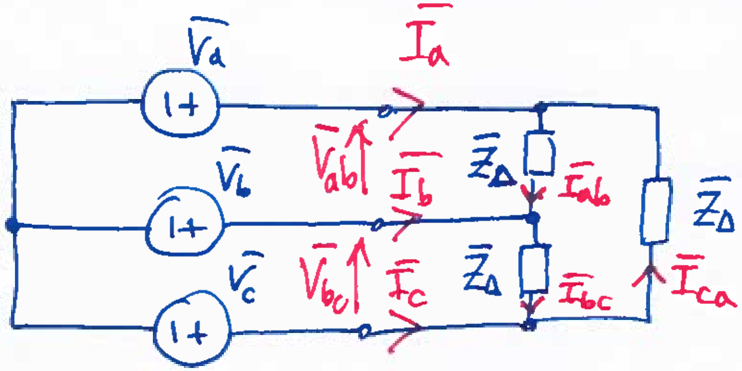
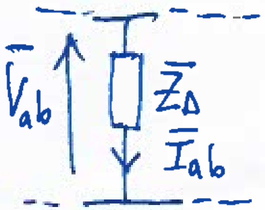
CORRENTI DI LINEA E DI FASE NEL TRIANGOLO EQUILIBRATO



$\bar{I}_a, \bar{I}_b, \bar{I}_c$ correnti di linea

$\bar{I}_{ab}, \bar{I}_{bc}, \bar{I}_{ca}$ " " fase del triangolo

sono terne simmetriche di correnti

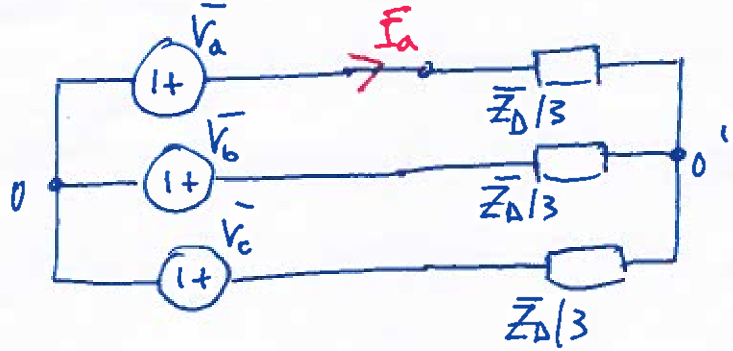


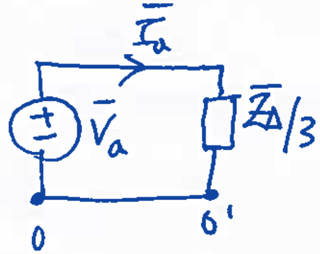
$$\boxed{\bar{I}_{ab} = \frac{\bar{V}_{ab}}{\bar{Z}_\Delta}}$$

dove $\bar{V}_{ab} = \overbrace{\sqrt{3}\,\underbrace{|\bar{V}_a|}_{V_F}}^{V_\ell}\, e^{j(\angle \bar{V}_a \pm 30^\circ)}$

\+ SEQ. DIRETTA
\- SEQ. INVERSA

$\Delta \to Y$





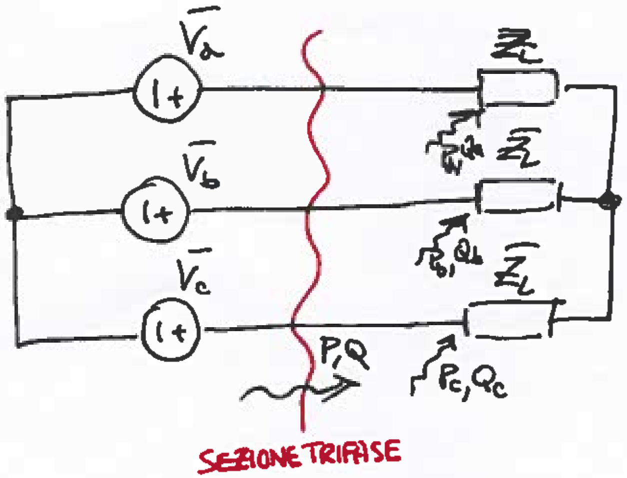
$$\boxed{\bar{I}_a = \frac{\bar{V}_a}{\bar{Z}_\Delta/3} = \frac{3\bar{V}_a}{\bar{Z}_\Delta}}$$

