קוונטים 2 – תרגול 2
סימטריות בדידות

מתרגל: זמיר הלר-אלגזי

תוכן העניינים

1 הקדמה

טרנספורמציות במכניקת הקוונטים מיוצגות ע"י אופרטורים אוניטריים $U^{-1} = U^\dagger$ (או *אנטי*-אוניטריים), כי אלה משמרות את הערך המוחלט של מכפלות פנימיות. נציג אותן לרוב כאסקפוננט של אופטור הרמיטי G, למשל עבור טרנספורמציות רציפות

$$U\left(\theta\right) = e^{-i\theta G/\hbar} \tag{1.1}$$

G **היוצר ההרמיטי** של הטרנספורמציה, ו-θ הפרמטר הרציף של הטרנספורמציה. הפיתוח האינפינטיסמלי של U בפרמטר דיפרנציאלי ϵ הוא

$$U\left(\epsilon\right) \simeq 1 - \frac{i\epsilon}{\hbar}G \tag{1.2}$$

תחת טרנספומרציה U, מצבים $|\psi\rangle$ במרחב הילברט עוברים טרנספורמציה כך,

$$U : |\psi\rangle \longrightarrow |\psi'\rangle = U\,|\psi\rangle \tag{1.3}$$

ואילו אופרטורים O יעברו טרנספורמציה כך

$$U : O \longrightarrow O' = UOU^\dagger \tag{1.4}$$

קל לזכור את הטרנספורמציה של O מהדרישה לשימור המכפלה הפנימית:

$$\langle\chi'|O'|\psi'\rangle = \langle\chi|U^\dagger UOU^\dagger U|\psi\rangle = \langle\chi|O|\psi\rangle \tag{1.5}$$

אנחנו רואים שאופרטור O אינווריאנטי תחת U אם

$$O' = O \iff O = UOU^\dagger \iff OU = UO \iff [O, U] = 0 \tag{1.6}$$

אנחנו יודעים שהדינמיקה של בעיות בפיזיקה מוכתבות על-יד ההמילטוניאן H (משוואת שרדינגר), לכן טרנספורמציות U שלא משנות את H גם לא ישנו את הדינמיקה של הבעיה! **סימטריות** של המערכת מקיימות

$$\boxed{[H, U] = 0} \tag{1.7}$$

או בפיתוח אינפינטסימלי של U,

$$\boxed{[H, G] = 0} \tag{1.8}$$

אם יש סימטריה (רציפה) בבעיה אז יש גם גודל שמור: בהצגת הייזנברג (אם U לא תלוי מפורשות בזמן)

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{\hbar}\left[H, U\right] + \frac{\partial U}{\partial t} \implies \boxed{\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = 0} \tag{1.9}$$

היוצרים הם גודל שמור! בתמונת שרדינגר, הביטוי המקביל הוא

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\langle G\right\rangle = 0 \tag{1.10}$$

2 טרנספורמציות רציפות

2.1 הזזה במרחב (translations)

הזזה במיקום בכיוון $\hat{\mathbf{n}}$ בשיעור a מתבצעת ע"י האופרטור

$$\mathcal{T}\left(\hat{\mathbf{n}},a\right)=\lim_{N\to\infty}\left[1-\frac{i\left(a/N\right)}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right]^{N}=e^{-\frac{ia}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{n}}} \tag{2.1}$$

היוצרים של חבורת ההזזות הם אופרטורי התנע $\mathbf{p}=\{p_x,p_y,p_z\}$ (אם נותנים לחלקיק תנע בכיוון מסוים, הוא מוזז באותו הכיוון). סימטריה להזזות גוררת שימור תנע.

2.2 סיבובים במרחב (rotations)

סיבוב בזווית θ סביב הציר $\hat{\mathbf{n}}$ מתבצע על-ידי האופרטור

$$\mathcal{D}\left(\hat{\mathbf{n}},\theta\right)=\lim_{N\to\infty}\left[1-\frac{i\left(\theta/N\right)}{\hbar}\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right]^{N}=e^{-\frac{i\theta}{\hbar}\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}} \tag{2.2}$$

היוצרים של חבורת הסיבובים הם אופרטורי התנ"ז $\mathbf{J}=\{J_x,J_y,J_z\}$ (אם נותנים לחלקיק תנ"ז בכיוון מסוים, הוא מסובב באותו הכיוון). סימטריה לסיבובים גוררת שימור תנ"ז.

