

תרגיל בית 1 | אלקטרומגנטיות אנליטית

אלון נר גאון

27 באוקטובר 2022

שאלה 1 (א)

$$\begin{aligned} A \times (B \times C) &= \varepsilon_{ijk} A_j (B \times C)_k \\ &= \varepsilon_{ijk} A_j (\varepsilon_{klm} B_l C_m) \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} A_j B_l C_m \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) A_j B_l C_m \\ &= A_m B_l C_m - A_l B_l C_m \\ &= \boxed{(A \cdot C) B - C (A \cdot B)} \end{aligned}$$

(ב)

$$\begin{aligned} (A \times B) \cdot C &= \varepsilon_{ijk} A_j B_k C_i \\ \varepsilon \text{ is cyclic} \Rightarrow &= \varepsilon_{kij} A_j B_k C_i \\ &= \boxed{(B \times C) \cdot A} \end{aligned}$$

(ג)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (A \times B) &= \partial_i \varepsilon_{ijk} A_j B_k \\ &= \varepsilon_{ijk} (\partial_i A_j B_k + A_j \partial_i B_k) \end{aligned}$$

כאן הסדר חשוב כי חשוב לזכור את מי אנחנו גוזרים, באיבר השני נשים לב כי jik פרמוטציה אנטי-ציקלית של האפסילון של לוי צ'ויטה ולכן הוא יקבל סימן מינוס:

$$= \boxed{(\nabla \times A) \cdot B - A \cdot (\nabla \times B)}$$

(ד)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times A) &= \partial_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j A_k \end{aligned}$$

כאן מדובר בסכום של איבר אנטי סימטרי (ε_{ijk}) באיבר סימטרי $(\partial_i \partial_j)$ ולכן התוצאה מייד 0.

(ה)

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\Phi A) &= \partial_i (\Phi A)_i \\
&= \partial_i \Phi_i A_i + \Phi_i \partial_i A_i \\
&= \boxed{\nabla \cdot \Phi A + \Phi \nabla \cdot A}
\end{aligned}$$

(ו)

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\Phi A) &= \varepsilon_{ijk} \partial_j (\Phi A)_k \\
&= \boxed{\nabla \times \Phi A + \Phi \nabla \times A}
\end{aligned}$$

שאלה 2 (א) ע"י ההגדרה של פונק' הדלתא:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \delta(kx) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x') \frac{dx'}{|k|} = \frac{1}{|k|} \\
&\Downarrow \\
\delta(kx) &= \delta\left(\frac{x}{|k|}\right)
\end{aligned}$$

(ב) נעשה אינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned}
\int x \frac{d}{dx} \delta(x) dx &= x \delta(x) - \int \delta(x) dx = \cancel{x \delta(x)} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int \delta(x) dx \\
&= - \int \delta(x) dx
\end{aligned}$$

(ג) ע"י אינטגרציה:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Theta'(x) dx = \Theta(\varepsilon) - \Theta(-\varepsilon) = 1 - 0 = 1$$

זה נכון לכל ערך של ε גדול או קטן ככל שיהיה, ולכן זוהי בדיוק אחת ההגדרות לפונק' הדלתא.

שאלה 3 (א)

$$\rho(r, \theta, z) = \delta(r - a) \delta(z) \lambda$$

$$\begin{aligned}
Q &= \int \rho d\mathbf{r} = \int \delta(r - a) \delta(z) \frac{q}{a} (1 + \cos(2\theta)) r dr d\theta dz \\
&= \int \cancel{\delta(r - a)} \cancel{\delta(z)} \frac{q}{a} (1 + \cos(2\theta)) \cancel{r} \cancel{dr} d\theta \cancel{dz} \\
&= q \int (1 + \cos(2\theta)) d\theta \\
&= \boxed{2\pi q}
\end{aligned}$$

(ב) עבור כל φ יש נקודה מקבילה π ממנה φ הולכת עד π בק. כדוריות)

$$\rho(r, \theta, \varphi) = \delta(r - a) \delta(\varphi - \omega t) \delta(\varphi - \omega t + \pi) \lambda$$

$$\begin{aligned} Q &= \int \rho d\mathbf{r} = \int \delta(r - a) \delta(\varphi - \omega t) \frac{q}{a} \cos \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int \delta(r - a) \delta(\varphi - \omega t) \frac{q}{a} \cos \theta r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= qa \int \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

(ג) ע"י "פונקציית רמה" אפשר להגדיר בתחום מסויים (כמו if בקוד):

$$\begin{aligned} \rho(x, y, z) &= \lambda (\Theta(x) - \Theta(x - d)) \delta(y) \delta(z) \\ \rho(r, \theta, z) &= \lambda (\Theta(z) - \Theta(z - d)) \delta(r) \delta(\theta) \\ \rho(r, \theta, \varphi) &= \lambda (\Theta(r) - \Theta(r - d)) \delta(\theta) \delta(\varphi) \\ &\Downarrow \\ Q &= \lambda d \end{aligned}$$

(ד)

$$\begin{aligned} \rho(r, \theta, z) &= \rho_0 (\Theta(z) - \Theta(z - d \cos \alpha)) (\Theta(r) - \Theta(r - z \tan \alpha)) \\ &\Downarrow \\ &= \frac{\rho_0 \pi}{3} d^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$