- relazione fra i valori efficaci di correnti di linea I_ℓ e di fase I_F

$$\frac{I_\ell}{I_F} = \frac{|\bar{I}_{ab}|}{|\bar{I}_a|} = \frac{\dfrac{|\bar{V}_{ab}|}{\cancel{|\bar{Z}_\Delta|}}}{\dfrac{3\,|\bar{V}_a|}{\cancel{|\bar{Z}_\Delta|}}} = \frac{1}{3}\,\frac{|\bar{V}_{ab}|}{|\bar{V}_a|} = \frac{1}{3}\left(\frac{V_\ell}{V_F}\right) = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} I_\ell = \sqrt{3}\, I_F \\[4pt] I_F = \dfrac{I_\ell}{\sqrt{3}} \end{array}}$$

POTENZE IN UN SISTEMA TRIFASE SIMM. E EQ.



Identifichiamo una "SEZIONE TRIFASE" che tagli i 3 conduttori della linea.

Definiamo la potenza attiva trifase P e la potenza reattiva trifase Q in transito nella sezione trifase.

Per il teorema di Boucherot:

$$\boxed{\begin{aligned} P &= P_a + P_b + P_c \\ Q &= Q_a + Q_b + Q_c \end{aligned}}$$

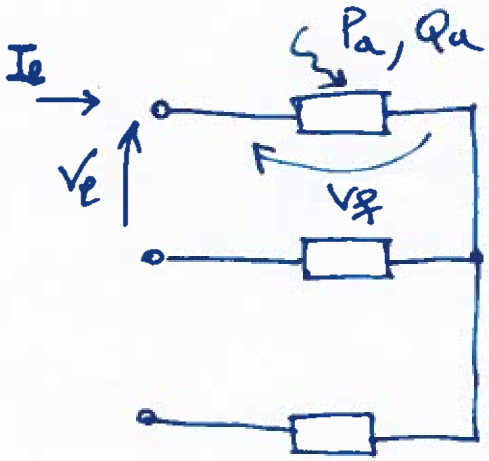
Le potenze trifasi sono le somme delle potenze di ogni fase

Ma in un sistema simmetrico ed equilibrato $P_a = P_b = P_c$; $Q_a = Q_b = Q_c$ infatti le tre fasi si comportano nello stesso modo: i moduli delle tensioni, i moduli delle correnti, gli sfasamenti tra tensione e corrente sono uguali.

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} P &= 3P_a \\ Q &= 3Q_a \end{aligned}}$$

☐ ESPRESSIONI ESPLICITE DELLE POTENZE TRIFASI IN UN CARICO Y o Δ EQUIL.

• STELLA



V_f tensione di fase

$V_\ell = \sqrt{3}\, V_f$ tensione di linea

I_ℓ corrente di linea

moduli!

$\cos\varphi$ fattore di potenza del bipolo

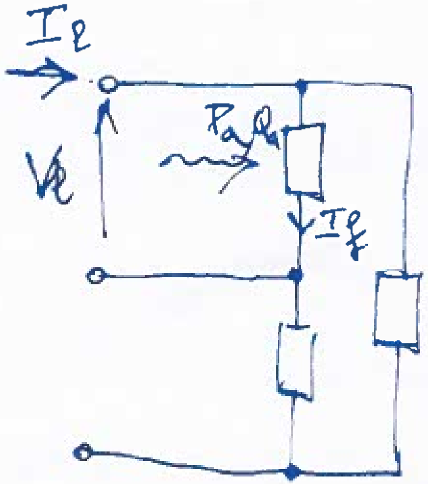
$$\begin{cases} P_a = V_f I_\ell \cos\varphi \\ Q_a = V_f I_\ell \sin\varphi \end{cases} \xrightarrow{\times 3} \boxed{\begin{aligned} P &= 3 V_f I_\ell \cos\varphi \\ Q &= 3 V_f I_\ell \sin\varphi \end{aligned}}$$

Potenze trifasi

$\times 3$ (sostituendo $V_f = \frac{V_\ell}{\sqrt{3}}$)

$$\boxed{\begin{aligned} P &= \sqrt{3}\, V_\ell I_\ell \cos\varphi \\ Q &= \sqrt{3}\, V_\ell I_\ell \sin\varphi \end{aligned}}$$

