מבוא למצב מוצק תשפ"ג – תרגול 2
מודל דרודה להולכה

ספרות מומלצת:

- Ashcroft, Mermin: ch. 1
- Simon: ch. 3

1 המודל

- אלקטרונים מתוארים כגז של חלקיקים **קלאסיים** הנעים בהשפעת שדות חיצוניים, אך ללא אינטראקציות ביניהם או עם היונים החיוביים (הסטטיים) במתכת.
- האלקטרונים עוברים **פיזורים**: הזמן האופייני בין פיזורים מסומן ב-τ, ולאחר כל פיזור האלקטרון 'שוכח' את התנע שהיה לו מיד לפני הפיזור — הוא מתחיל לנוע במהירות שכיוונה אקראי וגודלה נקבע לפי התפלגות בולצמן ($P(v) \propto \exp\left[-\beta \cdot \frac{1}{2}mv^2\right]$).

- בסך הכל מתקבלת המשוואה הבאה עבור התנע הממוצע של האלקטרונים:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathbf{p}}{\tau} + \mathbf{F}(t)$$

- המודל חוזה את חוק אוהם, ומספק תחזית כמותית עבור הערך של מוליכות DC:

$$\mathbf{J} = \frac{ne^2\tau}{m_e}\mathbf{E} \equiv \sigma_D\mathbf{E}$$

יחד עם זאת, τ נשאר פרמטר פנומנולוגי, אותו צריך למדוד או לחשב מתוך מודל מיקרוסקופי מפורט

יותר.

2 תרגילים

2.1 תרגיל: אפקט זיבק

במסגרת אפקט זיבק (Seebeck), בתגובה לגרדיאנט טמפרטורה הנופל על מוליך ארוך נוצר שדה חשמלי **המנוגד** לגרדיאנט הטמפרטורה – גרדיאנט הטמפרטורה שואף ליצור זרימת אלקטרונים מהחלק החם אל החלק הקר, ובמצב יציב הצטברות של מטענים בקצוות יוצרת שדה חשמלי בכיוון ההפוך (אין זרימה נטו). הקשר המתקיים הוא

$$\mathbf{E} = Q \cdot \nabla T$$

כאשר Q (המכונה thermopower) קבוע שלילי עם היחידות המתאימות.

1. חשבו את Q לפי מודל דרודה.
2. לעתים הערך של Q הנמדד במעבדה הוא חיובי ולא שלילי. על מה מצביעה מדידה שכזו?

פתרון

מתוך ההגדרה $\mathbf{J} = -en\mathbf{v}$ ומחוק אוהם נסיק כי מתקיים הקשר הבא:

$$\mathbf{J} = \frac{ne^2\tau}{m}\mathbf{E} \longrightarrow \mathbf{v}_E = -\frac{1}{ne}\mathbf{J} = -\frac{e\tau}{m}\mathbf{E}$$

כאשר הסימון $\mathbf{v}_E$ מתייחס למהירות הממוצעת של האלקטרונים עקב פעולת השדה החשמלי.

נרצה לחשב כעת את מהירות האלקטרונים הממוצעת עקב גרדיאנט הטמפרטורה $\mathbf{v}_Q$. לצורך כך נפשט תחילה את הבעיה ונתבונן בזרימה במימד אחד, כאשר נניח שבכל נקודה x לאורך המוליך חצי מהאלקטרונים הם כאלו שמגיעים מכיוון הצד החם, והחצי השני מגיע מכיוון הצד הקר. לפיכך המהירות הממוצעת של האלקטרונים בנקודה x תהיה

$$v_Q\left(x\right) = \frac{1}{2}\left[v_x\left(x - v_x\tau\right) - v_x\left(x + v_x\tau\right)\right]$$

מדוע זה הביטוי? אנחנו רוצים לקבוע את v_x (גודל המהירות; את הכיוון כבר קבענו באמצעות הסימנים במשוואה) לפי ההתפלגות הסטטיסטית של מהירויות במתכת. המידע שמודל דרודה נותן לנו הוא על ההתפלגות הזו מיד לאחר פיזור, ולכן אנחנו רוצים להסתכל על המהירות שכל אלקטרון קיבל עקב הפיזור האחרון שהוא חווה; הזמן הממוצע שעבר מאז הפיזור האחרון של האלקטרון הוא τ, ולכן המרחק הממוצע שהוא עבר בזמן הזה הוא $v_x\tau$.

