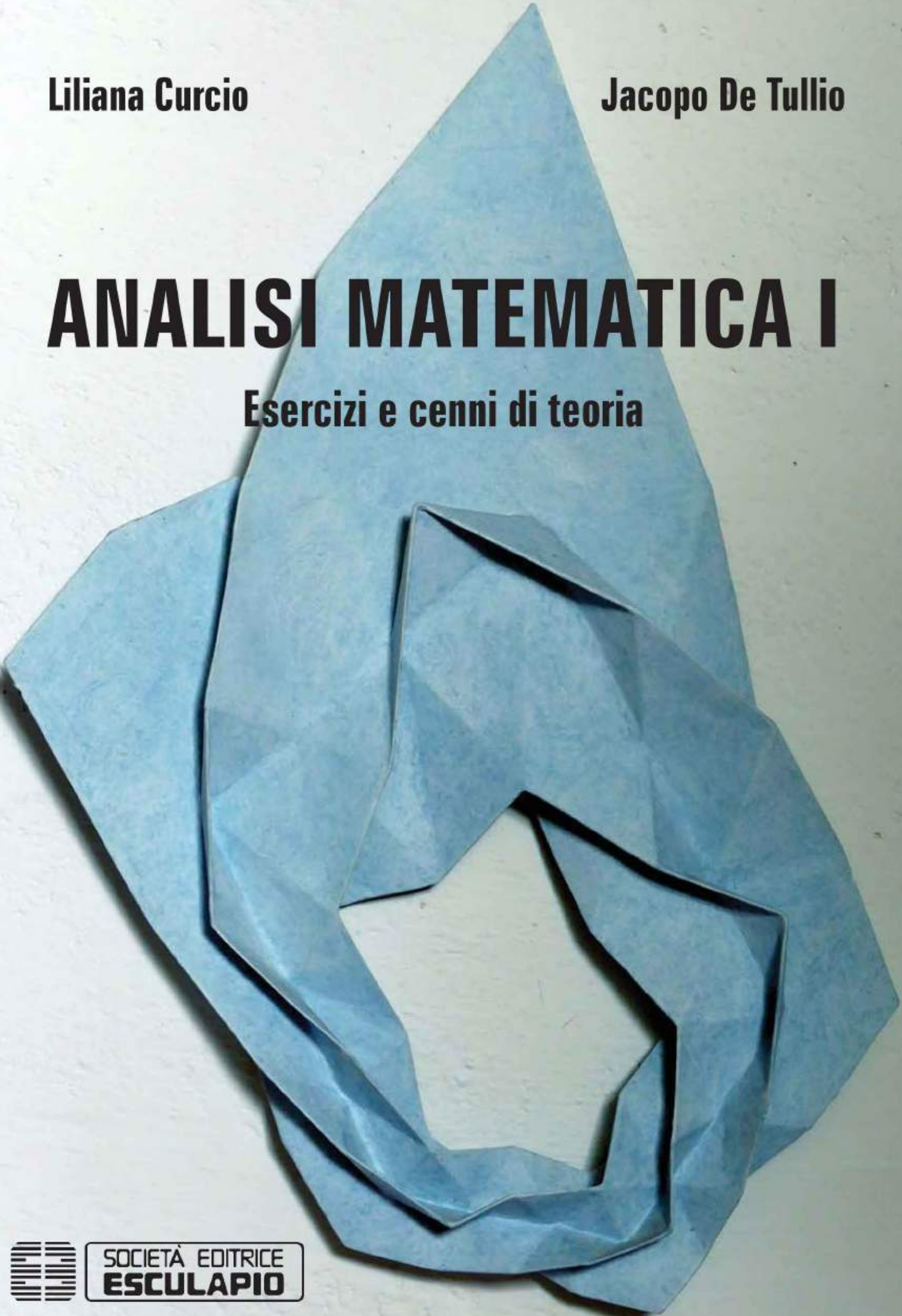
Liliana Curcio

Jacopo De Tullio

ANALISI MATEMATICA I

Esercizi e cenni di teoria



SOCIETÀ EDITRICE
ESCULAPIO

Liliana Curcio Jacopo De Tullio

ANALISI MATEMATICA I

Esercizi e cenni di teoria

SOCIETÀ EDITRICE ESCULAPIO

In copertina:
Senza titolo
Scultura di Paolo Mazzuferi
anno 1993

Fotografie di Alberto Marchegiani

ISBN 978-88-7488-993-8

Prima edizione: Ottobre 2016

Responsabile produzione: Alessandro Parenti
Redazione: Giancarla Panigali, Carlotta Lenzi

SOCIETÀ EDITRICE ESCULAPIO

40131 Bologna - Via U. Terracini 30 - Tel. 051-63.40.113 - Fax 051-63.41.136
www.editrice-esculapio.it

PRESENTAZIONE

Per uno studente universitario affrontare l'esame di Analisi Matematica I significa innanzitutto superare la prova scritta; questo è un ostacolo che si manifesta inaspettatamente difficile per vari motivi che non vogliamo analizzare in questo contesto. Certo gli argomenti del corso del primo anno sono considerati particolarmente ostici dagli studenti perché, a detta loro, bisogna ragionare molto e non c'è sempre una tecnica risolutiva standard.

Questa consapevolezza ci ha spinto a preparare un testo di esercizi che accompagni lo studente nel ragionamento e – volta per volta – ricordi le regole da usare; i commenti e la motivazione della scelta del metodo risolutivo da applicare sono importanti, essere preparati non significa aver risolto meccanicamente tanti esercizi. Di fronte a un qualsiasi quesito, non si parte "a testa bassa" applicando una regolina magica, si deve avere chiara la sequenza dei passi da compiere onde evitare partenze che poi inevitabilmente si bloccano.
Lo ripetiamo, l'Analisi (come la quasi totalità della Matematica) non è costituita da regoline da applicare ma da ragionamenti da seguire.

Questo è lo spirito con il quale abbiamo preparato questo libro, mettendo a disposizione la nostra esperienza pluriennale all'interno dei corsi di Analisi Matematica e di Matematica specifici per l'Ingegneria, per l'Architettura e l'Economia.

Il libro contiene gli argomenti relativi allo studio di una funzione reale di variabile reale e degli integrali, degli integrali generalizzati, delle funzioni integrali con alcuni approfondimenti particolari dopo aver affrontato anche le successioni e le serie per concludere con lo studio dei numeri complessi.

A ogni argomento è dedicato un capitolo che inizia con una premessa corredata con alcuni piccoli richiami di teoria; in realtà la teoria è ricordata anche in tutti gli esercizi e in particolare negli esempi. Ogni capitolo contiene esempi guidati ed esercizi svolti, in questi sono riportati attentamente tutti i passaggi e tutte le motivazioni relative ai procedimenti; seguono esercizi particolari che prevedono casi più elaborati e raffinati e che richiedono una maggiore conoscenza e una particolare attenzione da parte degli studenti. Ciascun capitolo si conclude con una raccolta di esercizi proposti che possono essere svolti autonomamente dagli studenti, consentendo loro di valutare la propria preparazione.
All'interno di ogni capitolo gli esempi e gli esercizi si susseguono in ordine crescente di difficoltà e, laddove possibile, è stato privilegiato il ragionamento e la conoscenza della teoria alla mera esecuzione di calcoli. Un concetto fondamentale per affrontare la gran parte degli argomenti è il concetto di equivalenza asintotica, individuare il comportamento asintotico rende l'indagine meno faticosa e più semplice.

Il libro prevede infine un ultimo capitolo con una raccolta di esercizi di autovalutazione; gli esercizi sono divisi per argomenti di diverso calibro (molti tratti da temi d'esame) allo scopo di consentire ad ogni studente di autovalutarsi e di essere in grado – alla luce di quanto appreso – di scegliere il percorso risolutivo corretto.

A questo punto sono doverosi i nostri ringraziamenti.
Un grazie di cuore all'amico Paolo Mazzuferi che con grande disponibilità e generosità ci ha concesso nuovamente di illustrare tutto il libro, compresa la copertina, con le immagini delle sue splendide sculture originate a partire da un'ispirazione derivante da uno studio approfondito della Geometria.
Con immenso affetto un sincero grazie alla carissima Maria Lavinia Ricci, con la quale uno dei due autori ha collaborato con amicizia, stima e gioia per circa trent'anni nei corsi di Analisi Matematica del Politecnico di Milano e dalla quale ha appreso la cura e l'attenzione nello sviluppare e trasmettere gli argomenti e i contenuti specifici dei programmi dei corsi.
Con tutto il cuore un grazie all'amico carissimo Desiderio Poletto che, come sempre, ci ha sostenuti nel corso di questo lavoro e ci ha aiutato con le sue preziose correzioni e con insostituibili suggerimenti scaturiti dalla lettura attenta e minuziosa di tutto il testo.
Inoltre un affettuoso grazie all'amico Angelo Guerraggio che – ancora una volta – ha dedicato il suo prezioso tempo alla lettura e alla correzione del nostro lavoro.
Un ultimo sincero grazie a tutto lo staff della casa editrice Esculapio.

È doveroso però dire che solo noi autori siamo gli unici responsabili di quanto scritto e quindi di qualsiasi errore e/o refuso rimasto nel testo. Ringraziamo fin da subito tutti coloro che vorranno segnalarci eventuali improprietà ed errori rilevati durante la lettura.

Ci piace concludere con un ultimo ringraziamento a tutti coloro (primi fra tutti i nostri rispettivi familiari) che durante questo percorso ci hanno sostenuto e incoraggiato con grande pazienza e affetto.

Milano, 30 luglio 2016

Liliana Curcio
Jacopo De Tullio

INDICE

1. DOMINIO E INSIEME DELLE IMMAGINI DI UNA FUNZIONE 1
Premessa 3
Esempi guidati 3
Esercizi svolti 5
Esercizi particolari 9
Esercizi proposti 12

2. FUNZIONI ELEMENTARI E LORO TRASFORMAZIONI 15
Premessa 17
Esempi guidati 18
Esercizi svolti 38
Esercizi particolari 45
Esercizi proposti 48

3. SUCCESSIONI 51
Premessa 53
Esempi guidati 55
Esercizi svolti 61
Esercizi particolari 65
Esercizi proposti 68

4. SERIE NUMERICHE 71
Premessa 73
Esempi guidati 73
Esercizi svolti 77
Esercizi particolari 81
Esercizi proposti 86

5. LIMITI DI FUNZIONI E COMPORTAMENTO ASINTOTICO 89
Premessa 91
Esempi guidati 92
Esercizi svolti 100
Esercizi particolari 111
Esercizi proposti 120

6. DERIVABILITÀ DI UNA FUNZIONE 125
Premessa 127
Esempi guidati 128
Esercizi svolti 135
Esercizi particolari 140
Esercizi proposti 145

7. STUDIO DI FUNZIONE 147
Premessa 149
Esempi guidati 149
Esercizi svolti 159
Esercizi particolari 168
Esercizi proposti 181

8. INTEGRALI 185
Premessa 187
Esempi guidati 187
Esercizi svolti 198
Esercizi particolari 206
Esercizi proposti 211

9. INTEGRALI GENERALIZZATI E FUNZIONI INTEGRALI 215
Premessa 217
Esempi guidati 218
Esercizi svolti 222
Esercizi particolari 231
Esercizi proposti 234

10. NUMERI COMPLESSI 239
Premessa 241
Esempi guidati 241
Esercizi svolti 247
Esercizi particolari 251
Esercizi proposti 259

11. AUTOVALUTAZIONI 263

1 DOMINIO E INSIEME DELLE IMMAGINI DI UNA FUNZIONE

"Corona"
scultura di Paolo Mazzuferi
anno 2005

PREMESSA

Il **dominio** D di una funzione $f : D \subseteq R \to R$ è l'insieme di tutti i valori che possono essere assunti dalla variabile indipendente (x oppure t, ecc.) in corrispondenza dei quali esiste uno ed un solo valore della variabile dipendente (y oppure s, ecc.).

$$\forall x \in D \to f(x) \in R$$

Come si calcola il dominio di una funzione? Semplicemente garantendo l'esistenza di tutte le operazioni che la definiscono. Conosciamo le operazioni in R e sappiamo che alcune sono sempre possibili, altre sono soggette a specifiche condizioni. Queste ultime sono:

- nella divisione il denominatore non può essere zero;
- nella radice con indice pari il radicando non può essere negativo;
- nel logaritmo (la cui base deve essere strettamente positiva e diversa da 1) l'argomento deve essere strettamente positivo;
- nell'elevamento a potenza con esponente irrazionale, la base deve essere positiva o nulla se l'esponente è positivo, strettamente positiva se l'esponente è negativo.

Si dice **insieme delle immagini di** f e si indica con Im(f) oppure $f(D)$, essendo D il dominio della funzione f, l'insieme di tutti i valori che la f assume al variare della variabile indipendente nel suo dominio.
In generale indicheremo una funzione con f oppure y.

ESEMPI GUIDATI

ESEMPIO 1

Vogliamo calcolare il dominio della funzione $y = 4 - \frac{x+2}{1-x^2}$.

La funzione y è definita dalle operazioni elementari e da un elevamento a potenza, l'unica che prevede una condizione per l'esistenza è la divisione. Occorre dunque porre il denominatore diverso da zero: $1 - x^2 \neq 0$ ovvero $x \neq \pm 1$. Il dominio, che indicheremo con la lettera D, può essere scritto nel seguente modo: $D \equiv R - \{1\}$ oppure $D \equiv (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

ESEMPIO 2

Calcoliamo il dominio della funzione $y = \sqrt{6x + x^2}$.

Si tratta di una funzione irrazionale, la radice ha indice due (pari) e quindi occorre porre il radicando maggiore o uguale a zero, nel nostro caso: $6x + x^2 \geq 0$. Risolvendo la disequazione di secondo grado si ottiene $x \leq -6 \vee x \geq 0$. Il dominio D è dunque: $D \equiv \{x \in R : x \leq -6 \vee x \geq 0\}$ che può essere scritto anche nel seguente modo: $D \equiv (-\infty, -6] \cup [0, +\infty)$.

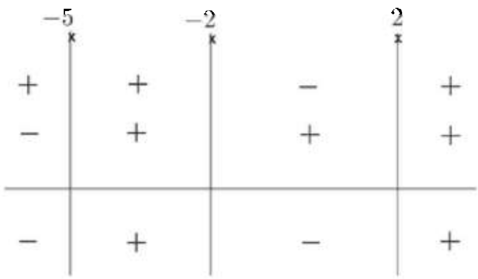
ESEMPIO 3

Anche la prossima è una funzione irrazionale $y = \sqrt[3]{\frac{64 + x^3}{x^2}}$ ma l'indice della radice è dispari dunque nessuna condizione da porre per la radice; essendoci però anche una divisione occorre porre il denominatore diverso da zero e quindi - nel nostro caso - $x^2 \neq 0$ da cui $x \neq 0$. Il dominio della funzione è dunque l'insieme $D \equiv R - \{0\}$ che può essere scritto anche nel seguente modo $D \equiv (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ESEMPIO 4

Nella funzione $y = \ln\left(\frac{x^2 - 4}{5 + x}\right)$ compare una nuova operazione. Ricordiamo che il logaritmo esiste se e solo se il suo argomento è strettamente positivo, quindi nel nostro caso deve essere: $\frac{x^2 - 4}{5 + x} > 0$.

Dobbiamo calcolare il segno della frazione e operiamo individuando, separatamente, il segno del numeratore e del denominatore per poi mettere insieme i risultati.



Da cui otteniamo $-5 < x < -2 \cup x > 2$.
Il dominio è quindi l'insieme $D \equiv (-5, -2) \cup (2, +\infty)$.

ESEMPIO 5

Per una funzione esponenziale $y = 2^{\sqrt{3x + 2x^2}}$ non c'è alcuna condizione da porre per l'esistenza se non garantire che esista l'esponente; essendo quest'ultimo definito da una radice quadrata, dobbiamo porre il radicando maggiore o uguale a zero: $3x + 2x^2 \geq 0$. Ancora una volta risolviamo la disequazione e otteniamo $x \leq -\frac{3}{2} \vee x \geq 0$. Il dominio risulta essere l'insieme $D \equiv \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup [0, +\infty)$.

ESEMPIO 6

Di fronte ad una funzione potenza del seguente tipo $y=(3x-2)^{\sqrt{5}}$ dobbiamo solo ricordare che essendo l'esponente un irrazionale positivo, la base deve essere maggiore oppure uguale a zero. Poniamo dunque $3x-2\geq 0$ da cui otteniamo $x\geq\frac{2}{3}$. Il dominio risulterà dunque l'insieme $D\equiv\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$.

Osserviamo che se l'esponente fosse stato un numero negativo la condizione da porre sarebbe stata la base strettamente positiva.

ESEMPIO 7

Nel caso in cui nella definizione di una funzione comparisse il modulo dovremmo ricordare che la funzione valore assoluto è sempre maggiore o uguale a zero (e le cose dovrebbero essere più semplici!).

Consideriamo, ad esempio, la funzione $y=\sqrt{\left|x^2-25\right|}$; non avremmo alcuna condizione da porre per l'esistenza, infatti il suo radicando risulta sempre maggiore o uguale a zero (grazie al modulo!). Il dominio dunque coincide con l'insieme *R*.

Se invece avessimo considerato la funzione $y=\ln\left|x^2-2x\right|$, l'argomento del logaritmo non risulterà mai negativo, ma a noi interessa anche che non sia nullo, quindi poniamo la seguente condizione di esistenza: $x^2-2x\neq 0$ e otteniamo $x\neq 0$ e $x\neq 2$. Il dominio è l'insieme $D\equiv(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,+\infty)$.

ESERCIZI SVOLTI

Per ciascuna delle seguenti funzioni individuare il dominio:

1) $y=3+\frac{7x+2}{3-x}$;

2) $y=x^2-\frac{3x}{x^2+2}+\frac{5}{x-1}$;

3) $y=\sqrt{4x-x^2}$;

4) $y=\sqrt[5]{\frac{6+x}{x^4}}$;

5) $y=\frac{3-x}{\sqrt{2x+x^2}}$;

6) $y=2x-\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{2+x}}$;

7) $y=\ln\left(3+x+x^2\right)$;

8) $y=\ln\left(\frac{x^2}{3-x^2}\right)$;

9) $y=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x}+x\right)$;

10) $y=\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\log_3(7-x)}$;

11) $y=\log_2\left|x^2-25\right|$;

12) $y=\ln\left(x-\sqrt{4+x}\right)$;

13) $y=4^{\sqrt{3+x}}$;

14) $y=(1+x)^{-\sqrt{3}}$;

e ancora:

15) $y = \sqrt{\log_4\left(2x - 7 + x^2\right)}$; 16) $y = \sqrt[4]{\dfrac{\log_{\frac{1}{3}}(6-x)}{2^x}}$; 17) $y = \log_{(3-x)}(x+2)$.

SOLUZIONI

1) La funzione $y = 3 + \dfrac{7x+2}{3-x}$ esiste per ogni $x \in R$ che non annulli il denominatore.
Occorre quindi porre la condizione che il denominatore sia diverso da zero: $3 - x \neq 0$, si ricava $x \neq 3$.
Il dominio della funzione è l'insieme $D \equiv R - \{3\}$.

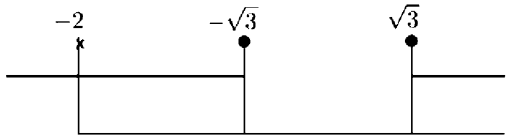
2) Ripetiamo analogo ragionamento a quello fatto nell'esempio appena svolto per la funzione $y = x^2 - \dfrac{3x}{x^2+2} + \dfrac{5}{x-1}$.
Poniamo la condizione che il denominatore sia diverso da zero e otteniamo $\begin{cases} x^2 + 2 \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases}$; poiché la somma di un quadrato (sempre maggiore o uguale a zero) e un numero positivo è sempre strettamente positiva e quindi diversa da zero. Resta solo la condizione $x - 1 \neq 0$ cioè $x \neq 1$. Se ne deduce che il dominio della funzione è l'insieme $D \equiv (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

3) La funzione $y = \sqrt{4x - x^2}$ è definita da una radice quadrata, pertanto il suo radicando non può essere negativo. Poniamo $4x - x^2 \geq 0$ e risolviamo la disequazione ottenendo $0 \leq x \leq 4$. Il dominio della funzione è quindi l'insieme [0, 4].

4) Il dominio della funzione $y = \sqrt[5]{\dfrac{6+x}{x^4}}$ è calcolato ponendo soltanto la condizione che il denominatore deve essere diverso da zero; $x^4 \neq 0$ quindi $x \neq 0$. Pertanto il dominio è l'insieme $D \equiv R - \{0\}$ che può essere scritto anche nel seguente modo $D \equiv (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

5) La funzione $y = \dfrac{3-x}{\sqrt{2x + x^2}}$ esiste quando il radicando presente al denominatore è strettamente positivo, quindi la condizione da porre è $2x + x^2 > 0$. Risolvendo la disequazione si ottiene $x < -2 \vee x > 0$ che possiamo anche scrivere $D \equiv (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.

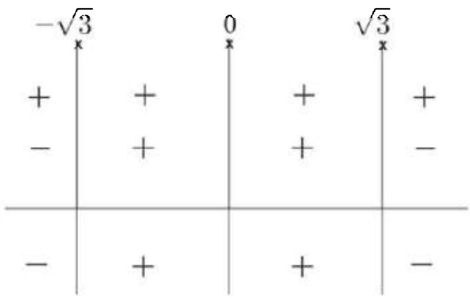
6) La funzione $y = 2x - \dfrac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt{2+x}}$ esiste quando il radicando è non negativo e il suo denominatore è diverso da zero. Quindi deve essere $\begin{cases} x^2 - 3 \geq 0 \\ 2 + x > 0 \end{cases}$. Risolvendo le due disequazioni si ottiene: $\begin{cases} x \leq -\sqrt{3} \vee x \geq \sqrt{3} \\ x > -2 \end{cases}$.



e otteniamo: $-2 < x \le -\sqrt{3} \vee x \ge \sqrt{3}$. Il dominio può essere scritto anche nel seguente modo: $D \equiv \left(-2, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right)$.

7) Per calcolare il dominio della funzione $y = \ln\left(3 + x + x^2\right)$ occorre ricordare che l'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo, dunque $3 + x + x^2 > 0$ e questo accade per ogni valore reale di x (si noti che andando a calcolare gli eventuali zeri del trinomio si trova che il discriminante è negativo). Se ne deduce che il dominio della funzione è tutto l'insieme dei numeri reali, $D \equiv R$.

8) La funzione $y = \ln\left(\dfrac{x^2}{3 - x^2}\right)$ esiste se l'argomento del logaritmo è strettamente positivo, quindi deve essere $\dfrac{x^2}{3 - x^2} > 0$. Risolviamo:



e otteniamo $-\sqrt{3} < x < 0 \cup 0 < x < \sqrt{3}$
Il dominio può essere scritto anche così: $D \equiv \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$.

9) Per calcolare il dominio della funzione $y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{x} + x\right)$ dobbiamo porre $\dfrac{1}{x} + x > 0$ ottenendo l'unica condizione $x > 0$. Di conseguenza il dominio è il seguente: $D \equiv (0, +\infty)$.

10) La funzione $y = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{\log_3(7 - x)}$ esiste quando il logaritmo esiste ed è diverso da zero, quindi $7 - x > 0$ e $7 - x \ne 1$. Da cui $x < 7$ e $x \ne 6$. Il dominio sarà l'insieme $D \equiv (-\infty, 6) \cup (6, 7)$.

11) Ancora una funzione definita da un logaritmo, ma questa volta l'argomento è in modulo $y = \log_2 |x^2 - 25|$; in questo caso è sufficiente garantire soltanto che l'argomento sia diverso da zero e quindi $x^2 - 25 \neq 0$, cioè $x \neq \pm 5$. Il dominio è il seguente: $D \equiv (-\infty, -5) \cup (-5, 5) \cup (5, +\infty)$ oppure $D \equiv R - \{\pm 5\}$.

12) La condizione di esistenza per la funzione $y = \ln\left(x - \sqrt{4+x}\right)$ diventa $x - \sqrt{4+x} > 0$, risolviamo la disequazione irrazionale che si presenta nel seguente modo $x > \sqrt{4+x}$. Le soluzioni si calcolano attraverso il sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 4 + x \geq 0 \\ 4 + x < x^2 \end{cases}$$

Per il quale si ottengono le soluzioni:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \geq -4 \\ x < \dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \vee x > \dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Eseguendo l'intersezione si ottiene $x > \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$. Ovvero il dominio è l'insieme $D \equiv \left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}, +\infty\right)$.

13) La funzione esponenziale $y = 4^{\sqrt{3+x}}$ esiste sempre purché ovviamente esista l'esponente. Dobbiamo dunque porre $3 + x \geq 0$ e quindi $x \geq -3$. Il dominio sarà $D \equiv [-3, +\infty)$.

14) Infine affrontiamo la funzione potenza con esponente reale $y = (1+x)^{-\sqrt{3}}$, essendo l'esponente un irrazionale negativo dobbiamo solo garantire che la base sia strettamente positiva e quindi $1 + x > 0$ da cui $x > -1$. Il dominio è dunque $D \equiv (-1, +\infty)$.

Affrontiamo gli ultimi tre esercizi, apparentemente difficili, che si risolveranno in modo semplice.