- TRIANGOLO



V_f tensione di fase

$V_\ell = \sqrt{3}\, V_f$ tensione di linea

$I_f = I_\ell / \sqrt{3}$ corrente di fase

I_ℓ corrente di linea

$\cos\varphi$ fattore di potenza del bipolo

$$\begin{cases} P_a = V_\ell I_f \cos\varphi \\ Q_a = V_\ell I_f \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} P = 3P_a = 3 V_\ell I_f \cos\varphi \\ Q = 3Q_a = 3 V_\ell I_f \sin\varphi \end{array}}$$

Potenze trifasi

$$\boxed{\begin{array}{l} P = \sqrt{3}\, V_\ell I_\ell \cos\varphi \\ Q = \sqrt{3}\, V_\ell I_\ell \sin\varphi \end{array}}$$

''

☐ OSSERVAZIONE:

Le formule $\boxed{\begin{array}{l} P = \sqrt{3}\, V_\ell I_\ell \cos\varphi \\ Q = \sqrt{3}\, V_\ell I_\ell \sin\varphi \end{array}}$ sono le stesse per Y e Δ ! ⇒ conviene imparare e usare sempre queste !

POTENZA APPARENTE TRIFASE

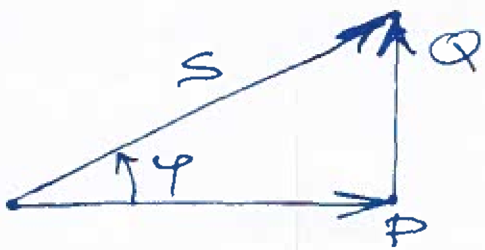
- Si definisce <u>potenza complessa</u> trifase

$$\boxed{\bar{S} = P + jQ = \sqrt{3}\, V_\ell I_\ell \,(\cos\varphi + j\sin\varphi)}$$

- Il modulo di $\bar{S}$ e' la <u>potenza apparente</u> trifase

$$\boxed{S = |\bar{S}| = \sqrt{3}\, V_\ell I_\ell}$$

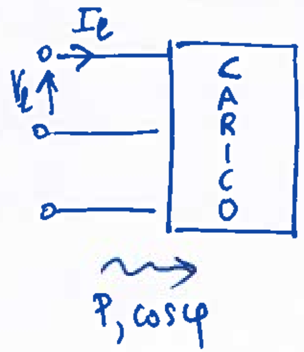
- triangolo delle potenze



$$\boxed{\cos\varphi = \frac{P}{S}}$$ fattore di potenza

CONVENIENZA ECONOMICA: A PARITA' DI $P, V_\ell, \cos\varphi$

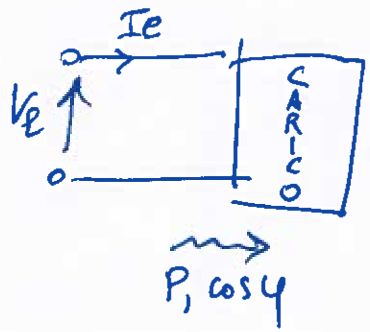
Trifase



$$P = \sqrt{3}\, V_\ell\, I_{\ell 3F} \cos\varphi$$

$$I_{\ell 3F} = \frac{P}{\sqrt{3}\, V_\ell \cos\varphi}$$

Monofase



$$P = V_\ell\, I_{\ell 1F} \cos\varphi$$

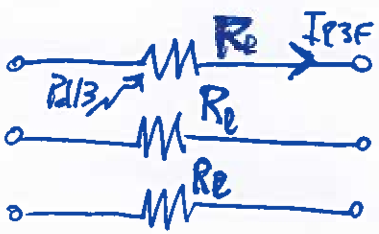
$$I_{\ell 1F} = \frac{P}{V_\ell \cos\varphi}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{I_{\ell 3F}}{I_{\ell 1F}} = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

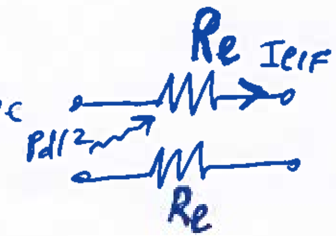
La corrente nella Linea trifase e' minore rispetto a quella monofase, di un fattore $1/\sqrt{3}$

- Perdite di potenza attiva in linea P_d

Trifase:



Monofase



$$P_{d_{3F}} = 3 R_\ell I_{\ell 3F}^2$$

$$P_{d_{1F}} = 2 R_\ell I_{\ell 1F}^2$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{P_{d3F}}{P_{d1F}}} = \frac{3}{2}\left(\frac{I_{\ell 3F}}{I_{\ell 1F}}\right)^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Le perdite 3F sono la meta' di quelle 1F (a pari resistenza del filo di Linea)

In un sistema trifase simmetrico ed equilibrato, la potenza istantanea coincide con la potenza media (pot. attiva) ed è costante nel tempo.

