קוונטים 2 – תרגול 9
תורת הפרעות תלויה בזמן

מתרגל: זמיר הלר-אלגזי

תוכן העניינים

1 תורת הפרעות תלויה בזמן **2**
1.1 כלל הזהב של פרמי 3
2 תרגילים **4**

1 תורת הפרעות תלויה בזמן

נניח שאנחנו מתסכלים על מערכת ידועה H_0 (סטטית) עם הפרעה $V\left(t\right)$ *תלויה בזמן*,

$$H = H_0 + V\left(t\right) \tag{1.1}$$

כאשר נסמן ב-$\left|n\right\rangle$ את המ"ע של H_0 והאנרגיות העצמיות הן $H_0\left|n\right\rangle = E_n\left|n\right\rangle$ (לא נטרח עם חזקות $^{(0)}$ כאן).

נסמן ב-$\left|\psi\left(t\right)\right\rangle$ את המ"ע של H (בתמונת שרדינגר), ונבטא אותם באמצעות $\left\{\left|n\right\rangle\right\}$ כרגיל רק עם **מקדמים תלויים בזמן**,

$$\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = \sum_n c_n\left(t\right)\left|n\left(t\right)\right\rangle = \sum_n c_n\left(t\right)e^{-iE_nt/\hbar}\left|n\right\rangle \tag{1.2}$$

מטרתנו היא למצוא את $c_n\left(t\right)$. נציב במשוואת שרדינגר,

$$\begin{gathered} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = H\left|\psi\left(t\right)\right\rangle = \left(H_0+V\left(t\right)\right)\left|\psi\left(t\right)\right\rangle \\ \sum_n\left[i\hbar\dot{c}_n + \cancel{E_nc_n}\right]e^{-iE_nt/\hbar}\left|n\right\rangle = \sum_n c_ne^{-iE_nt/\hbar}\left[\cancel{E_n}+V\left(t\right)\right]\left|n\right\rangle \\ i\hbar\sum_n\dot{c}_ne^{-iE_nt/\hbar}\left|n\right\rangle = \sum_n c_ne^{-iE_nt/\hbar}V\left(t\right)\left|n\right\rangle \end{gathered} \tag{1.3}$$

נפעיל $\left\langle m\right|$ ונקבל

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}c_m = \sum_n \left\langle m\right|V\left(t\right)\left|n\right\rangle e^{i\omega_{mn}t}c_n\left(t\right)} \tag{1.4}$$

כאשר $\omega_{mn}\equiv\left(E_m-E_n\right)/\hbar$. זה סט של משוואות דיפרנציאליות מצומדות שפתרונן הוא *מדויק*.

בפועל קשה מאוד לפתור את משוואה (1.4) במדויק, ולכן נפתח את המקדמים בטור

$$c_n\left(t\right) = c_n^{(0)} + c_n^{(1)} + c_n^{(2)} + \ldots \tag{1.5}$$

הצבה והתאמת החזקות תניב לנו ש-$\dot{c}_m^{(N+1)}\sim Vc_n^{(N)}$, כלומר ההפרעות מסדר גבוה יותר ניתנות מהסדרים הנמוכים יותר.

נניח מצב התחלתי למערכת $\left|\psi\left(0\right)\right\rangle = \left|n\right\rangle$. בסדר אפס המערכת לא תתפתח בזמן ולכן $c_l^{(0)}\left(t\right)=\delta_{ln}$.

נציב במשוואה (1.4) ונקבל שבסדר ראשון בתורת ההפרעות:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}c_m^{(1)}\left(t\right) = \left\langle m\right|V\left(t\right)\left|n\right\rangle e^{i\omega_{mn}t} \tag{1.6}$$

לכן הסיכוי למצוא את המערכת במצב $\left|m\right\rangle$ הוא

$$\boxed{P_{n\to m}\left(t\right) = \left|c_m\right|^2 = \left|\frac{1}{i\hbar}\int_0^t \left\langle m\right|V\left(\tau\right)\left|n\right\rangle e^{i\omega_{mn}\tau}\,\mathrm{d}\tau\right|^2} \tag{1.7}$$

