מבוא למצב מוצק תשפ"ג: תרגיל בית 2

1. נתונה מתכת שבה שני סוגי נושאי מטען: אלקטרונים ו'חורים'. לאלקטרונים מסה m_e, זמן רלקסציה τ_e, מטען $q_e = -e$ וצפיפות n_e; לחורים מסה m_h, זמן רלקסציה τ_h, מטען $q_h = e$ וצפיפות n_h.
במתכת כזו, הגדרת המוליכות או ההתנגדות נעשית ביחס לזרם **הכולל** של נושאי מטען במתכת,

$$\mathbf{J} = n_e q_e \mathbf{v}_e + n_h q_h \mathbf{v}_h$$

בהינתן שדה חשמלי DC, מה תהיה המוליכות החשמלית?

2. נתונה מתכת שנמצאת בטמפרטורה אחידה T ומתוארת על-ידי מודל דרודה. בהינתן צפיפות אלקטרונים שתלויה במיקום, $n(\mathbf{r})$, הראו שמתקיים הקשר הבא בין צפיפות הזרם $\mathbf{J}$ לבין גרדיאנט צפיפות האלקטרונים (m היא מסת האלקטרון):

$$\mathbf{J} = \frac{e\tau}{m} k_B T \cdot \nabla n$$

הקשר הכללי $\frac{\mathbf{J}}{-e} = -D\nabla n$ עם $D > 0$ נקרא חוק Fick, והזהות $D = \tau k_B T/m$ נקראת קשר איינשטיין.
<u>הדרכה</u>: בדומה לפיתוח שהוצג בכיתה בו מצאנו את המקדם Q המתאר את אפקט זיבק, התחילו ממודל אפקטיבי חד-מימדי וכתבו את הזרם בכל נקודה כממוצע הזרמים שמגיעים משני הכיוונים:

$$J_x(x) = -\frac{e}{2}\left[n(x - v_x\tau)\, v_x - n(x + v_x\tau)\, v_x\right]$$

3. נתונה מתכת הנמצאת תחת שדה מגנטי קבוע ואחיד $\mathbf{H}_0 = H_0\hat{z}$ ושדה חשמלי $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}(\omega)\, e^{-i\omega t}$ הניצב ל-$\mathbf{H}_0$, כאשר $\mathbf{E}(\omega)$ הוא וקטור קבוע בזמן. נתון כי השדה החשמלי מקוטב מעגלית

$$E_y(\omega) = iE_x(\omega)\,, \quad E_z(\omega) = 0$$

(א) בעזרת משוואת התנועה של מודל דרודה, הראו שצפיפות הזרם מקיימת את המשוואה הבאה:

$$\tau\frac{\mathrm{d}\mathbf{J}}{\mathrm{d}t}=-\mathbf{J}(t)+\sigma_D\mathbf{E}(t)-\omega_c\tau\left(\mathbf{J}(t)\times\hat{z}\right)$$

כאשר $\sigma_D=\frac{ne^2\tau}{m}$ היא מוליכות דרודה לזרם DC ו-$\omega_c=\frac{eH_0}{mc}$ היא תדירות הציקולטרון. מצורת המשוואה נוכל להסיק כי $J_z(t)=0$, כלומר הזרם זורם רק במישור xy.

(ב) הציבו פתרון מהצורה $\mathbf{J}(t)=\mathbf{J}(\omega)\,e^{-i\omega t}$ (כאשר הווקטור $\mathbf{J}(\omega)$ תלוי אולי ב-ω, אבל לא ב-t), והראו שמתקיים הקשר

$$\mathbf{J}=\frac{\sigma_D}{1-i\left(\omega-\omega_c\right)\tau}\mathbf{E}$$

4. נתונה מתכת עליה פועל שדה מגנטי חיצוני קבוע ואחיד $\mathbf{H}_0=H_0\hat{z}$.

(א) הראו כי למשוואות מקסוול במתכת (שימו לב ש-$\mathbf{H}$ הוא השדה המגנטי הכולל בבעיה, ולא רק השדה החיצוני $\mathbf{H}_0$)

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\nabla\cdot\mathbf{H}=0,\ \nabla\times\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\ \nabla\times\mathbf{H}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

יש פתרון מהצורה

$$E_x=E_0e^{i(kz-\omega t)},\quad E_y=iE_x,\quad E_z=0$$

וזאת בתנאי שמתקיים $k^2c^2=\epsilon(\omega)\,\omega^2$ עם המקדם הדיאלקטרי

$$\epsilon(\omega)=1-\frac{\omega_p^2}{\omega}\cdot\frac{1}{\omega-\omega_c+i/\tau}$$

כאשר הגדרנו $\omega_p^2=4\pi ne^2/m$.

(ב) מצאו את יחס הנפיצה $\omega(k)$ תחת הנחה של שדה בתדירות נמוכה ($\omega\ll\omega_c$) ושל שדה מגנטי חזק ($1\ll\omega_c\tau$). תוכלו להשתמש בעובדה שבמתכות סטנדרטיות, גם עבור שדה מגנטי חזק יחסית יתקיים $\omega_c\ll\omega_p$.