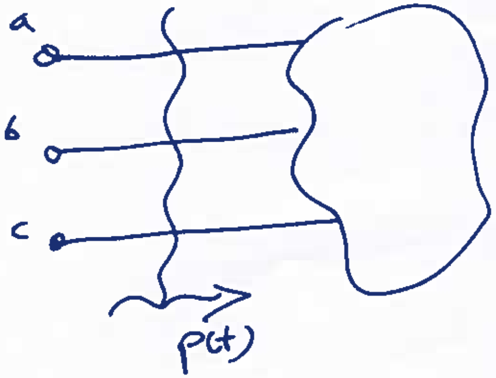
Questo è il motivo per cui le macchine elettriche trifase
- generatori elettrici
- motori elettrici

sono tecnicamente superiori alle macchine monofase:

la potenza istantanea è costante nel tempo, invece che pulsante con frequenza $2f$ (pulsazione 2ω).

Nei motori elettrici, ciò . elimina le vibrazioni trasmesse all'albero motore.

☐ SULLA POTENZA ISTANTANEA NEI SISTEMI TRIFASE SIMM. E EQ.



Calcoliamo $p(t)$ potenza istantanea entrante nel tripolo (attraversante la sezione trifase mostrata in figura)

$$p(t) = p_a(t) + p_b(t) + p_c(t)$$

$$p_a(t) = P_a\left[1+\cos(2\omega t + 2\varphi_{Ia})\right] - Q_a \sin(2\omega t + 2\varphi_{Ia})$$

vedi lezione su potenza in regime sinusoidale

Per le altre fasi, basta sfasare la φ_{Ia} di $\mp 120°$ (supponiamo, per es., seq. diretta) inoltre consideriamo che $P_a = P_b = P_c$ $Q_a = Q_b = Q_c$ nei sist. simm. e eq.

$$p_{b,c}(t) = P_a\left[1+\cos(2\omega t + 2\varphi_{Ia} \underbrace{\mp 120°\cdot 2}_{\mp 240° = \pm 120°})\right] - Q_a \sin(2\omega t + 2\varphi_{Ia} \underbrace{\mp 120°\cdot 2}_{\mp 240° = \pm 120°})$$

Si ottiene quindi

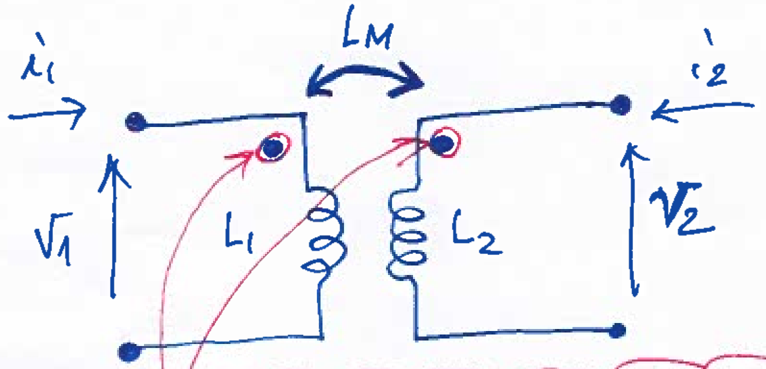
$$p(t) = 3P_a + P_a\Big[\underbrace{\cos(2\omega t + 2\varphi_{Ia}) + \cos(2\omega t + 2\varphi_{Ia} + 120°) + \cos(2\omega t + 2\varphi_{Ia} - 120°)}_{=0\ (*)}\Big] +$$
$$- Q_a\Big[\underbrace{\sin(2\omega t + 2\varphi_{Ia}) + \sin(2\omega t + 2\varphi_{Ia} + 120°) + \sin(2\omega t + 2\varphi_{Ia} - 120°)}_{=0\ (*)}\Big]$$

(*) Si verifica agevolmente che sono nulli! Sono tre sinusoidi con eguale ampiezza e sfasate di 120°!

