Q1

$G,\bar{\rho}$ הם שני הפרמטרים היחידים בבעיה,

ולכן התוצאה חייבת להיות תלויה בהם עד כדי

אינטגרל על המשתנים שייתן קבועים כמו π

ועוד. היחידות שלהם $G \to \frac{m^3}{kg\, s^2}$ $\quad \bar{\rho} \to \frac{kg}{m^3}$

אז כדי להגיע לזמן ברור שצריך להכפיל אותם

$G\bar{\rho} \to \frac{1}{s^2}$

ואז t מה שנשאר פה $\quad t \sim \frac{1}{\sqrt{G\bar{\rho}}}$

Q2

$$\Omega = -\int_0^R \frac{G\, m(r)\, \rho(r)}{r} 4\pi r^2\, dr$$

צריך למצוא את $m(r)$:

$$m(r) = \int_0^r \rho_0 r^n 4\pi r^2\, dr = 4\pi\rho_0 \int_0^r r^{n+2}\, dr \overset{n+2\neq -1}{=} \frac{4\pi\rho_0}{n+3} r^{n+3}$$

$$\to \Omega = -G\int_0^R \frac{4\pi\rho_0^2}{n+3} \frac{r^{2n+3}}{r} 4\pi r^2\, dr = -\frac{G\, 16\pi^2\rho_0^2}{n+3} \int_0^R r^{2n+4}\, dr$$

$$= -\frac{G\, 16\pi^2\rho_0^2}{n+3} \frac{R^{2n+5}}{2n+5} = -\frac{G\, 4\pi\rho_0\, R^{n+2} M}{2n+5}$$

$$M^2 = \left(\frac{4\pi\rho_0}{n+3}\right)^2 R^{2n+6}$$ אז

$$= -\frac{G(n+3)}{2n+5} \frac{M^2}{R} \quad ; \quad n > 3$$

Q3

$$\langle P\rangle V = -\frac{1}{3}\Omega = \frac{1}{3}\frac{GM^2}{R}$$

1)

$$\langle P\rangle = \frac{1}{3}\frac{1}{VR}GM^2$$

צריך להיפטר מ-R:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$M = \frac{4}{3}\pi\bar\rho R^3$$

$$R^3 = M\frac{3}{4}\frac{1}{\pi\bar\rho}$$

$$R^4 = M^{4/3}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{4/3}\bar\rho^{-4/3}$$

$$\frac{1}{VR} = \frac{3}{4\pi}R^{-4}$$

$$= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{-1/3}M^{-4/3}\bar\rho^{4/3}$$

$$\Rightarrow \langle P\rangle = \left(\frac{4\pi}{3^4}\right)^{1/3}M^{2/3}G\bar\rho^{4/3}$$

$$-\frac{4}{3}+\frac{6}{3} = +\frac{2}{3}$$

2) $\bar\rho = M_\odot/\frac{4\pi}{3}R_\odot^3 = 1.41\,\frac{g}{cm^3} = 1410\,\frac{kg}{m^3}$

$\Rightarrow \langle P\rangle = 9\cdot10^{13}$ Pascal $= 9\cdot10^{8}$ atm

3) $\beta = \frac{P_g}{P_g+P_r}$

$$\zeta = \frac{1-\beta}{\beta^4} = \frac{1-\frac{P_g}{P_g+P_r}}{\left(\frac{P_g}{P_g+P_r}\right)^4} = \frac{\frac{P_r}{P_g+P_r}}{\frac{P_g^4}{(P_g+P_r)^4}} = \frac{P_r(P_g+P_r)^3}{P_g^4}$$

$$P_c = P_g+P_r \Rightarrow \beta = \frac{P_g}{P_c} = \frac{\rho k_B T}{\underbrace{\mu m_p}_{\bar m}}$$

4) $\frac{\rho k_B \cancel{T}}{\bar m} = \frac{1}{3}aT^{\cancel{4}3}$ $T = \left(\frac{3}{a}\frac{\rho k_B}{\bar m}\right)^{1/3}$

$$P = 2\underbrace{\frac{a}{3}\left(\frac{3}{a}\right)^{4/3}}_{\left(\frac{3}{a}\right)^{1/3}}\left(\frac{\rho k_B}{\bar m}\right)^{4/3} \Leftarrow P = 2\,\frac{1}{3}aT^4$$ לכן

5) $2\left(\frac{3}{a}\right)^{1/3}\left(\frac{\cancel{\rho}k_B}{\bar m}\right)^{4/3} = \left(\frac{4\pi}{81}\right)^{1/3}GM^{2/3}\cancel{\bar\rho^{4/3}}$

$$\left(\frac{3\cdot\cancel{8}^{2}}{a}\frac{81}{\cancel{4}\pi}\right)^{1/3}\left(\frac{k_B}{\frac{1}{2}m_p}\right)^{4/3\ \ 3/2}\frac{1}{G} = M^{2/3}$$

$$M = \left(\frac{2\cdot3^5}{\pi a}\right)^{1/2}\left(\frac{2k_B}{m_p}\right)^2\frac{1}{G^{3/2}} = \left(\frac{6^5k_B^4}{\pi a m_p^4G^3}\right)^{1/2} = 2.26\cdot10^{32}\,kg$$

$$= 114\,M_\odot$$

Q4

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(x^2 - 2Dt)\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{8\sqrt{\pi D t}\; D^2 t^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{(x^2 - 2Dt)\, e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\underbrace{8\sqrt{\pi}\; D^{3/2}\, t^{5/2}}_{\sqrt{\pi D t}\, D\, t^2}}$$