15) La funzione $y = \sqrt{\log_4\left(2x - 7 + x^2\right)}$ è definita quando il logaritmo, che costituisce il radicando, esiste e risulta maggiore o uguale a zero. Poniamo dunque la condizione che l'argomento del logaritmo sia maggiore o uguale a uno (questo contempla che l'argomento del logaritmo sia di sicuro anche strettamente posi-

tivo): $2x-7+x^2 \geq 1$. Risolviamo la disequazione che diventa $x^2+2x-8 \geq 0$, da cui $x \leq -4 \vee x \geq 2$. Il dominio risulta il seguente: $D \equiv (-\infty,-4] \cup [2,+\infty)$.

16) La funzione $y=\sqrt[4]{\frac{\log_{\frac{1}{3}}(6-x)}{2^x}}$ esiste quando il radicando è maggiore o uguale a zero, questo significa il numeratore non negativo (il denominatore 2^x è sempre positivo) quindi l'argomento del logaritmo maggiore di 0 e minore o uguale di 1 (questo poiché la base del logaritmo è minore di 1): $0<6-x \leq 1$, ovvero $5 \leq x < 6$. Il dominio è l'insieme $D \equiv [5,6)$.

17) La funzione $y=\log_{(3-x)}(x+2)$ esiste quando il suo argomento è strettamente positivo: $x+2>0$, $x>-2$; osserviamo che la base del logaritmo dipende da x, poniamo dunque anche le condizioni che (3 – x) sia strettamente positivo e diverso da 1. Risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x>-2 \\ 3-x>0 \\ 3-x \neq 1 \end{cases}$$

si ottiene $-2<x<3$ e $x \neq 2$, quindi il dominio risulta $D \equiv (-2,2) \cup (2,3)$.

ESERCIZI PARTICOLARI

ESERCIZIO 1

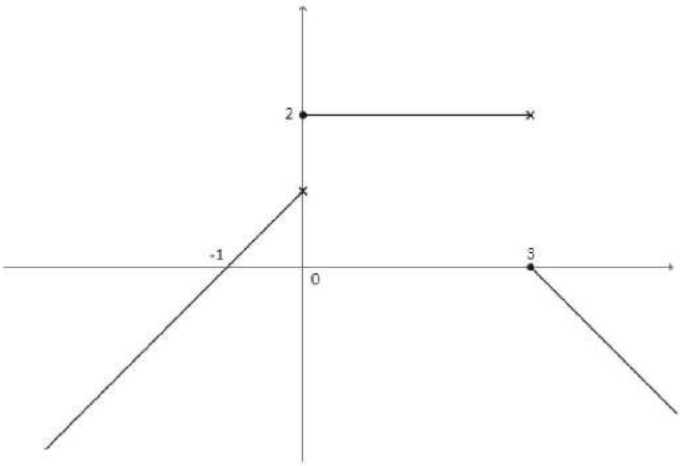
Per la seguente funzione definita a tratti:

$$y=\begin{cases} 1+x & x<0 \\ 2 & 0 \leq x < 3 \\ 3-x & x \geq 3 \end{cases}$$

a) Eseguire la rappresentazione nel piano cartesiano;
b) Indicare il dominio e l'insieme delle immagini;
c) L'insieme delle immagini Im(y) è limitato? Spiegare.
d) L'insieme Im(y) ha un massimo? Se sì indicare quale e specificare se si tratta di massimo locale e/o globale.

Risolviamo per punti.

a) Il grafico è il seguente:



b) Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini invece, direttamente dal grafico, è l'insieme:
$D \equiv (-\infty, 1) \cup \{2\}$.

c) L'insieme Im(*y*) non è limitato, è solo superiormente limitato.

d) Tale insieme ha un massimo; il massimo è il valore 2 e si tratta di un massimo globale.
Osserviamo invece che i punti di massimo della funzione sono tutti i valori di *x* appartenenti all'intervallo [0,3).

ESERCIZIO 2

Data la seguente funzione definita a tratti:

$$y = \begin{cases} \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-5}} & x \le 0 \\ \ln|3-x| & x > 0 \end{cases}$$

Calcolare il dominio.

Risolviamo osservando che la funzione ha una doppia definizione. Per $x \le 0$ occorre porre per l'esistenza il radicando strettamente positivo, quindi $x^2 - 5 > 0$ ovvero:

$$\begin{cases} x \le 0 \\ x < -\sqrt{5} \vee x > \sqrt{5} \end{cases}$$

da cui si ricava: $x < -\sqrt{5}$.

Per quanto riguarda $x > 0$, occorre porre l'argomento del logaritmo diverso da zero e quindi $x \neq 3$, quindi: $0 < x < 3 \vee x > 3$.
Il dominio della funzione data sarà: $D \equiv \left(-\infty, -\sqrt{5}\right) \cup (0,3) \cup (3, +\infty)$.

ESERCIZIO 3

Indicare almeno due funzioni il cui dominio coincide con l'insieme

$D \equiv (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Quanto richiesto significa trovare una funzione che abbia come unica condizione di esistenza $x \neq 1$, ovvero $x - 1 \neq 0$.
Subito i seguenti esempi:

$$y = \frac{1}{x-1}$$

$$y = \ln|x-1|$$

$$y = \frac{2x}{x^3 - 1}.$$

Ma anche:

$$y = \log_4 \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$$

$$y = \frac{x^2 - 6}{\sqrt{(x^2+1)(x-1)^4}}.$$

ESERCIZIO 4

Calcolare il dominio della funzione

$$y = \ln\left(\frac{e^{2x} - e^x - 6}{e^x - 2}\right).$$

Le condizioni di esistenza della funzione richiedono che:

$$\frac{e^{2x} - e^x - 6}{e^x - 2} > 0.$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore. Il segno del numeratore risulta: $e^{2x} - e^x - 6 > 0$.

Per facilitare i conti poniamo $t = e^x$, da cui: $t^2 - t - 6 > 0$ che ammette come soluzioni $t < -2 \vee t > 3$, da cui $x > \ln 3$.

Il segno del denominatore risulta: $e^x - 2 > 0,\ e^x > 2,\ x > \ln 2$.

Combinando il segno del numeratore e denominatore si ricava che la frazione $\dfrac{e^{2x} - e^x - 6}{e^x - 2}$ risulta positiva per $x < \ln 2 \vee x > \ln 3$. Il dominio della funzione pertanto coincide con l'insieme $D \equiv (-\infty, \ln 2) \cup (\ln 3, +\infty)$.

ESERCIZIO 5

Indicare almeno due funzioni il cui dominio coincide con l'insieme $D \equiv (-\infty, +\infty)$.

Quanto richiesto significa trovare o una funzione che non contenga le operazioni critiche che hanno bisogno di condizioni di esistenza e quindi un polinomio di grado qualsiasi:

$$y = 2x^3 - \frac{1}{4}x^2 - x + 3$$

oppure una radice di indice dispari:

$$y = \sqrt[3]{\frac{2 + x}{4}}$$

Il dominio coincide con l'insieme *R* anche nel caso di funzioni che, pur contenendo operazioni che in genere impongono delle condizioni di esistenza, esistono in tutto *R*, a tal proposito si considerino i seguenti casi:

$$y = \ln\left(x^2 + 1\right)$$

$$y = \sqrt{\left|2x^2 - 3\right|}$$

$$y = \frac{x^2 - 6}{x^2 + 3}.$$

Infatti queste, pur contenendo operazioni che in genere impongono delle condizioni di esistenza, sono definite per ogni x appartenente a *R*.

ESERCIZI PROPOSTI

Calcolare il dominio delle seguenti funzioni spiegando il percorso seguito:

1) $y = 2x - \dfrac{3}{11 - x} + \dfrac{x - 1}{x^2 - x}$; 2) $y = \dfrac{2x - 1}{3 - x^2 + x}$; 3) $y = \dfrac{4x^2 - 2x}{1 + x - x^2} - \dfrac{2}{3 - x^2}$;

4) $y = \sqrt[3]{\dfrac{4x}{3 - x^2}}$; 5) $y = \sqrt{\dfrac{-2x}{x^2 + 3x - 2}}$; 6) $y = \sqrt{-3x}$;

7) $y=\sqrt{x^2-3x+1}$; 8) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{-2x}}$; 9) $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+4x}}{4-4x+x^2}$;

10) $y=\log_2\dfrac{3}{\sqrt[3]{2-x}}$; 11) $y=\log_2\dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{2-x}}$; 12) $y=\log_3\left[\left(4+4x+x^2\right)(5-x)\right]$;

13) $y=5^{\ln\left(5-x^2\right)}$; 14) $y=2^{\frac{7x}{x^2+3}}$; 15) $y=\log_3\left(x-\dfrac{1}{x^3}\right)$;

16) $y=\ln\left|x+\dfrac{1}{x}\right|$; 17) $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)$; 18) $y=\dfrac{1}{x}\sqrt[3]{-7x+x^2}$;

19) $y=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{5x}{\sqrt{6+x}}$; 20) $y=\sqrt[4]{\dfrac{2-x^2}{7+x}}$; 21) $y=2^{\frac{\sqrt{5+x}}{x}}$;

22) $y=\dfrac{1}{x+10}\sqrt{-x}$; 23) $y=4x-\sqrt{\dfrac{2x}{1-x^2}}$; 24) $y=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{2}{x^3}$;

25) $y=2x-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2-9}}$; 26) $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-2x}}{\sqrt[3]{1-x^2}}$; 27) $y=(3-x)^{\pi}$;

e ancora:

28) $y=\dfrac{\log_{\frac{1}{4}}\left(4x^2+3x\right)}{\sqrt[3]{1-x^2}}$; 29) $y=\log_7\sqrt[3]{x^2-9}+\log_5\sqrt{5+x}$;

30) $y=\log_{2x}\left(x^3+1\right)$; 31) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x-1}}{\ln|x+3|}$;

32) $y=\dfrac{e^x-4x}{e^{2x}+1}$; 33) $y=\ln\left(\dfrac{-e^{2x}+3e^x}{e^{2x}+1}\right)$.

FUNZIONI ELEMENTARI E LORO TRASFORMAZIONI

2

"Amanti" - Particolare
scultura di Paolo Mazzuferi
anno 2013

PREMESSA

In questo capitolo analizzeremo le funzioni elementari e quelle derivanti da queste tramite l'applicazione di semplici trasformazioni.

Ricorderemo dunque:
- funzioni potenza;
- altre funzioni elementari (esponenziali, logaritmiche, goniometriche, iperboliche, valore assoluto e segno);
- trasformazioni geometriche (traslazione, prodotto per uno scalare,...);

e per ciascuna forniremo degli esempi. Al termine, come per tutti i capitoli, gli esercizi svolti, gli esercizi particolari e quelli proposti.

FUNZIONI POTENZA

Si intende per funzione potenza una funzione del tipo $y = x^{\alpha}$ con $\alpha \in R$.
Ricordiamo che per $\alpha = 0$ la funzione diventa $y = 1$.

Se α è un intero naturale $\alpha = n \in N$ la funzione è del tipo $y = x^n$. Analizziamo al variare di n intero positivo i grafici corrispondenti a tali funzioni.
Ricordiamo che:
- se n è pari la funzione è pari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y e nel punto (0,0) l'asse delle x è tangente al grafico della funzione;
- se n è dispari la funzione è dispari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine e nel punto (0,0) l'asse delle x è tangente al grafico della funzione (ad esclusione del caso $n = 1$, che corrisponde all'equazione della bisettrice del primo e terzo quadrante).

Se α è un intero negativo la funzione è del tipo $y = x^{-n}$ con $n \in N$. La funzione può essere riscritta come $y = \frac{1}{x^n}$ (reciproche di funzioni potenza a esponente intero naturale $n \in N$) ovviamente il dominio sarà $R - \{0\}$. Analizziamo al variare di n i corrispondenti grafici.
Ricordiamo che anche in questo caso:
- se n è pari la funzione è pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y;
- se n è dispari la funzione è dispari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.

Se $\alpha = \frac{m}{n}$ con m, n naturali e primi tra loro e ovviamente $n \neq 0$, la funzione è del tipo $y = x^{\frac{m}{n}}$ (funzioni potenza con esponente razionale). Analizziamo al variare di m e n i grafici corrispondenti a tali funzioni.

Ricordiamo che:
- se n è pari y esiste solo per $x \geq 0$;
- se n è dispari la funzione esiste per ogni $x \in R$.

Nel caso n dispari, se m è pari la funzione è pari, se m è dispari la funzione è dispari. Inoltre, se $\frac{m}{n} > 1$ nel punto (0,0) la curva è tangente all'asse delle ascisse (cioè la tangente alla curva è orizzontale), se $\frac{m}{n} < 1$ nel punto (0,0) la curva è tangente all'asse delle ordinate (cioè la tangente alla curva è verticale).

Infine, per completare l'argomento, la generica funzione $y = x^{\alpha}$ con α irrazionale, esiste per $x \geq 0$ se $\alpha > 0$, esiste per $x > 0$ se $\alpha < 0$.

ESEMPI GUIDATI

ESEMPIO 1

Rappresentare i grafici delle seguenti funzioni elementari, evidenziando il dominio e l'insieme delle immagini:

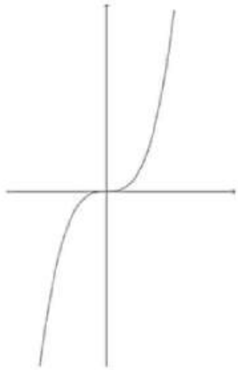
1) $y = x^4$;

2) $y = x^3$.

SOLUZIONI

1) La funzione è pari, il dominio coincide con R e l'insieme delle immagini è l'intervallo $[0, +\infty)$. Inoltre in (0,0) la curva è tangente all'asse delle x (la retta tangente nell'origine è orizzontale).

2) La funzione è dispari, il dominio e l'insieme delle immagini coincidono con R.



Notiamo che in (0,0) la curva è tangente all'asse delle x (la retta tangente nell'origine è orizzontale).

ESEMPIO 2

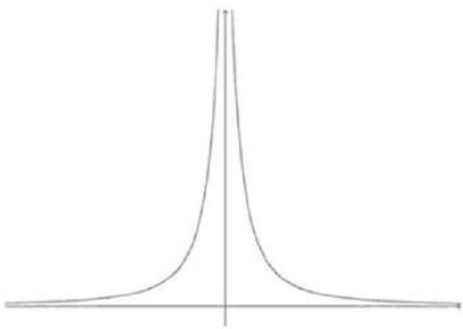
Rappresentare i grafici delle seguenti funzioni elementari, evidenziando il dominio e l'insieme delle immagini:

1) $y = \frac{1}{x^6}$;

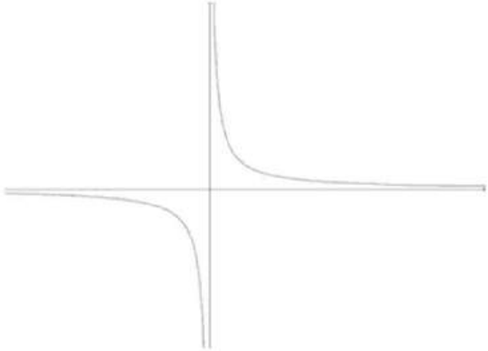
2) $y = \frac{1}{x^3}$.

SOLUZIONI

1) La funzione è pari, il dominio coincide con $R - \{0\}$, mentre l'insieme delle immagini è $(0, +\infty)$.



2) La funzione è dispari, il dominio e l'insieme delle immagini coincidono con $R - \{0\}$.



ESEMPIO 3

Rappresentare i grafici delle seguenti funzioni elementari, evidenziando il dominio e l'insieme delle immagini:

1) $y = x^{\frac{3}{2}}$;

2) $y = x^{\frac{5}{3}}$;

3) $y = x^{\frac{4}{3}}$;

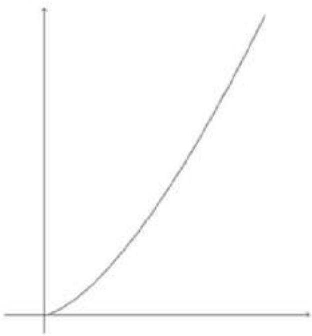
4) $y = x^{\frac{2}{3}}$;

5) $y = x^{\frac{1}{5}}$;

6) $y = x^{\frac{1}{2}}$.

SOLUZIONI

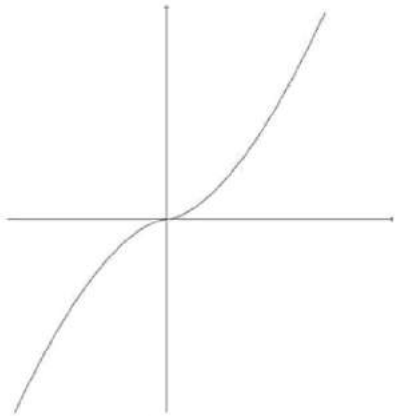
1) essendo il denominatore dell'esponente pari la funzione esiste solo per $x \geq 0$; essendo $\frac{3}{2} > 1$ la funzione in (0,0) è tangente all'asse delle x e il grafico è il seguente:



Il dominio coincide con l'intervallo $[0,+\infty)$.

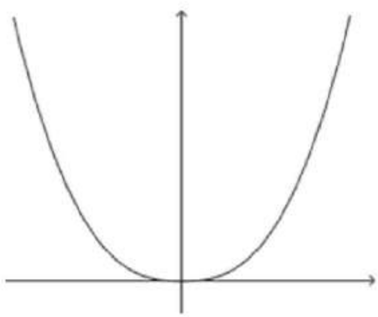
L'insieme delle immagini è: $[0,+\infty)$.

2) essendo il denominatore dell'esponente dispari la funzione esiste per ogni $x \in R$; essendo il numeratore dell'esponente dispari la funzione è dispari, inoltre poiché $\frac{5}{3}>1$ la funzione in (0,0) è tangente all'asse delle x; il grafico è il seguente:



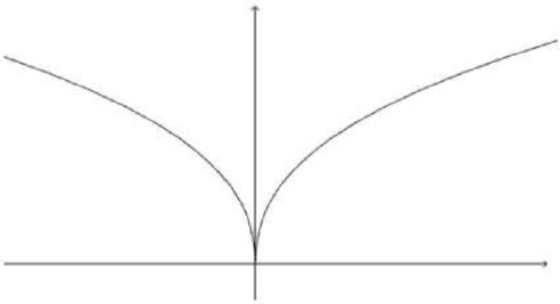
Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini coincide con *R*.

3) essendo il denominatore dell'esponente dispari la funzione esiste per ogni $x \in R$; essendo il numeratore dell'esponente pari la funzione è pari e inoltre poiché $\frac{4}{3}>1$ la funzione in (0,0) è tangente all'asse delle x; il grafico è il seguente:



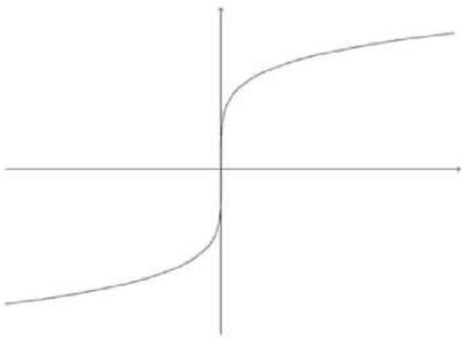
Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini è: $[0,+\infty)$.

4) essendo il denominatore dell'esponente dispari la funzione esiste per ogni $x \in R$; essendo il numeratore dell'esponente pari la funzione è pari, inoltre essendo $\frac{2}{3} < 1$ la funzione in (0,0) è tangente all'asse delle *y*. Il grafico è il seguente:



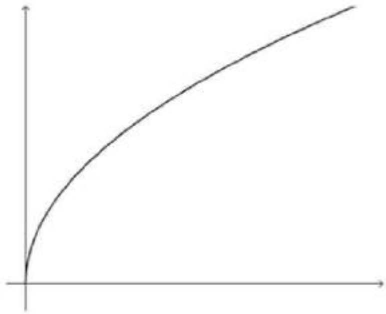
Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini è: $[0, +\infty)$.

5) essendo il denominatore dell'esponente dispari la funzione esiste per ogni $x \in R$; essendo il numeratore dell'esponente dispari la funzione è dispari, inoltre poiché $\frac{1}{5} < 1$ la funzione in (0,0) è tangente all'asse delle *y*. Il grafico è il seguente:



Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini è l'insieme *R*.

6) essendo il denominatore dell'esponente pari la funzione esiste per ogni $x \geq 0$, essendo $\frac{1}{2} < 1$ la funzione in (0,0) è tangente all'asse delle *y*; il grafico è il seguente:



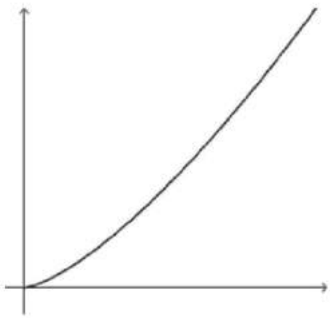
Il dominio è l'intervallo $[0,+\infty)$.

L'insieme delle immagini è: $[0,+\infty)$.

ESEMPIO 4

Rappresentare il grafico della funzione $y = x^{\sqrt{2}}$, evidenziando il dominio e l'insieme delle immagini.

Poiché $\sqrt{2}$ è positivo la funzione esiste per $x \geq 0$, essendo $\sqrt{2} > 1$ la funzione in (0,0) è tangente all'asse delle ascisse. Il grafico è il seguente:



ALTRE FUNZIONI ELEMENTARI

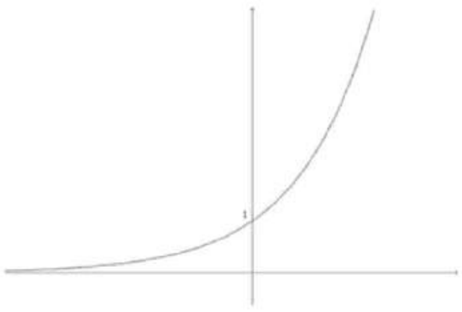
Ricordiamo i grafici e le relative caratteristiche delle altre funzioni elementari.

Funzione esponenziale

Sono funzioni aventi equazione $y = a^x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$.

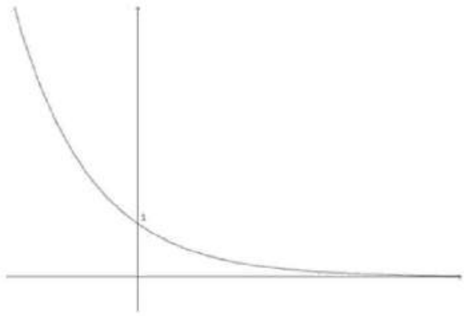
Distinguiamo le due tipologie:

$y = a^x$ con $a > 1$



Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini è l'intervallo $(0, +\infty)$.

$y = a^x$ con $0 < a < 1$

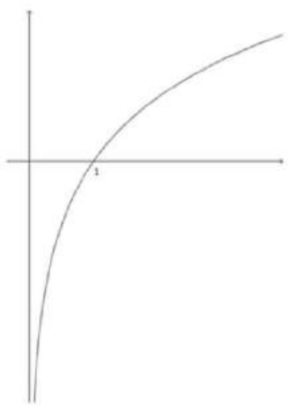


Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini è l'intervallo $(0, +\infty)$.

Tra le funzioni esponenziali ricordiamo $y = e^x$ il cui grafico ha la particolarità di avere nel punto (0,1) la tangente parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Funzioni logaritmiche
Sono funzioni aventi equazione $y = \log_a x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$.
Distinguiamo le due tipologie:

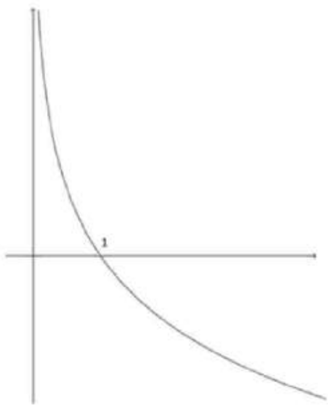
$y = \log_a x$ con $a > 1$



Il dominio coincide con l'intervallo $(0, +\infty)$.

L'insieme delle immagini coincide con *R*.

$y = \log_a x$ con $0 < a < 1$



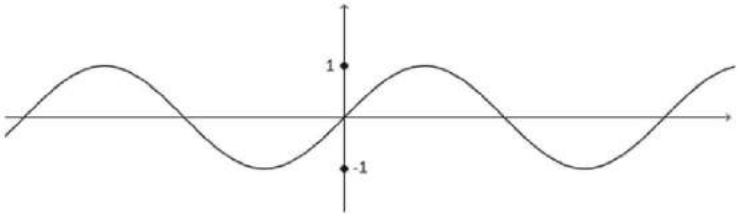
Il dominio coincide con l'intervallo $(0, +\infty)$.

L'insieme delle immagini coincide con *R*.

Tra le funzioni logaritmiche ricordiamo $y = \ln x$ il cui grafico ha la particolarità di avere nel punto (1,0) la tangente parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

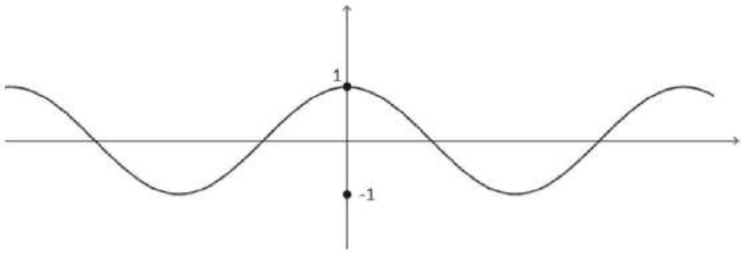
Funzioni goniometriche
Ricordiamo le funzioni goniometriche:

$y = \sin(x)$, funzione periodica di periodo 2π.