quindi $\boxed{p(t) = 3P_a}$ ⇨ $\boxed{p(t) = P}$

☐ MUTUO INDUTTORE

- È un doppio bipolo intrinseco di tipo dinamico
- come vedremo in elettromagnetismo, la relazione costitutiva descrive accoppiamenti di flusso magnetico fra avvolgimenti di fili
(per ora ci occupiamo degli aspetti circuitali)



i "morsetti contrassegnati" (come nel trasformatore) specificano quale è il polo del + della tensione alle due porte

$L_1 > 0$ $\quad L_2 > 0$ AUTO-INDUTTANZE

$L_M \gtreqless 0$ MUTUA INDUTTANZA

[H] "Henry"

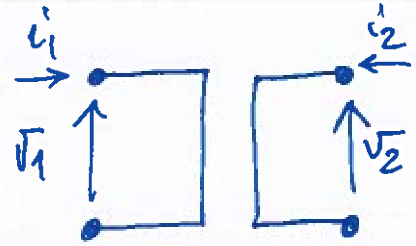
Relazione costitutiva nel dominio del tempo:

$$\boxed{\begin{cases} v_1 = L_1 \dfrac{di_1}{dt} + L_M \dfrac{di_2}{dt} \\[2ex] v_2 = L_M \dfrac{di_1}{dt} + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \end{cases}}$$

②

DC

- A regime costante $\frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} = 0 \longrightarrow \boxed{\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \end{cases}}$



Le due porte sono banali cortocircuiti

$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Omega$$ matrice di resistenza nulla

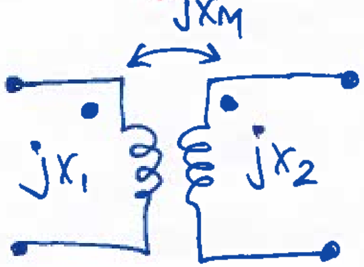
AC

- In regime sinusoidale $\frac{d}{dt} \rightarrow j\omega$ passando al dominio dei fasori

$$\boxed{\begin{cases} \bar{V}_1 = jX_1 \bar{I}_1 + jX_M \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = jX_M \bar{I}_1 + jX_2 \bar{I}_2 \end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} X_1 = \omega L_1 & X_2 = \omega L_2 \\ \multicolumn{2}{c}{X_M = \omega L_M} \end{array}}$$

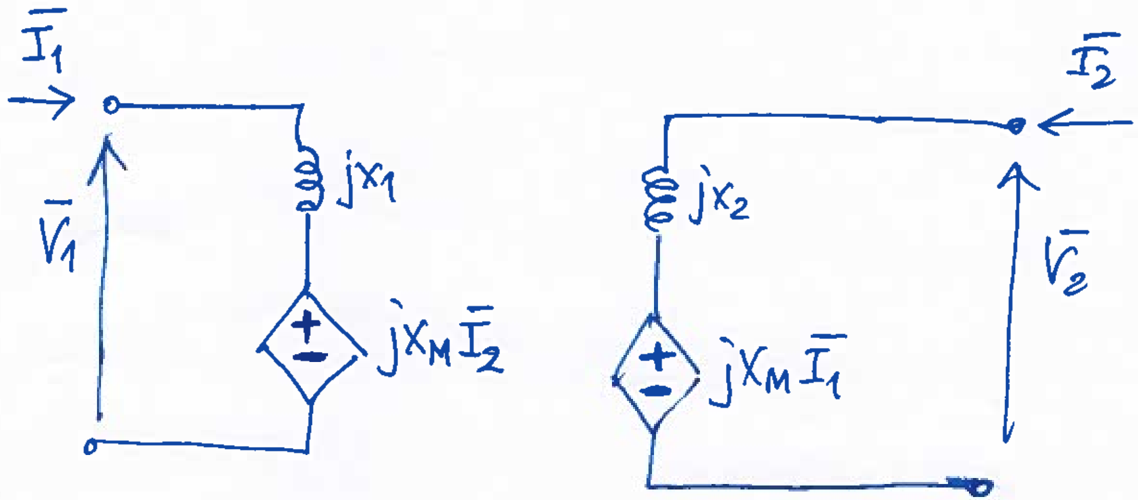
$$\boxed{\bar{\underset{\sim}{Z}} = \begin{bmatrix} jX_1 & jX_M \\ jX_M & jX_2 \end{bmatrix}}$$



