

תרגיל בית 8

תורת ההפרעות II ו-WKB

חומר קריאה: Griffiths — *Introduction to Quantum Mechanics*, Chapter 8.1-8.2

1. חלקיק בעל מטען e ומסה M מאולץ לנוע על גבי מעגל ברדיוס R המונח במישור $x - y$.

(א) כתבו את ההמילטוניאן של המערכת. מהן הסימטריות בבעיה? מה הניוון לו אתם מצפים?

(ב) כעת מפעילים שדה חשמלי חלש $E = \mathcal{E}_0 \hat{x}$. איזו סימטריה שובר השדה החשמלי? איזו סימטריה נשארת בכל זאת? האם אתם מצפים שהניוון יוסר?

(ג) מצאו את התיקון מסדר ראשון ומסדר שני לספקטרום האנרגיות.

2. (שאלת חובה)

נתון אוסצילטור הרמוני דו-מימדי איזוטרופי בעל מסה m ותדירות ω

$$H_0 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$$

מוסיפים הפרעה קטנה $V = \lambda m\omega^2 xy$, כאשר $\lambda \ll 1$.

(א) מהן הסימטריות של H_0 ? איזו סימטריה שוברת ההפרעה V ?

(ב) הסבירו **משיקולי סימטריה** מדוע שני המצבים המעוררים הראשונים $\{|1, 0\rangle, |0, 1\rangle\}$ מנוונים.

(ג) חשבו את התיקון באנרגיה עד סדר שני (כולל) למצבים המעוררים הראשונים.

3. נתון אטום מימן במצב היסוד המרחבי $n = 1$. הרמה מפוצלת ע"י אינטראקציה בין הספינים של האלקטרון והפרוטון (פיצול על-דק). שמים את האטום בשדה מגנטי בכיוון \hat{z} , כך שיש להתייחס להמילטוניאן

$$H = A \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{S}_e + B (g_p S_p^z + g_e S_e^z)$$

התייחסו אל B כהפרעה קטנה וחשבו את האנרגיות לסדר ראשון ושני בתורת ההפרעות.

4. חלקיק בעל מסה m נמצא תחת השפעת הפוטנציאל

$$V(x, y, z) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2), & -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2} \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(הערה: אין צורך לחשב אינטגרלים על הקואורדינטה z — סמנו אותם באות כרצונכם.)

(א) מצאו את רמות האנרגיה של המערכת. מהי אנרגיית רמת היסוד?

(ב) מהן הסימטריות המרחביות הקיימות בבעיה? האם מצב היסוד מקיים את הסימטריות הללו?

(ג) כעת מוסיפים הפרעה $V_1 = \lambda xy \cos(\pi z/L)$. חשבו את התיקון לסדר ראשון ב- λ לאנרגיית מצב היסוד.

(ד) מהו התנאי על הפרמטרים m, ω ו- L כך שהניווט של המצב המעורר הראשון (הלא מופרע) הוא שלוש.

(ה) בהנחה והתנאי מהסעיף הקודם מתקיים, חשבו את התיקון לסדר ראשון ב- λ לאנרגיה של המצבים המעוררים הראשונים.

5. נתון הפוטנציאל החד-מימדי $V = \alpha|x|$, כאשר α קבוע חיובי. העריכו את האנרגיה של הרמה ה- n באמצעות קירוב WKB.

6. (מנהור באפקט שטרק)

כאשר מפעילים שדה חשמלי \mathcal{E} על אטום, מתווסף איבר לינארי לפוטנציאל הקולומבי $-\mathcal{E}x \sim$ (כפי שכבר ראינו בעבר). השדה מכופף את הפוטנציאל הקולומבי ומאפשר כעת לאלקטרון להתמנהר החוצה דרך מחסום הפוטנציאל (כמתואר באיור 1). כשפתרנו אטום מימן בשדה חשמלי, באמצעות תורת ההפרעות, התעלמנו לחלוטין מהאפשרות הזאת. כעת נבין מדוע.

כדי לקבל מושג על קצב המנהור, נחליף את הפוטנציאל הקולומבי בפוטנציאל חד-מימדי פשוט יותר – בור פוטנציאל סופי:

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(א) מהי האנרגיה של מצב היסוד, כאשר האנרגיה נמדדת ביחס לתחתית הבור? הניחו שהבור עמוק מאוד, $V_0 \gg \hbar^2/ma^2$.

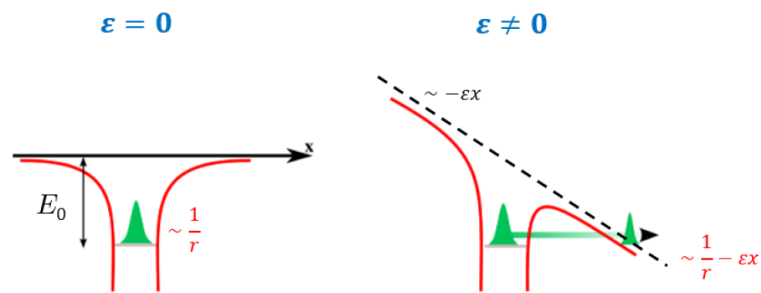
(ב) כעת מוסיפים הפרעה $V_1 = -\alpha x$ (עבור אלקטרון בשדה חשמלי \mathcal{E} , $E = -\mathcal{E}x$, נקבל $\alpha = e\mathcal{E}$). הניחו כי ההפרעה קטנה, כלומר $\alpha a \ll \hbar^2/ma^2$. ציירו סקיצה של הפוטנציאל הכולל עם ובלי ההפרעה. הראו שכעת החלקיק יכול להתמנהר בכיוון ציר x .

(ג) השתמשו בקירוב WKB כדי לחשב את מקדם ההעברה T , והעריכו את הזמן τ שיקח לחלקיק להתמנהר החוצה.

(ד) הציבו נתונים:

$V_0 = 20 \text{ eV}$ (אנרגיית קשר טיפוסית של אלקטרון), $a = 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ (סקלת אורך אטומית), $\mathcal{E} = 10^4 \text{ V/cm}$ (שדה חשמלי טיפוסי במעבדה, כבר ראינו בתרגיל בית 6 שניתן להתייחס אליו כהפרעה קטנה), ומסה ומטען של אלקטרון. **חשבו** את τ (מספיק לקבל סדר גודל), ונמקו מדוע אנו יכולים להתעלם מתהליכי מנהור שכאלו.

(ה) עבור איזה גודל של שדה חשמלי נצפה לקבל יינון של האטום?



איור 1: השדה החשמלי מוסיף איבר לינארי (קו מקווקו באיור הימני). כלל שהשדה החשמלי חזק יותר, כך השיפוע של האיבר הלינארי גדול יותר, רוחב המחסום קטן יותר, וההסתברות שהאלקטרון יתמנהר החוצה גדולה יותר.

בהצלחה!