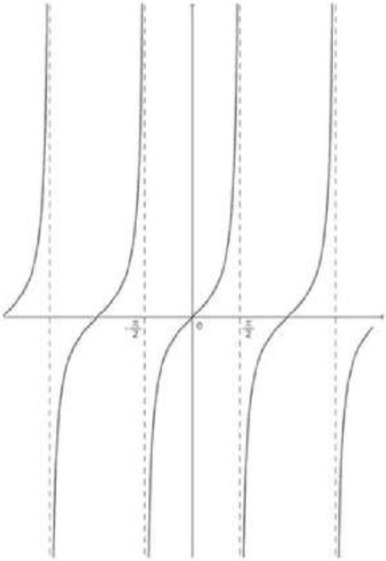
Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini con $[-1, 1]$.

$y = \cos x$, funzione periodica di periodo 2π.



Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini con $[-1, 1]$.

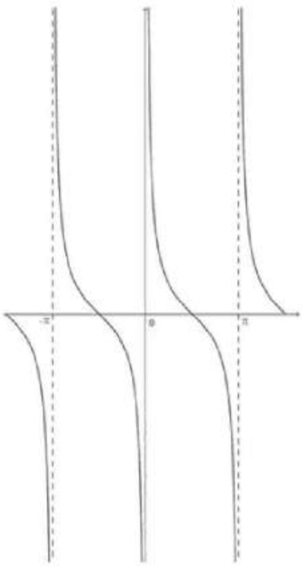
$y = \tan x$, funzione periodica di periodo π.



Il dominio coincide con l'insieme $\{x \in R:\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z\}$.

L'insieme delle immagini coincide con *R*.

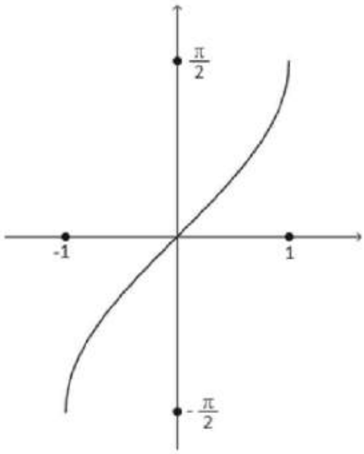
$y = \text{cotg}\ x$, funzione periodica di periodo π.



Il dominio coincide con l'insieme $\{x \in R:\ x \neq k\pi,\ k \in Z\}$.
L'insieme delle immagini coincide con *R*.

Ricordiamo anche le seguenti funzioni inverse di alcune funzioni goniometriche.

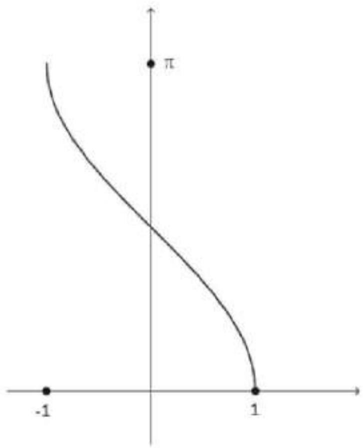
$y = \arcsin x$



Il dominio coincide con l'intervallo $[-1, 1]$.

L'insieme delle immagini con $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

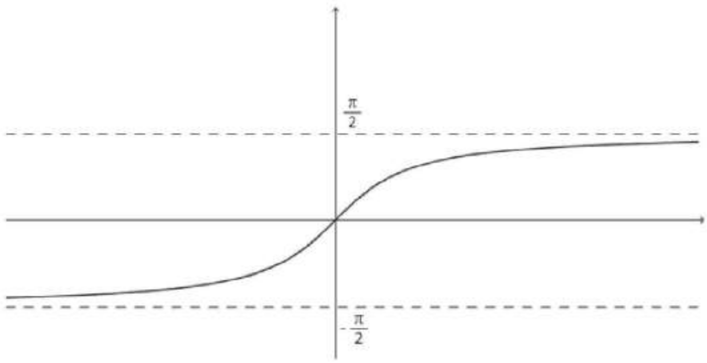
$y = \arccos x$



Il dominio coincide con l'intervallo $[-1, 1]$.

L'insieme delle immagini con $[0, \pi]$.

$y = \arctan x$



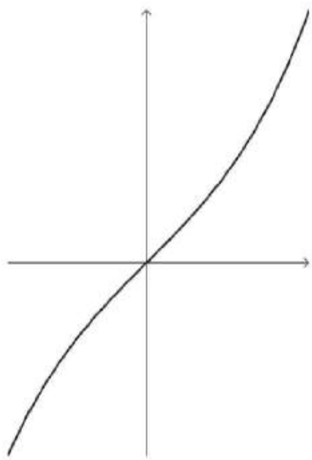
Il dominio coincide con l'insieme *R*.

L'insieme delle immagini è l'intervallo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Funzioni iperboliche

Ricordiamo le funzioni iperboliche:

$y = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

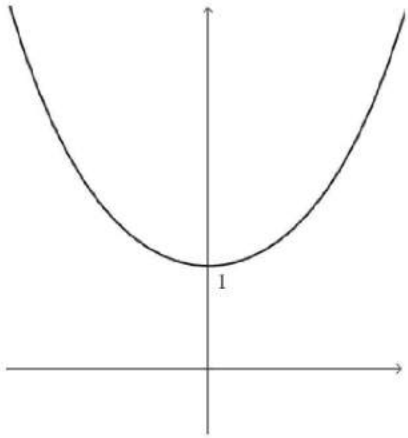


Il dominio coincide con l'insieme *R*.

L'insieme delle immagini con *R*.

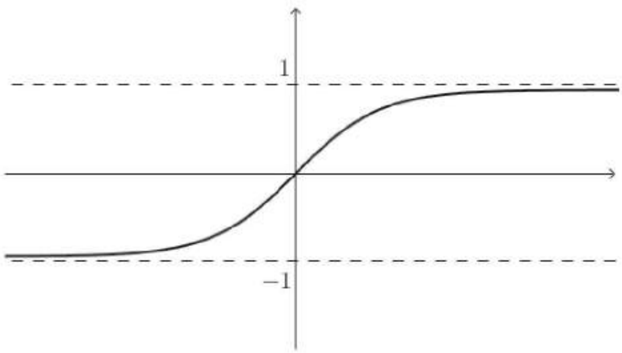
Ricordiamo che in (0,0) la tangente al grafico è la retta $y = x$, bisettrice del primo e terzo quadrante.

$y = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$



Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini con $[1, +\infty)$.

$y = \tanh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

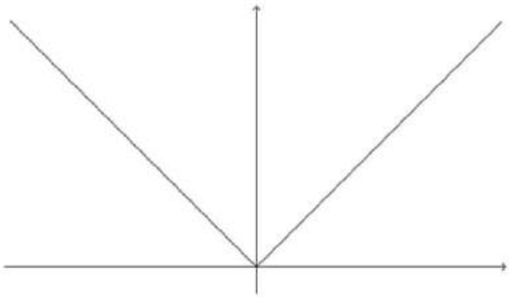


Il dominio coincide con l'insieme *R*.
L'insieme delle immagini con (–1,1)

Ricordiamo che in (0,0) la tangente al grafico è la retta $y = x$, bisettrice del primo e terzo quadrante.

Funzione valore assoluto
La funzione valore assoluto di x è la seguente:

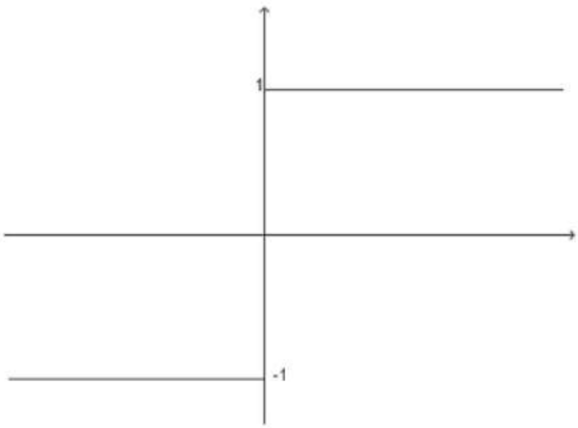
$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



Il dominio coincide con l'insieme R.
L'insieme delle immagini è: $[0, +\infty)$.

Funzione segno
La funzione segno è:

$$y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

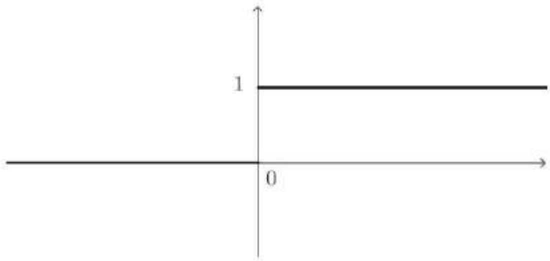


Il dominio è: $R - \{0\}$.
Insieme delle immagini è l'insieme contenente solo i due valori $\{-1, 1\}$.

Funzione gradino di Heaviside

La funzione gradino di Heaviside, il cui nome si deve al matematico britannico Oliver Heaviside, è una funzione che vale zero per valori negativi della x e uno per valori positivi della x (tale funzione a gradino è usata in Matematica per rappresentare un segnale che si attiva a partire da un tempo specificato e rimane attivo indefinitamente).

$$y = H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Il dominio è: R.
L'insieme delle immagini è l'insieme contenente solo i due valori $\{0,1\}$.

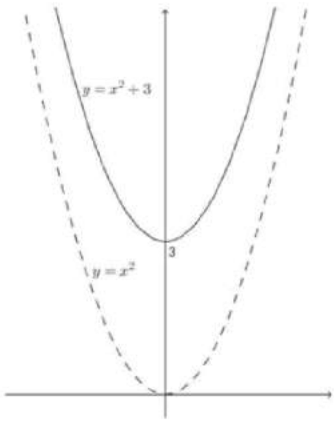
TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

Traslazione sull'asse delle y: $f(x)+k$

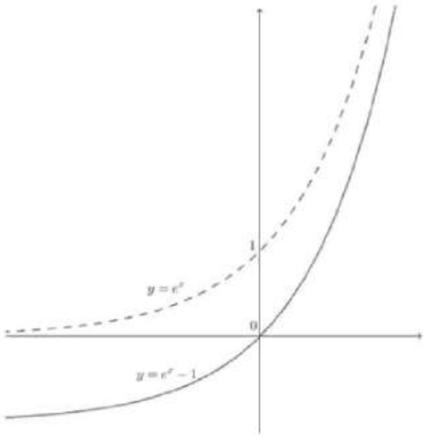
Il grafico si ottiene traslando il grafico della funzione f verso l'alto di k unità se $k>0$, verso il basso se $k<0$.

ESEMPI

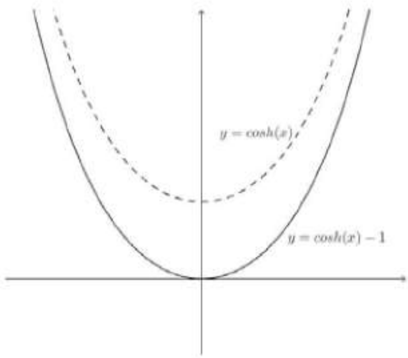
1) $y = x^2 + 3$



2) $y = e^x - 1$



3) $y = \cosh x - 1$

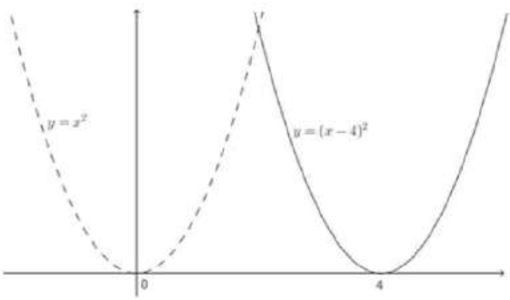


Traslazione sull'asse delle x: $f(x+k)$

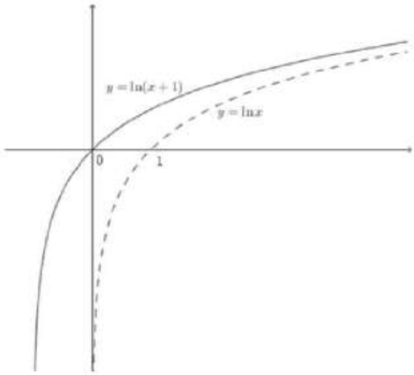
Il grafico si ottiene traslando il grafico della funzione f orizzontalmente di k unità, a sinistra se $k > 0$, a destra se $k < 0$.

ESEMPI

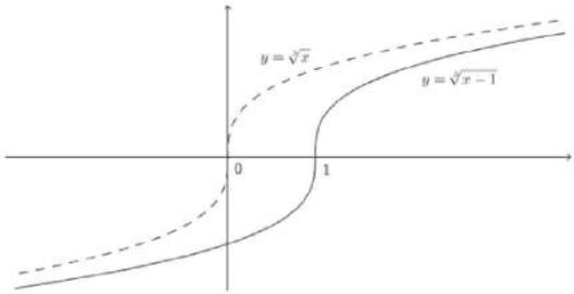
1) $y = (x-4)^2$



2) $y = \ln(x+1)$



3) $y = \sqrt[3]{x-1}$

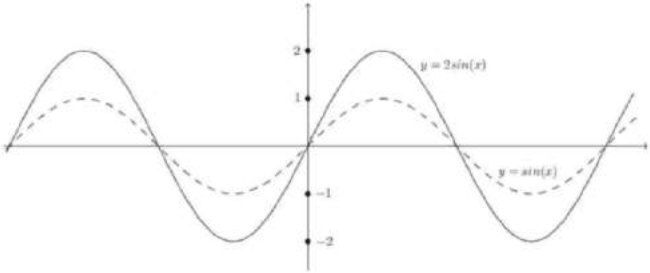


Prodotto di una funzione per uno scalare: $k \cdot f(x)$

Le ordinate di $f(x)$ risultano moltiplicate per *k*. Se $k > 1$ le ordinate aumentano e quindi il grafico si allunga, se $0 < k < 1$ le ordinate diminuiscono e il grafico si abbassa. I punti la cui ordinata vale zero rimangono invariati (punti fissi). Se si moltiplica per un valore di *k* negativo il grafico, oltre alle precedenti trasformazioni, viene anche ribaltato rispetto all'asse delle ascisse.

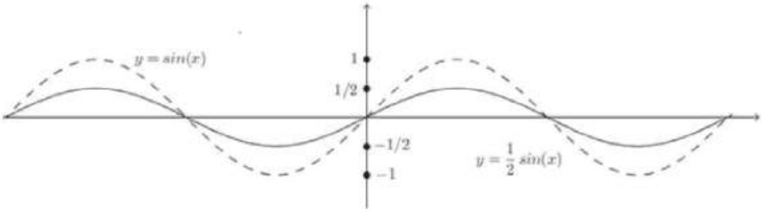
ESEMPI

1) $y = 2\sin x$



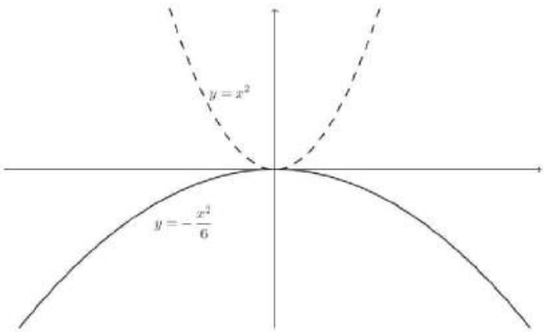
Osserviamo che in questo caso il periodo della funzione è sempre 2π, mentre l'insieme delle immagini è l'intervallo $[-2,2]$.

2) $y = \frac{1}{2}\sin x$



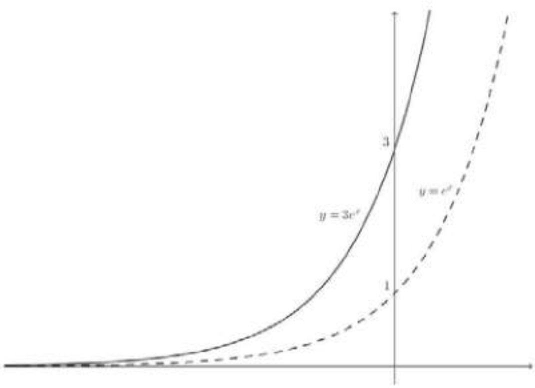
Osserviamo che in questo caso il periodo della funzione è ancora 2π mentre l'insieme delle immagini è l'intervallo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

3) $y = -\frac{1}{6}x^2$



In questo caso le ordinate si sono abbassate e hanno cambiato segno.

4) $y = 3e^x$

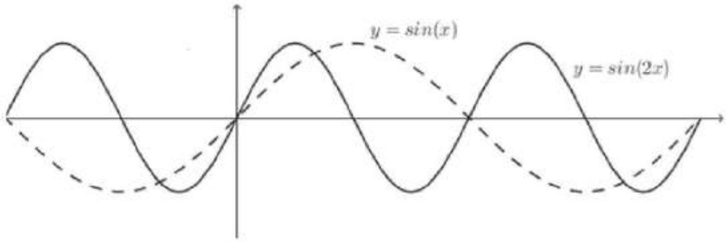


In quest'ultimo caso le ordinate sono moltiplicate per tre e il grafico si è alzato.

Dilatazione e contrazione: $f(k \cdot x)$
Le ascisse del dominio della funzione risultano moltiplicate per k. Se $k > 1$ si ha una contrazione del grafico, se $0 < k < 1$ si ha una dilatazione. Inoltre se si moltiplica per un valore di k negativo il grafico viene ribaltato rispetto all'asse delle ordinate.

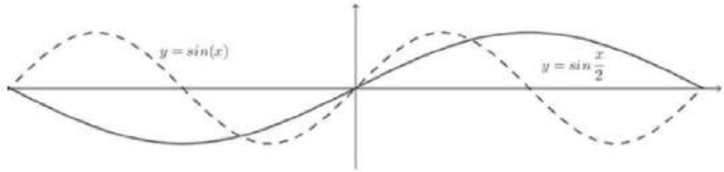
ESEMPI

1) $y = \sin 2x$



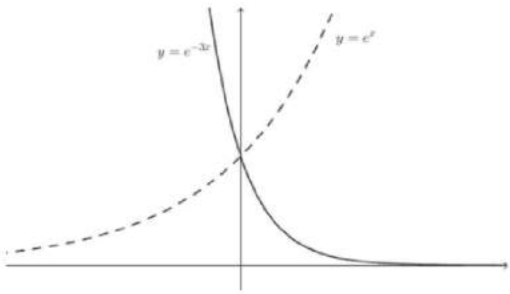
In questo caso il periodo della funzione è dimezzato (in quanto risulta $\frac{2\pi}{k}$ con $k = 2$), quindi vale π.

2) $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$



Per il motivo appena detto, osserviamo che in questo caso il periodo della funzione raddoppia e vale 4π.

3) $y = e^{-3x}$

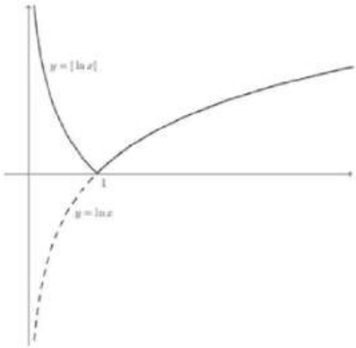


Valore assoluto di una funzione: $|f(x)|$

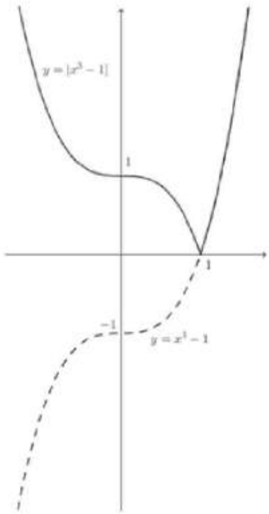
Il valore assoluto applicato a una funzione la rende sempre maggiore o uguale a zero. Il grafico di $|f(x)|$ si ottiene ribaltando al di sopra dell'asse delle ascisse le parti del grafico di $f(x)$ che si trovano al di sotto (si osservi che le intersezioni con l'asse delle ascisse e le parti di grafico che inizialmente erano posizionate al di sopra dell'asse delle x restano invariate).

ESEMPI

1) $y = |\ln x|$

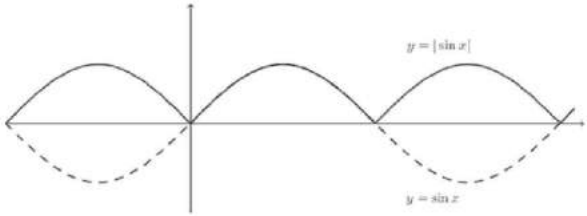


2) $y = |x^3 - 1|$



È opportuno notare che nei punti in cui l'argomento del modulo si annulla e cambia segno (ovvero quelli in cui avviene il ribaltamento al di sopra dell'asse delle ascisse) si presentano delle forme che poi saranno analizzate durante lo studio della relativa funzione.

3) $y = |\sin x|$



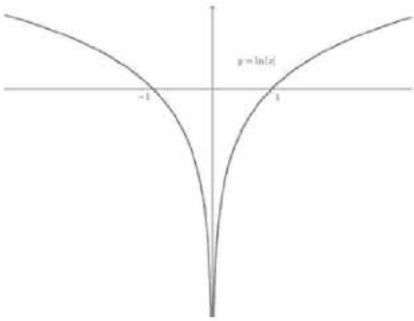
In quest'ultimo caso il valore assoluto modifica la periodicità della funzione, infatti il periodo diventa π.

Valore assoluto della variabile indipendente di una funzione: $f(|x|)$

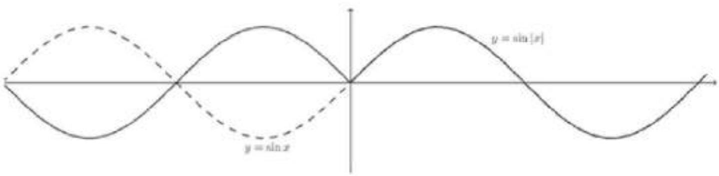
Il grafico si ottiene tenendo inalterate le parti del grafico che si trovano nel semipiano delle ascisse positive e ribaltandole, rispetto all'asse delle y, nel semipiano delle ascisse negative. La funzione così ottenuta sarà simmetrica rispetto all'asse y e dunque pari.

ESEMPI

1) $y = \ln|x|$

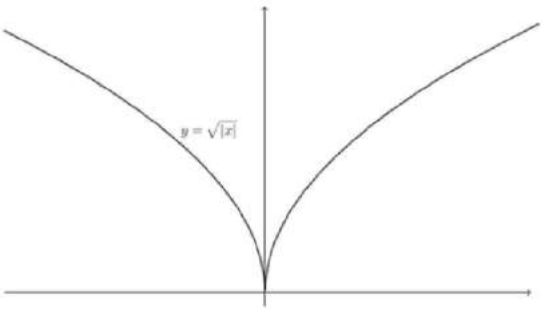


2) $y = \sin|x|$

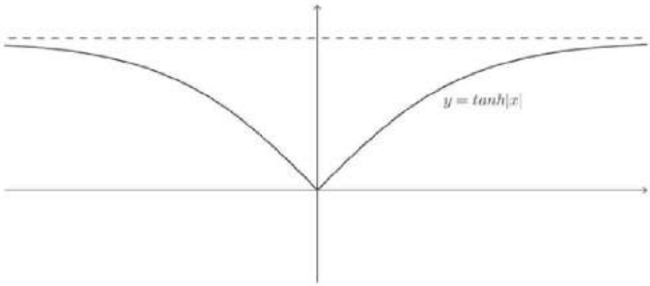


Si noti che in questo caso la funzione non risulta più periodica!

3) $y = \sqrt{|x|}$



4) $y = \tanh|x|$



ESERCIZI SVOLTI

ESERCIZIO 1

Rappresentare le seguenti funzioni:

1) $y = -2 - \ln(x+1)$;

2) $y = e^{3|x|} - 1$;

3) $y = \left| -\dfrac{2}{x-1} \right|$;

4) $y = \sqrt{x-2}$;

5) $y = \sqrt[3]{5+x}$;

6) $y = \sqrt[3]{|x|+2}$;

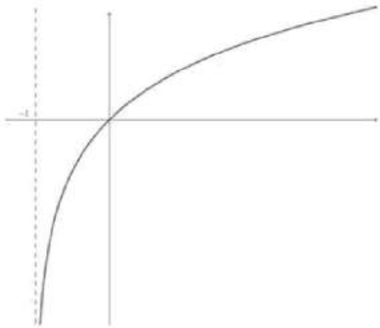
7) $y = \left| (x-3)^2 - 4 \right|$;

8) $y = \ln(5 - |x|)$.