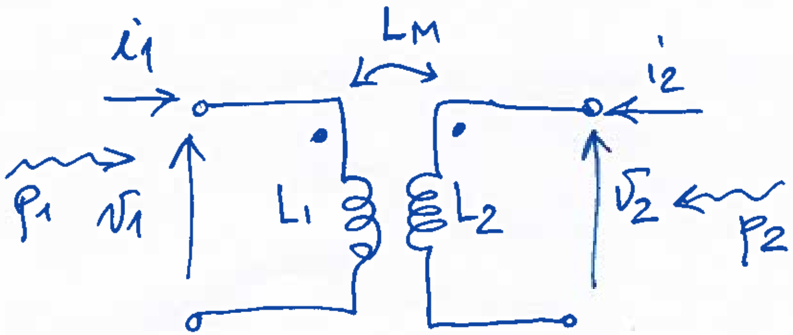
$$\boxed{\bar{V} = \bar{\underset{\sim}{Z}}\, \bar{I}}$$

doppio bipolo di impedenze puramente induttive, accoppiate.

Equivalente di Thevenin (si deduce dalla rappresentazione $\underline{\bar{Z}}$)



ENERGIA IMMAGAZZINATA NEL M.I.



Come l'induttore, il mutuo induttore IMMAGAZZINA ENERGIA

potenza entrante:

$$p = p_1 + p_2 \overset{\text{conv. util.}}{=} v_1 i_1 + v_2 i_2 = L_1 \frac{di_1}{dt} i_1 + L_M \frac{di_2}{dt} i_1 + L_M \frac{di_1}{dt} i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} i_2$$

posso scrivere

$$\boxed{p = \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + L_M i_1 i_2}_{W_{MI}}\right)}$$

W_{MI} [J] è la funzione energia immagazzinata $W_{MI}(i_1, i_2)$

verifica:

$$p = \frac{d}{dt} W_{MI}(i_1, i_2) \rightarrow p = \frac{dW_{MI}}{di_1}\frac{di_1}{dt} + \frac{dW_{MI}}{di_2}\frac{di_2}{dt} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + L_M i_2 \frac{di_1}{dt} + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + L_M i_1 \frac{di_2}{dt}$$

(Come volevasi dimostrare)

☐ PASSIVITA'

Come visto per l'induttore $W_e(-\infty,t) = W_{MI}(t) \geq 0$ ← CONDIZIONE DI PASSIVITA'

$$\frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + L_M i_1 i_2 \geq 0$$

$$\frac{1}{2} i_2^2 \left[L_1 \left(\frac{i_1}{i_2}\right)^2 + L_2 + 2L_M \frac{i_1}{i_2} \right] \geq 0$$

poniamo $x = \frac{i_1}{i_2}$

$$\underbrace{\frac{1}{2} i_2^2}_{\geq 0} \underbrace{\left[L_1 x^2 + 2L_M x + L_2 \right]}_{f(x)} \geq 0 \longrightarrow f(x) \geq 0$$

studiamo la funzione:

$f(x)$ e' una parabola; $\frac{df}{dx} = 2L_1 x + 2L_M = 0 \rightarrow \bar{x} = -\frac{L_M}{L_1}$ punto di minimo infatti $\frac{d^2f}{dx^2} = 2L_1 > 0$

$$\min = f(\bar{x}) = L_1\left(-\frac{L_M}{L_1}\right)^2 + 2L_M\left(-\frac{L_M}{L_1}\right) + L_2 = -\frac{L_M^2}{L_1} + L_2$$ valore minimo

$$-\frac{L_M^2}{L_1} + L_2 \geq 0 \longrightarrow \boxed{L_M^2 \leq L_1 L_2}$$

La condizione di passività impone dei limiti al valore della mutua induttanza

☐ COEFFICIENTE DI ACCOPPIAMENTO DEL MUTUO INDUTTORE

Si definisce come $\boxed{k = \dfrac{|L_M|}{\sqrt{L_1 L_2}}}$ $k \geq 0$

Essendo per passività $L_M^2 \leq L_1 L_2 \rightarrow k^2 = \dfrac{L_M^2}{L_1 L_2} \leq 1$

$\rightarrow \boxed{0 \leq k \leq 1}$ intervallo limite del coeff. di accoppiamento

- casi estremi
  - $k = 0 \longrightarrow L_M = 0$ INDUTTANZE NON ACCOPPIATE
  - $k = 1 \longrightarrow L_M = \pm\sqrt{L_1 L_2}$ ACCOPPIAMENTO PERFETTO