שאלה 1 – כדור חלול בחומר דיאלקטרי

א. נתון חלל כדורי ריק בעל רדיוס a שנמצא בתוך חומר דיאלקטרי עם מקדם דיאלקטרי ϵ. המערכת כולה נמצאת בנוכחות שדה חשמלי חיצוני קבוע $\mathbf{E}_0 = E_0\hat{\mathbf{z}}$. מצאו את הפוטנציאל החשמלי בכל המרחב, את השדה החשמלי בכל המרחב ואת צפיפות המטען המושרית על שפת החלל הכדורי. הסבירו פיזיקלית מה התקבל.

ב. במרכז החלל הכדורי נציב דיפול נקודתי טהור $\mathbf{p}_0 = p_0\hat{\mathbf{z}}$. כיצד ישתנו התשובות לסעיף א?

א) כל מה שצריך זה להחליף את המקדם הדיאלקטרי בפתרונות שמצאנו בתרגול

$$\epsilon \to \frac{1}{\epsilon}$$

שכן המיקום של ϵ דנ״ש התחלף.

$$\varphi_{in}(r,\theta) = -\frac{3}{\epsilon+2}E_0 z \longrightarrow -\frac{3}{\frac{1}{\epsilon}+2}E_0 z$$

$$-\frac{3\epsilon}{1+2\epsilon}E_0 z$$

$$\varphi_{out}(r,\theta) = -E_0 z + \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}E_0 a^3 \frac{z}{r^3} \to -E_0 z + \underbrace{\frac{\frac{1}{\epsilon}-1}{\frac{1}{\epsilon}+2}}_{}E_0 a^3 \frac{z}{r^3}$$

$$\frac{\frac{1-\epsilon}{\epsilon}}{\frac{1+2\epsilon}{\epsilon}} = \frac{1-\epsilon}{1+2\epsilon}$$

$$\bar{E}_{in} = \frac{3}{\epsilon+2}E_0\hat{z} \to \frac{3}{\frac{1}{\epsilon}+2}E_0\hat{z} = \frac{3\epsilon}{1+2\epsilon}E_0\hat{z}$$

$$\bar{p} = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}E_0 a^3\hat{z} \to \frac{1-\epsilon}{1+2\epsilon}E_0 a^3\hat{z}$$

צפיפות הקיטוב (בכדור):

$$\bar{P} = \frac{\epsilon-1}{4\pi}\bar{E}_{in} = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\frac{3}{4\pi}E_0$$

$$\hookrightarrow \frac{1-\epsilon}{1+2\epsilon}\frac{3}{4\pi}E_0\hat{z}$$

$$\sigma_{pol} = \frac{3}{4\pi}\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}E_0\cos\theta \to \frac{3}{4\pi}\frac{1-\epsilon}{1+2\epsilon}E_0\cos\theta$$

מכיוון ש $\epsilon>1$ המטען התהפך! והדיפול

היה הפך מ $+\hat{z}$ ל- $-\hat{z}$.

ב) למה שקורה כה שכבל הדיפול

שקולים ב $\bar{P}$ ונוסף P_0.

$$\bar{P}' = \left[\frac{1-\varepsilon}{1+2\varepsilon} E_0 a^3 + P_0\right]\hat{z}$$

$$\bar{P}' = \left[\frac{1-\varepsilon}{1+2\varepsilon}\frac{3}{4\pi} E_0 + P_0\right]\hat{z}$$

$$\sigma' = \left[\frac{3}{4\pi}\frac{1-\varepsilon}{1+2\varepsilon} E_0 + P_0\right]\cos\theta$$

2

סביר פתרון $\varphi(r,\theta,z) = R(r)\,Q(\theta)\,Z(z)$

הפתרון סביר על אחת מה פונק':

$$Q(\theta) = A_m \sin(m\theta)$$

$$Z(z) = B_n \sinh(kz)$$ כדי שיתאפס ב $z=0$ $\leftarrow$

$$R(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left(x_{0n}\frac{r}{a}\right)$$

$$\varphi(\bar{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} J_0\left(x_{0n}\frac{r}{a}\right)\sinh(kz)\sin(m\theta)$$