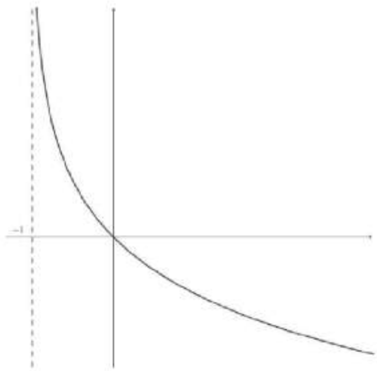
SOLUZIONI

1) La funzione elementare da cui partire e operare le trasformazioni è $y = \ln x$.

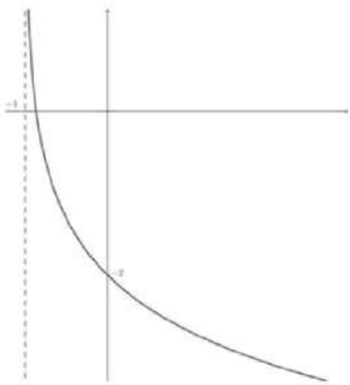
La prima trasformazione è una traslazione orizzontale di 1 verso sinistra: $y = \ln(x+1)$.



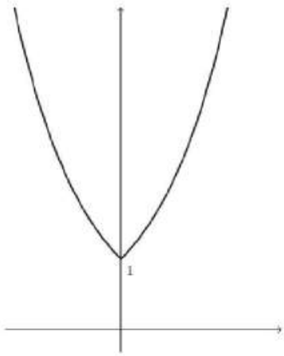
Poi la funzione viene moltiplicata per –1 e quindi ribaltata rispetto all'asse delle ascisse: $y = -\ln(x+1)$.



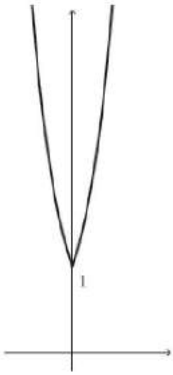
Infine si procede con la traslazione verticale di 2 verso il basso e si ottiene il grafico di $y = -2 - \ln(x+1)$.



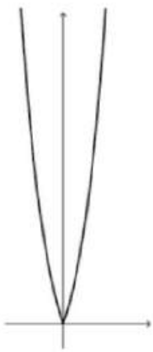
2) Si parte dalla funzione esponenziale $y = e^x$. La prima trasformazione consiste nel porre in valore assoluto l'esponente che in questo caso è la variabile indipendente x, tale operazione rende il grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; rappresentiamo dunque $y = e^{|x|}$.



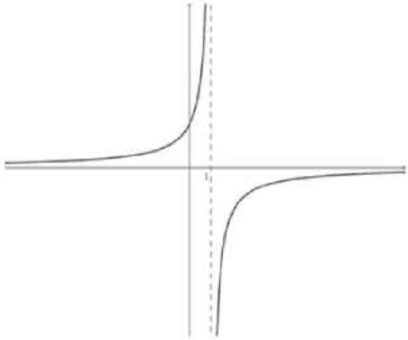
Si procede poi alla contrazione $y = e^{3|x|}$.



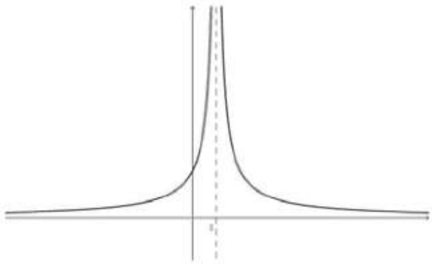
Infine la traslazione verticale verso il basso e si ottiene il grafico di $y = e^{3|x|} - 1$:



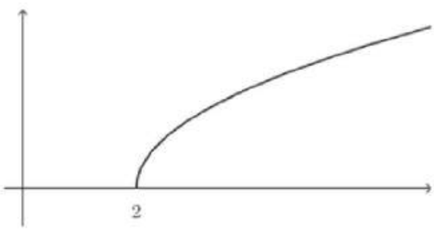
3) La funzione di partenza è l'iperbole equilatera di equazione $y = \frac{1}{x}$, alla quale viene applicata una traslazione orizzontale di 1 e un allungamento di 2; infine viene ribaltata rispetto l'asse delle x. Il grafico di $y = \frac{-2}{x-1}$ risulta:



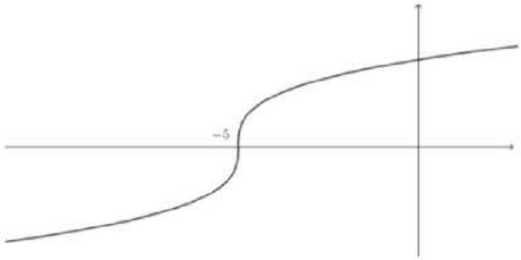
Si procede infine con il valore assoluto della funzione e dunque si ribaltano, al di sopra dell'asse x, le parti negative della funzione; si ottiene il grafico di $y = \left| -\frac{2}{x-1} \right|$:



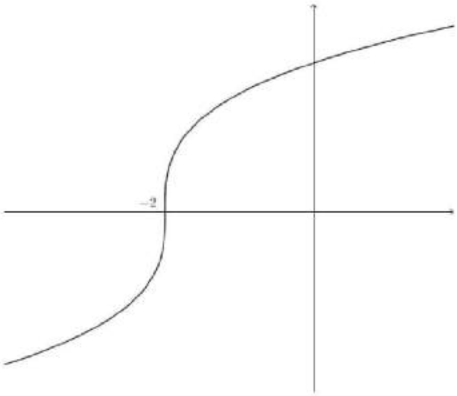
4) Si parte dalla funzione $y = \sqrt{x}$ e si opera una traslazione orizzontale verso destra: $y = \sqrt{x-2}$. Si ottiene:



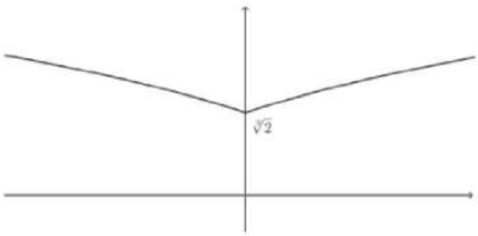
5) Partendo da $y = \sqrt[3]{x}$ si procede con una traslazione orizzontale verso sinistra: $y = \sqrt[3]{x+5}$. Si ottiene:



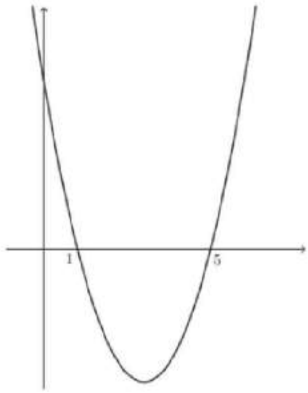
6) Ancora la funzione da cui partire è $y = \sqrt[3]{x}$ e si procede con una traslazione orizzontale verso sinistra, ottenendo: $y = \sqrt[3]{x+2}$.



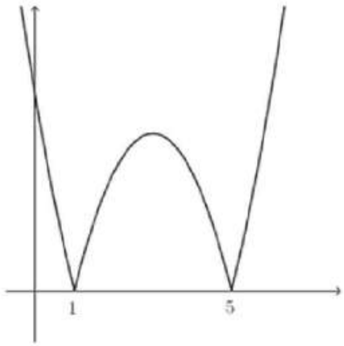
Infine si pone in valore assoluto la variabile indipendente, rendendo la funzione pari e si ottiene il grafico di: $y = \sqrt[3]{|x|+2}$.



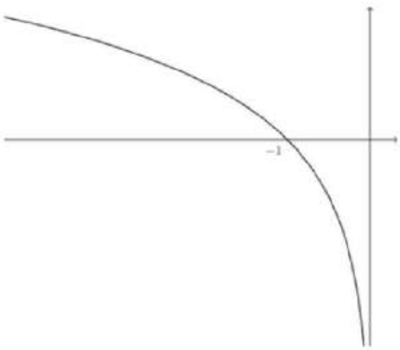
7) La funzione elementare di partenza è $y = x^2$, alla quale applichiamo una traslazione orizzontale verso destra e una verticale verso il basso ottenendo una parabola di vertice (3, 4) e di equazione $y = (x-3)^2 - 4$.



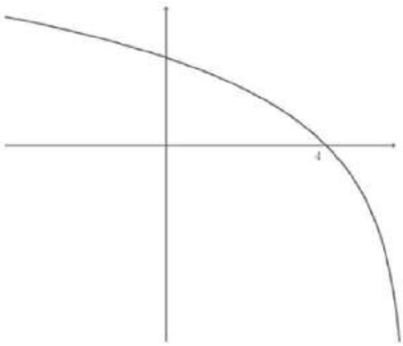
Poniamo poi il modulo a tutta la funzione e ribaltiamo, rispetto all'asse delle x, le parti al di sotto dell'asse delle ascisse, ottenendo $y = \left|(x-3)^2 - 4\right|$:



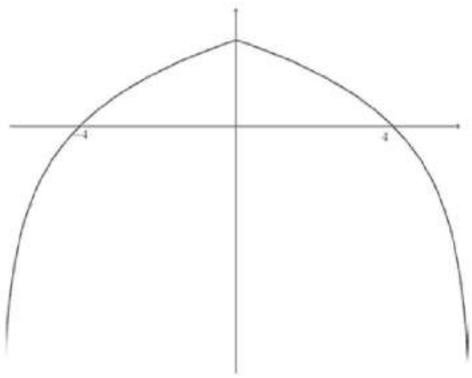
8) Partiamo da $y = \ln x$ e procediamo con il prodotto della variabile indipendente per –1, ottenendo: $y = \ln(-x)$.



Poi con una traslazione orizzontale verso destra rappresentiamo $y = \ln(5-x)$.



Infine ponendo in valore assoluto la variabile indipendente (ricordiamo che il grafico diventa simmetrico rispetto all'asse delle *y*) si ottiene il grafico di $y = \ln(5-|x|)$:



ESERCIZIO 2

Date le funzioni $f(x) = \sin x$ e $g(x) = x^2 + 1$ calcolare, se possibile, le funzioni $f[g(x)]$ e $g[f(x)]$.

La funzione $f(x) = \sin x$ ha come dominio l'insieme $D \equiv R$ e come insieme delle immagini $I \equiv [-1,1]$.

La funzione $g(x) = x^2 + 1$ ha come dominio l'insieme $D \equiv R$ e come insieme delle immagini $I \equiv [1,+\infty)$.

Per poter calcolare la funzione $f[g(x)]$ deve accadere che l'insieme delle immagini di *g* sia contenuto nel dominio di *f*. In questo caso osserviamo che sono possibili entrambe le composizioni $f[g(x)]$ e $g[f(x)]$ e risultano:

$f[g(x)] = \sin\left(x^2+1\right)$

$g[f(x)] = \sin^2 x + 1$

ESERCIZI PARTICOLARI

ESERCIZIO 1

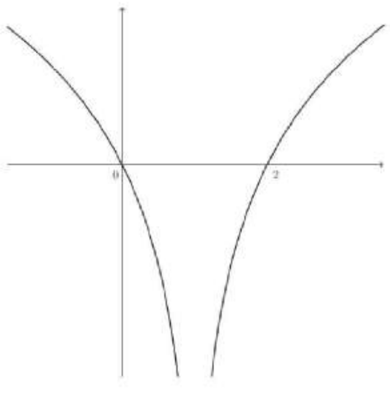
Rappresentare le seguenti funzioni:

1) $y = \ln(1-x)^2$;

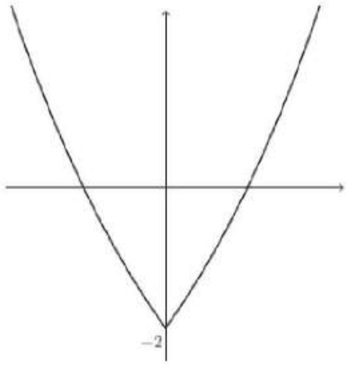
2) $y = 2^{1+|x|} - 4$.

SOLUZIONI

1) Se facciamo attenzione ci accorgiamo, sfruttando le proprietà dei logaritmi che nel suo dominio la funzione equivale a $y = 2\ln|1-x|$. È necessario mettere il modulo! Il grafico si deduce facilmente con le trasformazioni note. Rappresentiamo prima $y = \ln(1-x)$ poi $y = \ln|1-x|$ e poi un allungamento moltiplicando per 2. Alla fine il grafico risulterà:

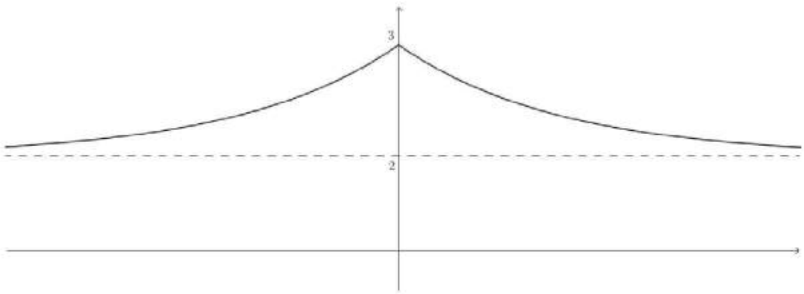


2) Partendo dalla funzione elementare $y = 2^x$ procediamo prima con la traslazione orizzontale verso sinistra, poi con il valore assoluto della variabile indipendente e infine con la traslazione verticale verso il basso. Otteniamo così:



ESERCIZIO 2

Scrivere l'equazione di almeno una funzione che potrebbe avere il seguente grafico:



Un esempio potrebbe essere quella di equazione $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} + 2$ o in generale $y = a^{|x|} + 2$ con $0 < a < 1$ oppure $y = a^{-|x|} + 2$ con $a > 1$.

ESERCIZIO 3

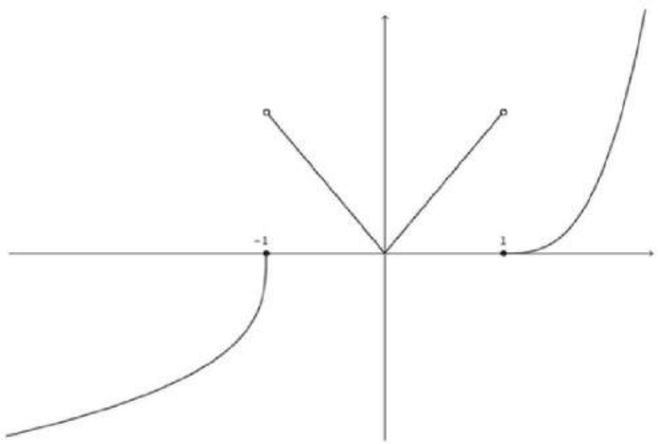
Rappresentare le seguenti funzioni definite a tratti:

1) $y = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x \le -1 \\ |x| & -1 < x < 1 \\ (x-1)^3 & x \ge 1 \end{cases}$

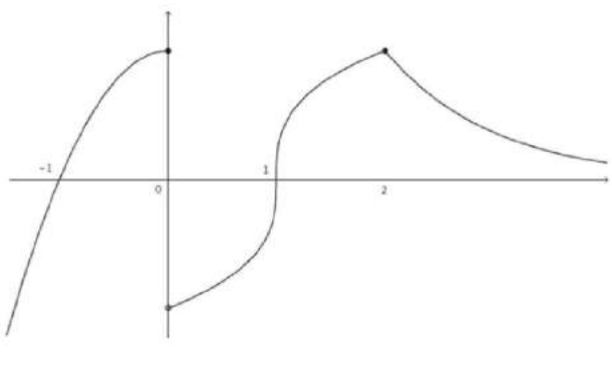
2) $y = \begin{cases} -x^2 + 1 & x \le 0 \\ \sqrt[3]{x-1} & 0 < x < 2 \\ e^{-x+2} & x \ge 2 \end{cases}$

1) La funzione è definita da tre funzioni, la prima (che esiste per i valori $x \le -1$) è una traslazione orizzontale verso sinistra della funzione $y = \sqrt[3]{x}$; la seconda (che esiste per $-1 < x < 1$) è il valore assoluto di $y = x$; la terza (che esiste per i valori $x \ge 1$) è una traslazione orizzontale verso destra di $y = x^3$.

Il grafico risulta:



2) Anche questa funzione è definita da tre funzioni, la prima (che esiste per i valori $x \le 0$) è una traslazione verticale della funzione simmetrica, rispetto all'asse x, della funzione $y = x^2$; la seconda (che esiste per $0 < x < 2$) si ottiene attraverso una traslazione orizzontale di $y = \sqrt[3]{x}$; la terza (che esiste per i valori $x \ge 2$) è una traslazione orizzontale di $y = e^{-x}$.
Il grafico risulta:



ESERCIZIO 4

Date le funzioni $f(x) = \ln x$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$ calcolare, se possibile, le funzioni $f\left[g(x)\right]$ e $g\left[f(x)\right]$.

La funzione $f(x) = \ln x$ ha come dominio l'insieme $D_1 \equiv (0,+\infty)$ e come insieme delle immagini $I_1 \equiv R$.
La funzione $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ha come dominio l'insieme $D_2 \equiv R$ e come insieme delle immagini $I_2 \equiv R$.
In questo caso osserviamo che non è possibile eseguire la composizione $f\left[g(x)\right]$ in quanto $I_2 \not\subset D_1$. Invece è possibile la composizione $g\left[f(x)\right]$ e risulta: $g\left[f(x)\right] = \sqrt[3]{\ln x}$.

ESERCIZIO 5

Considerare il gradino di Heavisade $H(x)$ e la funzione $g(x) = x^3 - 1$ calcolare, se possibile, le funzioni composte $H\left[g(x)\right]$ e $g\left[H(x)\right]$.

Notiamo subito che la funzione $H(x)$ ha come dominio $D_1 \equiv R$ e come insieme delle immagini $I_1 \equiv \{0,1\}$, mentre la funzione $g(x)$ ha come dominio l'insieme $D_2 \equiv R$ e come insieme delle immagini $I_2 \equiv R$.
È evidente che è possibile calcolare entrambe le composizioni.

$$H\left[g(x)\right] = \begin{cases} 1 & x^3 - 1 \geq 0 \\ 0 & x^3 - 1 < 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad H\left[g(x)\right] = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ 0 & x < 1 \end{cases}$$

con analogo ragionamento:

$$g\left[H(x)\right] = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

ESERCIZI PROPOSTI

ESERCIZIO 1

Rappresentare le seguenti funzioni ottenute mediante trasformazioni elementari:

1) $y = \sqrt{10 - |x|}$; 2) $y = \sqrt{|x-2|}$;

3) $y = e^{|x+1|}$; 4) $y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$;

5) $y = \sin\left[\frac{1}{2}(x+1)\right]$;

6) $y = \cos|x+2|$;

7) $y = \pi^{x-1}$;

8) $y = \left|(|x|-3)^2 - 4\right|$;

9) $y = \left|\ln(|x|-2)\right| + 1$;

10) $y = -\left|\ln|x|\right|$;

11) $y = -\sqrt[3]{5-x}$;

12) $y = \sinh(|x|-1)$.

ESERCIZIO 2

Date le seguenti coppie di funzioni calcolare, se possibile, le funzioni composte e motivare la risposta:

1) $H(x)$ e $g(x) = x^5 + 1$;

2) $f(x) = e^x$ e $g(x) = \sqrt{x}$;

3) $f(x) = \ln x$ e $f(x) = \sqrt[7]{x}$.

3
SUCCESSIONI

“Nastro”
scultura di Paolo Mazzuferi
anno 2009

PREMESSA

Carattere di una successione
Ricordiamo che una successione è una funzione f da N in R, $f: N \to R$. L'immagine reale $f(n)$ viene di solito indicata con a_n, cioè $f: n \in N \to a_n \in R$.

Una successione è dunque una sequenza di valori reali e si identifica con l'insieme delle sue immagini $\{a_n\}$.

Una successione $\{a_n\}$ si dice **convergente** se esiste un numero l reale finito per il quale, comunque fissato un $\varepsilon > 0$, esiste un intero naturale n_ε, tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ (ovvero definitivamente) risulti $|a_n - l| < \varepsilon$.
l si chiama limite della successione $\{a_n\}$ e si scrive: $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$.

Se il limite esiste questo è unico.

Una successione $\{a_n\}$ si dice **divergente** a $+\infty$ e si scriverà $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ se, comunque fissato numero $k > 0$ reale, esiste un intero naturale n_k tale che, per ogni $n > n_k$, risulti $a_n > k$.

Allo stesso modo una successione $\{a_n\}$ si dice **divergente** a $-\infty$ e si scriverà $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ se, comunque fissato numero $k > 0$ reale, esiste un intero naturale n_k, tale che per ogni $n > n_k$ risulti $a_n < -k$.

Esistono successoni che non rientrano nei casi elencati e per le quali il limite non esiste; queste si chiamano successioni **irregolari** o **indeterminate**.

Forme di indecisione
Ricordiamo che esiste un'algebra dei limiti e che nel calcolo dei limiti si possono presentare le seguenti forme di indecisione:
$+\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞, ∞^0, 0^0.

Gerarchia degli infiniti
Ricordiamo che esiste una gerarchia tra gli infiniti. In ordine crescente di infinito (ovvero dall'infinito di ordine più piccolo a quello di ordine più grande) risulta:
$\ln^\alpha(n)$, n^β, a^n, $n!$, n^n (con $\alpha, \beta, a \in R$ e $a > 1$).

Successioni asintoticlie
Due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ si dicono asintotiche, e si scrive $a_n \sim b_n$, se accade che $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Se due successioni sono asintotiche per $n \to +\infty$ allora hanno lo stesso carattere, cioè sono entrambe convergenti o divergenti.

Se volessimo passare da $a_n \sim b_n$ ad un'uguaglianza, dovremmo scrivere $a_n = b_n + o(b_n)$ dove il simbolo o (si legge "o piccolo") è quello di rapporto infinitesimo.
Dire che per $n \to +\infty$ si ha $a_n = o(b_n)$ (si legge "a_n è o piccolo di b_n") significa che $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Come conseguenza di quanto detto ricordiamo anche che se la successione è di tipo polinomiale, ovvero $f(n) = P_m(n) = a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \ldots + a_{m-1} n + a_m$, risulta $P_m(n) \sim a_0 n^m$ per $n \to +\infty$ e quindi $\lim\limits_{n \to +\infty} P_m(n) = +\infty$ se a_0 è positivo, mentre $\lim\limits_{n \to +\infty} P_m(n) = -\infty$ se a_0 è negativo (la verifica avviene raccogliendo il termine di grado maggiore, ovvero $a_0 n^m$).

Limiti notevoli
Ricordiamo infine alcuni limiti notevoli:

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$;

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$;

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1$;

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1}{\frac{1}{n}} = \alpha$.

Successioni monotone
Una successione monotona non è mai irregolare.
Una successione monotona è convergente oppure è divergente.

Vale il **teorema di monotonia** che afferma: sia $\{a_n\}$ una successione monotona crescente e superiormente limitata, allora $\{a_n\}$ è convergente e il suo limite è uguale all'estremo superiore dell'insieme $\{a_n : n \in N\}$.

In modo analogo se $\{a_n\}$ è una successione monotona decrescente e inferiormente limitata, allora $\{a_n\}$ è convergente e il suo limite è uguale all'estremo inferiore dell'insieme $\{a_n : n \in N\}$.
Se $\{a_n\}$ è una successione monotona crescente (decrescente) e illimitata superiormente (inferiormente) allora $\{a_n\}$ è divergente a $+\infty$ ($-\infty$).
Ricordiamo che esistono anche dei criteri utili per determinare il carattere di una successione, ne vedremo l'applicazione nello svolgimento degli esercizi.

ESEMPI GUIDATI

ESEMPIO 1

Determinare il carattere delle seguenti successoni:

1) $a_n = -3n^4 + 5n - 7n^3 + 8$;

2) $b_n = \dfrac{n^3 - 2n + 1}{2n^4 + 5n^2 - 2}$;

3) $c_n = \ln^3 n + 5\ln^2 n + \sqrt[3]{\ln n}$;

4) $d_n = n^5 + \ln n + \sqrt[5]{n^2} + 1$.

SOLUZIONI

1) La successione a_n è definita da potenze di n e quindi è asintotica al suo termine di grado maggiore: $a_n \sim -3n^4$ quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$; la successione è divergente a $-\infty$.

2) In questo caso il numeratore è asintotico a n^3 e il denominatore a $2n^4$. Quindi la successione b_n è asintotica a: $b_n \sim \dfrac{n^3}{2n^4} = \dfrac{1}{2n}$. Poiché $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n} = 0$ la successione è convergente a 0.

3) La successione c_n è costituita da potenze del logaritmo e quindi l'infinito di ordine superiore è quello di grado maggiore. Se ne deduce che $c_n \sim \ln^3 n$ e quindi $\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty$; la successione è divergente a $+\infty$.

3) La successione d_n, per il confronto tra gli infiniti, è asintotica a: $d_n \sim n^5$ e poiché $\lim_{n\to+\infty} n^5 = +\infty$ la successione diverge a $+\infty$.

ESEMPIO 2

Verificare, con la definizione, il seguente limite: $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2+3} = 0$.

Il limite scritto significa che comunque fissato un $\varepsilon > 0$ esiste un n_ε, tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ (ovvero definitivamente) risulti $\left|\frac{2}{n^2+3}\right| < \varepsilon$; questo significa $0 < \frac{2}{n^2+3} < \varepsilon$. Eseguendo i calcoli si ottiene: $\frac{2}{\varepsilon} < n^2 + 3$ cioè $\frac{2}{\varepsilon} - 3 < n^2$ e quindi consideriamo $n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 3}$, condizione che indica che $n \to +\infty$ (si tenga presente che quanto più ε è piccolo tanto più il valore di $\sqrt{\frac{2}{\varepsilon} - 3}$ è grande).

