שאלה 1 – סימטריה כדורית

נתונה צפיפות מטען ρ בעלת סימטריה כדורית, כלומר $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$.

א. חשבו את השדה החשמלי באמצעות הנוסחה $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} d^3r'$. בטאו את התוצאה באמצעות המטען $Q(r)$ הנמצא בתוך כדור ברדיוס r שמרכזו בראשית.

ב. חשבו שוב את השדה החשמלי, הפעם באמצעות הביטוי האינטגרלי לחוק גאוס.

ג. חשבו במפורש את הדיפול והקוואדרופול החשמליים.

ד. הוכיחו שכל המולטיפולים מתאפסים פרט למונופול.
הדרכה: התחילו מקליפה כדורית ברדיוס R וצפיפות משטחית אחידה σ, והשתמשו בכך שהפיתוח למולטיפולים מתאר את הפוטנציאל הרחק מהראשית.

ה. מאחר שרק המונופול שונה מאפס, אם נפתח את הפוטנציאל למולטיפולים, נקבל $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r}$.
חשבו את השדה החשמלי שנובע מפוטנציאל זה, והראו שהוא שונה מהתוצאה של סעיפים א ו-ב. איך זה יכול להיות?

א)

$$Q(r) = 4\pi\int_0^r \rho(r)\, r^2\, dr$$

$$\bar{E}(\bar{r}) = \int \frac{\rho(r')\,\hat{e}_{\bar{r}-\bar{r}'}}{|\bar{r}-\bar{r}'|^2}\, d^3r'$$

נסתכל על כל איבר באינטגרל בהחלפה $\bar{r}' \to -\bar{r}'$

$\rho(-\bar{r}') = \rho(\bar{r}') \rightarrow$ ρ סימטרית

$|\bar{r}-\bar{r}'|^2 \rightarrow$ גם לא משתנה

$\hat{e}_{r-r'}$ האיבר היחיד שמשתנה הינו הכיוון

והוא מתהפך, כלומר לכל תרומה ב-$\bar{r}'$ כלשהו תהיה תרומה הפוכה ב-$-\bar{r}'$, אך אם גם השלם יתהפך גם כיוונו לא קרה כלום. ולכן ניתן לסכום על θ,φ ולהישאר עם:

$$\bar{E}(\bar{r}) = 4\pi \int_0^\infty \frac{\rho(r')\,\hat{r}}{|r-r'|^3}\, r'^2\, dr'$$

$$= \cancel{BT}^{=0} + \int \frac{\overbrace{\int 4\pi \rho(r') r'^2\, dr'}^{Q(r')}}{|r-r'|^2}\, dr'$$

כי $\rho=0$ ב-∞

ב) $$\oint \bar E\cdot d\bar S = 4\pi Q_{in}$$

$$\bar E\, \cancel{4\pi} r^2 = \cancel{4\pi}\, Q(r)$$

$$\bar E = \frac{Q(r)}{r^2}\hat r$$

ג) $\bar P$ מתאפס מ"ב כי $\rho(\bar r)$ סימטרית אבל $\bar r$ לא, נראה:

$$\bar P = \int \bar r\rho(\bar r)\,d^3r = \frac12\int_{-\infty}^{\infty}\bar r\rho(\bar r)\,d^3r + \frac12\int_{\infty}^{-\infty}(-\bar r)\rho(-\bar r)(-d^3r)$$

$$= \frac12\int_{-\infty}^{\infty}\bar r\rho(\bar r)\,d^3r - \frac12\int_{-\infty}^{\infty}\bar r\rho(\bar r)\,d^3r = 0$$

בדיוק באותו האופן Q_{ij} מתאפס כי r_ir_j סימטרי, וδ_{ij} סימטרית

$$Q_{ij} = \int dq\,(3r_ir_j - r^2\delta_{ij})$$

$$= \int \rho(\bar r)(3r_ir_j - r^2\delta_{ij})\,d^3r$$

ההבדל בין סעיפים א) ו-ה) הוא סדר הדברים.

בשני המקרים צריך לסכום על פונק' גרין כדי לקבל את φ ולעשות $\bar\nabla$- כדי לקבל את E. ההבדל הוא מה עושים קודם.