נפתח בסדר נמוך של $v_x\tau$,

$$v_Q(x) \approx \frac{1}{2}\left[v_x(x) - v_x\tau\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} - v_x(x) - v_x\tau\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\right] = -v_x\tau\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} = -\frac{\tau}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(v_x^2\right)$$

כדי לחזור למקרה התלת-מימדי, נזכור שבממוצע

$$\left\langle v_x^2\right\rangle = \left\langle v_y^2\right\rangle = \left\langle v_z^2\right\rangle = \frac{1}{3}\left\langle v^2\right\rangle = \frac{2}{3m}\left\langle\varepsilon\right\rangle$$

כאשר ε היא האנרגיה של אלקטרון בודד, ולפיכך

$$v_Q \approx -\frac{\tau}{3m}\cdot\frac{\mathrm{d}\left\langle\varepsilon\right\rangle}{\mathrm{d}x} = -\frac{\tau}{3m}\cdot\frac{\mathrm{d}\left\langle\varepsilon\right\rangle}{\mathrm{d}T}\cdot\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{\tau}{3m}\cdot\frac{c_v}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$$

זהו רק רכיב x של המהירות הממוצעת, ולכן בכתיבה וקטורית

$$\mathbf{v}_Q = -\frac{\tau c_v}{3mn}\nabla T$$

נדרוש $\mathbf{v}_Q + \mathbf{v}_E = 0$ ואז

$$-\frac{\tau c_v}{3mn}\nabla T - \frac{e\tau}{m}\mathbf{E} = 0 \longrightarrow \mathbf{E} = -\frac{c_v}{3ne}\nabla T$$

כלומר

$$Q = -\frac{c_v}{3ne}$$

מכיוון שאנחנו מתייחסים אל גז האלקטרונים כאל גז אידאלי קלאסי, קיבול החום הסגולי הוא $c_v = \frac{3}{2}nk_B$ (חוק החלוקה השווה), ומכאן מתקבלת התוצאה

$$Q = -\frac{\frac{3}{2}nk_B}{3ne} = -\frac{k_B}{2e} = -0.43\times 10^{-4}\frac{\mathrm{volt}}{\mathrm{K}}$$

שימו לב ש-Q הוא גודל שחישבנו דרך התמונה שמתאר מודל דרודה, אבל הוא לא תלוי בקבוע הפנומנולוגי τ. בגלל הקושי להעריך תיאורטית את הערך של τ, במסגרת המאמץ לאשש או להפריך ניסיונית את מודל דרודה הייתה חשיבות גדולה לגדלים פיזיקליים מדידים מהסוג הזה.

הפרמטר היחיד שיכול לשנות את סימנו בביטוי שהתקבל עבור Q הוא המטען, ולכן תוצאה ניסיונית שמראה כי $Q > 0$ מעידה על כך שההולכה במתכת מתבצעת על ידי נושאי מטען עם מטען **חיובי**, ולא על ידי אלקטרונים; נושאי מטען חיובי כאלו מכונים "חורים" (קיומם של "חורים" הוא תוצאה תיאורטית מאוחרת יותר, שדרודה לא לקח בחשבון).

2.2 תרגיל: זרם DC תחת שדה מגנטי קבוע

נניח כי מזרימים זרם חשמלי J_x בכיוון $\hat{x}$ ומפעילים שדה מגנטי H בכיוון $\hat{z}$ על מוליך רחב מאוד בציר y (כלומר, ניתן להניח שהוא אינסופי בכיוון $\hat{y}$).

1. חשבו את המגנטורזיסטנס $\rho\left(H\right)=E_x/J_x$ עבור המוליך הזה.
2. מצאו את ההתנהגות הגבולית של המגנטורזיסטנס עבור שדה מגנטי חלש $\omega_c\tau \ll 1$ וחזק $\omega_c\tau \gg 1$, כאשר $\omega_c\equiv\frac{eH}{mc}$ היא תדירות הציקלוטרון.
3. הסבירו מדוע $\omega_c\tau$ היא הסקאלה הקובעת את הגבולות המבוקשים.