1.1 כלל הזהב של פרמי

עבור הפרעה *מחזורית בזמן*,

$$V\left(t\right)=\mathcal{V}e^{i\omega t}+\mathcal{V}^{\dagger}e^{-i\omega t}=\mathcal{V}e^{i\omega t}+\mathrm{h.c.} \tag{1.8}$$

ועבור זמנים ארוכים $t\to\infty$, **קצב המעברים** מ-$|i\rangle$ ל-$\langle f|$ מחושב לפי **כלל הזהב של פרמי**:

$$\boxed{\Gamma_{i\to f}=\frac{2\pi}{\hbar}\left|\left\langle f|\mathcal{V}|i\right\rangle\right|^{2}\delta\left(E_{f}-E_{i}\mp\hbar\omega\right)} \tag{1.9}$$

כאשר סימן ה-$(-)$ מתאים ל**בליעה** (נובע מ-$\mathcal{V}^{\dagger}e^{-i\omega t}$) וסימן ה-$(+)$ מתאים ל**פליטה** (נובע מ-$\mathcal{V}e^{i\omega t}$). פונקצית הדלתא אוכפת שימור אנרגיה:

$$E_{f}=E_{i}\pm\hbar\omega \tag{1.10}$$

אם המצב הסופי (או ההתחלתי) נבחר מתוך רצף של מצבים, יש לקחת בחשבון את צפיפות המצבים כאשר סוכמים על $\Gamma_{i\to f}$.

2 תרגילים

תרגיל 1

מערכת שתי רמות $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ מתוארת באמצעות ההמילטוניאן

$$H = \epsilon_1 |1\rangle\langle 1| + \epsilon_2 |2\rangle\langle 2| \tag{2.1}$$

מוסיפים הפרעה קטנה

$$V(t) = \gamma e^{i\omega t} |1\rangle\langle 2| + \text{h.c.} \tag{2.2}$$

כאשר γ קבוע ממשי. מצב המערכת בזמן כלשהו מסומן ע"י

$$|\psi(t)\rangle = c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

נתון כי בזמן $t=0$ המערכת נמצאת במצב $c_1(0)=1$. מה ההסתברות למצוא את המערכת במצב $|2\rangle$ בזמן כלשהו? השוו את הפתרון שקיבלתם לפתרון המדויק.

בסדר ראשון בתורת ההפרעות נקבל

$$P_{1\to 2} = |c_2(t)|^2 = \left| \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \langle 2|V(\tau)|1\rangle e^{i\omega_{21}\tau} \, \mathrm{d}\tau \right|^2 \tag{2.4}$$

כאשר $\omega_{21} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\hbar}$. נחשב את האינטגרל,

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle 2|V(\tau)|1\rangle e^{i\omega_{21}\tau} \, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \gamma e^{-i(\omega-\omega_{21})\tau} \, \mathrm{d}\tau = \frac{\gamma}{-i(\omega-\omega_{21})} e^{-i(\omega-\omega_{21})\tau} \Big|_0^t \\ = \frac{\gamma}{\omega-\omega_{21}} \cdot \frac{1-e^{-i(\omega-\omega_{21})t}}{i} \\ = \frac{2\gamma}{\omega-\omega_{21}} \cdot \frac{e^{i(\omega-\omega_{21})t/2} - e^{-i(\omega-\omega_{21})t/2}}{2i} e^{-i(\omega-\omega_{21})t/2} \\ = \frac{2\gamma}{\omega-\omega_{21}} \sin\left(\frac{\omega-\omega_{21}}{2} t\right) e^{-i(\omega-\omega_{21})t/2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

ולכן

$$\boxed{P_{1\to 2} = \frac{4\gamma^2}{\hbar^2 (\omega-\omega_{21})^2} \sin^2\left(\frac{\omega-\omega_{21}}{2} t\right)} \tag{2.6}$$

הפתרון המדויק מתקבל מפתרון המד"ר

$$i\hbar \dot{c}_m = \sum_n \langle m|V(t)|n\rangle e^{i\omega_{mn}t} c_n(t) \tag{2.7}$$

כאשר $\omega_{mn} \equiv \frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{\hbar}$. בכתיב מטריצות, עלינו לפתור

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma e^{i\Delta\omega t} \\ \gamma e^{-i\Delta\omega t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

כאשר $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_{21}$. את הבעיה הזו פתרנו בעבר באמצעות טרנספורמצית סיבוב ומעבר למערכת מסתובבת. הפתרון הוא **נוסחת רבי**,

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\gamma^2/\hbar^2}{\gamma^2/\hbar^2 + (\omega - \omega_{21})^2/4}\sin^2\left(\left[\frac{\gamma^2}{\hbar^2} + \frac{(\omega - \omega_{21})^2}{4}\right]^{1/2} t\right) \tag{2.9}$$

עבור הפרעה קטנה $\gamma \ll \hbar\Delta\omega$ אנחנו רואים שנוסחת רבי מתלכדת עם הפתרון ההפרעתי שקיבלנו.