2.3 הזזה בזמן (translations in time)

הזזה בזמן בשיעור t מתבצעת על-ידי האופרטור (במקרה ש-H לא תלוי בזמן)

$$\mathcal{U}\left(t\right)=\lim_{N\to\infty}\left[1-\frac{i\left(t/N\right)}{\hbar}H\right]^{N}=e^{-\frac{it}{\hbar}H} \tag{2.3}$$

זה לא יותר מהפרופגטור שכבר הכרנו. היוצר של הזזות בזמן הוא אופרטור ההמילטוניאן H. סימטריה להזזות בזמן גוררת שימור אנרגיה.

שימו לב להבדל חשוב בין הזזות בזמן $\mathcal{U}$ והטרנספורמציות U הכלליות עליהן דיברנו מקודם; U פעלו על מצבים ואופרטורים יחדיו, ומצאנו את הטרנספורמציות מהדרישה שהמכפלות הפנימיות שמורות של U. אבל קידום בזמן $\mathcal{U}$ לא צריך לשמר את המכפלה הפנימית – אנחנו דווקא מצפים שהדינמיקה של המערכת *תשנה* ערכי תצפית של אופרטורים!

עבור קידום בזמן, אנחנו יכולים לבחור בין שתי נקודות מבט – *בתמונת שרדינגר* מצבים מתפתחים בזמן $\psi_S\left(t\right)$ והאופרטורים קבועים O_S, *ובתמונת הייזנברג* המצבים קבועים ψ_H והאופרטורים מתפתחים בזמן $O_H\left(t\right)$:

$$\underbrace{O_H\left(t\right)=\mathcal{U}^{\dagger}\left(t\right)O_H\left(0\right)\mathcal{U}\left(t\right)}_{\text{Heisenberg Picture}}\longleftrightarrow\underbrace{\left|\psi_S\left(t\right)\right\rangle=\mathcal{U}\left(t\right)\left|\psi_S\left(0\right)\right\rangle}_{\text{Schrödinger Picture}} \tag{2.4}$$

הבדילו את $O_H\left(t\right)$ מהטרנספורמציה O' במשוואה (1.4). מצאנו את הטרנספורמציה של O_H מהדרישה שערכי התצפית בתמונות שרדינגר והייזנברג יסכימו זה עם זה,

$$\begin{aligned}\left\langle\psi_H\middle|O_H\left(t\right)\middle|\psi_H\right\rangle&=\left\langle\psi_S\left(t\right)\middle|O_S\middle|\psi_S\left(t\right)\right\rangle=\left\langle\psi_S\left(0\right)\middle|\mathcal{U}^{\dagger}\left(t\right)O_S\,\mathcal{U}\left(t\right)\middle|\psi_S\left(0\right)\right\rangle\\&=\left\langle\psi_H\middle|\mathcal{U}^{\dagger}\left(t\right)O_H\left(0\right)\mathcal{U}\left(t\right)\middle|\psi_H\right\rangle\end{aligned} \tag{2.5}$$

(כן הנחנו ששתי התמונות מסכימות בזמן $t=0$, כלומר $\left|\psi_S\left(0\right)\right\rangle=\left|\psi_H\right\rangle$ ו-$O_H\left(0\right)=O_S$).

3 טרנספורמציות בדידות

3.1 שיקוף (parity)

אופרטור השיקוף Π פועל על מיקום ותנע (ואופרטור וקטורי כללי) באופן הבא,

$$\Pi \mathbf{r} \Pi^{-1} = -\mathbf{r}, \qquad \Pi \mathbf{p} \Pi^{-1} = -\mathbf{p} \tag{3.1}$$

על כל אופרטור שהוא פונקציה של האופרטורים האלה שיקוף פועל כך

$$\Pi O\left(\mathbf{r}, \mathbf{p}\right) \Pi^{-1} = O\left(-\mathbf{r}, -\mathbf{p}\right) \tag{3.2}$$

אופרטור השיקוף הוא *אוניטרי והרמיטי*,

$$\Pi^{-1} = \Pi^{\dagger} = \Pi \tag{3.3}$$

שיקוף כפול מחזיר את המערכת למצבה ההתחלתי ($\Pi^2 = 1$), ולכן הע"ע של Π הם ± 1.