ג) נתחיל מהביטוי שקיבלנו בהרצאה לפוטנ' מסימטריה כדורית:

$$\varphi(\bar r) = \frac{4\pi}{r}\int_0^r (r')^2\rho(r')\,dr' + 4\pi\int_r^{\infty} r'\rho(r')\,dr'$$

נסתכל על המקרה הפרטי של קליפה ברדיוס R עם σ

ונפריד לתחומים:

עבור $r > R$ האינטגרל $\int_0^R$ מכיל את הקליפה

ולכן $\rho(r')=0$ בכל r' חוץ מאשר $r'=R$

ולכן האיבר הראשון הוא $\frac{\sigma 4\pi R^2}{r} = \frac{Q}{r}$

והאיבר השני מתאפס כי האינטגרל $\int_r^{\infty}$ לא מכיל את הקליפה

ב-R ולכן בסה"כ $\varphi(r>R) = \frac{Q}{r}$

ועבור $r<R$ האינטגרל $\int_0^r$ לא מכיל את הקליפה

ולכן מתאפס. ואילו האינטגרל $\int_r^{\infty}$ מכיל את הקליפה ולכן:

$$\varphi(r<R) = 4\pi \int_r^{\infty} r'\rho(r')dr' = 4\pi\sigma R = \frac{Q}{R}$$

כעת עפ"י עקרון הס"פ ניתן לחשוב על התפלגות ספרית סימטרית ולהסתכל עליה כעל סכום של קליפות עם התפלגות אחידה שהיא $\sigma(r)$, רק שכעת כאשר מסתכלים על r ספציפי, צריך לשאול מהו Q שבמרחק גדול מ-r הזה שמסתכלים עליו והוא יתן $\frac{Q}{r}$, וגם מסתכלים על המטען שבמרחק קטן יותר מ-r ג"כ גם הוא נותן $\frac{Q}{r}$!

ולכן בסך הכל צריך לסכום על פוטנציאלים $\frac{Q}{r}$

ולכן בסה"כ קיבלנו רק את מומנט המונופול, וכל היתר

כל השאר מתאפסים.

ה)

$$\varphi(\bar{r}) = \frac{Q}{r}$$

$$\bar{E} = -\bar{\nabla}\varphi = -\partial_r\left(\frac{Q}{r}\right)\hat{r} = \frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

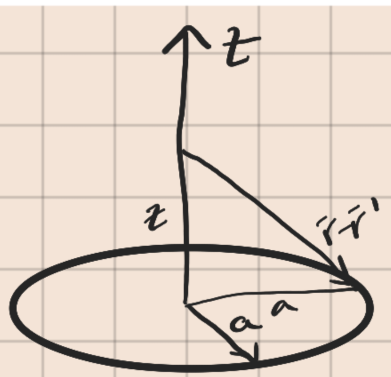
שאלה 2 – מגנוסטטיקה

א. טבעת מוליכה ברדיוס a, עם זרם I, מונחת במישור $x-y$ כשמרכזה בראשית. חשבו את השדה המגנטי לאורך ציר $\hat{\mathbf{z}}$ באמצעות חוק ביו סבר.

ב. השתמשו בחוק אמפר כדי לחשב את השדה המגנטי $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ שיוצר סליל אינסופי הנושא זרם I. רדיוס הסליל הוא a, צירו המרכזי מתלכד עם ציר $\hat{\mathbf{z}}$, וצפיפות כריכותיו ליחידת אורך היא n.

ג. עבור אותו הסליל, חשבו את $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

א)



$$\bar B(\bar r)=\frac{I}{c}\int\frac{d\bar l'\times(\bar r-\bar r')}{|\bar r-\bar r'|^3}$$

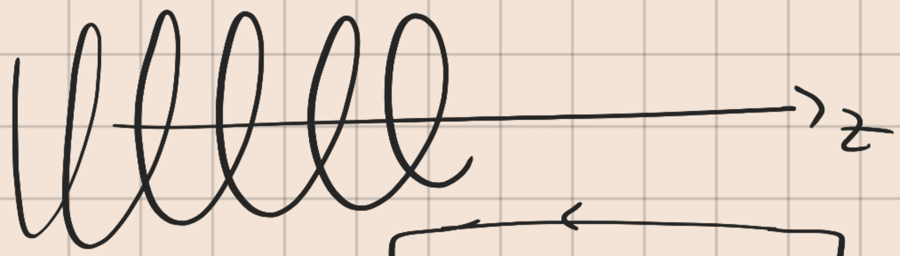
$$\bar B(z)=\frac{I}{c}\int\frac{a\,d\theta\,\hat\theta\times(a\hat r+z\hat z)}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

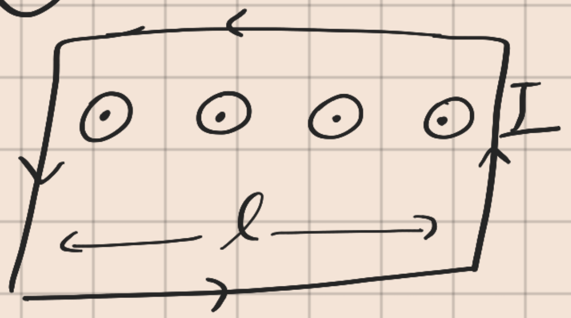
הכיוון $\hat\theta\times\hat z=\hat r$ לא יישאר כלום כי ב θ- תרומה?