ESEMPIO 3

Calcolare i seguenti limiti e per ciascuno dare la definizione:

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{14-n^2}{n^3+3-n}$;

2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{4n+5}{n-1}$.

SOLUZIONI

1) Per calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{14-n^2}{n^3+3-n}$ basta individuare la successione asintotica: $\frac{14-n^2}{n^3+3-n} \sim \frac{-n^2}{n^3} = \frac{-1}{n}$. Il valore del limite dato equivale al seguente: $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0^-$.
Diamo la definizione di limite in questo caso:
comunque fissato un $\varepsilon > 0$, esiste un intero naturale n_ε, tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ (ovvero definitivamente) risulti $\left|\frac{14-n^2}{n^3+3-n}\right| < \varepsilon$.

2) Anche per calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{4n+5}{n-1}$ basta individuare la successione asintotica: $\frac{4n+5}{n-1} \sim \frac{4n}{n} = 4$. Il valore del limite dato equivale al seguente: $\lim_{n\to+\infty} 4 = 4$.
Diamo la definizione di limite in questo caso:
comunque fissato un $\varepsilon > 0$, esiste un intero naturale n_ε, tale che per ogni $n > n_\varepsilon$ (ovvero definitivamente) risulti $\left|\frac{4n-5}{n-1} - 4\right| < \varepsilon$.

ESEMPIO 4

Per ciascuna delle seguenti successioni determinare il carattere utilizzando la più semplice successione asintotica:

1) $a_n = \ln(n+1) - \ln(n^2+3)$;

2) $b_n = \ln(e^n + e^{2n} + 3)$;

3) $c_n = -e^{3n} - 2^n + e^{4n}$;

4) $d_n = 3^n - n^n + n!$;

5) $e_n = \sqrt[3]{\dfrac{n^4 + n^{10} + 6}{n^8 + n^5 + 3}}$.

SOLUZIONI

1) Calcoliamo il limite della successione a_n che inizialmente si presenta nella forma $+\infty - \infty$ ma ricordando le proprietà dei logaritmi otteniamo:

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\ln(n+1) - \ln(n^2+3)\right] = \lim_{n\to+\infty} \ln\frac{n+1}{n^2+3};$$

poiché $\ln\dfrac{n+1}{n^2+3} = \ln\dfrac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n^2}\right)} = \ln\dfrac{1}{n} + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right) \sim \ln\dfrac{1}{n} = -\ln n$

in quanto $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ e $\ln\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)$ sono infinitesimi visto che $n \to +\infty$.

Calcolare il limite dato equivale a calcolare il seguente limite: $\lim\limits_{n\to+\infty}(-\ln n) = -\infty$, la successione diverge a $-\infty$.

2) Per la successione b_n, calcoliamo il limite ricordando che non è valida l'equivalenza asintotica per il logaritmo quindi procediamo nel seguente modo:

$$\ln(e^n + e^{2n} + 3) = \ln\left[e^{2n}\left(1 + \frac{1}{e^n} + \frac{3}{e^{2n}}\right)\right] = \ln e^{2n} + \ln\left(1 + \frac{1}{e^n} + \frac{3}{e^{2n}}\right)$$

e $\ln e^{2n} + \ln\left(1 + \dfrac{1}{e^n} + \dfrac{3}{e^{2n}}\right) \sim \ln e^{2n} = 2n$.

Pertanto il limite della successione data equivale al seguente $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$, la successione b_n diverge a $+\infty$.

3) Per controllare il carattere di c_n usiamo l'equivalenza asintotica: $-e^{3n} - 2^n + e^{4n} \sim e^{4n}$ quindi le due successioni hanno lo stesso carattere. Poiché $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{4n} = +\infty$ se ne deduce che la successione data diverge a $+\infty$.

4) Nella successione d_n compare ancora la somma algebrica di infiniti; l'infinito di ordine superiore (ricordando la gerarchia degli infiniti) è n^n quindi $3^n - n^n + n! \sim -n^n$. Poiché $\lim_{n\to+\infty}\left(-n^n\right) = -\infty$ se ne deduce che la successione diverge a $-\infty$.

5) Utilizziamo ancora il criterio del confronto asintotico, la successione $e_n = \sqrt[3]{\dfrac{n^4+n^{10}+6}{n^8+n^5+3}} \sim \sqrt[3]{\dfrac{n^{10}}{n^8}} = \sqrt[3]{n^2} = \sqrt[3]{n^2}$ e quindi la successione diverge a $+\infty$.

ESEMPIO 5

Determinare – motivando la risposta – il carattere della successione $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$.

Notiamo che la successione è il prodotto di due successioni. La prima $(-1)^n$ che, per $n \to +\infty$, oscilla tra i valori +1 e -1 ma comunque si mantiene limitata; la seconda $\dfrac{1}{n^2+1}$ che, per $n \to +\infty$, tende a 0. Dunque il prodotto (di una successione limitata con una infinitesima) tende a zero e la successione a_n è convergente.

ESEMPIO 6

Determinare – motivando la risposta – il carattere della successione $a_n = (-1)^n (n+4)$.

Notiamo che la successione è il prodotto di due successioni. La prima $(-1)^n$ che, per $n \to +\infty$, oscilla tra i valori +1 e -1 ma comunque si mantiene limitata; ma questa volta, la seconda successione $n+4$ per $n \to +\infty$ diverge a $+\infty$. Dunque il prodotto tende alternativamente a $+\infty$ e a $-\infty$, se ne deduce che la successione a_n non ammette limite ed è dunque irregolare.

ESEMPIO 7

Determinare – motivando la risposta – il carattere della successione $a_n = \left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)^{n^2}$.

Facendo riferimento al limite notevole $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, si ottiene:

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)^{n^2} = e^3$. La successione è convergente.

ESEMPIO 8

Ricordando i limiti notevoli, calcolare i seguenti:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right)}{\dfrac{3}{n^2}}$;

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(e^{\frac{3}{n^3}}-1\right)$.

SOLUZIONI

1) Notiamo che quando $n \to +\infty$, $\dfrac{1}{n} \to 0$ e quindi anche $\dfrac{3}{n^2} \to 0$; ricordando anche il limite notevole, si ha che $\ln\left(1+\dfrac{3}{n^2}\right) \sim \dfrac{3}{n^2}$ e quindi il valore del limite dato è 1.

2) Con la stessa osservazione dell'esercizio precedente $\dfrac{3}{n^3} \to 0$ quando $n \to +\infty$, quindi utilizzando il limite notevole $e^{\frac{3}{n^3}}-1 \sim \dfrac{3}{n^3}$ calcolare il limite dato equivale a calcolare il seguente: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 \dfrac{3}{n^3} = 3$.

ESEMPIO 9

Le successioni scritte di seguito sono due infinitesimi; dire quale delle due è l'infinitesimo di ordine superiore rispetto all'infinitesimo campione standard e motivare la risposta.

$$a_n = -\frac{3}{n^4} + \frac{5}{n} - \frac{n+1}{n^3}$$

$$b_n = 2^{-n} + \frac{5}{n^6} + \frac{1}{\ln n}$$

Le successioni a_n e b_n sono somme di infinitesimi e ricordiamo che, in tal caso, l'infinitesimo preponderante è quello di ordine inferiore (cioè quello che va meno velocemente a zero). Quindi per $n \to +\infty$ $a_n \sim \dfrac{5}{n}$ e $b_n \sim \dfrac{1}{\ln n}$. Tra le due successioni l'infinitesimo di ordine superiore rispetto all'infinitesimo standard $\dfrac{1}{n}$, è quello di a_n.

ESEMPIO 10

Determinare il carattere della successione $a_n = \dfrac{(2n)!}{n^n}$.

In questo caso nel calcolare il limite della successione si presenta la forma di indecisione $\frac{\infty}{\infty}$ e non essendo evidente alcuna gerarchia tra gli infiniti, utilizziamo il criterio del rapporto. Calcoliamo dunque:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{[2(n+1)]!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{(2n)!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2(2n+1)n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} 2(2n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} 2(2n+1)\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2(2n+1)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} 2(2n+1)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} 2(2n+1)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$$

Ricordando il limite notevole e calcolando la successione asintotica, questo limite equivale al seguente:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{e}(2n+1) = +\infty .$$

Essendo il limite del rapporto maggiore di 1, la successione diverge a $+\infty$.
Da questo risultato notiamo che $(2n)!$ è un infinito di ordine superiore rispetto a n^n (mentre - lo ricordiamo - $n!$ è di ordine inferiore).

ESEMPIO 11

Controllare il carattere della seguente successione: $a_n = \dfrac{n^2\cos(\pi n)}{n+4}$.

Notiamo che il $\cos(\pi n)$ assume il valore $+1$ se n è pari e il valore -1 se n è dispari. Quindi la scrittura della successione a_n equivale alla seguente:

$a_n = (-1)^n \dfrac{n^2}{n+4}$ che quando n è pari coincide con $\dfrac{n^2}{n+4}$ che diverge a $+\infty$ e quando n è dispari con $-\dfrac{n^2}{n+4}$ che diverge a $-\infty$. Si conclude che il limite di a_n non esiste e quindi la successione è irregolare.

ESERCIZI SVOLTI

ESERCIZIO 1

Per ciascuna delle successioni indicare il carattere e motivare la risposta:

1) $a_n = \left(1+\frac{4}{n}\right)^{n^2}$;

2) $b_n = \frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{n}$;

3) $c_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^n$;

4) $d_n = \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{2n}$;

5) $e_n = \frac{2n!}{(n+1)!}$.

SOLUZIONI

1) Calcoliamo il limite di a_n che si presenta nella forma di indecisione 1^∞:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{4}{n}\right)^n\right]^n$$

ricordando il limite notevole, il limite appena scritto equivale al seguente:

$\lim_{n\to+\infty}\left(e^4\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{4n} = +\infty$. La successione diverge a $+\infty$.

2) Per il calcolo di questo limite, teniamo presente che per $n\to+\infty$, $e^{\frac{1}{n^2}}-1 \sim \frac{1}{n^2}$,

quindi il limite di b_n equivale a: $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3} = 0^+$.

La successione b_n converge.

Per correttezza osserviamo che il calcolo del limite dato prevede i seguenti passaggi: $\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] = 0^+$.

In particolare la successione b_n converge a zero.

3) Calcoliamo il limite di c_n:

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$$

Poiché per $n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$ si ha: $\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{n^3}$.

Quindi calcolare il limite di c_n equivale a calcolare:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \cdot \frac{1}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0^+ .$$

La successione c_n converge.

4) Per calcolare il limite di d_n per $n \to +\infty$, notiamo che:

$$\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{2n} = \left(\frac{n+2+1}{n+2}\right)^{2n} = \left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n}\right]^2$$

Poiché:

$\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2} \to e$, calcolare il limite dato equivale a calcolare il seguente:

$\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{2n}{n+2}} = e^2$. La successione d_n converge a e^2.

5) Possiamo procedere con il calcolo del limite di e_n:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot n!}{(n+1)\cdot n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0^+ .$$

La successione converge a zero.

ESERCIZIO 2

Individuare il carattere delle seguenti successioni motivando il percorso seguito:

1) $a_n = \left(1+\frac{2}{n^2}\right)^2$;

2) $b_n = \ln^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)$.

SOLUZIONI

1) Calcoliamo il limite di a_n:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^2 = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}\cdot\frac{4}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}}\right]^{\frac{4}{n^2}}$$

Ancora una volta ricordiamo che $\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{2}} \to e$ per $n \to +\infty$.

Calcolare il limite dato equivale a calcolare il seguente:

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{4}{n^2}} = 1.$$

La successione converge a 1.

2) Per calcolare il limite di b_n teniamo presente che per $n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$ e quindi:

$$\ln^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right) = \left[\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\right]^2 \sim \left(\frac{2}{n^2}\right)^2 = \frac{4}{n^4}.$$

Calcolare il limite dato equivale a calcolare:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n^4} = 0^+.$$

La successione converge.

ESERCIZIO 3

Calcolare il seguente limite: $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^4+2n} - \sqrt{n^4+1}\right)$.

Il limite si presenta nella forma $+\infty - \infty$.

Potremmo rendere più semplice il calcolo del limite moltiplicando e dividendo per $\sqrt{n^4+2n} + \sqrt{n^4+1}$; in questo caso preferiamo procedere con un metodo più generale (importante nel caso in cui gli indici delle radici siano diversi o maggiori di due) fondato sul comportamento asintotico:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^4+2n} - \sqrt{n^4+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(n^2\sqrt{1+\frac{2}{n^3}} - n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^3}} - \sqrt{1+\frac{1}{n^4}}\right).$$

Per $n \to +\infty$ la forma di indecisione iniziale ($+\infty - \infty$) diventa $0 \cdot \infty$.

Ricordiamo sempre che per $n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$ e che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \sim \alpha\frac{1}{n}$

ovvero che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \sim 1+\alpha\frac{1}{n}$.

Nel nostro caso:

$$\sqrt{1+\frac{2}{n^3}} \sim 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n^3} = 1+\frac{1}{n^3}$$

$$\sqrt{1+\frac{1}{n^4}} \sim 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^4} = 1+\frac{1}{2n^4}$$

Pertanto il limite diventa:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\left[1+\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)-1-\frac{1}{2n^4}-o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to+\infty} n^2\left[\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]=0^+$$

(in quanto $\frac{1}{n^3}$ è l'infinitesimo di ordine inferiore nella somma).

Concludendo la successione data converge.

ESERCIZIO 4

Individuare il carattere delle successioni:

1) $a_n=\ln\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)$;

2) $b_n=\sqrt[5]{\frac{n^{n+2}}{n^5+n}}$;

3) $c_n=\binom{2n}{n}$.

SOLUZIONI

1) Per $n\to+\infty$ $\frac{\pi}{n}\to 0^+$ e $\sin\frac{\pi}{n}\to 0^+$, quindi $\ln\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\to-\infty$.

La successione diverge a $-\infty$.

2) La successione $b_n=\sqrt[5]{\frac{n^{n+2}}{n^5+n}}\sim\sqrt[5]{\frac{n^{n+2}}{n^5}}=\sqrt[5]{n^{n-3}}$.

Per $n\geq 4$, e quindi definitivamente per $n\to+\infty$, b_n diverge a $+\infty$.

3) Calcoliamo il limite della successione:

$$\lim_{n\to+\infty}\binom{2n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{n!\cdot(2n-n)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{n!\cdot n!}.$$

Per verificare l'eventuale convergenza della successione c_n applichiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)!}{(n+1)!\cdot(n+1)!}\cdot\frac{n!\cdot n!}{(2n)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)\cdot(2n)!}{(n+1)\cdot n!\cdot(n+1)\cdot n!}\cdot\frac{n!\cdot n!}{(2n)!}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2}=0^+$$

possiamo quindi concludere che la successione c_n converge.

ESERCIZI PARTICOLARI

ESERCIZIO 1

Determinare il carattere della successione $a_n = \left(\dfrac{n^2+4n+1}{n^2+2n+1}\right)^{(n+1)^2}$.

Calcoliamo direttamente il limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+4n+1}{n^2+2n+1}\right)^{(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+2n+1+2n}{(n+1)^2}\right)^{(n+1)^2} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2n}{(n+1)^2}\right)^{(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2n}{(n+1)^2}\right)^{\frac{(n+1)^2}{2n}\cdot 2n}$$

Il limite equivale dunque al seguente:

$$\lim_{n\to+\infty} e^{2n} = +\infty$$

La successione diverge a $+\infty$.

ESERCIZIO 2

Determinare - motivando il procedimento seguito - il carattere della successione

$$b_n = \frac{\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)\left(e^{-n}+2\right)}{\left(\frac{1}{n^4}+\frac{3}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Per calcolare il limite di b_n possiamo utilizzare il confronto asintotico e per $n \to +\infty$ deduciamo che:

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n^2}$$

$$e^{-n}+2 \to 2$$

$$\frac{1}{n^4}+\frac{3}{n} \sim \frac{3}{n}$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

Calcolare il limite di b_n equivale dunque a calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\cdot 2}{\frac{3}{n}\cdot\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}$$

la successione converge.

ESERCIZIO 3

Individuare il carattere delle seguenti successioni:

1) $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$;

2) $b_n = \dfrac{n^n}{4^n n!}$;

3) $c_n = \dfrac{1}{n}\sin^2 n$.

SOLUZIONI

1) Utilizziamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n(n+1)}{n+1}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

Poiché il limite risulta maggiore di 1, la successione diverge a $+\infty$.

Da tale risultato deduciamo che n^n è un infinito di ordine superiore rispetto a quello di $n!$

2) Utilizziamo nuovamente il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{4^n n!}{n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{4n^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{4} < 1.$$

Poiché il limite risulta minore di 1, la successione converge.

3) Per controllare il carattere della successione $c_n = \dfrac{1}{n}\sin^2 n$, utilizziamo il criterio del confronto:

$0 \le \dfrac{1}{n}\sin^2 n \le \dfrac{1}{n}$ in quanto è sempre $0 \le \sin^2 n \le 1$.

Poiché la successione $\dfrac{1}{n} \to 0$, per il criterio citato, anche la successione c_n converge a 0.

ESERCIZIO 4

Determinare - descrivendo il ragionamento seguito - il carattere della successione:

$$a_n = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{3n}{2}}.$$

Calcoliamo il limite della successione:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{3n}{2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{2}{3n(3n-1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{3(3n-1)} = \frac{1}{9}.$$

La successione a_n converge a $\frac{1}{9}$.

ESERCIZIO 5

Dopo aver controllato che le seguenti successioni sono degli infinitesimi, disporre in ordine crescente di infinitesimo, motivando la scelta effettuata:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n+1}$$

$$b_n = \frac{6}{2+n^3} + \frac{5}{n+6}$$

$$c_n = 2^{-n} + \frac{1}{\ln n} + n^{-\frac{1}{3}}$$

$$d_n = 3^{-n} + 5^{-n} + 2^{-n}.$$

Le successioni per $n \to +\infty$ risultano degli infinitesimi e per ciascuna scriviamo la più semplice asintotica:

$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, ordine di infinitesimo $\frac{1}{2}$

$b_n \sim \frac{5}{n}$, ordine di infinitesimo 1

$c_n \sim \frac{1}{\ln n}$, ordine di infinitesimo minore di quello di qualunque potenza di $\frac{1}{n}$

$d_n \sim \frac{1}{2^n}$, ordine di infinitesimo maggiore di quello di qualunque potenza di $\frac{1}{n}$.

Disposte in ordine crescente (dal più piccolo al più grande) di infinitesimo, si ottiene la sequenza:

c_n, a_n, b_n, d_n.

ESERCIZIO 6

Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+1}$ motivando il percorso seguito.

Procediamo nel seguente modo:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+1} = \lim_{n\to+\infty} (n+1)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\ln(n+1)^{\frac{1}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln(n+1)}{n}} = e^0 = 1 .$$

ESERCIZI PROPOSTI

ESERCIZIO 1

Calcolare i seguenti limiti e per ciascuno dare la definizione:

1) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1+n^2+4n}{n+3}$;

2) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3+5n^2+4n}{n^5+3}$;

3) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}+4\ln n}{n^2+2}$.

ESERCIZIO 2

Individuare il carattere delle seguenti successioni:

1) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{3^n}$;

2) $a_n = \dfrac{(n+2)!}{(2n)!}$.

ESERCIZIO 3

Individuare il carattere della seguente successione:

$$a_n = e^{\frac{1}{n^2}} - 1 .$$

ESERCIZIO 4

Controllare il carattere della seguente successione:

$$a_n = \frac{(-1)^n n}{e^n} .$$

ESERCIZIO 5

Controllare il carattere della seguente successione:
$a_n = \sqrt[3]{n} \cdot \cos(\pi n)$.

ESERCIZIO 6

Calcolare il seguente limite: $\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + 2n} - \sqrt{n^2 + 1} \right)$.

ESERCIZIO 7

Controllare il carattere della seguente successione:
$a_n = (-1)^n (n + 1)$.

ESERCIZIO 8

Individuare il carattere della seguente successione: $a_n = n^{\frac{2}{n}}$.

ESERCIZIO 9

Calcolare il limite $\lim_{n \to +\infty} \frac{\left(n^3 + 2^n + 5\right)\left(n - n^2 + 2\right)}{\left(7n + n^6\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$ motivando il percorso seguito.

ESERCIZIO 10

Dopo aver controllato che le seguenti successioni sono degli infiniti, disporre in ordine decrescente di infinito, motivando la scelta effettuata:

$a_n = \sqrt{n} + 3n^2 + n + 1$

$b_n = n^6 + 4n - 6\ln^4 n$

$c_n = 6^{-n} + \ln n + n^{\frac{1}{4}}$

$d_n = 3^n + 5^n + 2^{2n}$.

4 SERIE NUMERICHE

"Biforcazione" – Particolare
scultura di Paolo Mazzuferi
anno 2016

PREMESSA

Ricordiamo che una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice **convergente**, **divergente** o **irregolare** quando è tale il carattere della successione $\{s_n\}$ delle somme parziali, con $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, cioè quando $\lim_{n\to+\infty} s_n$ esiste finito (si dice serie convergente), esiste infinito (si definisce serie divergente) o non esiste (si tratta di serie irregolare).

Se $\{s_n\}$ è convergente, il valore di tale limite S , che esiste finito, si chiama **somma** della serie e vale la seguente uguaglianza:

$$S = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Ricordiamo che condizione necessaria affinché una serie sia convergente è che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Si definisce resto n-esimo di una serie convergente la quantità $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$; il resto di una serie convergente è infinitesimo.

Infine, non dimentichiamo che le serie con termini definitivamente non negativi (o non positivi) non sono mai irregolari.

Ricordiamo che esistono anche importanti criteri per determinare il carattere di una serie, che vedremo applicati nello svolgimento degli esercizi.

ESEMPI GUIDATI

ESEMPIO 1

Indicando i criteri utilizzati determinare il carattere di ciascuna delle seguenti serie:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$; 2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n}{n+3}$; 3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n\sqrt[3]{n}+2}$;

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$; 5) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{5^n+1}$; 6) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n+n}$;

7) $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

SOLUZIONI

1) Si tratta di una serie a termini positivi per la quale è verificata la condizione necessaria. Usiamo il criterio del confronto asintotico, in seguito al quale otteniamo $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ per $n \to +\infty$, poiché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è la serie armonica, quindi, divergente, allora anche la serie data è divergente.

2) Anche la seguente è una serie a termini positivi per la quale però non è verificata la condizione necessaria. Infatti $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+n}{n+3} = +\infty$. La serie pertanto diverge.

3) Si tratta nuovamente di una serie a termini positivi per la quale è verificata la condizione necessaria. Usiamo di nuovo il criterio del confronto asintotico, in seguito al quale, per $n \to +\infty$, otteniamo $\frac{n+\sqrt{n}}{n\sqrt[3]{n}+2} \sim \frac{n}{n\sqrt[3]{n}} = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; poiché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ è una serie armonica generalizzata, del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha < 1$, è divergente e quindi si conclude che è divergente anche la serie data.

4) La serie è a termini positivi e soddisfa la condizione necessaria. Utilizziamo il criterio del confronto; poiché definitivamente (per $n \geq 3$) è $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ e poiché la serie armonica diverge, allora anche la sua maggiorante (ovvero la serie data) diverge.

5) Ancora una serie a termini positivi per la quale è valida la condizione necessaria. Utilizziamo il criterio del confronto asintotico:
$\frac{2^n}{5^n+1} \sim \left(\frac{2}{5}\right)^n$. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ è una serie geometrica con ragione minore di 1 e quindi è convergente, di conseguenza la serie data è convergente.

6) Si tratta di una serie a termini positivi per la quale non è valida la condizione necessaria, infatti $\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{2^n+n} = +\infty$, di conseguenza la serie data diverge.

7) È una serie con termini di segno alternato per la quale il limite di $a_n = \frac{1}{n}$ vale zero. Concludiamo l'uso del criterio di Leibniz controllando che la successione a_n sia decrescente per $n \to +\infty$:
$a_n > a_{n+1}$, $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, $n+1 > n$ quindi $1 > 0$, vera per ogni n. La serie data converge.

ESEMPIO 2

Indicando i criteri utilizzati determinare il carattere di ciascuna delle seguenti serie:

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n \sin n}{n^3 + 1}$;

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(\pi n)}{n^2 + 1}$.

SOLUZIONI

1) Si tratta di una serie con termini di segno qualsiasi. Utilizziamo il criterio della convergenza assoluta. Consideriamo $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{n \sin n}{n^3 + 1} \right|$ e operando sul termine generale, si ottiene: $\left| \frac{n \sin n}{n^3 + 1} \right| < \frac{n}{n^3 + 1} \sim \frac{1}{n^2}$.

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e quindi converge anche $\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{n \sin n}{n^3 + 1} \right|$. Poiché la serie data $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n \sin n}{n^3 + 1}$ converge assolutamente allora converge semplicemente.