וההבדל
זה רק הפקטור D בחוץ

Q5

1) $$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 \partial_r u\right) \overset{\text{מצב יציב}}{=} 0$$

$$\xrightarrow{\text{wolfram alpha}} \quad u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$$

$$u(a) = \frac{C_1}{a} + C_2 = \alpha$$

$$u(b) = \frac{C_1}{b} + C_2 = \beta \quad \to \quad C_2 = \beta - \frac{C_1}{b}$$

$$\frac{C_1}{a} + \beta - \frac{C_1}{b} = \alpha$$

$$C_1\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \alpha - \beta$$

$$C_1 = \frac{\alpha - \beta}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{\alpha - \beta}{b - a}\, ab$$

$$C_2 = \beta - \frac{\alpha - \beta}{b - a}\, a$$

$$u(r) = ab\,\frac{\alpha - \beta}{b - a}\,\frac{1}{r} + \beta - \frac{\alpha - \beta}{b - a}\, a$$

$$= a\,\frac{\alpha - \beta}{b - a}\left(\frac{b}{r} - 1\right) + \beta$$

2) $$\frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2 \partial_r u\right) = -S$$

מה הסימן?

הסיגמא σ מה שיוצר חייב לצאת לכן הסימן שלי

ורק צריך להוסיף את הפתרון הפרטי

אחרי שתי אינטגרציות של $-S$:

$$-\frac{S}{D}\int r^2 dr = -\frac{S}{3D} r^3 \xrightarrow{\div r^2} -\frac{S}{3D}\int r dr = -\frac{Sr^2}{6D}$$

$$\Rightarrow \quad u(r) = -\frac{Sr^2}{6D} + \frac{C_1}{r} + C_2$$

$$\rightarrow \quad -\frac{Sa^2}{6D} + \frac{C_1}{a} + C_2 = \alpha \rightarrow C_2 = \alpha + \frac{Sa^2}{6D} - \frac{C_1}{a}$$

$$\beta = -\frac{Sb^2}{6D} + \frac{C_1}{b} + C_2 = -\frac{Sb^2}{6D} + \frac{C_1}{b} + \alpha + \frac{Sa^2}{6D} - \frac{C_1}{a}$$

$$\beta = C_1\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + \frac{S}{6D}(a^2 - b^2)$$

$$C_1 = \left[\beta + \frac{S}{6D}(b^2 - a^2)\right]\frac{ab}{a-b}$$

$$C_2 = \alpha + \frac{Sa^2}{6D} - \frac{b}{a-b}\left[\beta + \frac{S}{6D}(b^2 - a^2)\right]$$

$$u(r) = -\frac{Sr^2}{6D} + \frac{1}{r}\frac{ab}{a-b}\left[\beta + \frac{S}{6D}(b^2 - a^2)\right] + \alpha + \frac{Sa^2}{6D} - \frac{b}{a-b}\left[\beta + \frac{S}{6D}(b^2 - a^2)\right]$$

$$= \frac{S}{6D}(a^2 - r^2) + \frac{b}{a-b}\left[\beta + \frac{S}{6D}(b^2 - a^2)\right]\left[\frac{a}{r} - 1\right] + \alpha$$

Q6

$$D = v\ell = \frac{v}{n\sigma} = \frac{2.2}{2.4 \cdot 1.2} \cdot 10^{5-19+14}$$

$$= 7.68 \ \frac{m^2}{s}$$

$$\mu = 28 \, m_p$$

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = k_B T \rightarrow v = 420 \ \frac{m}{s}$$

