
ש"ע	$a_a\|0\rangle=0$ $\|n_a\rangle=\frac{(a_a^+)^{n_a}}{\sqrt{n_a!}}\|0\rangle$	$a_n\|0_n\rangle=0$ $\|n_n\rangle=\frac{(a_n^+)^{n_n}}{\sqrt{n_n!}}\|0\rangle$
מי מבטא:	החלקיק ה a נמצא $\|n_a\rangle$ ברמת אנרגיה n_a אפס החלפתי $\|\{n_n\}\rangle=\|n_1\rangle\otimes\|n_2\rangle\ldots\|n_\infty\rangle$ מתאר אוסף של מצבים בכל שבו n קוונטים של אנרגיה / n חלקיקים	$\|n_n\rangle$ - מתאר n קוונטים במצב $\|\{n_a\}\rangle=\|n_1\ldots n_N\rangle$ מתאר אוסף של N חלקיקים כל אחד נמצא ברמת אנרגיה n_a.
האנרגיה:	$E=\sum_{a=1}^{N}\hbar\omega_a(n_a+1/2)$	$H\|\{n_k\}\rangle=E\|\{n_k\}\rangle$ $E=\sum_{n=0}^{\infty}\hbar\omega(n+1/2)n_k$

מצבי
מספר
ה ה ϕ
שלכולם
את h
ו d ה ה
ה מקדמים
בהתאם
לכן היה
[illegible]

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\, p_x$$

$$\hat{a}^{2nd} = \int \psi^{+} \left(\sqrt{}\, x + \cancel{x} + \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x)\, dx$$

$$= \int \sum_l{}' b_l^{+} \phi_l^{*}(x) \left(\sqrt{}\, x + \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \sum_k{}' b_k\, \phi_k(x)\, dx$$

$$= \sum_{lk}{}' b_l^{+} b_k \int \phi_l^{*}(x) \left(\sqrt{}\, x + \hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_k(x)\, dx$$

$$\langle \phi_l \,|\, a^{1st} \,|\, \phi_k \rangle = \sqrt{k}\, \delta_{l,k-1}$$

$$= \sum_{l,k}{}' b_l^{+} b_k \sqrt{k}\, \delta_{l,k-1} = \sum_k{}' \sqrt{k}\, b_{k-1}^{+} b_k$$

אם נשווה באמת בין האופרטור בקוונטיזציה
שניה לקוונטיזציה ראשונה נראה שלהרים ~~שוב~~
~~את~~ מרמת אנרגיה (חשיבה של קוונטיזציה ראשונה)
זה כמו להרים חלקיק במצב ה-א ולפזר אותו
במקומו במצב שבו האנרגיה מתחתיו

$\boxed{4}$ (a) choose a discrete set of functions $\{\phi_i\}$ Such as that:

$$\hat{\psi}(r) = \sum_i \phi_i(r)\hat{a}_i$$

$$\int \phi_i^*(r)\phi_j(r)\,dr = \cancel{\delta(r-r')}\ \delta_{ij}$$

~~From~~

$$\delta(r-r') = [\psi(r), \psi^\dagger(r')] = \sum_{i,j} \phi_i(r)\phi_j(r')[a_i, a_j^\dagger]$$

Multiply by $\phi_k(r')$ and $\int ... dr'$

$$\phi_k(r) = \sum_i \phi_i(r)[a_i, a_k^\dagger]$$

Multiply by $\phi_\ell^*(r)$ and integrate:

$$\delta_{\ell k} = [a_\ell, a_k^\dagger]$$

~~Find~~ ~~Let us find coherent states in each a_i~~

~~A~~ coherent state of a_i is:

$$|\alpha_i\rangle = e^{-\frac{|\alpha_i|^2}{2} + \alpha_i\hat{a}_i^\dagger}|0\rangle$$

Maybe should show how to find it, but we saw it in class

$$|\{\alpha_i\}\rangle = \bigotimes_i |\alpha_i\rangle.$$

$$\psi(r)|\{\alpha_i\}\rangle = \sum_j \phi_j(r)a_j|\{\alpha_i\}\rangle = \sum_i \phi_j(r)\alpha_j|\{\alpha_i\}\rangle$$

So the ~~eigenfun~~ eigenstates of $\psi(r)$ are $|\{\alpha_i\}\rangle$ and the ~~eigenfunctions are~~ eigenvalues are $\psi_r = \sum_i \phi_i(r)\alpha_i$.

$$\langle\{\alpha_i\}|N|\{\alpha_i\}\rangle = \int \langle\{\alpha_i\}|\psi^\dagger(r)\psi(r)|\{\alpha_i\}\rangle dr =$$

$$= \sum_{i,j}\int \phi_i^*(r)\phi_j(r)\langle\{\alpha_i\}|a_i^\dagger a_j|\{\alpha_i\}\rangle dr = \sum_i \langle\{\alpha_i\}|a_i^\dagger a_j|\{\alpha_i\}\rangle =$$

$$= \sum_i |\alpha_i|^2$$

$H = H_0 + V_{int}$

$$H_0 = \int \psi^+(r) \overbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(r)\right)}^{h_0} \psi(r)\, dr$$

$$V_{int} = \frac{1}{2}\int \psi^+(r)\, \psi^+(r')\, V\, \psi(r)\, \psi(r')\, dr\, dr'$$

If we assume that $\{\phi_i\}$ are eigenfunctions of h_0 than

$H_0 = \sum_i \varepsilon_i a_i^+ a_i$ and general interaction is $V_{int} = \sum_{ijkl} V_{ijkl}\, a_i^+ a_j^+ a_l a_k$

$$\langle \{\alpha_i\} | H_0 | \{\alpha_i\} \rangle = \sum_i \varepsilon_i |a_i|^2$$

$$\langle \{\alpha_i\} | V_{int} | \{\alpha_i\} \rangle = \sum V_{ijkl}\, \alpha_i^* \alpha_j^* \alpha_l \alpha_k$$

$$V_{ijkl} = \langle ij | V | kl \rangle$$

If V is diagonalized ~~with~~ in our basis then $\langle \{\alpha_i\} | V_{int} | \{\alpha_i\} \rangle = \sum V_{ij} |\alpha_i|^2 |\alpha_j|^2$.

Overall:

$$\langle \{\alpha_i\} | H | \{\alpha_i\} \rangle = \sum_i \varepsilon_i |\alpha_i|^2 + \sum_{ijkl} V_{ijkl}\, \alpha_i^* \alpha_j^* \alpha_l \alpha_k$$

(b) a, a^+ are ladder operators, b, b^+ are creation & annihilation operators.

Both of them have the same commutation relations.

On the other side a, a^+ are operators in a Hilbert space of functions while b, b^+ are operators in Fock-Space.

Another difference is that b, b^+ generate ~~exitatio~~ particles with certain energy while aa^+ raise (or lower) the energy of one particle. Therefore, when working with s.p. it is easier to use a, a^+ while when working with ~~some~~ many body interactions b, b^+ are a lot more useful.