2) Notiamo che il termine di $\cos(\pi n)$ assume, al variare di n, alternativamente i valori ± 1 e quindi la serie data equivale alla seguente: $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 + 1}$. Controlliamo l'assoluta convergenza: $\left| (-1)^n \frac{1}{n^2 + 1} \right| = \frac{1}{n^2 + 1} \sim \frac{1}{n^2}$. Come già visto nell'esempio precedente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e quindi converge anche la serie di partenza.

ESEMPIO 3

Stabilire il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{(n + 1)!}$.

Si tratta di una serie a termini positivi.
Utilizziamo il criterio del rapporto e calcoliamo:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)!}}{\dfrac{n^n}{(n+1)!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n^n}=$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^n(n+1)}{n+2}\cdot\frac{1}{n^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^n(n+1)}{n^n(n+2)}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{n+1}{n+2}=e$$

Poiché il limite risulta maggiore di 1, la serie diverge.

ESEMPIO 4

Stabilire il carattere delle seguenti serie:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+1}{n^n}$.

SOLUZIONI

1) Si tratta di una serie a termini positivi. Controlliamo se verifica la condizione necessaria per la convergenza. Calcoliamo quindi il seguente limite:

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Poiché per $n\to+\infty$ $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}$, il limite equivale al seguente:

$$\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{1}{n}=1$$

poiché non soddisfa la condizione necessaria la serie diverge a $+\infty$.

2) Si tratta di una serie a termini positivi. Usiamo, ad esempio, il criterio del confronto:

$$\frac{3^n+1}{n^n}\le\frac{3^n}{n^n}=\left(\frac{3}{n}\right)^n.$$

Notiamo che per $n>3$, ovvero definitivamente, la serie maggiorante è una serie geometrica di ragione minore di 1 e quindi converge, ne segue che converge anche la serie minorante cioè la serie data.

ESERCIZI SVOLTI

ESERCIZIO 1

Per ciascuna delle seguenti serie indicare il carattere e motivare la risposta:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n^2}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(\ln n)}{n^2 \ln^2 n}$;

3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$.

SOLUZIONI

1) Osserviamo che la serie è a termini di segno qualsiasi, poiché $\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ al variare di n assume periodicamente i valori 0, -1, 0, 1. Quindi procediamo utilizzando il criterio della convergenza assoluta:

$\left|\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$, la serie maggiorante converge (armonica generalizzata con $\alpha > 1$),

quindi la serie di partenza converge assolutamente e di conseguenza anche semplicemente.

2) Anche in questo caso si tratta di una serie a termini di segno qualsiasi, procediamo con il criterio della convergenza assoluta:

$\left|\dfrac{\sin(\ln n)}{n^2 \ln^2 n}\right| \leq \dfrac{1}{n^2 \ln^2 n} \leq \dfrac{1}{n^2}$ (definitivamente).

La conclusione è identica a quella del caso precedente. La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(\ln n)}{n^2 \ln^2 n}$ converge assolutamente perché minorante di una serie convergente e quindi converge anche semplicemente.

3) Procediamo con il criterio del confronto asintotico:

$\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge a $+\infty$ (armonica generalizzata con $\alpha < 1$) e quindi diverge a $+\infty$ anche la serie data.

ESERCIZIO 2

Per ciascuna delle seguenti serie indicare il carattere e motivare la risposta:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!n^4}{n^n}$;

2) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^{11}}}$.

SOLUZIONI

1) Per determinare il carattere di questa serie utilizziamo il criterio del rapporto, calcoliamo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\,(n+1)^4}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!n^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cdot n!\cdot(n+1)^4}{(n+1)^n(n+1)} \cdot \frac{n^n}{n!n^4} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^4}{(n+1)^n} \cdot \frac{n^n}{n^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^4}{n^4} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-1} = e^{-1} < 1 .$$

Quindi la serie data converge.

2) Procediamo con il criterio del confronto e notiamo che:

$\frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^{11}}} \le \frac{n}{\sqrt[3]{n^{11}}} = \frac{1}{n^{8/3}}$, la serie maggiorante converge (armonica generalizzata con $\alpha > 1$), quindi la serie di partenza converge.

ESERCIZIO 3

Per ciascuna delle seguenti serie indicare il carattere e motivare la risposta:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^3}$;

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$;

3) $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{2}{\ln n}$;

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 + n\ln n + 2^n}{3^n + \sqrt{n} + n^2}$.

SOLUZIONI

1) Si tratta di una serie a termini positivi e procedendo con il criterio del confronto si ottiene:

$\frac{\sin^2 n}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$; ancora una volta la serie maggiorante converge e quindi la serie di partenza converge.

2) È una serie a termini di segno qualunque, procediamo quindi con il criterio della convergenza assoluta; in questo caso otteniamo:

$\left|\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2+1}}\right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$, la serie maggiorante è divergente, quindi, con le conoscenze sino ad ora acquisite, non possiamo concludere nulla sul carattere della serie data (si veda l'esecuzione di casi analoghi nel capitolo 9 sugli integrali generalizzati).

3) Si tratta di una serie a termini di segno alternato, la convergenza assoluta non fornisce alcun risultato, applichiamo dunque il criterio di Leibniz:

$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\ln n} = 0$ e la successione $\left\{\frac{2}{\ln n}\right\}$ è decrescente infatti da $\frac{2}{\ln(n+1)} < \frac{2}{\ln n}$ segue $\ln(n+1) > \ln n$ che è ovviamente vero. Il criterio è verificato e la serie data converge.

4) Applichiamo il criterio del confronto asintotico e otteniamo:

$$\frac{n^4 + n\ln n + 2^n}{3^n + \sqrt{n} + n^2} \sim \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ è una serie geometrica con ragione minore di uno (quindi convergente) pertanto converge anche la serie data.

ESERCIZIO 4

Individuare il carattere delle seguenti serie:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n!}$;

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n}+3\right)\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}\right)}$.

SOLUZIONI

1) È una serie con termini di segno alternato, procediamo con il criterio della convergenza assoluta:

$\left|\frac{(-1)^n 3^n}{n!}\right| = \frac{3^n}{n!} \le \frac{3^n}{7^n}$ (osserviamo che $n!$ è un infinito di ordine superiore rispetto a qualunque a^n, abbiamo scelto $a > 3$ in modo da ottenere come maggiorante una serie geometrica convergente).

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n$ è una geometrica con ragione minore di 1 ed è convergente, quindi la serie data converge assolutamente e dunque anche semplicemente.

2) Per stabilire il carattere della serie applichiamo il criterio del confronto asintotico:

$$\frac{\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^2}\right)}{\left(\frac{1}{n}+3\right)\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}\right)} \sim \frac{\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{3\left(\frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{6n^2}$$

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{6n^2}$ è una serie armonica generalizzata convergente pertanto converge anche la serie data.

ESERCIZIO 5

Determinare, al variare di $k \in R$, il carattere della serie $\sum_{n=7}^{+\infty}(4k+1)^{-n}$ e calcolare, se possibile, la somma per $k = \frac{1}{4}$.

Si tratta di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{4k+1}$ e ovviamente deve essere $k \ne -\frac{1}{4}$:

se $-1 < \frac{1}{4k+1} < 1$, ovvero $k < -\frac{1}{2}$ o $k > 0$ la serie converge;

se $\frac{1}{4k+1} \ge 1$, ovvero $-\frac{1}{4} < k \le 0$ la serie diverge a $+\infty$;

se $\frac{1}{4k+1} \le -1$, ovvero $-\frac{1}{2} \le k < -\frac{1}{4}$ la serie è irregolare.

Per $k = \frac{1}{4}$ la serie converge e la sua somma vale:

$$\sum_{n=7}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+7} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{64}$$

ESERCIZIO 6

Calcolare, se possibile, la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2+2n}$.

Notiamo subito che la serie data è convergente in quanto asintotica ad una armonica generalizzata convergente.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2+2n}$ è una serie telescopica, in quanto:

$$a_n = \frac{2}{n^2+2n} = \frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$$

$$s_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{3}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

...

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Allora possiamo calcolare la somma della serie:

$$S = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{2}$$

dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2+2n} = \frac{3}{2}.$$

ESERCIZI PARTICOLARI

ESERCIZIO 1

Determinare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)$.

Si tratta di una serie a termini di segno positivo per la quale vale la condizione necessaria per la convergenza.

Notiamo che $\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)=\ln\left(\frac{n+2}{n+2}+\frac{1}{n+2}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\sim\frac{1}{n+2}\sim\frac{1}{n}$.

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ diverge e quindi la serie data diverge per il criterio del confronto asintotico.

ESERCIZIO 2

Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{\sqrt{n}}$.

Usiamo nuovamente il criterio del confronto asintotico:

$$\frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{\sqrt{n}}\sim\frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n^5}}$$

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5}}$ è una serie armonica generalizzata convergente, se ne deduce che converge anche la serie data.

ESERCIZIO 3

Individuare il carattere delle seguenti serie:

1) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin n}{4^n}$;

2) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n\sin n}{n^3+3}$;

3) $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n\sin n}{3^n}$.

SOLUZIONI

Per ciascuna delle serie date si utilizza prima l'assoluta convergenza e poi il criterio del confronto.

1) Notiamo che:

$\left|\frac{\sin n}{4^n}\right|\le\frac{1}{4^n}$ la serie maggiorante è una serie geometrica con ragione minore di uno e quindi convergente; la serie data converge.

2) $\left|\frac{n\sin n}{n^3+3}\right| \leq \frac{n}{n^3+3} \leq \frac{1}{n^2}$ la serie maggiorante è una serie armonica generalizzata convergente, ne segue che la serie data converge.

3) $\left|\frac{n\sin n}{3^n}\right| \leq \frac{n}{3^n} \leq \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ la serie maggiorante è una serie geometrica con ragione minore di uno e quindi convergente, pertanto la serie data converge. Notiamo che, definitivamente, potevamo eseguire la maggiorazione anche nel seguente modo: $\frac{n}{3^n} \leq \frac{n}{n^4} = \frac{1}{n^3}$.

ESERCIZIO 4

Individuare il carattere delle seguenti serie:

1) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$;

2) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$;

3) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

SOLUZIONI

Ricordiamo una regola importante che utilizzeremo in tutti e tre i casi:
$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge solo se $\begin{cases} \alpha > 1, \forall\beta \\ \alpha = 1, \beta > 1 \end{cases}$, in tutti gli altri casi diverge.

Per quanto detto:

1) La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$ converge essendo $\alpha > 1$ e $\beta = 1$.

2) La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge essendo $\alpha = 1$ e $\beta = 1$.

3) La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ converge essendo $\alpha = 1$ e $\beta > 1$.

ESERCIZIO 5

Per la seguente serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2^n}{5^n+1}$

a) verificarne la convergenza;
b) scrivere una serie maggiorante;
c) stabilire quanti termini occorre sommare per avere il valore approssimato della somma con un errore che non superi 10^{-2}.

a) Si tratta di una serie a termini positivi, possiamo applicare il criterio del confronto asintotico ma data la richiesta al punto b), usiamo il criterio del confronto:

$$\frac{n+2^n}{5^n+1} \le \frac{2^n+2^n}{5^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{5^n} = 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n .$$

La maggiorante è una serie geometrica convergente quindi anche la nostra serie converge.

b) Per quanto detto al punto precedente, una serie maggiorante è la seguente:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n = 2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n .$$

c) Calcoliamo il resto della nostra serie convergente:

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k+2^k}{5^k+1} \le 2 \cdot \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k = 2 \cdot \left[\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{5}\right)^{n+2} + \ldots\right] =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot \left[1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \ldots\right] = 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \cdot \frac{10}{3} < 10^{-2}$$

cioè $\left(\frac{2}{5}\right)^n < \frac{3}{1000}$ da cui si ricava che $n \ge 7$.

Si conclude che per ottenere un valore approssimato della somma con un errore che non superi 10^{-2} basta sommare i primi otto termini cioè da a_0 fino a a_7.

ESERCIZIO 6

Per la seguente serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2}{\ln(2+n)}$

a) verificarne la convergenza;
b) calcolare l'errore che si commette sostituendo al valore della somma la somma dei primi 6 termini.

a) È una serie con termini di segno alternato, la condizione necessaria è verificata, cioè $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\ln(2+n)} = 0$. Controlliamo, per poter applicare il criterio di Leibniz, se la successione $\frac{2}{\ln(2+n)}$ è decrescente, cioè se:

$$\frac{2}{\ln(2+n+1)} \leq \frac{2}{\ln(2+n)}$$

Questo vuole dire se:

$$\ln(3+n) \geq \ln(2+n)$$

cioè

$$3+n \geq 2+n$$

e quindi $3 \geq 2$, vero per ogni n.
La serie data converge.

b) Per questa tipologia di serie l'errore commesso non supera il primo termine trascurato che è il settimo (ovvero per $n = 6$), quindi:

$$|E| \leq \frac{2}{\ln(2+6)} = \frac{2}{\ln 8} \approx 0{,}96 .$$

ESERCIZIO 7

Determinare il carattere della seguente serie indicando i criteri utilizzati:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(e^{-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}}-1\right)(n+1)}{\ln\left(1+\frac{4}{n^2}\right)} .$$

Si tratta di una serie a termini definitivamente positivi, usiamo il criterio del confronto asintotico:

$$a_n \sim \frac{\left(-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}\right)\cdot n}{\frac{4}{n^2}} \sim \frac{1}{n^2}\cdot n \cdot \frac{n^2}{4} = \frac{n}{4} .$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{4}$ è tale che il suo termine generale non tende a zero (condizione necessaria per la convergenza di serie a termini positivi) quindi diverge, ne consegue che la serie data diverge a $+\infty$.

ESERCIZIO 8

Determinare il carattere della seguente serie indicando i criteri utilizzati e nel caso in cui sia convergente, scrivere il resto della serie e indicare quanti termini occorre sommare per avere un valore approssimato della somma con un errore minore di 10^{-2}:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^3+4}.$$

Si tratta di una serie a termini di segno alternato, applicando, in sequenza, la convergenza assoluta, il confronto e il confronto asintotico, si ha:

$$\left|(-1)^n \frac{\ln(n)}{n^3+4}\right| = \frac{\ln(n)}{n^3+4} \le \frac{n}{n^3+4} \sim \frac{1}{n^2}.$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge poiché armonica generalizzata con esponente maggiore di 1, quindi converge assolutamente anche la serie di partenza.
La serie data, poiché converge assolutamente, converge anche semplicemente.
Calcoliamo il resto. La successione $a_n = \frac{\ln(n)}{n^3+4}$ è ovviamente decrescente, quindi l'errore non supera il primo termine trascurato:

$$|E| \le \frac{\ln(n)}{n^3+4} < \frac{n}{n^3+4} < 10^{-2}$$

ovvero

$$n^3+4 > 100n$$

questa disequazione vale per $n \ge 10$. Quindi è sufficiente sommare i primi 10 termini.

ESERCIZI PROPOSTI

ESERCIZIO 1

Stabilire il carattere delle seguenti serie e indicare il procedimento seguito:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n+1)}{n^4}$;

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+5n^2+4n}{n^5+3}$;

4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+4\ln n}{n^2+2}$.

ESERCIZIO 2

Individuare il carattere delle seguenti serie, descrivendo il ragionamento seguito:

1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$;

3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\ln n}$;

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right)$.

ESERCIZIO 3

Individuare il carattere delle seguenti serie, descrivendo il ragionamento seguito:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n+3}{5^n+n^2+1}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+\ln n}{2n+2}$;

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3+5n+2}$.

ESERCIZIO 4

Individuare il carattere delle seguenti serie, descrivendo il ragionamento seguito:

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n + n^2}{n! + 2^n}$;

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}$;

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sin \frac{n\pi}{2}\right)^n \sqrt{\frac{2}{n+1}}$;

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{1}{n}\right)$.

ESERCIZIO 5

Discutere il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt[3]{n} \cdot \cos(\pi n).$$

ESERCIZIO 6

Per la seguente serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n^3 + 3^n + 1}$

a) verificarne la convergenza;
b) scrivere una serie maggiorante;
c) stabilire quanti termini occorre sommare per avere il valore approssimato della somma con un errore che non superi 10^{-2}.

ESERCIZIO 7

Per la seguente serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3^n}{5^n + n^2 + 1}$

a) verificarne la convergenza;
b) scrivere una serie maggiorante;
c) stabilire quanti termini occorre sommare per avere il valore approssimato della somma con un errore che non superi 10^{-3}.

ESERCIZIO 8

Calcolare, se possibile, la somma della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{4}{n^2 + 4n}$.

5 LIMITI DI FUNZIONI E COMPORTAMENTO ASINTOTICO

“Onda” – Particolare
scultura di Paolo Mazzuferi
anno 2012

PREMESSA

Ricordiamo la **definizione di limite**: la funzione f ha limite L per $x \to x_0$ e si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se per ogni intorno del limite L, che indichiamo con $V(L)$, esiste un intorno del punto x_0, che indichiamo con $U(x_0)$, tale che per ogni $x \in U(x_0)$ e contemporaneamente appartenente al dominio della funzione, $x \neq x_0$, accade che $f(x) \in V(L)$.
Questa enunciata è la definizione topologica di limite, sono possibili anche definizioni particolari che ricorderemo all'interno degli esempi.

Nel calcolo dei limiti, come abbiamo già visto per le successioni, si possono presentare le seguenti forme di indecisione:

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^0, \quad 0^0.$$

Ricordiamo che una funzione f è **continua** nel punto x_0 se e solo se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
Inoltre una funzione f è continua in un insieme $A \subseteq R$ se è continua in ogni punto $x_0 \in A$, in tal caso si scrive $f \in C^0(A)$.

Ricordiamo che se f e g sono due funzioni entrambe definite, non nulle e aventi lo stesso segno almeno in un intorno del punto x_0, si dice che f è asintotica a g per $x \to x_0$ se e solo se risulta che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
Se questo accade per $x \to x_0$ si scrive $f \sim g$ e si legge "f è **asintotica** a g". Si dice che f e g hanno lo stesso comportamento per $x \to x_0$; ma attenzione, solo nell'intorno del punto x_0 si comportano allo stesso modo, in tutta la parte restante del dominio no.

Infatti se volessimo passare da $f \sim g$, per $x \to x_0$, ad un'uguaglianza dovremmo scrivere $f = g + o(g)$ dove il simbolo o (si legge "o piccolo") è quello di rapporto infinitesimo.
Dire che per $x \to x_0$ una funzione $f = o(g)$ (si legge "f è o piccolo di g") significa che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Il fatto che la funzione, nell'intorno di un punto, si comporti come un'altra funzione (in genere più semplice) non significa che è uguale all'altra!
Inoltre, lo ripetiamo, il comportamento è identico solo nell'intorno del punto considerato.
Ricordiamo, a partire dai limiti notevoli, le seguenti equivalenze asintotiche:

- da $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ si deduce $\ln(1+x) \sim x$ per $x\to 0$. Allo stesso modo se $f(x)\to 0$ per $x\to x_0$ si ha che $\ln[1+f(x)] \sim f(x)$ per $x\to x_0$.

Analogamente se $f(x)\to 0$ per $x\to x_0$:

- $e^{f(x)}-1 \sim f(x)$;
- $\sin[f(x)] \sim f(x)$;
- $1-\cos[f(x)] \sim \frac{1}{2}[f(x)]^2$;
- $[1+f(x)]^{\alpha}-1 \sim \alpha f(x)$;

allo stesso modo e con le stesse premesse:

- $\sinh[f(x)] \sim f(x)$;
- $\cosh[f(x)]-1 \sim \frac{1}{2}[f(x)]^2$.

La relazione di equivalenza asintotica può essere estesa alle operazioni di prodotto e di quoziente; no alla somma, al logaritmo e all'esponenziale.

ESEMPI GUIDATI

ESEMPIO 1

Data la funzione $y=\ln^4(x)-2\ln(x)+7$:

a) calcolare il limite per $x\to +\infty$;

b) calcolare il limite per $x\to 1$;

c) dare la definizione di limite in ciascuno dei casi considerati.

a) Per $x\to +\infty$ la funzione - che è un polinomio in $\ln(x)$ - si comporta come il suo termine di grado maggiore, cioè $y \sim \ln^4(x)$, quindi $\lim_{x\to +\infty}\left(\ln^4(x)-2\ln(x)+7\right)=+\infty$;

b) Per $x\to 1$ calcoliamo il limite e otteniamo $\lim_{x\to 1}\left(\ln^4(x)-2\ln(x)+7\right)=7$;

c) Definizione del primo limite: comunque preso un $k>0$, esiste un h_k dipendente da k tale che per ogni $x>h_k$ e appartenente al dominio della funzione, accade che $f(x)>k$.

Definizione del secondo limite: per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un δ_ε (dipendente da ε) tale che per ogni x appartenente al dominio della funzione e $|x-1| < \delta_\varepsilon$, accade che $|f(x) - 7| < \varepsilon$.

ESEMPIO 2

Calcolare i seguenti limiti spiegando il ragionamento seguito per arrivare al risultato:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \ln(x-2)^2$;

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-3x-1}{(x-1)^2}$;

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2+1}}$;

4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4}{x-1}$;

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+x}{e^x+3}$.

SOLUZIONI

1) Nel calcolo del limite $\lim\limits_{x \to 2} \ln(x-2)^2$ notiamo che l'argomento del logaritmo per $x \to 2$ tende a 0^+, ne segue che il logaritmo tende a $-\infty$. Si ha quindi che $\lim\limits_{x \to 2} \ln(x-2)^2 = -\infty$.

2) Nel caso del $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-3x-1}{(x-1)^2}$ il denominatore tende a 0^+ e il numeratore è negativo, tutta la frazione tenderà a $-\infty$. Insomma $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{-3x-1}{(x-1)^2} = -\infty$.

3) Nel seguente limite $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2+1}}$ notiamo che sotto la radice quadrata compare una forma di indecisione $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ che però deriva da potenze di x. Basta controllare i gradi delle potenze maggiori al numeratore e al denominatore, in questo caso sono

uguali quindi il risultato si ottiene dal rapporto dei coefficienti numerici dei termini di grado più alto, ovvero 4. Ne segue che il risultato è $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{4x^2}{x^2+1}}=2$.

4) Seguendo il ragionamento fatto negli esempi precedenti, il limite $\lim_{x\to1}\frac{4}{x-1}$ non esiste perché per $x\to1$ il limite da destra e il limite da sinistra sono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$ e quindi diversi.

5) Nel calcolo del limite si presenta la forma di indecisione $\frac{+\infty}{+\infty}$, ma per la gerarchia degli infiniti, l'infinito al denominatore - derivante da un esponenziale - è di ordine superiore a qualsiasi potenza di x grande quanto si vuole, quindi il risultato del limite è 0, per la precisione controllando i segni è 0^+: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{e^x+3}=0^+$ (ricordiamo che per $x\to+\infty$ $e^x=o\left(x^n\right)$, cioè e^x è un infinito di ordine superiore rispetto a qualunque potenza di x).

ESEMPIO 3

Calcolare per $x\to+\infty$ il limite della seguente funzione $y=\left(x^2-2\right)^{\sqrt{5}}$.

Per $x\to+\infty$ la base della potenza tende a $+\infty$, quindi il limite risulta $+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-2\right)^{\sqrt{5}}=+\infty$.

ESEMPIO 4

Calcolare per $x\to+\infty$ il limite della seguente funzione $y=3^{\sqrt[3]{1-x}}$.

Per $x\to+\infty$ l'esponente tende a $-\infty$, quindi il limite risulta 0: $\lim_{x\to+\infty}3^{\sqrt[3]{1-x}}=0^+$.

ESEMPIO 5

Calcolare il dominio e i limiti alla frontiera della seguente funzione $y=\ln\frac{4}{|1-x|}$.

Per calcolare il dominio, poiché l'argomento del logaritmo risulta sempre strettamente positivo, basta porre il denominatore diverso da zero: $1-x\neq0$ ovvero $x\neq1$. Il dominio risulta: $D\equiv(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Calcoliamo i limiti alla frontiera del dominio.

$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{4}{|1-x|}\right)=-\infty$, in quanto l'argomento del logaritmo tende a 0.

Analogo risultato per il caso $x\to-\infty$.

Osserviamo che sia per $x\to-\infty$, sia per $x\to+\infty$ non c'è alcun asintoto obliquo perché la funzione è un infinito di ordine minore di uno.

Quando $x\to1$, l'argomento del logaritmo tende a $+\infty$ e quindi si avrà: $\lim_{x\to1}\left(\ln\frac{4}{|1-x|}\right)=+\infty$; in tal caso la retta di equazione $x=1$ è un asintoto verticale per la funzione.

ESEMPIO 6

Calcolare i seguenti limiti indicando per ciascuno la più semplice funzione asintotica nell'intorno considerato.

1) $\lim_{x\to0}\left(x-2x^3+\sqrt[5]{x}+6x^9\right)$;

2) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^{-3}+e^{2x}-6x+2\right)$;

3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{8}{3}}+3x^4+2x}{\sqrt[7]{x}}$.

SOLUZIONI

1) In questo caso calcolare il valore del limite è facile. Abbiamo una somma di infinitesimi e quindi il valore del limite è 0: $\lim_{x\to0}\left(x-2x^3+\sqrt[5]{x}+6x^9\right)=0$.

Determiniamo ugualmente la funzione asintotica; anche in questo caso abbiamo potenze di x ma attenzione poiché $x\to0$, sommiamo gli infinitesimi e diventa più significativo quello di ordine inferiore, cioè la x elevata al grado più piccolo, dunque: $x-2x^3+\sqrt[5]{x}+6x^9\sim\sqrt[5]{x}$.