3.2 הזזות דיסקרטיות במרחב (discrete translations)

אופרטור ההזזה הדיסקרטי הוא למעשה אופרטור ההזזה הרציף, רק ששיעור הזזה a הוא גודל קבוע,

$$\mathcal{T}\left(a\right) = e^{-ipa/\hbar} \tag{3.4}$$

דוגמא למערכת שהיא סימטרית תחת הזזות דיסקרטיות אבל לא רציפות היא סריג בגודל a.

3.3 היפוך בזמן (time reversal)

אופרטור ההיפוך בזמן Θ הוא אופרטור אנטי-אוניטרי, ולכן *אנטי-לינארי*

$$\Theta\left(\alpha\left|\psi\right\rangle + \beta\left|\chi\right\rangle\right) = \alpha^{*}\Theta\left|\psi\right\rangle + \beta^{*}\Theta\left|\chi\right\rangle \tag{3.5}$$

Θ הופך את כיוון התנועה במערכת. עבור אופרטורי המיקום, התנע, התנ"ז והספין הוא פועל כך,

$$\Theta \mathbf{r} \Theta^{-1} = \mathbf{r}, \qquad \Theta \mathbf{p} \Theta^{-1} = -\mathbf{p}, \qquad \Theta \mathbf{L} \Theta^{-1} = -\mathbf{L}, \qquad \Theta \mathbf{S} \Theta^{-1} = -\mathbf{S} \tag{3.6}$$

מכיוון שהוא אנטי-לינארי הפעולה ש-Θ מבצע על מצבים תלויה בבסיס המדובר. כך למשל, בבסיס המקום הוא פשוט מבצע הצמדה,

$$\Theta\psi\left(x, t\right) = \psi^{*}\left(x, -t\right) \tag{3.7}$$

ואילו בבסיס התנע הוא גם הופך את כיוון התנע,

$$\Theta\tilde{\psi}\left(p, t\right) = \tilde{\psi}^{*}\left(-p, -t\right) \tag{3.8}$$

4 תרגילים

תרגיל 1: כללי ברירה של זוגיות (Parity Selection Rules)

נתון אופרטור O בעל זוגיות מוגדרת. מה תוכלו לומר על אלמנט המטריצה

$$\langle a|O|b\rangle \tag{4.1}$$

אם נתון כי $|a\rangle$ ו-$|b\rangle$ הם מצבים עצמיים של אופרטור הזוגיות?

אם O הוא בעל זוגיות מוגדרת אז ($+$ לאופרטור סימטרי, $-$ לאופרטור אנטי-סימטרי)

$$\Pi O \Pi^{-1} = \pm O \implies O = \pm \Pi O \Pi \tag{4.2}$$

נסמן ב-p_a וב-p_b את הע"ע של $|a\rangle$ ו-$|b\rangle$ תחת Π (כאשר $p_i = \pm 1$).

$$\Pi |a\rangle = p_a |a\rangle , \qquad \Pi |b\rangle = p_b |b\rangle \tag{4.3}$$

אלמנט המטריצה הוא

$$\langle a|O|b\rangle = \pm \langle a|\Pi O \Pi|b\rangle = \pm p_a p_b \langle a|O|b\rangle \tag{4.4}$$

אם O אנטי-סימטרי, נסמן $A = O$ ונקבל

$$\langle a|A|b\rangle = -p_a p_b \langle a|A|b\rangle \tag{4.5}$$

אזי אם למצבים $|a\rangle$ ו-$|b\rangle$ זוגיות זהה $p_a p_b = 1$ (שניהם זוגיים או אי-זוגיים) הביטוי מתאפס, כלומר

$$\boxed{\langle a_\pm|A|b_\pm\rangle = 0} \tag{4.6}$$

כאשר $|a_+\rangle$ מסמן מצב סימטרי ו-$|a_-\rangle$ מצב אנטי-סימטרי $\Pi |a_\pm\rangle = \pm |a_\pm\rangle$, וכנ"ל עבור $|b_\pm\rangle$.
אם O סימטרי, נסמן $S = O$ ונקבל

$$\langle a|S|b\rangle = p_a p_b \langle a|S|b\rangle \tag{4.7}$$

אז הביטוי מתאפס אם ל-$|a\rangle$ ו-$|b\rangle$ זוגיות הפוכה $p_a p_b = -1$, כלומר

$$\boxed{\langle a_\mp|S|b_\pm\rangle = 0} \tag{4.8}$$

תרגיל 2

הראו במפורש כי האנרגיה נשמרת במערכות עם סימטריה להזזה בזמן.