מתבטל ורק ה-z

$$\bar B(z)=\frac{2\pi I a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

ב)





$$\oint\bar B\cdot d\bar l=\frac{4\pi}{c}I_{in}$$

$$B(z)\,l=\frac{4\pi}{c}lnI$$

$$B(z)=\frac{4\pi n}{c}I\hat z\text{ - const for } r<a$$

$$=0\quad\text{for } r>a$$

ג) ניקח לולאה ברדיוס r בתוך הסליל, נניח השטח:

$$\int\bar B\cdot d\bar S=\pi r^2 B(z)$$

$$\int(\bar\nabla\times\bar A)\cdot d\bar S=\oint\bar A\cdot d\bar l$$ לפי מש 3 שני צד שווים ל:

$$=\oint\bar A\cdot\underbrace{d\bar l}_{r\,d\theta\,\hat\theta}=A_\theta 2\pi r$$

$$\Rightarrow \quad A_\theta = \frac{2\pi n}{c} I r$$

ומכיוון ש B רק בכיוון $\hat{z}$ זה הרכיב היחיד של $\bar{A}$

ועבור $r>a$:

$$A_\theta \cancel{2\pi r} = \oint \bar{A}\cdot d\bar{l} = \int \bar{B}\cdot d\bar{s} = \pi a^2 \frac{\cancel{4\pi n}}{c} I$$

$$A_\theta = \frac{2\pi a^2 n I}{c r}$$

שאלה 3 – פיתוח הקוואדרופול מטור טיילור

רשמו במפורש את איבר הקוואדרופול החשמלי מהפיתוח של הפוטנציאל לטור טיילור שעשינו בכיתה. מה ההבדל בין הביטוי הזה לבין הקוואדרופול שקיבלנו בעזרת משפט הקוסינוסים? הראו שלמרות ההבדל שני הביטויים שקולים.

מטור טיילור:

$$\frac{1}{2}\sum_{ij} r_i' r_j' \partial_i \partial_j \left(\frac{1}{r}\right)$$

למשל

$$\partial_x \partial_y = \frac{3xy}{r^5} = \partial_y \partial_x$$

ובסה"כ:

$$\frac{3xyx'y'}{r^5} + \frac{3xzx'z'}{r^5} + \frac{3zyz'y'}{r^5}$$

$$+ \frac{x'^2(2x^2-y^2-z^2) + (2y^2-x^2-z^2)y'^2 + (2z^2-y^2-x^2)z'^2}{r^5}$$

נזכור שכל זה בתוך אינטגרל $\int \rho(\bar{r}')d^3r'$

ולכן ננסה להוציא החוצה את כל ה-$\bar{r}$

$x'^2(2x^2-y'^2-z'^2)$

$$\frac{1}{r^5}\Big[3xyx'y' + 3xzx'z' + 3yzy'z'$$

$$+ x^2(2x'^2-y'^2-z'^2) + y^2(2y'^2-x'^2-z'^2) + z^2(2z'^2-x'^2-y'^2)\Big]$$

כעת נוכל לכתוב בצורה הבאה:

$$\frac{1}{2r^5}\sum_{ij} r_i r_j \left(3r_i' r_j' - r'^2\delta_{ij}\right)$$

וזה בדיוק הביטוי שקיבלנו בכיתה מה $(\hat{r}'\cdot\hat{r})$ עד כדי

לדחוף הכל לתוך האינטגרל $\int \rho(\vec{r}')d^3r'$ כדי לקבל את $\Phi(\vec{r})$.

$$\frac{1}{2r^5}\sum_{ij} r_i r_j \underbrace{\int\left[3r_i' r_j' - r'^2\delta_{ij}\right]\rho(\vec{r}')\,d^3r'}_{Q_{ij}}$$

שאלה 4 – אינווריאנטיות להזזות

א. הראו במפורש מהו התנאי שעל צפיפות המטען $\rho(\mathbf{r})$ לקיים כדי שהדיפול החשמלי יהיה אינווריאנטי להזזות. כלומר, ש-$\mathbf{p}$ לא ישתנה אם נחליף את $\rho(\mathbf{r})$ ב-$\rho(\mathbf{r}+\mathbf{a})$.

ב. הראו במפורש באילו תנאים הקוואדרופול החשמלי אינווריאנטי להזזות.