2) In questo caso notiamo che per $x\to-\infty$ $x^{-3}+e^{2x}$ tende a zero, quindi per $x\to+\infty$ $x^{-3}+e^{2x}-6x+2\sim-6x$. Se ne deduce che il calcolo del limite si riduce al calcolo di: $\lim_{x\to-\infty}(-6x)=+\infty$.

3) Nel seguente limite è presente la forma di indecisione $\frac{\infty}{\infty}$, procediamo cercando la più semplice funzione asintotica. Per $x\to+\infty$ $x^{\frac{8}{3}}+3x^4+2x\sim3x^4$, quindi sem-

pre per $x \to +\infty$ $\dfrac{x^{\frac{8}{3}} + 3x^4 + 2x}{\sqrt[7]{x}} \sim \dfrac{3x^4}{\sqrt[7]{x}} = 3x^{\frac{27}{7}}$. Calcolare il limite dato equivale a calcolare il seguente limite: $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^{\frac{27}{7}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 3\sqrt[7]{x^{27}} = +\infty$.

Avremmo potuto procedere anche nel seguente modo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{8}{3}} + 3x^4 + 2x}{\sqrt[7]{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 + o\left(x^4\right)}{\sqrt[7]{x}} = \lim_{x\to+\infty} \left(3x^{27/7} + o\left(x^{27/7}\right)\right) = +\infty .$$

ESEMPIO 7

Calcolare i seguenti limiti indicando per ciascuno la più semplice funzione asintotica nell'intorno considerato.

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1 + x^2\right)}{5x \sin(x)}$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3\left(\sinh \dfrac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(x^6 + 2x^2\right)\ln\left(1 + x^2\right)}{14x^2(\cosh x - 1)}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\sin \dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^3}\right)}{\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\sqrt[3]{1+3x} - 1\right)\ln(1 + 2x)}{\left(e^{-x} - 1\right)\sinh x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^2(1 - \cos x)}{\sin^4(x)}$.

SOLUZIONI

Si noti subito che nei limiti proposti sono presenti diverse tipologie di limiti notevoli.

1) Il limite presenta la forma di indecisione $\frac{0}{0}$. Sappiamo che per $x \to 0$ $\ln\left(1+x^2\right) \sim x^2$ e che $\sin(x) \sim x$, quindi $\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{5x\sin(x)} \sim \frac{x^2}{5x \cdot x} = \frac{1}{5}$. Calcolare il limite dato equivale a calcolare il seguente $\lim_{x\to 0} \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$.

2) Per $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ e quindi $\frac{1}{x^2} \to 0$ allora: $\sinh\frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ e $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x^2}$.
In conclusione, calcolare il limite dato equivale a calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} 3 = 3.$$

3) Anche questo limite presenta la forma di indecisione $\frac{0}{0}$. Allo stesso modo, per $x \to 0$:
$x^6 + 2x^2 \sim 2x^2$, $\ln\left(1+x^2\right) \sim x^2$ e $\cosh x - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$. Quindi calcolare il limite dato equivale a calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 \cdot x^2}{14x^2 \cdot \frac{1}{2}x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{7x^4} = \frac{2}{7}.$$

4) Per $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ quindi $\sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$, $\frac{2}{x} + \frac{1}{x^3} \sim \frac{2}{x}$ e $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$. Calcolare il limite dato equivale a calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0^+.$$

5) Il limite presenta la forma di indecisione $\frac{0}{0}$. In questo caso, per $x \to 0$:

$$\sqrt[3]{1+3x} - 1 = (1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{1}{3} \cdot 3x = x, \quad \ln(1+2x) \sim 2x, \quad e^{-x} - 1 \sim -x$$

e infine, come già sappiamo, $\sinh x \sim x$. Dunque il valore del limite è uguale al valore di:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot 2x}{-x \cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{-x^2} = \lim_{x\to 0} (-2) = -2.$$

6) Il limite presenta la forma di indecisione $\frac{0}{0}$. Per l'ultimo caso basta ricordare che per $x \to 0$: $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ e $\sin^4 x = (\sin x)^4 \sim x^4$. Il limite da calcolare risulta avere lo stesso valore del seguente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2 \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{x^4} = 2.$$

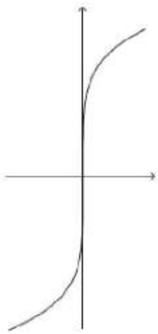
ESEMPIO 8

Per la funzione $y = \ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$ calcolare la più semplice funzione asintotica per $x \to 0$ e disegnare il grafico nell'intorno considerato.

Ricordando il limite notevole, sappiamo che $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}} = 1$ e quindi

$\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right) \sim \sqrt[3]{x}$ quando $x \to 0$.

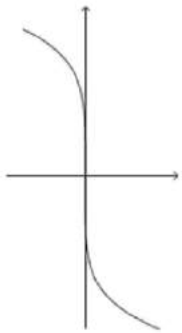
In $x=0$ la funzione è un infinitesimo di ordine $\frac{1}{3}$. La sappiamo disegnare nell'intorno considerato:



ESEMPIO 9

Data la funzione $y = e^{-\sqrt[5]{x}} - 1$ disegnare il grafico nell'intorno del punto $x = 0$.

Per $x \to 0$ $e^{-\sqrt[5]{x}} - 1 \sim -\sqrt[5]{x}$ quindi basta disegnare, nell'intorno considerato, il grafico della funzione elementare $y = -\sqrt[5]{x}$. Otteniamo dunque:



ESEMPIO 10

Data la funzione $y = \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} - 2\right) \cdot \left(\sin\frac{1}{x}\right)$ calcolare il limite per $x \to +\infty$ e rappresentare il grafico nell'intorno considerato.

Nel calcolo del limite:

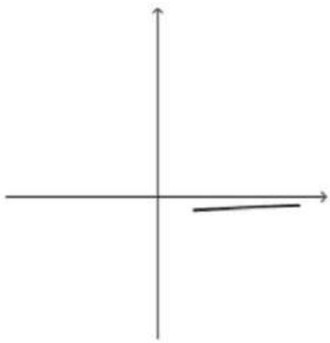
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} - 2\right) \cdot \left(\sin\frac{1}{x}\right)$$

notiamo che per $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ quindi $\sin\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x}$ e $\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} - 2\right) \to -2$. Quindi calcolare il limite dato equivale a calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty} (-2) \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{x} = 0^- .$$

Formalmente:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} - 2\right) \cdot \left(\sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-2 + o(1)\right) \cdot \left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0^- .$$



ESERCIZI SVOLTI

ESERCIZIO 1

Data la funzione $y = \ln\left(\frac{x^2-4}{5+x}\right)$, calcolare il dominio e i limiti alla frontiera dello stesso.
Rappresentare infine i limiti calcolati negli intorni considerati.

Il dominio si ottiene ponendo l'argomento del logaritmo maggiore di zero e il denominatore diverso da zero.
Eseguendo i calcoli si ottiene: $D \equiv (-5,-2) \cup (2,+\infty)$ e $y \in C^0(D)$. Calcoliamo i limiti.
Per calcolare il limite per $x \to -5$, notiamo che l'argomento del logaritmo per $x \to -5^+$ tende a $+\infty$ e quindi il logaritmo tende a $+\infty$ e infine il limite risulta essere: $\lim_{x\to -5} \ln\left(\frac{x^2-4}{5+x}\right) = +\infty$. La retta di equazione $x = -5$ è un asintoto verticale per la funzione.
Invece per calcolare il limite per $x \to -2$, notiamo che l'argomento del logaritmo per $x \to -2^-$ tende a 0 e quindi il logaritmo tende a $-\infty$, di conseguenza il limite risulta: $\lim_{x\to -2} \ln\left(\frac{x^2-4}{5+x}\right) = -\infty$. La retta di equazione $x = -2$ è un asintoto verticale per la funzione.
Con un ragionamento analogo si calcola anche il limite per $x \to 2^+$ e si ottiene: $\lim_{x\to 2^+} \ln\left(\frac{x^2-4}{5+x}\right) = -\infty$. La retta di equazione $x = 2$ è un asintoto verticale per la funzione.
Infine calcoliamo $\lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x^2-4}{5+x}\right)$; qui non possiamo fare il ragionamento precedente, non possiamo usare l'equivalenza asintotica, quindi procediamo nel seguente modo:

$$\lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{x^2-4}{5+x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \ln \frac{x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \ln \frac{x\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}{\left(1+\frac{5}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\left[\ln x\left(1+\frac{4}{x^2}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{x}\right)\right] = \lim_{x\to +\infty}\left[\ln x + \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{x}\right)\right].$$

Osserviamo che:

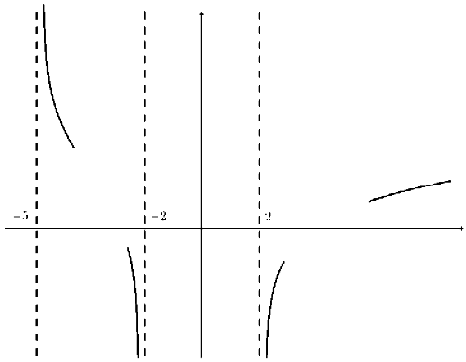
$$\ln x + \ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) - \ln\left(1+\frac{5}{x}\right) \sim \ln x$$

quindi calcolare il limite dato equivale a calcolare il seguente

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

La funzione per $x \to +\infty$ è un infinito di ordine minore di 1, ovviamente non ammette asintoto obliquo e tende all'infinito concava.

Possiamo rappresentare i limiti calcolati nei relativi intorni e otteniamo:



ESERCIZIO 2

Dopo aver individuato la più semplice funzione asintotica nell'intorno considerato, calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(\ln x)^2}{x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(e^{\sqrt[3]{x}}-1\right)}{x}$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x}$.

SOLUZIONI

1) La funzione $y=\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}$ per $x\to+\infty$ è una somma di infinitesimi, quindi è asintotica all'infinitesimo di ordine inferiore ovvero: $\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3} \sim \frac{1}{x}$.
Ne segue che calcolare il limite richiesto equivale a calcolare il seguente: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0^+$.

2) In questo caso la funzione $y=\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}$ per $x\to0^+$ è una somma di infiniti e presenta una forma di indecisione del tipo $+\infty-\infty$, è asintotica all'infinito di ordine superiore ovvero: $\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3} \sim \frac{2}{x^3}$.
Ne segue che calcolare il limite richiesto equivale a calcolare il seguente: $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2}{x^3}\right)=+\infty$.

3) Il limite presenta la forma di indecisione $\frac{0}{0}$; per $x\to1$ possiamo scrivere $\ln x$ nel seguente modo: $\ln x=\ln(1+(x-1))$ che per $x\to1$ è asintotico a $x-1$. Quindi $\ln(1+(x-1)) \sim x-1$ per $x\to1$ e di conseguenza $(\ln x)^2 \sim (x-1)^2$.
Dunque calcolare il limite $\lim_{x\to1}\frac{(\ln x)^2}{x-1}$ equivale a calcolare:
$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-1)=0$.

4) Il limite presenta la forma di indecisione $\frac{0}{0}$. Ricordiamo che per $x\to0$, $e^{\sqrt[3]{x}}-1\sim\sqrt[3]{x}$ e quindi calcolare il limite dato equivale a calcolare il seguente: $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=+\infty$.

5) Il limite presenta la forma di indecisione $\frac{\infty}{\infty}$. Calcoliamo per $x\to+\infty$ la funzione asintotica di $\ln\left(1+x^3\right)$, risulta:

$$\ln\left(1+x^3\right)=\ln\left[\left(x^3\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\right]=\ln\left(x^3\right)+\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\sim \ln\left(x^3\right)+\frac{1}{x^3} \sim \ln\left(x^3\right)=3\ln x .$$

Quindi calcolare il limite dato equivale a calcolare il seguente limite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3\ln x}{x}=0^+$ (essendo il logaritmo un infinito di ordine inferiore a quello di x).

6) Il limite presenta la forma di indecisione $\dfrac{0}{0}$. In questo caso la funzione è la stessa ma $x\to 0$, ricordiamo che $\ln\left(1+x^3\right)\sim x^3$; calcolare il limite dato equivale a calcolare $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$.

ESERCIZIO 3

Data la funzione $y=2^{4x}-2^x+3\cdot 2^{7x}$:
a) calcolare il limite per $x\to-\infty$;
b) calcolare il limite per $x\to 0$;
c) dare la definizione di limite in ciascuno dei casi considerati.

a) Per $x\to-\infty$ ricordiamo che $2^x\to 0$ ne segue che ogni addendo della funzione tende a zero e quindi: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2^{4x}-2^x+3\cdot 2^{7x}\right)=0$.
b) Per $x\to 0$ calcoliamo il limite e otteniamo $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^{4x}-2^x+3\cdot 2^{7x}\right)=3$.
c) Definizione del primo limite: comunque fissato un intorno del limite $V(0)$, esiste un intorno $U(-\infty)$ fatto in modo tale che per ogni $x\in U(-\infty)$ e appartenente al dominio della funzione, accade che $f(x)\in V(0)$.
Definizione del secondo limite: comunque fissato un intorno del limite $V(3)$, esiste un intorno $U(0)$ fatto in modo tale che per ogni $x\in U(0)$ e appartenente al dominio della funzione, accade che $f(x)\in V(3)$.

ESERCIZIO 4

Per ciascuna delle seguenti funzioni

1) $y=x^2-\dfrac{1}{x^2}$;

2) $y=\sqrt[3]{x^2(x+1)}$;

3) $y=x^2\ln(1+x)$;

calcolare:
a) il dominio;

b) i limiti alla frontiera del dominio dopo aver determinato la più semplice funzione asintotica nell'intorno considerato;
c) gli zeri e l'ordine di infinitesimo;
d) rappresentare in un grafico approssimato i risultati ottenuti.

SOLUZIONI

1) La funzione esiste nell'insieme: $D \equiv (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ed è $y \in C^0(R - \{0\})$.
Notiamo che la funzione è pari in tutto il suo dominio, per simmetria analizziamo l'intervallo $(0, +\infty)$.

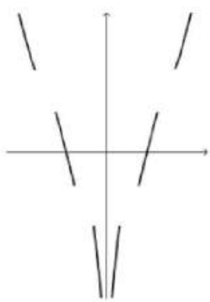
Calcoliamo i limiti alla frontiera: $\lim_{x \to +\infty}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ in quanto per $x \to +\infty$ si ha che:

$x^2 - \frac{1}{x^2} \sim x^2$; anche $\lim_{x \to -\infty}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ per lo stesso motivo del limite precedente;

per $x \to 0$, $x^2 - \frac{1}{x^2} \sim -\frac{1}{x^2}$ e quindi: $\lim_{x \to 0}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$.

La funzione, che possiamo riscrivere come $y = \frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x^2}$, si annulla in $x = 1$ e $x = -1$.
Per $x \to 1$, $y \sim 4(x-1)$ quindi è un infinitesimo di ordine 1, analogamente per $x \to -1$ è ancora un infinitesimo di ordine 1 e $y \sim -4(x+1)$.

Possiamo rappresentare i risultati ottenuti nel seguente grafico:



2) Il dominio della funzione è tutto l'insieme R.
Calcoliamo a questo punto i due limiti alla frontiera del dominio tenendo presente che:

$\sqrt[3]{x^2(x+1)} \sim x$ sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$. Se ne deduce che:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2(x+1)} = +\infty$ e che $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2(x+1)} = -\infty$.

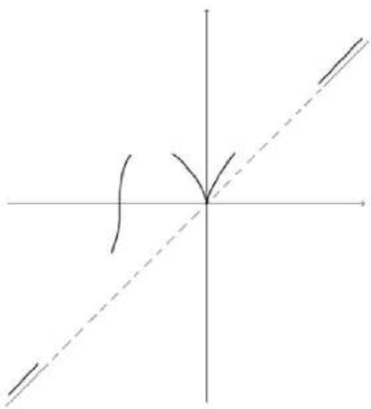
Sappiamo che la funzione ha un asintoto obliquo, lo calcoliamo:
per $x \to +\infty$, tenendo presente la funzione asintotica, si deduce che il limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2(x+1)}}{x} = 1$ e questo vale anche per $x \to -\infty$. Quindi il coefficiente angolare m dell'asintoto obliquo è uguale a $m = 1$.
Calcoliamo l'ordinata all'origine:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^2(x+1)} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} x \cdot \left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} - 1 \right).$$

Da un noto limite notevole ricordiamo che $\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}} - 1 \sim \dfrac{1}{3x^3}$ e quindi calcolare il limite in questione equivale a calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot \left(1 + \dfrac{1}{3x^3} - 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3x^2} = 0^+$.

Analogo risultato avremmo nel caso in cui $x \to -\infty$; deduciamo che la retta di equazione $y = x$ è asintoto obliquo in tutti e due gli intorni dell'infinito.
Per quanto riguarda gli zeri e l'ordine di infinitesimo, notiamo che:
$y = \sqrt[3]{x^2(x+1)}$ si annulla quando $x = 0$ e quando $x = -1$.

Per $x \to 0$, $\sqrt[3]{x^2(x+1)} \sim \sqrt[3]{x^2}$ la funzione è un infinitesimo di ordine 2/3, mentre per $x \to -1$, $\sqrt[3]{x^2(x+1)} \sim \sqrt[3]{(x+1)}$ la funzione è un infinitesimo di ordine 1/3.
Rappresentiamo i risultati ottenuti nel seguente grafico:



3) Il dominio è l'insieme $D \equiv (-1, +\infty)$ conseguenza della condizione di esistenza da porre sull'argomento del logaritmo.

Calcoliamo i limiti alla frontiera. Per $x \to -1$ la funzione $x^2 \ln(1+x) \sim \ln(1+x)$, quindi si ha: $\lim\limits_{x \to -1^+} x^2 \ln(1+x) = -\infty$. La retta di equazione $x = -1$ è un asintoto verticale per la funzione.

Per $x \to +\infty$, invece:

$$x^2 \ln(1+x) = x^2 \left[\ln x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = x^2\left(\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

e infine

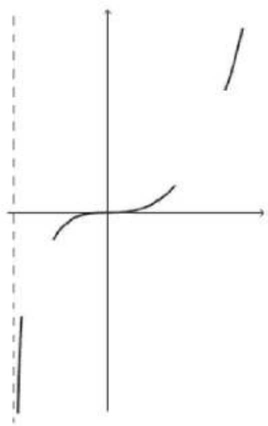
$$x^2\left(\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \sim x^2 \ln(x)$$

quindi il limite della funzione è:

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \ln(1+x) = +\infty$, notiamo che tende all'infinito con ordine maggiore di due.

Calcoliamo i punti in cui la funzione si annulla; $y = x^2 \ln(1+x)$ si annulla in $x = 0$ e per $x \to 0$ accade che $x^2 \ln(1+x) \sim x^2 \cdot x = x^3$, se ne deduce che l'ordine di infinitesimo è tre.

Con queste informazioni possiamo rappresentare risultati ottenuti:



ESERCIZIO 5

Per la seguente funzione

$$y = \frac{e^{-x} + 3}{x^2 + 2e^{-x}}$$

calcolare:

a) il dominio;

b) i limiti alla frontiera e per ciascuno individuare la più semplice funzione asintotica.

a) Il dominio della funzione è tutto l'insieme R e quindi $y \in C^0(R)$;
b) Basta calcolare i limiti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

Per $x \to +\infty$ si ha che: $\frac{e^{-x}+3}{x^2+2e^{-x}} \sim \frac{3}{x^2}$, quindi calcolare il limite della funzione per $x \to +\infty$ equivale a calcolare il seguente limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = 0^+$.
La retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale per la funzione per $x \to +\infty$.

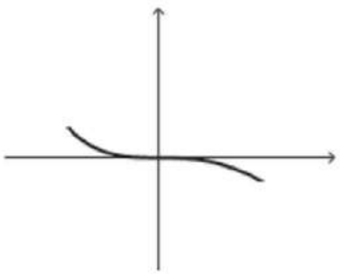
Per $x \to -\infty$ si ha che: $\frac{e^{-x}+3}{x^2+2e^{-x}} \sim \frac{e^{-x}}{2e^{-x}} = \frac{1}{2}$, quindi calcolare il limite della funzione per $x \to -\infty$ equivale a calcolare il seguente limite $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

La retta di equazione $y = \frac{1}{2}$ è un asintoto orizzontale per la funzione per $x \to -\infty$.

ESERCIZIO 6

Determinare gli zeri e il relativo ordine di infinitesimo per la funzione: $y = \left(e^{-x^2} - 1\right)\ln(x+1)$. Rappresentare poi il grafico nel relativo intorno.

La funzione, che esiste in $D \equiv (-1, +\infty)$, si annulla per $x = 0$. Per $x \to 0$ accade che: $\left(e^{-x^2} - 1\right)\ln(x+1) \sim -x^2 \cdot x = -x^3$. La funzione in $x = 0$ è un infinitesimo del terzo ordine, è infatti asintotica a $-x^3$.
Il grafico nell'intorno del punto $x = 0$ è il seguente:



ESERCIZIO 7

Date le seguenti funzioni:

$f_1 = 2x + e^{-5x} + x\ln x + 7x^3$

$f_2 = 4x^3 + (\ln x)^{10} - 6x^5 + \sinh x^2$

$$f_3 = 4x^3 + \frac{x^{10}}{\ln x} - x + \frac{2}{x}$$

$$f_4 = e^{2x} + x^{10} - 6\sqrt{x} + 8x$$

a) controllare che per $x \to +\infty$ sono tutte degli infiniti;
b) per ciascuna determinare la più semplice funzione asintotica;
c) disporle in ordine crescente di infinito.

a) Le funzioni per $x \to +\infty$ tendono tutte all'infinito, quindi sono degli infiniti.
b) Per ciascuna determiniamo la più semplice funzione asintotica per $x \to +\infty$:

$f_1 \sim 7x^3$ (notiamo che l'esponenziale in questo caso tende a zero)

$f_2 \sim \sinh x^2 \sim \frac{1}{2}e^{x^2}$

$f_3 \sim \dfrac{x^{10}}{\ln x}$

$f_4 \sim e^{2x}$

c) Adesso le disponiamo in ordine crescente di infinito cioè dall'infinito di ordine inferiore a quello di ordine superiore, abbiamo (ovviamente leggendo da sinistra verso destra come nostra consuetudine):

$f_1 \qquad f_3 \qquad f_4 \qquad f_2$

ESERCIZIO 8

Date le seguenti funzioni:

$$f_1 = x^2 \ln(1+x) + x\ln|x| + x + \sinh x$$

$$f_2 = 4x^3 - 6x^5 + \cosh x - 1$$

$$f_3 = \frac{x^{10}}{\ln x} + x^{10} + 3x^3$$

$$f_4 = 6\sqrt[3]{x^2} + 8\sqrt{|x|}$$

a) controllare che per $x \to 0$ le funzioni sono tutte degli infinitesimi;
b) per ciascuna determinare la più semplice funzione asintotica;
c) disporle in ordine crescente di infinitesimo.

a) Le funzioni per $x \to 0$ tendono tutte a zero, quindi sono degli infinitesimi.

b) Per ciascuna determiniamo la più semplice funzione asintotica per $x \to 0$:

$f_1 \sim x + x = 2x$ essendo $\sinh x \sim x$

$f_2 \sim \frac{1}{2}x^2$ a tal proposito ricordiamo che $\cosh x - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$

$f_3 \sim 3x^3$

$f_4 \sim 8\sqrt{|x|}$

c) Adesso le disponiamo in ordine crescente di infinitesimo cioè dall'infinitesimo di ordine inferiore a quello di ordine superiore, abbiamo (ovviamente leggendo da sinistra verso destra come nostra abitudine):

$f_4 \quad f_1 \quad f_2 \quad f_3$

ESERCIZIO 9

Calcolare i seguenti limiti motivando il percorso seguito:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{x\left(e^x + 3\right)}$;

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1 + x^2\right)}{x^4}$;

3) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x}{e^{-x} - 1}$.

SOLUZIONI

Notiamo che i tre limiti si presentano tutti e tre nella forma di indecisione $\frac{0}{0}$.

1) Ricordiamo che per $x \to 0$ $(\sin x)^2 \sim x^2$ e quindi calcolare il limite dato equivale a calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x\left(e^x + 3\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x + 3} = 0 .$$

2) Allo stesso modo, poiché per $x \to 0$ $\ln\left(1 + x^2\right) \sim x^2$, calcolare il limite dato equivale a

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty .$$

3) Analogamente, poiché per $x \to 0$ $e^{-x} - 1 \sim -x$ e $x^2 + x \sim x$, il limite dato equivale al seguente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{-x} = -1 .$$

ESERCIZIO 10

Calcolare gli eventuali asintoti della funzione $y = \sqrt{6x + x^2}$.