אם המערכת סימטרית להזזות בזמן אזי

$$\mathcal{U}\left(\Delta t\right)H=H\mathcal{U}\left(\Delta t\right) \tag{4.9}$$

נתחיל ממצב $\left|\psi\left(t\right)\right\rangle$ עם אנרגיה מוגדרת $E\left(t\right)$ (מ"ע של H),

$$H\left|\psi\left(t\right)\right\rangle =E\left(t\right)\left|\psi\left(t\right)\right\rangle \tag{4.10}$$

נפעיל את הפרופוגטור על שני אגפי המשוואה,

$$\begin{aligned}\mathcal{U}\left(\Delta t\right)H\left|\psi\left(t\right)\right\rangle &=\mathcal{U}\left(\Delta t\right)E\left(t\right)\left|\psi\left(t\right)\right\rangle \\ H\left[\mathcal{U}\left(\Delta t\right)\left|\psi\left(t\right)\right\rangle \right] &=E\left(t\right)\left[\mathcal{U}\left(\Delta t\right)\left|\psi\left(t\right)\right\rangle \right]\\ H\left|\psi\left(t+\Delta t\right)\right\rangle &=E\left(t\right)\left|\psi\left(t+\Delta t\right)\right\rangle \\ &=E\left(t+\Delta t\right)\left|\psi\left(t+\Delta t\right)\right\rangle \end{aligned} \tag{4.11}$$

קיבלנו שהע"ע של $\left|\psi\left(t+\Delta t\right)\right\rangle$ הוא

$$\boxed{E\left(t+\Delta t\right)=E\left(t\right)} \tag{4.12}$$

האנרגיה נשמרת.

תרגיל 3: סריג חד-מימדי

חלקיק בעל מסה m נתון בפוטנציאל חד-מימדי הבנוי מסדרה של בורות פוטנציאל $v_0\left(x\right)$ המוזזים אחד ביחס לשני בשיעור a (קבוע). ההמילטוניאן של המערכת הוא

$$H=\frac{p^2}{2m}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}v_0\left(x-na\right)\equiv\frac{p^2}{2m}+V\left(x\right) \tag{4.13}$$

תחילה נניח כי הבורות אינסופיים ומופרדים זה מזה. נסמן ב-$\left|n\right\rangle$ את מצב היסוד הקשור לבור ה-n, וב-E_0 את אנרגית היסוד.

א. האם ההמילטוניאן מתחלף עם אופרטור ההזזה $\mathcal{T}\left(a\right)$? מהו מצב היסוד של ההמילטוניאן? האם הוא מנוון?

ב. נגדיר את המצב הבא:

$$\left|\theta\right\rangle\equiv\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}\left|n\right\rangle \tag{4.14}$$

האם הוא מצב עצמי של ההמילטוניאן? האם הוא מצב עצמי של $\mathcal{T}\left(a\right)$?

כעת נניח כי הבורות סופיים, כך שישנה הסתברות למנהור בין בורות סמוכים. כלומר,

$$H=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(E_0\left|n\right\rangle\!\left\langle n\right|-\Delta\left|n+1\right\rangle\!\left\langle n\right|-\Delta\left|n-1\right\rangle\!\left\langle n\right|\right) \tag{4.15}$$

כאשר $\Delta>0$.

ג. האם $\left|n\right\rangle$ הוא מצב עצמי של המערכת כעת? האם $\left|\theta\right\rangle$ הוא מצב עצמי של H? מהן האנרגיות העצמיות?