פתרון

נציב במשוואת התנועה של דרודה את כוח לורנץ במקום $\mathbf{F}$, ונדרוש מצב עמיד $\mathrm{d}\mathbf{p}/\mathrm{d}t=0$:

$$0=-\frac{\mathbf{p}}{\tau}-e\left[\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right]$$

בפירוק לרכיבים, מתקבלות המשוואות

$$\begin{aligned}0&=-\frac{mv_x}{\tau}-eE_x-\frac{e}{c}v_yH\\0&=-\frac{mv_y}{\tau}-eE_y+\frac{e}{c}v_xH\end{aligned}$$

נשתמש בקשר בין הזרם למהירות $\mathbf{J}=-en\mathbf{v}$ ובהגדרת תדירות הציקלוטרון כדי לכתוב מחדש את המשוואות בתור

$$\begin{aligned}J_x&=\frac{ne^2\tau}{m}E_x-\omega_c\tau J_y\longrightarrow J_x=\sigma_DE_x-\omega_c\tau J_y\\J_y&=\frac{ne^2\tau}{m}E_y+\omega_c\tau J_x\longrightarrow J_y=\sigma_DE_y+\omega_c\tau J_x\end{aligned}$$

ההנחה של רוחב אינסופי של המוליך משמעותה שאין למוליך שפות שמטענים יכולים להצטבר עליהן, ומכאן שלא נוצר שדה חשמלי בכיוון $\hat{y}$, $E_y=0$. נציב זאת במערכת המשוואות:

$$\begin{aligned}J_x&=\sigma_DE_x-\omega_c\tau J_y\\J_y&=\omega_c\tau J_x\end{aligned}$$

ואז, מהצבת המשוואה השנייה בראשונה, נקבל

$$J_x=\sigma_DE_x-\left(\omega_c\tau\right)^2J_x\longrightarrow J_x=\frac{\sigma_D}{1+\left(\omega_c\tau\right)^2}E_x$$

המגנטורזיסטנס נתון אם כך על ידי

$$\rho\left(H\right)=E_x/J_x=\frac{1+\left(\omega_c\tau\right)^2}{\sigma_D}$$

כאשר התלות ב-H מגיעה דרך ω_c; ההתנגדות האורכית גדלה עם השדה המגנטי. בהרצאה תראו שעבור רוחב סופי של המוליך (אפקט הול), המגנטורזיסטנס בלתי-תלוי בשדה המגנטי, $\rho=1/\sigma_D$.

שדה מגנטי חיצוני חלש מתאים לגבול $\omega_c\tau \ll 1$, ואז המגנטורזיסטנס מקבל את הצורה המקורית של המוליכות (בהיעדר שדה מגנטי):

$$\rho\left(H\right)\longrightarrow\frac{1}{\sigma_D}$$

שדה מגנטי חיצוני חזק מתאים לגבול $\omega_c\tau \gg 1$:

$$\rho\left(H\right)\longrightarrow\frac{\left(\omega_c\tau\right)^2}{\sigma_D}=\frac{m}{ne^2\tau}\left(\frac{eH}{mc}\tau\right)^2=\frac{\tau}{nmc^2}H^2$$

מה קורה פה? אם $\tau \ll \frac{1}{\omega_c}$ הזמן האופייני בין התנגשויות קצר בהרבה מזמן המחזור של השלמת סיבוב בשדה המגנטי, לכן תוך זמן קצר האלקטרון יעבור פיזור ויתחיל שוב לנוע בכיוון אקראי – כאילו נע ללא השפעת השדה המגנטי כלל, מתאים לתוצאה שקיבלנו. בגבול $\tau \gg \frac{1}{\omega_c}$, השדה המגנטי מעקם את מסלולו של האלקטרון בצורה משמעותית ושואף להשאירו בתנועה סיבובית במישור xy, כך שנדרש שדה חשמלי חזק מאוד על מנת להעביר זרם מקצה אחד של המוליך לקצהו השני.