1

א) צריך להסתכל על M שכנים קרובים משני הצדדים, לכן המשוואה:

$$m\ddot{u}_n = -\sum_{j=1}^{M} K_j (u_n - u_{n+j}) - \sum_{j=1}^{M} K_j (u_n - u_{n-j})$$

$$= -\sum_{j=1}^{M} K_j (2u_n - u_{n+j} - u_{n-j})$$

$$u_n = A_0 e^{i(kna - \omega t)}$$ הצבת הפתרון הרגיל

$$-m\omega^2 e^{ikna - i\omega t} = -\sum_{j=1}^{M} K_j \Big(2e^{ikna - i\omega t} - \underbrace{e^{ik(n+j)a - i\omega t}}_{ikna + ikja} - \underbrace{e^{ik(n-j)a - i\omega t}}_{ikna - ikja}\Big)$$

$$-m\omega^2 = -\sum_{j=1}^{M} K_j (2 - e^{ikja} - e^{-ikja})$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$= -\sum_{j=1}^{M} 2K_j [1 - \cos(kja)]$$

$$= -\sum_{j=1}^{M} 4K_j \sin^2\left(\frac{kja}{2}\right)$$

יחס הנפיצה:

$$\boxed{\omega^2 = \sum_{j=1}^{M} \frac{4K_j}{m} \sin^2\left(\frac{kja}{2}\right)}$$

עבור $\frac{kja}{2} \ll 1$:

$$\omega^2 \approx \sum_{j=1}^{M} \frac{\cancel{4}K_j}{m}\left(\frac{kja}{\cancel{2}}\right)^2$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \frac{K_j (ja)^2}{m} k^2$$

$$\Rightarrow \boxed{C_s = a\sqrt{\sum_{j=1}^{M} \frac{K_j j^2}{m}}}$$

ב)

$$\omega^2 = \frac{4K_0}{m}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^p}\sin^2\left(\frac{kja}{2}\right)$$

עבור $\frac{kja}{2} \ll 1$:

$$\left(\frac{kja}{2}\right)^2$$

$$\omega^2 \approx \frac{K_0}{m}\sum_{j=1}^{\infty} k^2a^2 j^{2-p}$$

תחילה נדגיש שניתן להחליף את הסכום ל-$\int$ כי $j=0$ זה לא יתרום שום דבר, ואז המעבר לרצף

$$x \equiv jka \qquad dx = ka\,dj$$

$$j = \frac{x}{ka}$$

$$\Rightarrow (kaj)^2\frac{1}{j^p}dj = x^2\frac{1}{\frac{x^p}{(ka)^p}}\frac{1}{ka}dx$$

$$= x^{2-p}(ka)^{p-1}dx$$

$$\Rightarrow \omega^2 \approx \frac{K_0}{m}(ka)^{p-1}\int_0^{\infty} x^{2-p}dx$$

$$\Rightarrow \omega \propto \sqrt{k^{p-1}} = |k|^{(p-1)/2}$$

וקבוע הפרופורציה הוא $\frac{K_0 a^{p-1}}{m}\int_0^{\infty}x^{2-p}dx$

2 א) נסתכל על הקשר $g(\omega)d\omega = g(k)dk$

$$\Rightarrow g(\omega) = \frac{1}{\frac{d\omega}{dk}}g(k)$$

$g(k)$ צפיפות המצבים במרחב k, שזה קבוע.

בכל יח' אורך a יש

$$\frac{1}{\frac{d\omega}{dk}} = \frac{1}{\frac{a}{2}\omega_0\left|\cos\left(\frac{ka}{2}\right)\right|} = \frac{2}{a\omega_0\sqrt{1-\sin^2\frac{ka}{2}}}$$

$$= \frac{2}{a\sqrt{\omega_0^2 - \omega_0^2\sin^2\frac{ka}{2}}} = \frac{2}{a\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

ולכן למה שחסר זה $\frac{1}{\pi}$, לכן $g(k) = \frac{1}{\pi}$.

ב)

$$\sum_k \omega^2(k) = \sum_k \omega_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

כי $\omega(k)$ סימטרי

$$= 2\omega_0^2 \int_{k=0}^{\frac{\pi}{a}} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right) \overbrace{\frac{1}{\pi}}^{g(k)} dk = \frac{\omega_0^2}{a}$$

$$\Rightarrow \quad C_v \simeq \frac{1}{a}k_B - \frac{\hbar^2\omega_0^2}{12aLk_BT^2}$$

③ יחס הרכיבים

$$\omega^2 = \frac{k_1+k_2}{m} \pm \frac{1}{m}\sqrt{k_1^2+k_2^2+2k_1k_2\cos ka}$$

$k_2(x+1)$

עבור $k_2 \gg k_1$, $x \equiv \frac{k_1}{k_2} \ll 1$:

$$\omega^2 \simeq k_2\frac{x+1}{m} \pm \frac{k_2}{m}\sqrt{x^2+1+2x\cos ka}$$

$\frac{k_2}{m}\left[1 \pm \sqrt{\quad}\right]$

$$\omega^2 \simeq \frac{k_2}{m}\left[1+\frac{k_1}{k_2} \pm \left(1+\frac{k_1}{k_2}\cos ka\right)\right]$$

$1+\frac{k_1}{k_2} - 1 - \frac{k_1}{k_2}\cos ka$

$$\omega_+^2 \simeq \frac{k_2}{m}\left(2+\frac{k_1}{k_2}\cos(ka)+\frac{k_1}{k_2}\right) = \frac{1}{m}\left(2k_2+k_1\cos ka+k_1\right)$$

$$\omega_-^2 \simeq \frac{k_2}{m}\left(\frac{k_1}{k_2}(1-\cos ka)\right) = \frac{k_1}{m}(1-\cos ka)$$

עבור $k_2 \gg k_1$:

$$\begin{pmatrix} k_2 - m\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

עבור $\frac{2}{m}k_2 \approx \omega_+^2$ נקבל

$$\begin{pmatrix} -k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

$$A + B = 0$$
$$\Rightarrow \quad A + B = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} A_+ \\ B_+ \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ועבור $\omega_-^2 \approx 0$:

$$\begin{pmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_- \\ B_- \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_\pm \\ B_\pm \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix}$$

כלומר שוב הפאזה היחסית של המטוטלות הפוכה עבור האופן האופטי. כלומר התנודה הדומיננטית היא של המטוטלה, שוב באופן האקוסטי התנודות הן בין המטוטלות.

כג פו'.