א. תחת הזזה, התנע לא משתנה והמיקום מוסט בשיעור a.

$$\mathcal{T}\left(a\right)\hat{x}\mathcal{T}^{\dagger}\left(a\right)=\hat{x}-a,\qquad\mathcal{T}\left(a\right)\hat{p}\mathcal{T}^{\dagger}\left(a\right)=\hat{p} \tag{4.16}$$

האינווריאנטיות של התנע ברורה מכך ש-$\mathcal{T}\left(a\right)$ פונקציה על $\hat{p}$ בעצמו ולכן בוודאי מתחלף איתו. את הטרנספורמציה של $\hat{x}$ אפשר להוכיח בעזרת נוסחת BCH, אך משמעותה ברורה – בסה"כ משכנו את ציר x בשיעור a ימינה. ברור אז שלכל אופרטור המורכב מ-x ו-p

$$\mathcal{T}\left(a\right)O\left(x,p\right)\mathcal{T}^{\dagger}\left(a\right)=O\left(x-a,p\right) \tag{4.17}$$

הפוטנציאל V כמובן מחזורי; רק צריך להחליף את התוויות בסכום האינסופי ל-$n'=n+1$,

$$V\left(x-a\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}v_0\left(x-a-na\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}v_0\left(x-\left(n+1\right)a\right)=\sum_{n'=-\infty}^{\infty}v_0\left(x-n'a\right)=V\left(x\right) \tag{4.18}$$

הודות למחזוריות של V, ההמילטוניאן H מתחלף עם $\mathcal{T}\left(a\right)$:

$$\mathcal{T}\left(a\right)H\mathcal{T}^{\dagger}\left(a\right)=\frac{p^2}{2m}+V\left(x-a\right)=\frac{p^2}{2m}+V\left(x\right)=H \tag{4.19}$$

מצב היסוד של ההמילטוניאן במקרה זה יכול להיות כל אחד ממצבי היסוד $|n\rangle$ של כל אחד מבורות הפוטנציאל, וכולם מנוונים. בגלל הניוון, הוא יכול להיות גם כל סופרפוזיציה שלהם:

$$|\psi_0\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n |n\rangle\,, \qquad \forall c_n \tag{4.20}$$

(צריך רק להפעיל H ולהיווכח ש-$H|\psi_0\rangle = E_0|\psi_0\rangle$, בדיוק כמו כל $|n\rangle$ בנפרד).

ב. מכיוון ש-H ו-$\mathcal{T}(a)$ מתחלפים, אז ניתן למצוא בסיס שפורש את המרחב של מ"ע של שניהם. $\{|n\rangle\}$ בסיס המ"ע של H, אבל לא של $\mathcal{T}(a)$ – $\mathcal{T}(a)|n\rangle = |n+1\rangle$! איך נמצא בסיס מ"ע של שני האופרטורים ביחד? בזכות הניוון, אנחנו יודעים שסופרפוזיציות של $\{|n\rangle\}$ הן כבר מ"ע של H. אזי נחפש סופרפוזיציה שהיא גם מ"ע של $\mathcal{T}(a)$, למשל $\sum_n |n\rangle$. המצב $|\theta\rangle$ שהגדרנו הוא סופרפוזיציה של $|n\rangle$ ולכן מ"ע של H עם אותה אנרגיה E_0. נבדוק האם הוא מ"ע של $\mathcal{T}(a)$:

$$\mathcal{T}(a)|\theta\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}\mathcal{T}(a)|n\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}|n+1\rangle = e^{-i\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in'\theta}|n'\rangle = e^{-i\theta}|\theta\rangle \tag{4.21}$$

$|\theta\rangle$ הוא אכן מ"ע של $\mathcal{T}(a)$ עם ע"ע $e^{-i\theta}$, לכן $\{|\theta\rangle\}$ מלכסנים את H ו-$\mathcal{T}(a)$ יחד. זה בדיוק הבסיס שקיומו הובטח לנו מכך ש-$[H,\mathcal{T}(a)] = 0$.

ג. כעת ישנם איברים לא אלכסוניים ב-H בבסיס $\{|n\rangle\}$, לכן $|n\rangle$ הוא כבר לא מ"ע:

$$\begin{aligned} H|n\rangle &= \sum_{n'=-\infty}^{\infty}\left(E_0|n'\rangle\langle n'|n\rangle - \Delta|n'+1\rangle\langle n'|n\rangle - \Delta|n'-1\rangle\langle n'|n\rangle\right) \\ &= E_0|n\rangle - \Delta|n+1\rangle - \Delta|n-1\rangle \end{aligned} \tag{4.22}$$