ובהרכבת תנאי שפה:

$$V(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} J_0\left(x_{0n}\frac{r}{a}\right)\sinh(kL)\sin(m\theta)$$

$$\int_0^a \rho\,d\rho\, J_0\left(x_{0n}\frac{\rho}{a}\right) J_0\left(x_{0n'}\frac{\rho}{a}\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[J_{0+1}(x_{0n})\right]^2 \delta_{nn'}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r\,V(r,\theta)\,J_\nu\left(x_{\nu n}\frac{r}{a}\right)\sin(m\theta)\,dr\,d\theta = A_{nm}\frac{\cancel{2\pi}}{\pi}\frac{a^2}{\cancel{2}}\left[J_{\nu+1}(x_{\nu n})\right]^2$$

$$A_{nm} = \frac{\pi}{a^2}\frac{1}{\left[J_{\nu+1}(x_{\nu n})\right]^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} r\,V(r,\theta)\,J_\nu\left(x_{\nu n}\frac{r}{a}\right)\sin(m\theta)\,dr\,d\theta$$

3 א)

$$\frac{1}{\rho}\frac{R'}{R} + \frac{R''}{R} - \frac{n^2}{\rho^2} = 0 \quad / \cdot \rho^2 R$$

$$\rho^2 R'' + \rho R' - n^2 R = 0$$

$$R = C_-\rho^{-n} + C_+\rho^{+n}$$ הפתרון הוא

ועבור z z'' צריכה להתאפס ולכן $Z = Mz + B$

ולכן הפתרון הכללי:

$$\varphi(\bar{r}) = \sum_n \left(C_n^-\rho^{-n} + C_n^+\rho^n\right)\left(A_n\sin(n\theta) + D_n\cos(n\theta)\right)\left(M_n z + B_n\right)$$

וללא תלות ב z:

$$\varphi(\bar{r}) = \sum_n \left(C_n^-\rho^{-n} + C_n^+\rho^n\right)\left(A_n\sin(n\theta) + D_n\cos(n\theta)\right)$$

ב) אין תלות ב z, וגם $x\to\infty$ $\varphi(x\to\infty) = -E_0 x$

$$= -E_0\rho\cos\theta \Rightarrow C_n^+ = -\frac{E_0}{G_n}\delta_{1n}$$

ובתוך הגליל C_n^- מתאפס.

ועבור $\rho = a$ השוואת ה φ:

$$\sum_n C_n^+ a^n\left(A_n\sin(n\theta) + B_n\cos(n\theta)\right) = \sum_n\left(-\frac{E_0}{G_n}\delta_{1n}a^n + D_n^- a^{-n}\right)\left(F_n\sin(n\theta) + G_n\cos(n\theta)\right)$$

$$\Rightarrow \quad C_n^+ a^n = \frac{-E_0}{G_n}\delta_{1n} a^n + D_n^- a^{-n}$$

ומהרציפות ל $\bar{D}$:

$$\varepsilon \sum_n n C_n^+ a^{n-1}\left(A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta)\right)$$

$$=$$

$$\sum \left(\frac{-E_0}{G_n}\delta_{1n} n a^{n-1} - D_n^- n a^{-n-1}\right)\left(F_n \sin(n\theta) + G_n \cos(n\theta)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon \cancel{n} C_n^+ a^{n-1} = -\frac{E_0}{G_n}\delta_{1n} \cancel{n} a^{n-1} - D_n^- \cancel{n} a^{-n-1}$$

$$\varepsilon C_n^+ a^{n-1} + \frac{E_0}{G_n}\delta_{1n} a^{n-1} = -D_n^- a^{-n-1} \quad / \cdot a^{n+1}$$

$$-\varepsilon C_n^+ a^{2n} - \frac{E_0}{G_n}\delta_{1n} a^{2n} = D_n^-$$

נציב בחזרה לש' הקודמים:

$$C_n^+ \cancel{a^n} = \frac{-E_0}{G_n}\delta_{1n} \cancel{a^n} - \cancel{a^{-n} a^{2n}}\left(\varepsilon C_n^+ + \frac{E_0}{G_n}\delta_{1n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad C_n^+ = -\frac{2E_0}{(\varepsilon+1)G_n}\delta_{1n}$$

$$\Rightarrow \quad D_n^- = -a^{2n}\underbrace{\left(\frac{2\varepsilon E_0}{(\varepsilon+1)G_n} + \frac{E_0}{G_n}\right)}_{2\varepsilon E_0 + \varepsilon E_0}\delta_{1n}$$

$$\sigma = \sigma_0 \cancel{\frac{r^2}{a^2}} \sin^2\theta \cos\varphi \sin\varphi \qquad r=a$$

