# תרגיל בית 1 | קוונטים 2

אלון נר גאון

29 באוקטובר 2022

#### שאלה 1

$$
\begin{aligned}
E = -1.511eV \; &\Rightarrow \; \boxed{n=3} \\
\Rightarrow l : 0 \to 2 \quad &; \quad m : -2 \to 2
\end{aligned}
$$

(א) כל אחד מן הרכיבים $(L_x, L_y, L_z)$ יכול לקבל אחד מן הערכים האפשריים ל - $m$, כלומר $\boxed{-2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar}$.

(ב) אם נמדד $m=-1$ אז נפסלת האפשרות ש - $l=0$ ולכן נשארים עם האפשרויות $l=1,2$. בנוסף $L^2 = l\left(l+1\right)$ ולכן האפשרויות הן $\boxed{L^2 = 2\hbar^2, 6\hbar^2}$.

(ג) לא, משום שהתחלנו ממצב עצמי של $L_y$ ו - $L^2$ מתחלף איתו ולכן מדידה של $L^2$ לא תשנה את המצב.

(ד) כן, משום ש - $L^2$ לא יכול להתחלף עם יותר מרכיב אחד של $\bar{L}$ ולשני רכיבים שונים של $\bar{L}$ אין אותם מצבים עצמיים.

#### שאלה 2

$$
\begin{aligned}
e^{i\frac{L_z}{\hbar}\theta}\psi\left(\varphi\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(i\frac{L_z}{\hbar}\theta\right)^n}{n!}\psi\left(\varphi\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\cancel{i}\theta}{\cancel{\hbar}}\right)^n}{n!}\left(\cancel{-i}\cancel{\hbar}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^n \psi\left(\varphi\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}\psi^{(n)}\left(\varphi\right)
\end{aligned}
$$

וזה כמובן פיתוח לטור של:

$$
\psi\left(\varphi + \theta\right)
$$

#### שאלה 3

$$
\begin{cases}
Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{1}{\alpha}p_y\right) \\
P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p_x - \alpha y\right)
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{\alpha}p_y\right) \\
P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(p_x + \alpha y\right)
\end{cases}
$$

(א)

$$
\begin{aligned}
\left[Q_1, Q_2\right] &= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{\alpha}p_y, x - \frac{1}{\alpha}p_y\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[x, x - \frac{1}{\alpha}p_y\right] + \frac{1}{\alpha}\left[p_y, x - \frac{1}{\alpha}p_y\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[x, x\right] - \frac{1}{\alpha}\left[x, p_y\right] + \frac{1}{\alpha}\left[p_y, x\right] - \frac{1}{\alpha^2}\left[p_y, p_y\right]\right\} \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[P_1, P_2] &= \frac{1}{2}\left[p_x - \alpha y, p_x + \alpha y\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[p_x, p_x + \alpha y\right] - \alpha\left[y, p_x + \alpha y\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[p_x, p_x\right] + \alpha\left[p_x, y\right] - \alpha\left[y, p_x\right] - \alpha^2\left[y, y\right]\right\} \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[Q_1, P_2] &= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{\alpha}p_y, p_x + \alpha y\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[x, p_x + \alpha y\right] + \frac{1}{\alpha}\left[p_y, p_x + \alpha y\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\left[x, p_x\right]}_{i\hbar} + \alpha\left[x, y\right] + \frac{1}{\alpha}\left[p_y, p_x\right] + \underbrace{\left[p_y, y\right]}_{-i\hbar}\right\} \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[Q_2, P_1] &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{\alpha}p_y, p_x - \alpha y\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[x, p_x - \alpha y\right] - \frac{1}{\alpha}\left[p_y, p_x - \alpha y\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[x, p_x\right] - \alpha\left[x, y\right] - \frac{1}{\alpha}\left[p_y, p_x\right] - \left[p_y, y\right]\right\} \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[Q_1, P_1] &= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{\alpha}p_y, p_x - \alpha y\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[x, p_x + \alpha y\right] + \frac{1}{\alpha}\left[p_y, p_x - \alpha y\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\left[x, p_x\right]}_{i\hbar} + \alpha\left[x, y\right] + \frac{1}{\alpha}\left[p_y, p_x\right] - \underbrace{\left[p_y, y\right]}_{-i\hbar}\right\} \\
&= \boxed{i\hbar}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[Q_2, P_2] &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{\alpha}p_y, p_x + \alpha y\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[x, p_x + \alpha y\right] - \frac{1}{\alpha}\left[p_y, p_x + \alpha y\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\left[x, p_x\right]}_{i\hbar} + \alpha\left[x, y\right] - \frac{1}{\alpha}\left[p_y, p_x\right] - \underbrace{\left[p_y, y\right]}_{-i\hbar}\right\} \\
&= \boxed{i\hbar}
\end{aligned}
$$