אנחנו כבר יודעים ש-$|\theta\rangle$ מ"ע של $\mathcal{T}(a)$, ועדיין $[H,\mathcal{T}(a)] = 0$, אז ייתכן שהוא גם מ"ע של H

$$\begin{aligned} H|\theta\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta} H|n\rangle \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}\left(E_0|n\rangle - \Delta|n+1\rangle - \Delta|n-1\rangle\right) \\ &= E_0\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}|n\rangle - \Delta e^{-i\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n+1)\theta}|n+1\rangle - \Delta e^{i\theta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(n-1)\theta}|n-1\rangle \\ &= \left[E_0 - \Delta\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right]\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\theta}|n\rangle \\ &= \left[E_0 - 2\Delta\cos(\theta)\right]|\theta\rangle \end{aligned} \tag{4.23}$$

לכן $|\theta\rangle$ הוא מ"ע של המערכת עם אנרגיה עצמית $E_\theta = E_0 - 2\Delta\cos(\theta)$. שימו לב שהוספת האינטראקציה של המנהור בין הבורות *הסירה את הניוון* שהיה קיים לפני כן!

במצב מוצק המערכת הזו נקראת *מודל הקישור החזק*, tight binding model.

תרגיל 4

בהינתן אופרטור אנטי-אוניטרי Θ, נסמן

$$|\bar{\alpha}\rangle = \Theta\,|\alpha\rangle\,, \qquad |\bar{\beta}\rangle = \Theta\,|\beta\rangle \tag{4.24}$$

הוכיחו כי:

א. $\langle\bar{\alpha}|\bar{\beta}\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle$

ב. $\langle\beta|L|\alpha\rangle = \langle\bar{\alpha}|\Theta L^{\dagger}\Theta^{-1}|\bar{\beta}\rangle$, כאשר L הוא אופרטור לינארי.

רמז: *אי-אפשר לכתוב* $\langle\bar{\alpha}| = \langle\alpha|\,\Theta^{\dagger}$.

א. ניתן לכתוב כל אופרטור אנטי-אוניטרי כמכפלה $\Theta = UK$ של אופרטור אוניטרי U באופרטור ההצמדה K. בבסיס $|n\rangle$ מסוים של המרחב,

$$|\bar{\alpha}\rangle = UK\,|\alpha\rangle = \sum_n UK\,\langle n|\alpha\rangle\,|n\rangle = \sum_n \langle n|\alpha\rangle^*\,U\,|n\rangle = \sum_n \langle\alpha|n\rangle\,U\,|n\rangle \tag{4.25}$$

שימו לב ש-$K\,|n\rangle = |n\rangle$, כי המקדם היחיד של $|n\rangle$ בבסיס הוא פשוט 1. לכן

$$\langle\bar{\alpha}|\bar{\beta}\rangle = \sum_{n,n'} \langle n|\alpha\rangle \underbrace{\langle n|U^{\dagger}U|n'\rangle}_{\delta_{n,n'}} \langle\beta|n'\rangle = \langle\beta|\underbrace{\sum_n |n\rangle\langle n|}_{\mathbf{1}}|\alpha\rangle = \langle\beta|\alpha\rangle \tag{4.26}$$

ב. נתחיל מצד ימין של השוויון,

$$\langle\bar{\alpha}|\Theta L^{\dagger}\Theta^{-1}|\bar{\beta}\rangle = \langle\bar{\alpha}|\Theta L^{\dagger}\Theta^{-1}\Theta|\beta\rangle = \langle\bar{\alpha}|\Theta L^{\dagger}|\beta\rangle \tag{4.27}$$

נסמן $|\gamma\rangle \equiv L^{\dagger}\,|\beta\rangle$, ונשתמש בשוויון שהוכחנו בסעיף הקודם:

$$\langle\bar{\alpha}|\Theta L^{\dagger}\Theta^{-1}|\bar{\beta}\rangle = \langle\bar{\alpha}|\Theta|\gamma\rangle = \langle\bar{\alpha}|\bar{\gamma}\rangle = \langle\gamma|\alpha\rangle = \langle\beta|L|\alpha\rangle \tag{4.28}$$

הערה: *עבור אופרטור לינארי L האופרטור הצמוד ההרמיטי $L^{\dagger}$ מוגדר להיות*

$$\langle L\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha|L^{\dagger}\beta\rangle = \langle\alpha|L^{\dagger}|\beta\rangle \tag{4.29}$$