(4)

$$= \frac{\sigma_0}{2} \cancel{\frac{r^2}{a^2}} \sin^2\theta \underbrace{\sin 2\varphi}_{\frac{e^{i2\varphi}-e^{-i2\varphi}}{2i}}$$

$$= -i\sigma_0 \cancel{\frac{r^2}{a^2}} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \left(Y_{22} - Y_{2-2}\right)$$

$$\varphi(a<r<b) = \sum_{lm} \left(A_{lm} r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\right) Y_{lm}$$

$$A_{lm} b^l = -\frac{B_{lm}}{b^{l+1}} \qquad \Leftarrow \varphi(r=b)=0$$

$$B_{lm} = -A_{lm} b^{2l+1}$$

ב $r<a$ המקדמים B_{lm} אפס ב $r=a$:

$$C_{lm} a^l = A_{lm} a^l - A_{lm} \frac{b^{2l+1}}{a^{l+1}}$$

$$C_{lm} = A_{lm}\left(1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{2l+1}\right)$$

מהקפיצה בשדה ב- $r=a$:

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{lm}\left[l A_{lm}\left(\cancel{1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{2l+1}\right) a^{l-1} - \left(\cancel{l A_{lm} a^{l-1}} + (l+1) A_{lm} \frac{b^{2l+1}}{a^{l+2}}\right)\right] Y_{lm}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_{lm} - \frac{b^{2l+1}}{a^{l+2}} (2l+1) A_{lm} Y_{lm}$$

$$= -i\sigma_0 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \left(Y_{22} - Y_{2-2}\right)$$

לפי השוואה ק $A_{2,\pm2}$:

$$\frac{5}{4\pi} \frac{b^5}{a^4} A_{2,\pm2} = \pm \sigma_0 i \sqrt{\frac{2\pi}{15}}$$

$$A_{2,\pm2} = \pm i \sigma_0 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \frac{4\pi}{5} \frac{a^4}{b^5}$$

$$\varphi(a<r<b) = \left(A_{22} r^2 - A_{22}\frac{b^5}{r^3}\right) Y_{22}$$

$$+ \left(A_{2,-2} r^2 - A_{2,-2}\frac{b^5}{r^3}\right) Y_{2,-2}$$

$$= \left(r^2 - \frac{b^5}{r^3}\right)\underbrace{\left(A_{22} Y_{22} + A_{2-2} Y_{2-2}\right)}_{-\frac{\cancel{4\pi}^{2}}{5}\frac{a^4}{b^5}\frac{\sigma_0}{\cancel{2}}\sin^2\theta \sin 2\varphi}$$

$$= \frac{2\pi}{5}\frac{a^4}{b^5}\sigma_0\left(\left(\frac{b}{r}\right)^5 - 1\right) r^2 \sin^2\theta \sin 2\varphi$$

$$\frac{1}{r^3} - r^2 \rightarrow -\frac{3}{r^4} - 2r$$

φ בחוץ הוא אפס לכן הקפיצה ב E:

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=b} = -\frac{1}{4\pi}\frac{2\pi}{5}\frac{a^4}{b^5}\sigma_0\left(3\left(\frac{b}{b}\right)^5 + 2\right) b \sin^2\theta \sin 2\varphi$$

$$= -\frac{\sigma_0}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^4 \sin^2\theta \sin 2\varphi$$

הי"כ צריך
הילך אין
כי דσ היא חיובית

והלחץ זה פשוט $P = 2\pi\sigma^2$

$$P = \frac{\pi}{2}\sigma^2\left(\frac{a}{b}\right)^8 \sin^4\theta \sin^2 2\varphi$$

ב) φ יהיה מורכב מהתרומה החיצונית מהקליפה

ב-a ומהתרומה הפנימית מהקליפה ב-b:

$$M_{lm} = \iint a^l \underbrace{-i\sigma_0\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\left(Y_{22} - Y_{2-2}\right)}_{\sigma} Y^*_{lm}\, a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$M_{lm} = i\sigma_0\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\, a^{l+2}\left(\delta_{l2}\delta_{m,-2} - \delta_{l2}\delta_{m2}\right)$$

$$= i\sigma_0 a^4\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\,\delta_{l2}\left(\delta_{m,-2} - \delta_{m2}\right)$$

והפנימיים ב b. את σ של b אנחנו צריכים

יודעים איך היא נראית מהפוטנציאל הקודם אז אפשר

לקחת אותה עם איזה קבוע כפול σ ב-a

ולגלות אותו רק אחר כך. לכן המולטיפול הפנימי

מ-b יהיה בדיוק אותו דבר רק עם $\frac{1}{b^{l+1}}$ במקום b^l

$$\bar{M}_{lm} = i\beta \frac{\sigma_0}{b}\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\,\delta_{l2}\left(\delta_{m,-2}-\delta_{m2}\right)$$

ואז הפוט' בין הקליפות ניתן לרשום:

$$\varphi(a<r<b) = \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1}\left(M_{lm}\frac{1}{r^{l+1}} + \bar{M}_{lm} r^l\right) Y_{lm}$$