ג. מולטיפול קרטזי מסדר k הוא אינטגרל מהצורה $M_{i_1 i_2 \dots i_k} = \int r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_k}\rho(\mathbf{r})d^3r$. לדוגמא, $M_{1123} = \int x^2 yz\rho(\mathbf{r})d^3r$ הוא מולטיפול קרטזי מסדר 4.
הראו שאם כל המולטיפולים הקרטזיים מסדר נמוך מ-k מתאפסים, אז כל מולטיפול קרטזי מסדר k אינווריאנטי להזזות.

א)

$$\bar{p} = \int dq\,\bar{r}\,d^3r = \int \bar{r}\rho(\bar{r})\,d^3r$$

$$\to \int \bar{r}\rho(\bar{r}+\bar{a})\,d^3r = \int(\bar{r}-\bar{a})\rho(\bar{r})\,d^3r = \bar{p} - \bar{a}\int\rho(\bar{r})\,d^3r$$

$$= \bar{p} - \bar{a}Q \overset{!}{=} \bar{p} \Rightarrow \bar{a}Q = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{Q=0}$$

כלומר המומנט הקודם מתאפס.

ב)

$$Q_{ij} = \int\left(3r_i r_j - r^2\delta_{ij}\right)\rho(\bar{r})\,d^3r$$

$$= \int\left(3(r_i-a_i)(r_j-a_j) - (\bar{r}-\bar{a})^2\delta_{ij}\right)\rho(\bar{r})\,d^3r$$

$$= \int\left\{3\left(r_i r_j - r_i a_j - a_i r_j + a_i a_j\right) - \delta_{ij}\left[(r_1-a_1)^2 + (r_2+a_2)^2 + (r_3+a_3)^2\right]\rho(\bar{r})\right.$$

$$r_1^2 - 2r_1a_1 + a_1^2$$
$$+ r_2^2 - 2r_2a_2 + a_2^2$$
$$+ r_3^2 - 2r_3a_3 + a_3^2$$

נשים לב שיש איברים מהצורה const, const·r

בתוך האינטגרל שמוכפלים ב-$\rho(\bar r)$ אם נהפוך את סדר

הסכימה והאינטגרציה נקבל שאחרי ההזזה:

$$Q'_{ij} = Q_{ij} + const\cdot\int \bar r\rho(\bar r)d^3r + const\cdot\int \rho(\bar r)d^3r = Q_{ij}$$

ולכן שני המומנטים הראשונים צריכים להתאפס.