תרגיל 2

חלקיק בעל מסה m ומטען q נתון בבור פוטנציאל אינסופי, במימד אחד, בין $x=0$ ל-$x=L$. בזמן $t=0$ הוא במצב היסוד, $n=1$. מפעילים שדה חשמלי אוסצילטורי,

$$E(t)=E_0\cos\omega t \tag{2.10}$$

מהי ההסתברות שהחלקיק יצא במצב $n=2$ בזמן $t>0$?
ניתן להניח $\hbar\omega+\Delta \ll |\hbar\omega-\Delta|$ כאשר Δ היא אנרגית העירור הראשונה. יש לקרב בהתאם. אין צורך לפתור אינטגרלים מרחביים, סמנו אותם באות כרצונכם.

המערכת הלא-מופרעת היא בור פוטנציאל אינסופי, עם מ"ע ואנרגיות עצמיות מתאימות

$$\langle x|n\rangle=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\qquad E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}n^2\qquad(n=1,2,\ldots) \tag{2.11}$$

השדה החשמלי מתואר ע"י ההפרעה

$$V(t)=-qE_0x\cos(\omega t) \tag{2.12}$$

ולכן ההסתברות למצוא את החלקיק ברמה $|2\rangle$ היא

$$P_{1\to2}(t)=\left|\frac{1}{i\hbar}\int_0^t\langle2|V(\tau)|1\rangle e^{i\omega_{21}\tau}\,\mathrm{d}\tau\right|^2 \tag{2.13}$$

נזהה שאנרגית העירור הראשונה היא $\Delta\equiv E_2-E_1=\hbar\omega_{21}=3\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$. נחשב את אלמנט המטריצה

$$\langle2|V(\tau)|1\rangle=-qE_0\cos(\omega\tau)\,\langle2|x|1\rangle=-qE_0\cos(\omega\tau)\underbrace{\frac{2}{L}\int_0^L x\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x}_{K} \tag{2.14}$$

כאשר סימנו את האינטגרל המרחבי ב-$K\equiv\langle2|x|1\rangle$. נציב בחזרה ונפתור את האינטגרל על הזמן,

$$\begin{aligned}P_{1\to2}&=\left|\frac{qE_0K}{\hbar}\int_0^t\cos(\omega\tau)e^{i\omega_{21}\tau}\,\mathrm{d}\tau\right|^2=\left|\frac{qE_0K}{\hbar}\int_0^t\frac{e^{i\omega\tau}+e^{-i\omega\tau}}{2}e^{i\omega_{21}\tau}\,\mathrm{d}\tau\right|^2\\&=\left|\frac{qE_0K}{2\hbar}\left[\frac{e^{i(\omega+\omega_{21})t}-1}{i\left(\omega+\frac{\Delta}{\hbar}\right)}-\frac{e^{-i(\omega-\omega_{21})t}-1}{i\left(\omega-\frac{\Delta}{\hbar}\right)}\right]\right|^2\end{aligned} \tag{2.15}$$

מכיוון ש-$\left|\omega-\frac{\Delta}{\hbar}\right|\gg\omega+\frac{\Delta}{\hbar}$ האיבר הראשון בסוגריים זניח ולכן נזרוק אותו ונקבל

$$\boxed{P_{1\to2}\simeq\left|\frac{qE_0K}{2\hbar}\left[\frac{e^{-i(\omega-\omega_{21})t}-1}{i\left(\omega-\frac{\Delta}{\hbar}\right)}\right]\right|^2=\left(\frac{qE_0K}{\hbar\omega-\Delta}\right)^2\sin^2\left(\frac{\omega-\frac{\Delta}{\hbar}}{2}t\right)} \tag{2.16}$$

זה מתאים בדיוק לתוצאת השאלה הקודמת.

