

תרגיל בית 10

מעברים קרינתיים

חומר קריאה: S. Gasiorowicz, *Quantum Physics* (3rd edition), Chapter 17

1. מעברים באפקט שטארק:

אטום מימן נמצא תחת השפעת שדה חשמלי אחיד \mathcal{E} קבוע בזמן. ראינו בעבר שכתוצאה מהפרעה כזאת הרמה $n = 2$ מתפצלת ל 3 תתי-רמות (בהרצאה על אפקט שטארק). נתון כי האטום נמצא במצב היסוד. כעת בנוסף לשדה החשמלי הסטטי מאירים על האטום באור מקוטב המתקדם בניצב ל- \mathcal{E} .

(א) כמה קווי בליעה ישנם במעבר $n = 1 \rightarrow n = 2$ כאשר:

i. הקרינה הפוגעת מקוטבת במקביל ל- \mathcal{E} .

ii. הקרינה הפוגעת מקוטבת בניצב ל- \mathcal{E} . מיהו המצב הסופי (מיד לאחר הבליעה) במקרה זה?

iii. הקרינה הפוגעת בעלת קיטוב מעגלי.

(ב) כעת הניחו כי האור לא מקוטב, והוא מתקדם במקביל ל- \mathcal{E} . כמה קווי בליעה $n = 1 \rightarrow n = 2$ קיימים במעבר זה?

(ג) כעת נתעניין במעברים $n = 1 \rightarrow n = 3$, כאשר הקרינה הפוגעת היא אור לבן. בתרגיל בית 7 ראינו שהרמה $n = 3$ מתפצלת ל-5 תתי-רמות. הראו שרק 4 (ולא 5) קווי בליעה אפשריים, וניתן לצפות בכולם בו זמנית. כיצד נוכל להבדיל ביניהם?

2. חשבו את זמן החיים בקירוב הדיפול (בשניות) של אטום מימן במצב אנרגיה $n = 2$. (תשובה: 1.6×10^{-9} s עבור כל מצבי $2p$ ואילו $2s$ הוא מצב יציב)

לרשותכם האינטגרל $\int_0^\infty r^\ell e^{-\alpha r} dr = \ell! \alpha^{-\ell-1}$, כמו כן נתונות הפונקציות הרדיאליות

$$R_{10}(r) = 2 \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}, \quad R_{20}(r) = 2 \left(\frac{Z}{2a_0} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{Zr}{2a_0} \right) e^{-Zr/2a_0}$$

$$R_{21}(r) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{Z}{2a_0} \right)^{3/2} \frac{Zr}{a_0} e^{-Zr/2a_0}$$

בנוסף, גדלים שכל פיזיקאי חייב להכיר

$m_e c^2 \approx 0.51 \text{ MeV},$	$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s},$
$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \approx 0.53 \text{ \AA},$	$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137},$
$1 \text{ Ry} = \frac{e^2}{2a_0} = \frac{1}{2} \alpha^2 m_e c^2 \approx 13.6 \text{ eV},$	$k_B T \approx \frac{1}{40} \text{ eV} \quad (\text{at room temp.})$

3. (שאלת חובה)

אוסצילטור הרמוני תלת-מימדי איזוטרופי מתואר ע"י ההמילטוניאן הבא (ללא ספין):

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2 = \sum_{i=x,y,z} \hbar\omega \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right)$$

- (א) כתבו את האנרגיות העצמיות E_n . מהו הניוון של הרמה ה- n ?
 (ב) מהן הסימטריות המרחביות בבעיה? האם התנע הזוויתי נשמר? האם מצבי תנע זוויתי (מצבים עצמיים של L^2 ו- L_z) הם גם מצבים עצמיים של H ?

(ג) בונים את שלשת האופרטורים הבאה $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ (כדומה \mathbf{a}^\dagger).

- i. כתבו את אופרטור התנע הזוויתי \mathbf{L} באמצעות \mathbf{a} ו- \mathbf{a}^\dagger .
 ii. הראו כי \mathbf{a}^\dagger הוא אופרטור וקטורי. מהם רכיביו הכדוריים $a_q^{\dagger(1)}$?

- (ד) הראו שמצב היסוד $|0\rangle$ של האוסצילטור הוא מצב עצמי של התנע הזוויתי עם $\ell = 0$.
 (ה) הרמה המעוררת הראשונה, $E_{n=1} = \frac{5}{2}\hbar\omega$, מנוות שלוש פעמים. כתבו במפורש שלושה מצבים עצמיים שונים באנרגיה בעלי ℓ ו- m מוגדרים היטב. נסמן מצבים אלו ב- $|1\ell m\rangle$. (כתבו את המצבים בבסיס $|n_x, n_y, n_z\rangle$)

- (ו) הראו כי המצב $|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} \left[(a_x^\dagger)^2 - (a_y^\dagger)^2 - 2ia_x^\dagger a_y^\dagger \right] |0\rangle$ הוא מצב עצמי של H ו- L_z . מהם הערכים העצמיים המתאימים של H ו- L^2 , L_z ?

- (ז) האוסצילטור נמצא במצב עצמי של H בעל אנרגיה $E_{n=2} = \frac{7}{2}\hbar\omega$. מהם ℓ ו- m האפשריים?
 (ח) כעת נתון כי האוסצילטור נמצא ברמה המעוררת השניה $n = 2$ עם תנ"ז $\ell = 0$ (כלומר $|200\rangle$). כתבו במפורש את המצב כסופרפוזיציה של מצבי $|n_x, n_y, n_z\rangle$.

- (ט) לאוסצילטור מטען חשמלי q . נתון כי בזמן $t = 0$ האוסצילטור במצב $|\psi\rangle$ המתואר בסעיף (ו). לאילו מצבים יכול האוסצילטור לעבור, בקירוב הדיפול החשמלי ובפליטת פוטון בודד?

- (י) עבור תהליך הפליטה הספונטנית המתואר בסעיף הקודם, הוכיחו כי אור הנפלט בכל כיוון במישור $x - y$ הוא מקוטב.

בהצלחה!