ג) בדיוק באותו אופן הביטוי

$$(r_{i_1}-a_i)(r_{i_2}-a_i)(r_{i_3}-a_i)\cdots(r_{i_k}-a_i)$$

יפתח ואז כדי שזה יהיה שווה ל $r_{i_1} r_{i_2} r_{i_3}\cdots r_{i_k}$

כל האיברים מסדרים נמוכים יותר

r_{i_j}

$r_{i_j} r_{i_{j+1}}$

$\vdots$

$r_{i_j}\cdots r_{i_{j+k-1}}$

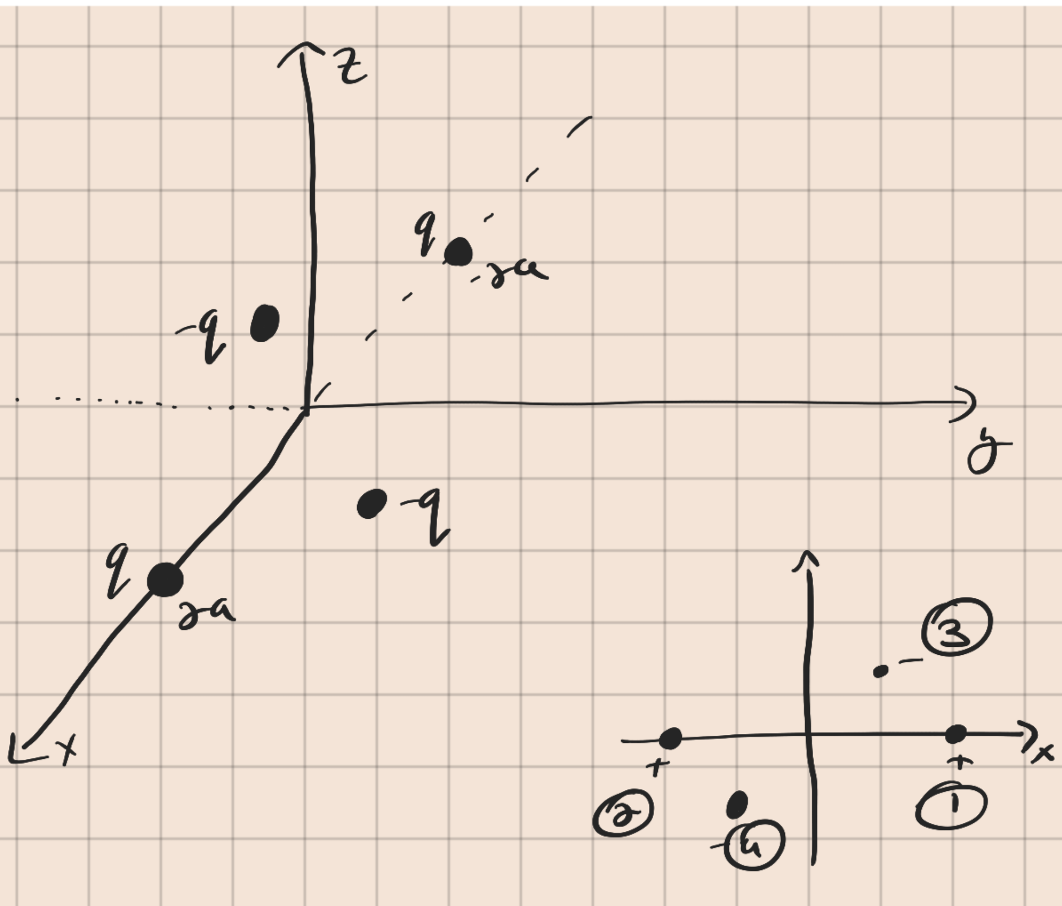
צריכים להתאפס ובתוך האינטגרל עם $\rho(\bar r)d^3r$

זה בדיוק כל המומנטים עד סדר k-1 שצריכים

להתאפס.

שאלה 5 – הצירים הראשיים של קוואדרופול חשמלי

בכל אחת מהנקודות $\pm(2a,0,0)$ מוצב מטען q, ואילו בכל אחת מהנקודות $\pm(a,a,0)$ מוצב מטען $-q$. מצאו את הצירים הראשיים של הקוואדרופול ביחס לנקודה כלשהי $\mathbf{r}_0$.



קל לראות שציר $\hat{z}$ כבר ציר ראשי, לכן

צריך ללכסן רק את הבלוק של xy ב Q_{ij}

$$Q_{xy} = 3(2a)\cdot 0\, q + 3(-2a)\cdot 0\,(q)$$

$$+ 3aa(-q) + 3(-a)(-a)(-q) = -6a^2 q = Q_{yx}$$

$$Q_{xx} = \left[3(2a)^2 - (2a)^2\right] q \quad (1) \to 8a^2 q$$

$$+ \left[3(2a)^2 - (2a^2)\right] q \quad (2) \to 8a^2 q$$

$$+ \left[\underset{3}{3a^2} - \underset{-2}{(\sqrt{2}a)^2}\right](-q) \quad (3) \to -a^2 q$$

$$+ \left[3a^2 - 2a^2\right] - q \quad (4) \to -a^2 q$$

$$= 14a^2 q$$

$$Q_{yy} = 2\left[0 - (2a)^2\right] q \to -8a^2 q$$

$$+ 2\left[3a^2 - 2a^2\right](-q) \to -2a^2 q$$

$$= -10a^2 q \qquad \Rightarrow Q_{zz} = -4a^2 q$$

$$\Rightarrow Q_{ij} = a^2 q \begin{pmatrix} 14 & -6 & 0 \\ -6 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 14-\lambda & -6 \\ -6 & -10-\lambda \end{vmatrix} = -(10+\lambda)(14-\lambda) - 36$$

$$= \underset{-44}{-140 - 36} + \underset{-4\lambda}{10\lambda - 14\lambda} + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 176 = 0$$

$$\hookrightarrow \lambda_{\pm} = 2 \pm 6\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \underline{\lambda_+:} \quad \begin{pmatrix} 12-6\sqrt{5} & -6 \\ -6 & -12-6\sqrt{5} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2+\sqrt{5} \\ -6 & -12-6\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$R_2 + 6R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+\sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow a = (-2-\sqrt{5})b$$

$$\Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda - 8}$ $$\begin{pmatrix} 12+6\sqrt{5} & -6 \\ -6 & -12+6\sqrt{5} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2-\sqrt{5} \\ -6 & -12+6\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a = -2+\sqrt{5}\, b$$

$$\Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} -2+\sqrt{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ וכמובן e

ולסיכום לכל $\vec{r}_0$ הפתרונות יהיו $\underline{{}_{o}V_i + \vec{r}_0}$