ובסך הכל

$$
\boxed{[Q_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}}
$$

(ב) בצורה מטריצית הטרנספורמציה נראית כך:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \end{pmatrix}$$

וההופכית:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}\alpha} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-\alpha}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \\ y \\ p_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha} & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ \alpha & 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{pmatrix}$$

ועפ"י ההגדרה:

$$\begin{aligned} L_z = xp_y - yp_x &= \frac{\alpha}{2}\left(Q_1 + Q_2\right)\left(Q_1 - Q_2\right) - \frac{1}{2\alpha}\left(P_2 - P_1\right)\left(P_2 + P_1\right) \\ &= \frac{\alpha}{2}\left(Q_1^2 - Q_2^2\right) - \frac{1}{2\alpha}\left(P_2^2 - P_1^2\right) \\ &= \boxed{\underbrace{\left(\frac{1}{2\alpha}P_1^2 + \frac{\alpha}{2}Q_1^2\right)}_{H_1^{(n)}} - \underbrace{\left(\frac{1}{2\alpha}P_2^2 + \frac{\alpha}{2}Q_2^2\right)}_{H_2^{(k)}}} \end{aligned}$$

(ג) ניתן לראות כי התנ"ז הרמוני בקואו' אלה ולכן בהפעלתו על מצב עצמי שלו $|\varphi\rangle$ (קל להראות ש - $[L_z, H_i] = 0$ ולכן $|\varphi\rangle$ גם מצב עצמי של $H_i$):

$$L_z |\varphi\rangle = (H_1 - H_2)|\varphi\rangle = (n - k)|\varphi\rangle$$

ומאחר ש - $n, k$ חצי שלמים $m = n - k$ שלם.

**שאלה 4**

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} -\frac{By}{2} \\ \frac{Bx}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(א) קל לראות ש - $\partial_i A_i = 0$ וגם:

$$\nabla \times A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{By}{2} \\ \frac{Bx}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z}\frac{Bx}{2} \\ -\frac{\partial}{\partial z}\frac{By}{2} \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{Bx}{2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{By}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

(ב)

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}\right)^2 &= \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{q}{c}\begin{pmatrix} -\frac{By}{2} \\ \frac{Bx}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right)^2 \\ &= \frac{\left(p_x + \frac{qB}{2c}y\right)^2}{2m} + \frac{\left(p_y - \frac{qB}{2c}x\right)^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} \end{aligned}$$

(ג) נעבור למשתנים חסרי מימד ונשמיט את האיבר האחרון שכן התנועה מוגבלת למישור $xy$ ולכן תמיד עבור החלקיק $p_z = 0$:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\frac{qB}{c}\right)^2\left(\frac{c}{qB}p_x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{qB}{c}\right)^2\left(\frac{c}{qB}p_y - \frac{1}{2}x\right)^2$$

כמו בתרגול נוכל לזהות את תדירות הציקלוטרון $\omega_c \equiv \frac{qB}{mc}$ (ואז סקאלת הזמן היא $\frac{1}{\omega_c}$) וסקאלת האנרגיה $\hbar\omega_c$, לכן כדי לעבור להמילטוניאן חסר יחידות $\tilde{H}$ נחלק הכל ב - $\hbar\omega_c$:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\hbar qB}p_x + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{qB}{\hbar c}}y\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\hbar qB}p_y - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{qB}{\hbar c}}x\right)^2$$

וכעת ניתן לראות שסקאלת האורך היא $1/\sqrt{\frac{qB}{\hbar c}}$ ונוכל להגדיר $\tilde{x} \equiv \sqrt{\frac{qB}{\hbar c}}x$ וכו' אבל נתעלם מכל התילדות ונרשום:

$$H = \frac{1}{2}\left[\left(p_x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x - p_y\right)^2\right]$$

(ד)

