(1) א)

$$U_x|b\rangle = (-1)^{x_b}|b\rangle$$

$$HU_xH|0\rangle = HU_x\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}H\left(|0\rangle-|1\rangle\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(|0\rangle+|1\rangle-\left(|0\rangle-|1\rangle\right)\right)$$

$$=|1\rangle$$

כלומר $\quad P(|1\rangle)=1$

ב)

$$U_x|b0\rangle = (-1)^{x_b}|b0\rangle$$

$$HU_xH|00\rangle = HU_x\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle+|10\rangle\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}H\left(|00\rangle-|11\rangle\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(|00\rangle+|10\rangle-\left(|01\rangle-|11\rangle\right)\right)$$

כלומר ההסתברות ירדה ל-50% מ-100%

(2)

$$U=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\mathbb{1}+i\sin\frac{\varphi}{2}(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})\right)$$

$$U^\dagger=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\mathbb{1}-i\sin\frac{\varphi}{2}(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})\right)$$

$\bar{\sigma}$ הרמיטית $\quad \bar{\sigma}^\dagger=\bar{\sigma}$

$$UXU^\dagger=\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\mathbb{1}+i\sin\frac{\varphi}{2}(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})\right)(\hat{x}\cdot\bar{\sigma})\left(\cos\frac{\varphi}{2}\mathbb{1}-i\sin\frac{\varphi}{2}(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})\right)$$

$$=\frac{1}{4}\Big[(\hat{x}\cdot\bar{\sigma})\cos^2\frac{\varphi}{2}+\sin^2\frac{\varphi}{2}(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})(\hat{x}\cdot\bar{\sigma})(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})$$

$$-i\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}(\hat{x}\cdot\bar{\sigma})(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})+i\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})(\hat{x}\cdot\bar{\sigma})\Big]$$

$$i\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\Big[(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})(\hat{x}\cdot\bar{\sigma})-(\hat{x}\cdot\bar{\sigma})(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})\Big]$$

$$(\hat{n}\cdot\hat{x})\mathbb{1}+i(\hat{n}\times\hat{x})\cdot\bar{\sigma}-\left((\hat{x}\cdot\hat{n})\mathbb{1}+i(\hat{x}\times\hat{n})\cdot\bar{\sigma}\right)$$

$$-\sin\varphi(\hat{n}\times\hat{x})\cdot\bar{\sigma}$$

$$(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})(\hat{x}\cdot\bar{\sigma})(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})=(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})\Big[(\hat{x}\cdot\hat{n})\mathbb{1}+i(\hat{x}\times\hat{n})\cdot\bar{\sigma}\Big]$$

$$=(\hat{x}\cdot\hat{n})(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})+i\underbrace{(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})(\hat{x}\times\hat{n})\cdot\bar{\sigma}}$$

$$=\hat{n}\cdot(\hat{x}\times\hat{n})\mathbb{1}+i(\hat{n}\times(\hat{x}\times\hat{n}))\cdot\bar{\sigma}$$

$$=(\hat{x}\cdot\hat{n})(\hat{n}\cdot\bar{\sigma})+i\,\cancel{\hat{n}\cdot(\hat{x}\times\hat{n})\mathbb{1}}-\hat{n}\times(\hat{x}\times\hat{n})\cdot\bar{\sigma}$$

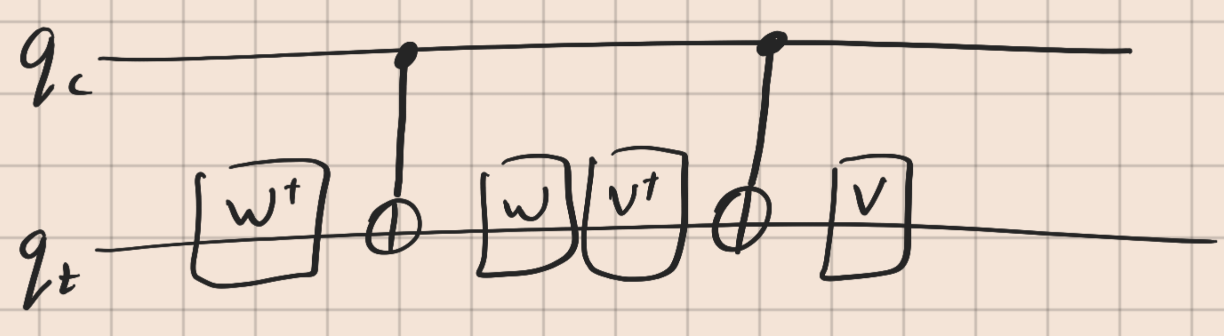
$$=n\cdot(n\times\hat{x})$$
$$x\cdot(n\times n)=0$$

בסה"כ 8

$$\underbrace{\frac{1}{4}\Big[\cos^2\frac{\varphi}{2}\hat{x}-\sin\varphi(\hat{n}\times\hat{x})+\sin^2\frac{\varphi}{2}\left((\hat{x}\cdot\hat{n})\hat{n}-\hat{n}\times(\hat{x}\times\hat{n})\right)\Big]}_{\bar{a}}\cdot\bar{\sigma}$$

ב) ב-U יש 4 פרמטרים חופש,
בצד השני, ל-W,V יש 8 פרמטרים
חופש. עם הדרישה לאוניטריות באה הדרישה
על הדטרמיננטה $|W|=|V|=1$ שמורידה 2
פרמטרים חופש. ככה שנשארנו עם 6 פרמטרים
חופש שזה יותר מהארבע שצריך ל-U
ולכן זה תמיד אפשרי.

ג)



אם $q_c=0$ אז [illegible] מופעל $VV^\dagger WW^\dagger=1$

אם $q_c=1$ אז מופעל U לפי סעיף קודם.

3

$$O_f H^{\otimes n}|0\rangle_n|0\rangle_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle|f(x)\rangle$$

אם נפעיל שוב Hadamard על הקלט:

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{x=0}^{2^n-1}\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{y=0}^{2^n-1}(-1)^{x\cdot y}|y\rangle|f(x)\rangle$$

ונציין אם נמדוד את הקלט נקבל תשובות בהן $x\cdot y=0$ וה-x-ים שבהם זה קורה עדיין מוגדרים ב-a.

לכן נוכל לרשום:

$$\sum\sum\left((-1)^{x\cdot y}+(-1)^{(x\oplus a)\cdot y}\right)|y\rangle|f(x)\rangle$$

וכמו בהרצאה נשאר עם פקטור של $|y\rangle$ שמתאפס עבור כל $a\cdot y\neq 0$

ולכן נשאר עם סכום רק על $\sum_x\sum_{a\cdot y=0}(-1)^{x\cdot y}|y\rangle|f(x)\rangle$

ואם נמדוד את הקלט עדיין נקבל y שמאונך ל-a.