תרגיל 3 (האפקט הפוטואלקטרי)

אטום מימן נמצא במצב היסוד תחת השפעת שדה אלקטרומגנטי חלש המתנדנד בתדירות ω,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\mathbf{A}_0\cos\left(\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}-\omega t\right) \tag{2.17}$$

א. כתבו את ההמילטוניאן של המערכת תחת ההנחה של שדה חלש, ותדירות המתאימה לאנרגית היינון.

ב. חשבו את קצב פליטת **האלקטרונים** עבור גלאי בעל מפתח זוויתי $d\Omega$.

א. ההמילטוניאן של אלקטרון (מטען $q=-e$) הוא

$$H=\frac{\left[\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right]^2}{2m}-\frac{e^2}{r}+g_e\frac{e}{2mc}\mathbf{S}\cdot\mathbf{B} \tag{2.18}$$

נפתח את הסוגריים כפי שעשינו בתרגול הקודם ונזניח את A^2 (שדה חלש)

$$H\simeq\underbrace{\frac{p^2}{2m}-\frac{e^2}{r}}_{H_0}+\underbrace{\frac{e}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{p}}_{V(t)}+\cancelto{0}{g_e\frac{e}{2mc}\mathbf{S}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})} \tag{2.19}$$

אנחנו מזניחים את האינטראקציה של השדה המגנטי עם הספין כי היא זניחה ביחס ל-$V(t)$ – נשים לב ש-$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\sim\frac{\omega}{c}A_0$ (במילים אחרות – מספר הגל של הפוטון הוא ω/c), לכן היחס בין האיברים הוא

$$\frac{g_e\frac{e}{2mc}\mathbf{S}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A})}{\frac{e}{mc}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{p}}\sim\frac{\hbar\omega}{cp} \tag{2.20}$$

היחס הזה מאוד קטן כאשר ω מתאים לאנרגיית היינון, שכן אז

$$\hbar\omega=E_\gamma\sim-E_{\mathrm{GS}}\sim\frac{e^2}{a_0}\implies\frac{\hbar\omega}{c}\sim\frac{e^2}{ca_0} \tag{2.21}$$

ואילו את התנע של האלקטרון אפשר למצוא מהמשפט הויריאלי $\langle T\rangle=-\frac{1}{2}\langle V\rangle$:

$$\frac{p^2}{2m}\sim\langle T\rangle=-\frac{1}{2}\langle V\rangle\sim-\frac{1}{2}E_{\mathrm{GS}}\sim\frac{e^2}{2a_0}\implies p\sim\sqrt{\frac{me^2}{a_0}} \tag{2.22}$$

אנחנו כבר רואים שמכיוון ש-$E_{\mathrm{GS}}\sim 10\,\mathrm{MeV}$ ואילו $m_e\sim 500\,\mathrm{keV}/c^2$ היחס ביניהם זניח. לחילופין, אפשר לראות כי

$$\frac{\hbar\omega}{cp}\sim\sqrt{\frac{e^2/a_0}{mc^2}}=\sqrt{\frac{e^4}{\hbar^2c^2}}=\frac{e^2}{\hbar c}\equiv\alpha\simeq\frac{1}{137}\ll 1 \tag{2.23}$$

כאשר α הוא קבוע המבנה הדק.

ב. המצב ההתחלתי של האלקטרון: האלקטרון נמצא ברמת היסוד של אטום מימן, ולכן

$$E_i = E_{\mathrm{GS}} = -\frac{e^2}{2a_0}, \qquad |i\rangle = |100\rangle\,, \qquad \psi_i\left(\mathbf{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0} \tag{2.24}$$

המצב הסופי של האלקטרון: האלקטרון מיונן ולכן חלקיק חופשי, נניח עם מספר גל $\mathbf{k}$, ותחום בקופסא בנפח $V = L^3$,

$$E_f = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \qquad |f\rangle = |\mathbf{k}\rangle\,, \qquad \psi_f\left(\mathbf{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{2.25}$$

הפוטון המיינן הוא בעל אנרגיה $E_\gamma = \hbar\omega$ ולכן משימור אנרגיה אנחנו יכולים למצוא את k,

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E_f = E_i + \hbar\omega \implies k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m\left(E_i + \hbar\omega\right)} \equiv k_f \tag{2.26}$$

כלומר לאלקטרון המיונן מספר גל $\mathbf{k} = k_f \hat{\mathbf{k}}$, ועלינו יהיה לסכום על כל הכיוונים האפשריים של $\hat{\mathbf{k}}$ ב-$\mathrm{d}\Omega$.