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{1}{2}x + p_y \\ P_1 = p_x - \frac{1}{2}y \end{cases} \qquad \begin{cases} Q_2 = \frac{1}{2}x - p_y \\ P_2 = p_x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_1 + iP_1\right) \\ a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_1 - iP_1\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_2 + iP_2\right) \\ b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_2 - iP_2\right) \end{cases}$$

$$H = \frac{1}{2}\left(P_2^2 + Q_2^2\right)$$

נזכור שכאן בניגוד לתרגיל הקודם המשתנים הקנוניים חסרי יחידות ולכן יחס החילוף שלהם הוא $i$ בניגוד למקודם $i\hbar$:

$$\begin{aligned} b^\dagger b &= \frac{1}{2}\left(Q_2 - iP_2\right)\left(Q_2 + iP_2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(Q_2^2 + iQ_2P_2 - iP_2Q_2 + P_2^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(Q_2^2 + i\left[Q_2, P_2\right] + P_2^2\right) \\ &= H - \frac{1}{2} \\ &\Downarrow \\ H &= b^\dagger b + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ה) בשאלה הקודמת כבר מצאנו שניתן לכתוב את $L_z\left(Q_i, P_j\right)$:

$$\begin{aligned} L_z = xp_y - yp_x &= \frac{1}{2}\left(Q_1 + Q_2\right)\left(Q_1 - Q_2\right) - \frac{1}{2}\left(P_2 - P_1\right)\left(P_2 + P_1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(Q_1^2 - Q_2^2\right) - \frac{1}{2}\left(P_2^2 - P_1^2\right) \\ &= \frac{1}{2}Q_1^2 + \frac{1}{2}P_1^2 - \left(\frac{1}{2}Q_2^2 + \frac{1}{2}P_2^2\right) \\ &= a^\dagger a - \cancel{\frac{i}{2}\left[Q_1, P_1\right]} - \left(b^\dagger b - \cancel{\frac{i}{2}\left[Q_2, P_2\right]}\right) \\ &= \boxed{a^\dagger a - b^\dagger b} \end{aligned}$$

(ו)

$$
\begin{aligned}
[L_z, H] &= \left[a^\dagger a - b^\dagger b, b^\dagger b + \frac{1}{2}\right] \\
&= \left[a^\dagger a, b^\dagger b\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[Q_1^2 + i\left[Q_1, P_1\right] + P_1^2, Q_2^2 + i\left[Q_2, P_2\right] + P_2^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left[Q_1^2, Q_2^2 + i\left[Q_2, P_2\right] + P_2^2\right] + \left[P_1^2, Q_2^2 + i\left[Q_2, P_2\right] + P_2^2\right]\right\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

מכיוון שהאופרטורים מתחלפים:

$$
\begin{cases}
H\left|nm\right\rangle = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left|nm\right\rangle \\
L_z\left|nm\right\rangle = m\hbar\left|nm\right\rangle
\end{cases}
$$

וניתן לראות שהאנרגיות העצמיות אינן תלויות ב - $m$ ולכן יש ניוון אינסופי בדיוק כמו בתרגול: המ"ע של המערכת תלויים בשני מספרים קוונטיים אבל האנרגיות העצמיות תלויות רק באחד, כלומר יש אינסוף מ"ע עם אותה אנרגיה.

(ז) מכיוון ש - $b, b^\dagger$ מתחלפים עם $a, a^\dagger$ ניתן להסיע את $b$ דרך $a$ (או ההיפך) בחינם (דאגר או לא דאגר):

$$
\begin{aligned}
L_z b^\dagger\left|m\right\rangle &= \left(a^\dagger a - b^\dagger b\right) b^\dagger\left|m\right\rangle \\
&= a^\dagger a b^\dagger\left|m\right\rangle - b^\dagger b b^\dagger\left|m\right\rangle \\
&= b^\dagger a^\dagger a\left|m\right\rangle - b^\dagger\left(b^\dagger b + 1\right)\left|m\right\rangle \\
&= b^\dagger\left(a^\dagger a - \left(b^\dagger b + 1\right)\right)\left|m\right\rangle \\
&= b^\dagger\left(L_z - 1\right)\left|m\right\rangle \\
&= \left(m - 1\right)\hbar b^\dagger\left|m\right\rangle \\
&\Downarrow \\
b^\dagger\left|m\right\rangle &\propto \left|m - 1\right\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_z a^\dagger\left|m\right\rangle &= \left(a^\dagger a - b^\dagger b\right) a^\dagger\left|m\right\rangle \\
&= a^\dagger a a^\dagger\left|m\right\rangle - b^\dagger b a^\dagger\left|m\right\rangle \\
&= a^\dagger\left(a^\dagger a + 1\right)\left|m\right\rangle - a^\dagger b^\dagger b\left|m\right\rangle \\
&= a^\dagger\left(a^\dagger a + 1 - b^\dagger b\right)\left|m\right\rangle \\
&= a^\dagger\left(L_z + 1\right)\left|m\right\rangle \\
&= \left(m + 1\right)\hbar a^\dagger\left|m\right\rangle \\
&\Downarrow \\
a^\dagger\left|m\right\rangle &\propto \left|m + 1\right\rangle
\end{aligned}
$$