השוויון האחרון מאפשר לנו לכתוב $\langle\alpha|\,L^{\dagger} = (L\,|\alpha\rangle)^{\dagger}$. לא כך עבור אופרטור אנטי-לינארי A, עבורו האופרטור הצמוד ההרמיטי $A^{\dagger}$ מוגדר עם הצמדה

$$\langle A\alpha|\beta\rangle = \langle\alpha|A^{\dagger}\beta\rangle^* = \langle\alpha|A^{\dagger}|\beta\rangle^* \tag{4.30}$$

אופרטור אוניטרי מקיים $U^{\dagger} = U^{-1}$ ביחס להגדרה הראשונה, ואילו אופרטור אנטי-אוניטרי מקיים $\Theta^{\dagger} = \Theta^{-1}$ ביחס להגדרה השנייה.
ההגדרה הזו קונסיסטנטית עם התרגיל שבדיוק פתרתם:

$$\langle\bar{\alpha}|\bar{\beta}\rangle = \langle\Theta\alpha|\Theta\beta\rangle = \langle\Theta\alpha|\Theta|\beta\rangle = \langle\alpha|\Theta^{\dagger}\Theta|\beta\rangle^* = \langle\beta|\alpha\rangle \tag{4.31}$$

ובדומה עבור סעיף ב'.

תרגיל 5

בהרצאה הראיתם כי אופרטור ההיפוך בזמן עבור ספינור המלוכסן בבסיס המלכסן את S_z הוא

$$\Theta = e^{-i\pi S_y/\hbar}K \tag{4.32}$$

עבור ספין $s=\frac{1}{2}$ בכיוון $\hat{\mathbf{n}}$ כללי, הראו באופן מפורש כי

$$\Theta\left|\uparrow_{\hat{\mathbf{n}}}\right\rangle = \left|\downarrow_{\hat{\mathbf{n}}}\right\rangle \tag{4.33}$$

ספין בכיוון כללי הוא

$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \sin\theta\cos\phi S_x + \sin\theta\sin\phi S_y + \cos\theta S_z \tag{4.34}$$

בהצגה מטריצית עבור $s=\frac{1}{2}$ בבסיס המלכסן את S_z, המטריצה הזו היא

$$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi}\\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta\end{pmatrix} \tag{4.35}$$

הע"ע הם כמובן $\pm\hbar/2$. הוקטור העצמי המתאים ל-$+\hbar/2$ הוא

$$\begin{pmatrix}\cos\theta-1 & \sin\theta e^{-i\phi}\\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0 \implies \begin{cases}-2\sin^2\frac{\theta}{2}x+2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}y=0\\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}x-2\cos^2\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}y=0\end{cases}$$
$$\implies \left|\uparrow_{\hat{\mathbf{n}}}\right\rangle = \begin{pmatrix}e^{-i\phi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix}$$

והוקטור העצמי המתאים ל-$-\hbar/2$ הוא

$$\begin{pmatrix}\cos\theta+1 & \sin\theta e^{-i\phi}\\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0 \implies \begin{cases}2\cos^2\frac{\theta}{2}x+2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}y=0\\ 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}x+2\sin^2\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}y=0\end{cases}$$
$$\implies \left|\downarrow_{\hat{\mathbf{n}}}\right\rangle = \begin{pmatrix}-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ e^{i\phi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix}$$

נשאר לנו רק למצוא ביטוי מטריצי ל-Θ,

$$e^{-i\pi S_y/\hbar} = e^{-i\pi\sigma_y/2} = e^{-i\frac{\pi}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{y}}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{y}}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i\sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \tag{4.36}$$

ונפעיל את Θ על $\left|\uparrow_{\hat{\mathbf{n}}}\right\rangle$:

$$\Theta\left|\uparrow_{\hat{\mathbf{n}}}\right\rangle = e^{-i\pi S_y/\hbar}K\begin{pmatrix}e^{-i\phi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{i\phi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ e^{i\phi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{pmatrix} = \left|\downarrow_{\hat{\mathbf{n}}}\right\rangle \tag{4.37}$$

ההיפוך בזמן הופך את הספין בכל כיוון אליו הוא מופנה.