ניגש לחישוב ההפרעה: נשים לב שאורכי הגל של הפוטון ארוכים מאוד ביחס לאלקטרון במימן,

$$\frac{\omega}{c} r \sim \frac{e^2}{\hbar c a_0} \cdot a_0 = \alpha \ll 1 \tag{2.27}$$

ולכן נעבוד בקירוב הדיפול ונזניח $\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r} \ll 1$. אם כך ההפרעה היא

$$V\left(t\right) = \frac{e}{mc}\mathbf{A}_0\cdot\mathbf{p}\cos\left(\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r} - \omega t\right) \simeq \frac{e}{2mc}\mathbf{A}_0\cdot\mathbf{p}e^{i\omega t} + \mathrm{h.c.} \tag{2.28}$$

נזהה $\mathcal{V}^\dagger = \frac{e}{2mc}\mathbf{A}_0\cdot\mathbf{p}$, ונשתמש בכלל הזהב של פרמי לבליעה (של הפוטון)

$$\Gamma_{100\to\mathbf{k}} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\langle\mathbf{k}|\mathcal{V}^\dagger|100\rangle\right|^2 \delta\left(E_f - E_i - \hbar\omega\right) \tag{2.29}$$

שימו לב שאין צורך באיבר הצמוד ההרמיטי כי הוא מתאים לפליטה, שאינה פיזיקלית בבעיה הזו. נחשב את אלמנט המטריצה בקירוב הדיפול,

$$\langle\mathbf{k}|\mathcal{V}|100\rangle = \frac{e}{2mc}\mathbf{A}_0\cdot\langle\mathbf{k}|\mathbf{p}|100\rangle = \frac{e\hbar}{2mc}\mathbf{A}_0\cdot\mathbf{k}\langle\mathbf{k}|100\rangle \tag{2.30}$$

כלומר עלינו לחשב את פונקצית הגל במרחב התנע, זה טרנספורם פורייה

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{k}|100\rangle &= \int \langle\mathbf{k}|\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}|100\rangle\,\mathrm{d}^3x = \frac{2\pi}{\sqrt{V}}\int e^{ik_f r\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}}e^{-r/a_0}r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\left(\cos\theta\right) \\
&= 2\sqrt{\frac{\pi}{Va_0^3}}\int\frac{e^{ik_f r} - e^{-ik_f r}}{ik_f r}e^{-r/a_0}r^2\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{2}{ik_f}\sqrt{\frac{\pi}{Va_0^3}}\int_0^\infty r\left(e^{-r\left(\frac{1}{a_0} - ik_f\right)} - e^{-r\left(\frac{1}{a_0} + ik_f\right)}\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{2}{ik_f}\sqrt{\frac{\pi}{Va_0^3}}\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{a_0} - ik_f\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{1}{a_0} + ik_f\right)^2}\right] = \frac{2}{ik_f}\sqrt{\frac{\pi}{Va_0^3}}\frac{4ik_f/a_0}{\left(\frac{1}{a_0^2} + k_f^2\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{\pi a_0^3}{V}}\frac{8}{\left[1 + \left(k_f a_0\right)^2\right]^2}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

לכן

$$\langle \mathbf{k}|\mathcal{V}|100\rangle = \frac{4e\hbar}{mc}\sqrt{\frac{\pi a_0^3}{V}}\frac{\mathbf{A}_0\cdot\mathbf{k}}{\left[1+(k_f a_0)^2\right]^2} \tag{2.32}$$

בכך סיימנו לחשב את $\Gamma_{100\to\mathbf{k}}$ עבור תנע $\mathbf{k}$ מסוים. כעת עלינו לסכום על כל האפשרויות,

$$\Gamma = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int \Gamma_{100\to\mathbf{k}}\,\mathrm{d}^3k = \frac{V}{(2\pi)^3}\cdot\frac{2\pi}{\hbar}\int |\langle \mathbf{k}|\mathcal{V}|100\rangle|^2\,\delta\left(E_f - E_i - \hbar\omega\right)k^2\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}\Omega \tag{2.33}$$

