

## תרגיל בית 2

### סימטריות בדידות

חומר קריאה: J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (2nd edition), Chapter 4

1. השתמשו בשיקולי זוגיות וחשבו את את אלמנטי המטריצה הבאים עבור אוסצילטור הרמוני קוונטי (חד-מימדי)

$$\langle n|x|n \rangle \quad (\text{א})$$

$$\langle n|p^2|n+1 \rangle \quad (\text{ב})$$

$$\langle n|xp|x|n \rangle \quad (\text{ג})$$

2. נתון אופרטור השיקוף  $\Pi$  המבצע את הפעולה  $\Pi : \mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$

(א) חשבו את

$$\Pi Y_m^{(\ell)}(\theta, \varphi) = ?$$

(ב) השתמשו בשיקולי זוגיות וקבעו עבור כל אחד מאלמנטי המטריצה הבאים האם הוא מתאפס או לא:

$$\langle n\ell m|x|n\ell m \rangle, \quad \langle n\ell m|\mathbf{r}|n, \ell+2, m \rangle, \quad \langle n\ell m|x^2+y^2+z^2|n, \ell+1, m \rangle$$

כאשר  $|n\ell m\rangle$  הם המצבים העצמיים המוכרים של אטום מימן.

3. נתונה טרנספורמציה שהיוצר ההרמיטי שלה הוא  $T$ . הראו כי אם ההמלטוניאן מתחלף עם  $T$ , אז הוא בהכרח מלוכסן בבסיס המצבים העצמיים של  $T$ . הדרכה:

$$T|t\rangle = t|T\rangle \quad (\text{א}) \quad \text{סמנו את המצבים העצמיים והערכים העצמיים של } T \text{ ב-} T|t\rangle = t|T\rangle$$

$$(\text{ב}) \quad \text{חשבו את אלמנטי המטריצה } \langle t|[H, T]|t\rangle, \text{ והשתמשו בעובדה ש-} [H, T] = 0.$$

4. עבור כל אחד מהאופרטורים הבאים, קבעו כיצד הם משתנים תחת שיקוף ותחת היפוך בזמן

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} \quad (\text{ד}) \quad \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \quad (\text{ג}) \quad \mathbf{S} \cdot \mathbf{r} \quad (\text{ב}) \quad \mathbf{S} \cdot \mathbf{p} \quad (\text{א})$$

5. נתונה מערכת לא מנוונת ללא ספין שההמילטוניאן שלה אינווריאנטי תחת היפוך בזמן. הוכיחו כי ניתן לבחור את הפונקציות העצמיות להיות ממשיות (בבסיס המקום).

6. (שאלת חובה) **תהודה מגנטית** (חזרה על ההרצאה): חלקיק בעל ספין  $s = \frac{1}{2}$  נתון תחת השפעת השדה המגנטי

$$\mathbf{B}(t) = B_{\perp} [\cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + \sin(\omega t) \hat{\mathbf{y}}] + B_0 \hat{\mathbf{z}}$$

- (א) כתבו את ההמילטוניאן בבסיס המלכסן את  $S_z$ .  
 (ב) בטאו את ההמילטוניאן במונחי האופרטורים  $\sigma_z, \sigma_+, \sigma_-$  בלבד. (רמז: כתבו את  $\cos$  ו- $\sin$  באמצעות אקספוננטים מרוכבים).  
 (ג) נסמן  $|\bar{\psi}\rangle = U|\psi\rangle$ , כאשר  $U$  היא טרנספורמציה אוניטרית. הראו שעל ההמילטוניאן לעבור טרנספורמציה בצורה הבאה

$$\bar{H} = U H U^\dagger + i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} U^\dagger$$

- על מנת לקיים את משוואת שרדינגר  $\bar{H}|\bar{\psi}\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\bar{\psi}\rangle$  לאחר הטרנספורמציה.  
 (ד) כעת נתונה הטרנספורמציה

$$U = \exp\left(i \frac{S_z}{\hbar} \Omega_0 t\right)$$

- כתבו את האופרטור  $U$  בבסיס המלכסן את  $S_z$ , וחשבו את ההמילטוניאן לאחר הטרנספורמציה. מה צריכה להיות  $\Omega_0$  כך שלאחר הטרנספורמציה נקבל המילטוניאן בלתי תלוי בזמן?  
 (ה) מצאו את האנרגיות העצמיות והמצבים העצמיים של ההמילטוניאן החדש  $\bar{H}$ .  
 (ו) נתון כי המערכת התחילה עם  $S_z = \frac{\hbar}{2}$ . מה הסיכוי למדוד  $S_z = -\frac{\hbar}{2}$  לאחר זמן  $t$ ?

**בהצלחה!**