$$n = \frac{P}{k_B T} = 2.4 \cdot 10^{14} \ \frac{1}{cm^3}$$

$$4Dt = 2\sigma^2$$

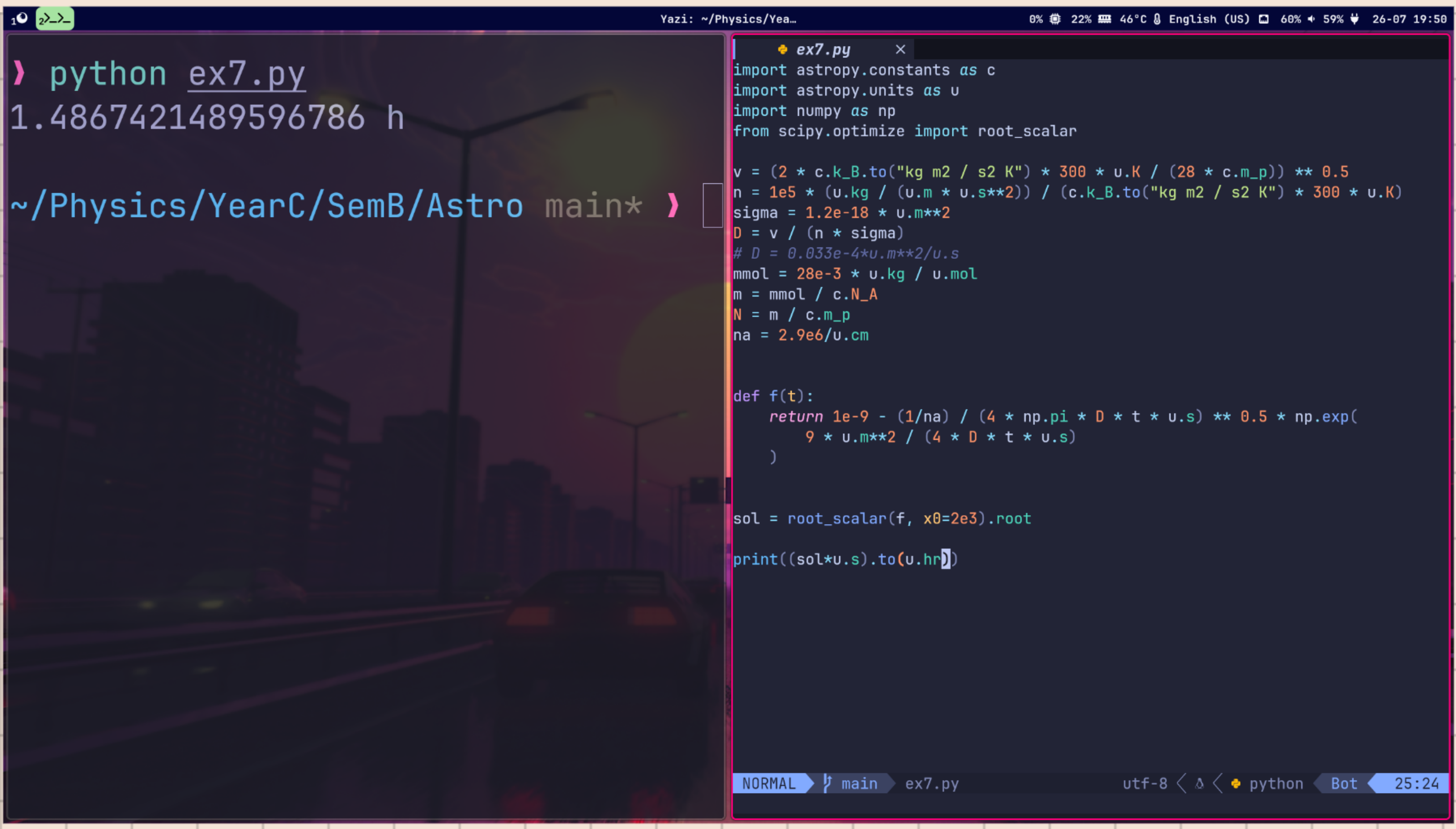
$$10^{-9} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\, e^{-\frac{a}{4Dt}}$$

חסר יחידות של אורך בכיון.

$$u(x) \sim N(0, 2Dt) \quad \left[\frac{1}{m}\right]$$

צריך לכפול בנפח את u, ששקה $\frac{1}{n_a}$

ויצא שמה יחד׳.



אבל יש בעיה עם הקוד הזה,
הוא תלוי רק בניחוש ההתחלתי, גם אם
אני שם 10^{-1} לפעמים כי אני מקבל
אותה תשובה. אני לא יודע מה הבעיה אבל
עם האופטימיזר של scipy

Q7

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho(r)}{r^2} = -\frac{GM\rho_0 R_\odot^2}{r^4}$$

$$-P + P(R_\odot) = \frac{1}{3} GM\rho_0 R_\odot^2 \left(\frac{1}{R_\odot^3} - \frac{1}{r^3}\right) \qquad \int_r^{R_\odot} \qquad \leftarrow$$

$$P = P(R_\odot) + \frac{1}{3} GM\rho_0 R_\odot^2 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_\odot^3}\right)$$

$$P = nk_BT = \frac{\rho k_B T}{\mu m_p} = \frac{2\rho k_B T}{m_p}$$ אשי אגה

$$T = \frac{m_p}{2k_B} \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{r}{R_\odot}\right)^2 P$$

$$T = \frac{m_p}{2k_B} \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{r}{R_\odot}\right)^2 \left[P(R_\odot) + \frac{1}{3} GM\rho_0 R_\odot^2 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_\odot^3}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{r}{R_\odot}\right)^2 T(R_\odot) + \frac{m_p GM}{6k_B} r^2 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R_\odot^3}\right)$$