כדי לפתור את האינטגרל עלינו רק לעבור משתנים בפונקצית דלתא, $\delta\left[f\left(x\right)\right] = \frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x_0)|}$:

$$\delta\left(E_f - E_i - \hbar\omega\right) = \delta\left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(k^2 - k_f^2\right)\right] = \frac{m}{\hbar^2 k_f}\delta\left(k - k_f\right) \tag{2.34}$$

קיבלנו

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{V}{(2\pi)^3}\cdot\frac{2\pi}{\hbar}\int |\langle \mathbf{k}|\mathcal{V}|100\rangle|^2\,\frac{m}{\hbar^2 k_f}\delta\left(k-k_f\right)k^2\,\mathrm{d}k \\ &= \frac{V}{(2\pi)^2}\cdot\frac{1}{\hbar}\left(\frac{4e\hbar}{mc}\right)^2\frac{\pi a_0^3}{V}\frac{(\mathbf{A}_0\cdot\mathbf{k})^2}{\left[1+(k_f a_0)^2\right]^4}\cdot\frac{m}{\hbar^2 k_f}\cdot k_f^2\end{aligned} \tag{2.35}$$

ולכן

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{4}{\pi\hbar}\frac{a_0^3 e^2}{mc^2}\frac{k_f^3 A_0^2}{\left[1+(k_f a_0)^2\right]^4}\cos^2\theta} \tag{2.36}$$

כאשר θ היא הזווית בין $\mathbf{A}_0$ ו-$\mathbf{k}$. שימו לב שאם הגלאי בזווית $\theta = \pi/2$ לא נקבל אלקטרונים (כמצופה, זה בניצב לכיוון השדה), ושהנפח הסופי V יצטמצם בחישוב.

תרגיל 4

נתון אוסצילטור הרמוני איזוטרופי דו-מימדי בעל תדירות ω, מטען q ומסה m. בזמן $t=0$ מפעילים שדה חשמלי

$$\mathbf{E}\left(t\right)=E_0e^{-\gamma t}\hat{\mathbf{x}} \tag{2.37}$$

אם האוסצילטור נמצא במצב היסוד בזמן $t=0$, מהי ההסתברות שבזמן $t>0$ הוא ימדד במצב $|n_xn_y\rangle=|ab\rangle$, עבור כל ערכי (a,b)?

ההפרעה של השדה החשמלי מתוארת ע"י $V\left(t\right)=-qE_0e^{-\gamma t}x$. ההסתברות למצוא את המערכת במצב $|ab\rangle$ בזמן t היא

$$P_{ab}\left(t\right)=\left|\frac{1}{i\hbar}\int_0^t\left\langle ab|qE_0e^{-\gamma t'}x|00\right\rangle e^{i\left(E_{ab}-E_{00}\right)t'/\hbar}\,\mathrm{d}t'\right|^2 \tag{2.38}$$

מכיוון ש-$x=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a_x^\dagger+a_x\right)$ המצב הסופי יכול להיות רק $|ab\rangle=|10\rangle$ מכללי הברירה. הפרש האנרגיות הוא $E_{10}-E_{00}=\hbar\omega$. לכן

$$\begin{aligned}
P_{10}\left(t\right)&=\left|\frac{qE_0}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\int_0^t e^{-\gamma t'}e^{i\omega t'}\,\mathrm{d}t'\right|^2=\frac{\left(qE_0\right)^2}{2m\hbar\omega}\left|\frac{1}{\gamma-i\omega}\left(e^{-\left(\gamma-i\omega\right)t}-1\right)\right|^2\\
&=\frac{\left(qE_0\right)^2}{2m\hbar\omega}\frac{1}{\gamma^2+\omega^2}\left[\left(e^{-\gamma t}\cos\omega t-1\right)^2+e^{-2\gamma t}\sin^2\omega t\right]\\
&=\frac{\left(qE_0\right)^2}{2m\hbar\omega}\frac{1}{\gamma^2+\omega^2}\left[1+e^{-2\gamma t}-2e^{-\gamma t}\cos\omega t\right]
\end{aligned} \tag{2.39}$$