את β ניתן למצוא מדרישה שהמולטיפולים החיצוניים

של שתי הקליפות יתאפסו:

$$M_{lm}(a) + M_{lm}(b) = 0$$

$$\Rightarrow \beta = -\left(\frac{a}{b}\right)^4$$

בדיוק כמו בסעיף קודם.

$$\Rightarrow \varphi = \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} i\sigma_0\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\,\delta_{l2}\left(\delta_{m,-2}-\delta_{m2}\right)\left(\frac{a^4}{r^{l+1}} - \frac{a^4}{b^5}r^l\right)Y_{lm}$$

$$= \sum_{m} \frac{4\pi}{5} i\sigma_0\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\, a^4\left(\delta_{m,-2}-\delta_{m2}\right)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^5}r^2\right)Y_{2m}$$

$$= \frac{4\pi}{5} a^4 \underbrace{i\sigma_0\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\left(Y_{2,-2} - Y_{22}\right)}_{\frac{\sigma_0}{2}\sin^2\theta\sin 2\varphi}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^5}r^2\right)$$

$$= \frac{2\pi}{5}\frac{a^4}{b^5}\sigma_0\left(\left(\frac{b}{r}\right)^5 - 1\right) r^2 \sin^2\theta \sin 2\varphi$$

בדיוק כמו בסעיף הקודם.

והלאה יצא בדיוק אותו דבר כי הוא תלוי רק ב σ

של b ותלותה כבר מצאנו, בדיוק כמו בסעיף הקודם.

ג) מתאים לדירי'

$$\varphi(\bar r) = \int_V \underbrace{\rho(\bar r')}_{\text{נתון}} G_0(\bar r, \bar r')\, d\bar r' + \frac{1}{4\pi}\int_S \underbrace{\varphi(\bar r')}_{\text{ת"ש נתון}} \frac{\partial G_0(\bar r, \bar r')}{\partial n'}\, da'$$

אבל ב $a<r<b$ אין מטענים לכן האינטגרל

הראשון נופל. את ת"ש על הפני' נוכל למצוא מהצבת

a בביטוי שמצאנו מקודם:

$$\frac{4\pi}{5} a^4 i\sigma_0 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \left(Y_{2-2} - Y_{22}\right)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^5} r^2\right)$$

$$\varphi(r=a) = \frac{4\pi}{5}\, a\, i\sigma_0 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \left(Y_{2-2} - Y_{22}\right)\left(1 - \frac{a^5}{b^5}\right)$$

ל~~נגזרת~~ פ' צריך

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^l - \frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}}\right) = l r^{l-1} + \frac{(l+1)a^{2l+1}}{r^{l+2}}$$

$$r=a \rightarrow \quad l a^{l-1} + \frac{(l+1)a^{2l+1}}{a^{l+2}} = l a^{l-1} + (l+1)a^{l-1}$$

$$= a^{l-1}(2l+1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial G(r,r')}{\partial r'} = \sum_{lm} 4\pi \frac{Y^*_{lm} Y_{lm}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}}\, a^{l-1}\left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^l}{b^{2l+1}}\right)$$

$$\Rightarrow \varphi(a<r<b) = \frac{1}{4\pi}\int_{\text{הפנה}} \varphi(r=a)\, \frac{\partial G}{\partial r'}\, d\Omega'$$

$$= \cancel{\frac{4\pi}{5}}\, a\, i\sigma_0 \sqrt{\frac{2\pi}{15}}\, \cancel{\left(1-\frac{a^5}{b^5}\right)}\, \cancel{\frac{1}{4\pi}} \int_{\partial\Omega'} \left(Y_{2-2} - Y_{22}\right) \times$$

$$\times \sum_{lm} 4\pi \frac{Y_{lm}^{*} Y_{lm}}{\cancel{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}}}\, a^{l-1} \left(\frac{1}{r^{l+1}} - \frac{r^{l}}{b^{2l+1}}\right) dr'$$

$$= \frac{4\pi}{5}\, a\, i\sigma_0 \sqrt{\frac{2\pi}{15}}\, Y_{2m}\, a \left(\frac{1}{r^3} - \frac{r^2}{b^5}\right) \int \left(Y_{2-2} - Y_{22}\right) Y_{lm}^{*}\, a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{4\pi}{5} \frac{a^4}{b^5} r^2 \underbrace{i\sigma_0 \sqrt{\frac{2\pi}{15}}\, Y_{2m} \left(\delta_{m,-2} - \delta_{m,2}\right)}_{\frac{\sigma_0}{2} \sin^2\theta \sin 2\varphi} \left(\left(\frac{b}{r}\right)^5 - 1\right)$$

הציק ארה ריצאה