Il dominio D della funzione è il seguente: $D \equiv (-\infty, -6] \cup [0, +\infty)$.
Essendo y una funzione irrazionale che ha indice di radice uguale al grado del polinomio che costituisce il radicando (nel nostro caso 2) ha asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$. Calcoliamoli:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{6x + x^2} = +\infty$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{6x + x^2}}{x} = +1$, per verificarlo basta ricordare che per $x \to +\infty$ $\sqrt{6x + x^2} \sim |x| = x$,
quindi 1 è il valore del coefficiente angolare dell'asintoto obliquo.
Inoltre calcoliamo il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{6x + x^2} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \left(x\sqrt{1 + \frac{6}{x}} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{6}{x}} - 1 \right)$$

Poiché per $x \to +\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$, ricordando un noto limite notevole, si ha che

$$\sqrt{1 + \frac{6}{x}} - 1 \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{x} = \frac{3}{x}.$$

Quindi il limite da calcolare equivale al seguente:

$$\lim_{x\to+\infty} x \cdot \frac{3}{x} = 3.$$

L'equazione dell'asintoto obliquo per $x \to +\infty$ è la seguente: $y = x + 3$.
Procedendo allo stesso modo per $x \to -\infty$, si ottiene l'equazione dell'asintoto obliquo che è: $y = -x - 3$ (ricordiamo che per $x \to -\infty$ $\sqrt{6x + x^2} \sim |x| = -x$).

ESERCIZIO 11

Data la funzione

$$y = \begin{cases} \ln\left(e^x - 3\right)^2 & x > \ln 3 \\ e^{x^2} - 1 & x \le \ln 3 \end{cases}$$

a) è continua in $x = \ln 3$? motivare la risposta;
b) calcolare i limiti della funzione per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ e individuare le equazioni di eventuali asintoti.

a) Proviamo la continuità:

$$y(\ln 3) = e^{(\ln 3)^2} - 1$$

$$\lim_{x\to \ln 3^-} e^{x^2} - 1 = e^{(\ln 3)^2} - 1$$

$$\lim_{x\to \ln 3^+} \ln\left(e^x-3\right)^2 = -\infty$$

I due limiti sono diversi e quindi la funzione non è continua in $x=\ln 3$.

b) Calcoliamo i limiti:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(e^x-3\right)^2 = +\infty$ poiché per $x\to+\infty$ la funzione è asintotica a $2x$ (basta controllare tenendo presenti le proprietà dell'equivalenza asintotica).

Controlliamo se la funzione ammette asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(e^x-3\right)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln\left(e^x-3\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln\left[e^x\left(1-\frac{3}{e^x}\right)\right]}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\left[\ln e^x+\ln\left(1-\frac{3}{e^x}\right)\right]}{x} \sim \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

il valore del coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo è 2.

Controlliamo l'ordinata all'origine:

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\ln\left(e^x-3\right)^2 - 2x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[2\ln\left(e^x-3\right)-2x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left\{2\ln\left[e^x\left(1-\frac{3}{e^x}\right)\right]-2x\right\} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left\{2\left[\ln e^x+\ln\left(1-\frac{3}{e^x}\right)\right]-2x\right\} = \lim_{x\to+\infty} \left[2x+2\ln\left(1-\frac{3}{e^x}\right)-2x\right] = 0$$

quindi $y=2x$ è l'equazione dell'asintoto obliquo.

Calcoliamo il secondo limite:

$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{x^2}-1\right) = +\infty$ in quanto per $x\to-\infty$ la funzione è asintotica a per e^{x^2}.

Per quanto detto la funzione non ammette asintoto obliquo avendo, per $x\to-\infty$, ordine di infinito superiore a quello di $|x|^\alpha$ con $\alpha>1$.

ESERCIZI PARTICOLARI

ESERCIZIO 1

Per la seguente funzione $f(x)=e^{-x^2}\left(x^3-x^2\right)$, calcolare:

a) il dominio;
b) i limiti alla frontiera del dominio e nel caso di limite infinito oppure infinitesimo scrivere nell'intorno considerato la più semplice funzione asintotica rispetto all'infinito o infinitesimo campione standard;
c) gli zeri della funzione e per ciascuno stabilire l'ordine di infinitesimo rispetto all'infinitesimo campione standard;
d) disegnare un grafico qualitativo della funzione compatibile con le informazioni ottenute dai punti precedenti;

e) dedurre dal grafico disegnato il numero minimo di flessi presenti e dichiarare – nel caso fossero in numero maggiore – se tale numero è pari oppure è dispari.

a) Essendo la funzione definita da operazioni elementari, da potenze, modulo e esponenziale il dominio coincide con l'insieme R e $f \in C^0(R)$.

b) Dobbiamo calcolare i seguenti limiti: $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Cominciamo con l'individuare la funzione asintotica sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$.

Essendo: $e^{-x^2}\left(x^3 - x^2\right) \sim x^3 e^{-x^2}$ il comportamento delle due funzioni è lo stesso, in particolare sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$ $f(x) \sim x^3 e^{-x^2}$.

Quindi tendono entrambe a zero, in particolare:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^-$

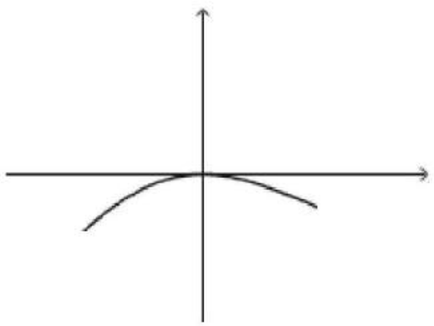
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$.

c) Gli zeri della funzione sono i punti in cui essa si annulla, nel nostro caso: $x = 0$, $x = 1$. Cerchiamo per ciascuno degli zeri la più semplice funzione asintotica.

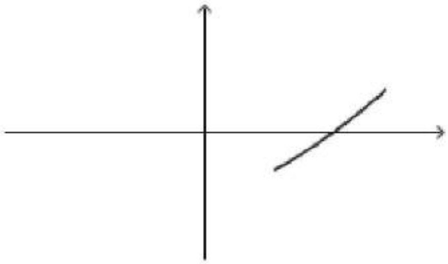
La funzione può essere scritta anche nel seguente modo:

$f(x) = e^{-x^2}\left(x^3 - x^2\right) = e^{-x^2} x^2 (x-1)$

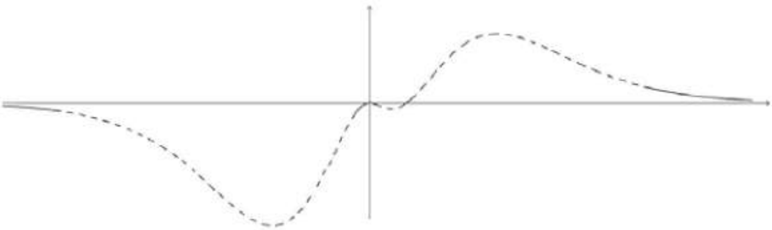
da cui si evince che per $x \to 0$ è asintotica a $-x^2$ e dunque è un infinitesimo di ordine 2 rispetto all'infinitesimo standard che è x. Nell'intorno del punto $x = 0$ il grafico della funzione coincide con il grafico della funzione asintotica quindi con il grafico della parabola di equazione $y = -x^2$:



Per $x \to 1$, la funzione $f(x) = e^{-x^2} x^2 (x-1)$ è asintotica a $e^{-1}(x-1)$ e dunque è un infinitesimo di ordine 1 rispetto all'infinitesimo standard che in questo caso è $(x-1)$, infatti quando $x \to 1$, $x - 1 \to 0$. Nell'intorno del punto $x = 1$ il grafico della funzione si comporta come il grafico della funzione asintotica, quindi tangente alla retta di equazione $y = e^{-1}(x-1)$.



d) Mettiamo insieme i risultati ottenuti e rappresentiamo un grafico compatibile con le informazioni ottenute:



e) Il minimo numero di flessi presenti nel grafico disegnato è 5, se fossero in numero maggiore sarebbero comunque dispari.

ESERCIZIO 2

Data la seguente funzione $y = x\ln(x)$ calcolare:

a) il dominio;
b) i limiti alla frontiera del dominio e nel caso di limite infinito oppure infinitesimo stabilire se l'ordine è maggiore oppure minore di uno;
c) gli zeri della funzione e per ciascuno stabilire l'ordine di infinitesimo o – nel caso non fosse possibile determinarlo – indicare se l'ordine è maggiore oppure minore di uno;
d) disegnare un grafico qualitativo della funzione compatibile con le informazioni ottenute dai punti precedenti;
e) dedurre dal grafico disegnato il numero minimo di flessi presenti e dichiarare – nel caso fossero in numero maggiore – se tale numero è pari oppure è dispari.

a) Per la presenza del logaritmo nella funzione, il dominio è dato dai valori positivi dell'argomento del logaritmo, quindi: $D \equiv (0, +\infty)$ e $y \in C^0(D)$.

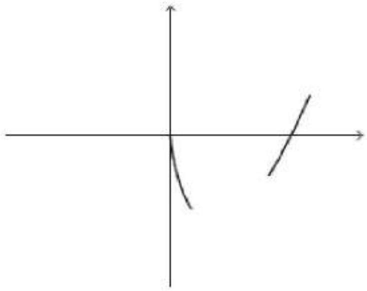
b) Calcoliamo i limiti alla frontiera:

$$\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$$

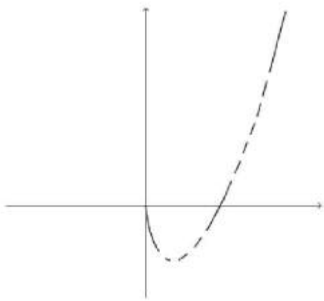
da tale risultato deduciamo che la funzione può essere prolungata con continuità in $x = 0$, aggiungendo $y(0) = 0$. Consideriamo quindi la funzione:

$$y = \begin{cases} x\ln(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

essa esiste ed è continua in $x = 0$, quindi il suo dominio è l'insieme $D \equiv [0, +\infty)$. Inoltre in $x = 0$ la funzione ha ordine di infinitesimo minore di uno, quindi il suo grafico si avvicina all'origine con tangente verticale.
Calcoliamo ora l'altro limite:
$\lim_{x \to +\infty} x\ln(x) = +\infty$ e l'ordine di infinito è maggiore di uno, quindi la funzione va all'infinito con la concavità rivolta verso l'alto.
c) La funzione si annulla in $x = 1$ (il punto $x = 0$ è già stato analizzato).
Per $x \to 1$ si ha $x\ln(x) \sim x - 1$ e quindi è un infinitesimo di ordine uno.
Riportiamo in un grafico i risultati ottenuti negli intorni dei punti $x = 0$ e $x = 1$:



d) Un grafico qualitativo della funzione, compatibile con le informazioni ottenute dai punti precedenti, è il seguente:



e) Osservando il grafico disegnato il numero minimo di flessi presenti è zero, se fossero in numero maggiore sarebbero comunque in numero pari.

ESERCIZIO 3

Data la seguente funzione $y = x^2 \ln(x)$ calcolare:

a) il dominio;
b) i limiti alla frontiera del dominio e nel caso di limite infinito oppure infinitesimo stabilire se l'ordine è maggiore oppure minore di uno;

c) gli zeri della funzione e per ciascuno stabilire l'ordine di infinitesimo o – nel caso non fosse possibile determinarlo – indicare se l'ordine è maggiore oppure minore di uno;
d) disegnare un grafico qualitativo della funzione compatibile con le informazioni ottenute dai punti precedenti;
e) dedurre dal grafico disegnato il numero minimo di flessi presenti e dichiarare, nel caso fossero in numero maggiore, se tale numero è pari oppure è dispari.

a) Per la presenza del logaritmo nella funzione, anche in questo caso il dominio è dato dai valori positivi dell'argomento del logaritmo, quindi: $D \equiv (0, +\infty)$.

b) Calcoliamo i limiti alla frontiera:

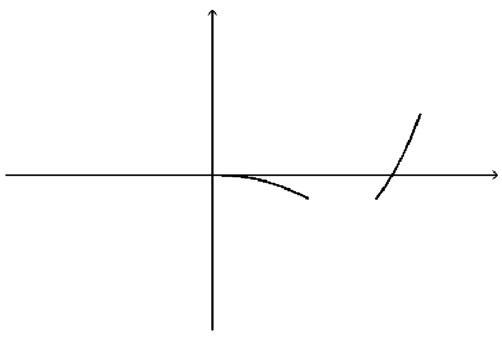
$$\lim_{x \to 0} x^2 \ln(x) = 0$$

da tale risultato deduciamo che la funzione può essere prolungata con continuità in $x = 0$, aggiungendo $y(0) = 0$. Come fatto prima, consideriamo quindi la funzione:

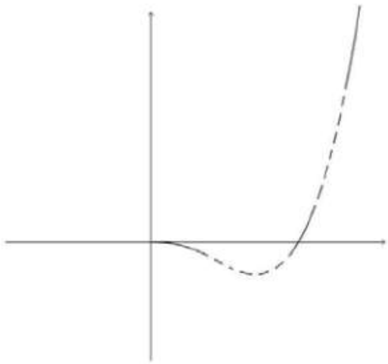
$$y = \begin{cases} x^2 \ln(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

che esiste ed è continua in $x = 0$, quindi il suo dominio è l'insieme $D \equiv [0, +\infty)$.
Inoltre in $x = 0$ la funzione ha ordine di infinitesimo maggiore di uno, quindi il suo grafico si avvicina all'origine con tangente orizzontale.
Calcoliamo ora l'altro limite:
$\lim_{x \to +\infty} x^2 \ln(x) = +\infty$ e l'ordine di infinito è maggiore di due e la funzione va all'infinito con la concavità rivolta verso l'alto.

c) la funzione si annulla in $x = 1$ (il punto $x = 0$ è già stato analizzato).
Per $x \to 1$ si ha $x^2 \ln(x) \sim x - 1$ e quindi è un infinitesimo di ordine uno. Riportiamo in un grafico i risultati ottenuti negli intorni dei punti $x = 0$ e $x = 1$:



d) un grafico qualitativo della funzione, compatibile con le informazioni ottenute dai punti precedenti, è il seguente:



e) il grafico della funzione presenta almeno un flesso, nel caso fossero in numero maggiore sarebbero comunque dispari.

ESERCIZIO 4

Data la seguente funzione $y = \sqrt[5]{x^2}\ln\left(1+\sqrt[5]{x^2}\right)$ calcolare:

a) il dominio;
b) i limiti alla frontiera del dominio e nel caso di limite infinito oppure infinitesimo scrivere nell'intorno considerato la più semplice funzione asintotica rispetto all'infinito o infinitesimo campione standard;
c) gli zeri della funzione e per ciascuno stabilire l'ordine di infinitesimo rispetto all'infinitesimo campione standard;
d) disegnare un grafico qualitativo della funzione compatibile con le informazioni ottenute dai punti precedenti;
e) dedurre dal grafico disegnato il numero minimo di flessi presenti e dichiarare – nel caso fossero in numero maggiore – se tale numero è pari oppure è dispari.

a) il dominio è l'insieme R e notiamo che la funzione è pari.

b) in virtù della simmetria, possiamo calcolare solo il limite per $x \to +\infty$ (sapendo che l'altro è uguale).
Per $x \to +\infty$, la funzione è asintotica alla seguente:

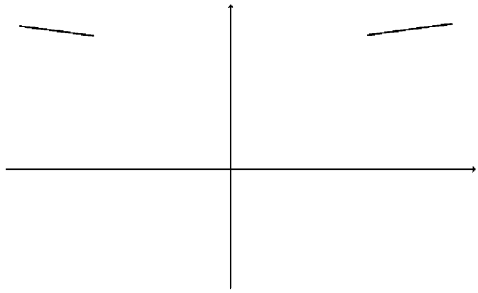
$$\sqrt[5]{x^2}\ln\left(1+\sqrt[5]{x^2}\right) = \sqrt[5]{x^2}\ln\left[\sqrt[5]{x^2}\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)\right] =$$

$$= \sqrt[5]{x^2}\left[\ln\sqrt[5]{x^2} + \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)\right] \sim \sqrt[5]{x^2}\ln\left(\sqrt[5]{x^2}\right) = \frac{2}{5}\sqrt[5]{x^2}\ln(x).$$

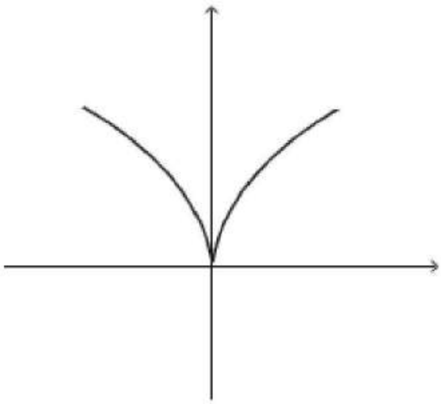
Calcolare il limite della funzione equivale a calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{5}\sqrt[5]{x^2}\ln x = +\infty .$$

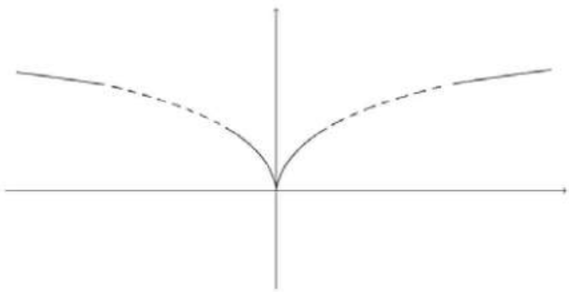
Dal risultato ottenuto deduciamo che la funzione va all'infinito (sia per $x \to +\infty$ che $x \to -\infty$) con ordine minore di uno e l'andamento grafico in tali intorni è del tipo:



c) la funzione $y = \sqrt[5]{x^2} \ln\left(1 + \sqrt[5]{x^2}\right)$ si annulla in $x = 0$ e per $x \to 0$ è asintotica a $\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x^2} = \sqrt[5]{x^4}$. Pertanto l'ordine di infinitesimo in $x = 0$ è $\frac{4}{5} < 1$. Il grafico dunque nell'intorno dell'origine ha tangente verticale:



d) un grafico qualitativo della funzione, compatibile con le informazioni ottenute dai punti precedenti, è il seguente:



e) il grafico della funzione non presenta alcun flesso, nel caso ci fossero sarebbero comunque in numero pari.

ESERCIZIO 5

Quali tra le seguenti funzioni ha di sicuro un asintoto obliquo?

a) $y = \frac{1}{x+2} - 3x$

b) $y = \sqrt{-3x - x^2}$

c) $y = \frac{e^x}{x+2}$

d) $y = -3x + x^4$

e) $y = \sqrt{9 + x^2}$

f) $y = \sqrt{-3x + x^2} + x^3$

Le funzioni che di sicuro presentano un asintoto obliquo sono le seguenti:

a) $y = \frac{1}{x+2} - 3x$ perché è una funzione razionale che ha il numeratore di secondo grado e il denominatore di primo.
e) $y = \sqrt{9 + x^2}$ perché è una funzione irrazionale (che esiste in tutto *R*) con l'indice di radice uguale al grado del radicando.

Analizziamo le altre e spieghiamo perché non hanno l'asintoto obliquo.
La funzione $y = \sqrt{-3x - x^2}$ non prevede $+\infty$ e nemmeno $-\infty$ come estremi del dominio che è costituito dall'intervallo $[-3, 0]$.

La funzione $y = \frac{e^x}{x+2}$ per $x \to +\infty$, va all'infinito come $\frac{e^x}{x}$, mentre per esistere l'asintoto obliquo deve andare all'infinito con ordine uno, cioè come x.
Anche la funzione $y = -3x + x^4$ per $x \to +\infty$, va all'infinito come x^4, mentre, come si è detto prima, per esistere l'asintoto obliquo deve andare all'infinito con ordine uno cioè come x.
Infine anche la funzione $y = \sqrt{-3x + x^2} + x^3$ per $x \to +\infty$, va all'infinito come x^3, mentre per esistere l'asintoto obliquo - come abbiamo già detto più volte - deve andare all'infinito con ordine uno cioè come x.

ESERCIZIO 6

Date le seguenti funzioni:

$f_1 = e^{4x+1}$;

$f_2 = e^{x^2+x}$;

$f_3 = e^{\sqrt{x}+x^2}$;

$f_4 = e^x + e^{x^2} + x^2 + \ln x$;

dopo aver controllato che per $x \to +\infty$ le funzioni sono tutte degli infiniti, disporle in ordine decrescente di infinito.

Notiamo subito che le funzioni sono tutte infinite e che l'equivalenza asintotica può essere applicata solo alla f_4: $f_4 \sim e^{x^2}$. Nei restanti casi ricordiamo che: $f_1 = e \cdot e^{4x}$, $f_2 = e^{x^2} \cdot e^x$, $f_3 = e^{\sqrt{x}} \cdot e^{x^2}$. Da queste considerazioni se ne deduce che la disposizione delle funzioni in ordine decrescente di infinito è la seguente:

$f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad f_1$

ESERCIZIO 7

Scrivere l'equazione di una funzione che abbia almeno un asintoto verticale nella retta di equazione $x = 3$ e per $x \to +\infty$ abbia limite uguale a zero.

In modo semplice, una funzione con le caratteristiche richieste è $y = \dfrac{1}{x-3}$.

Ma anche le seguenti:

$y = \dfrac{1}{x^2 - 3x}$ e $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 3x}}$.

ESERCIZIO 8

Data la seguente funzione definita a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & x \le -2 \\ \sqrt[3]{x+2} & -2 < x < 6 \\ (x-6)^2 & x \ge 6 \end{cases}$$

dichiarare l'insieme di continuità e motivare la risposta.

Il dominio della funzione è tutto R, dobbiamo controllare la continuità nei punti $x = -2$ e $x = 6$ negli intorni dei quali è presente una doppia definizione.

Applichiamo la definizione di continuità nel punto $x=-2$:

$f(-2)=0$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}(-x-2)=0$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\sqrt[3]{x+2}=0$$

se ne deduce che la funzione è continua nel punto $x=-2$.
Analogamente procediamo nell'intorno del punto $x=6$:

$f(6)=0$

$$\lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to -6^-}\sqrt[3]{x+2}=2$$

$$\lim_{x\to 6^+} f(x)=\lim_{x\to 6^+}(x-6)^2=0$$

i due limiti sono finiti ma diversi e quindi la funzione in $x=6$ ha una discontinuità di salto.
In conclusione l'insieme in cui la funzione è continua risulta: $R-\{6\}$, cioè $f\in C^0(R-\{6\})$.

ESERCIZI PROPOSTI

ESERCIZIO 1

Per ciascuna delle seguenti funzioni:

a) calcolare il dominio della funzione;
b) calcolare i limiti alla frontiera del dominio motivando il risultato ottenuto con l'uso del comportamento asintotico nell'intorno considerato;
c) calcolare gli zeri e l'ordine di infinitesimo;
d) rappresentare graficamente i risultati ottenuti.

1) $y=-x-\dfrac{3}{5+x^2}$;

2) $y=\dfrac{2x^3-x+1}{3-x}$;

3) $y=\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{4}{x^5}$;

4) $y=x^2\sqrt[3]{1-x}$;

5) $y=e^{-2x}\left(x^3-x^4\right)$;

6) $y=\ln\left|x+\dfrac{1}{x}\right|$;

7) $y=\sqrt[3]{-x+x^3}$.

ESERCIZIO 2

Per ciascuna delle seguenti funzioni:
a) calcolare il dominio della funzione;
b) calcolare i limiti alla frontiera del dominio motivando il risultato ottenuto con l'uso del comportamento asintotico nell'intorno considerato.

1) $y = x^2 \sinh x$;

2) $y = x^2 + \ln\left(1 + x^2\right)$;

3) $y = x^2 - \ln(1 + x)$;

4) $y = 2x - \sqrt{x+1}$;

5) $y = e^{-x^2} \cosh x$.

ESERCIZIO 3

Per ciascuna delle seguenti funzioni:
a) calcolare il dominio della funzione;
b) calcolare i limiti alla frontiera del dominio motivando il risultato ottenuto con l'uso del comportamento asintotico nell'intorno considerato;
c) calcolare gli zeri e l'ordine di infinitesimo;
d) rappresentare graficamente i risultati ottenuti e dedurre un grafico qualitativo della funzione;
e) indicare il numero minimo di flessi compatibili con il grafico disegnato.

1) $y = x^2 (x-1)^3 \sinh \sqrt[3]{x}$;

2) $y = \left(e^{3x} - 1\right)\left(x^3 - x^2\right)$;

3) $y = \sqrt[3]{(4-x)^2 (x+5)}$;

4) $y = \ln \dfrac{e^{2x} + e^x}{e^x + 3}$.

ESERCIZIO 4

Calcolare i seguenti limiti motivando, con l'uso del comportamento asintotico, il procedimento seguito:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sinh \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}}$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{4\ln x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sqrt[3]{x}}-1}{\sqrt[3]{2x+x^2}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(1+x^4\right)}{\sin\left(x^2\right)}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+x}}{1-\cosh x}$.

ESERCIZIO 5

Per ciascuna delle seguenti funzioni:

1) $y=|x|e^{-x^2}$;

2) $y=x\left(e^{\sqrt[3]{x}}-1\right)$;

3) $y=(\cosh x-1)\left(e^x-1\right)$.

calcolare e rappresentare i limiti alla frontiera e gli zeri, indicando ordine di infinito e di infinitesimo; rappresentare poi un grafico probabile con i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 6

Date le seguenti funzioni:

1) $f_1=x^2\ln(x)+x\left(\sin x^3\right)+3x$;

2) $f_2=x^3(\sinh x)-6x$;

3) $f_3=\ln\left(1+x^4\right)+x^{10}+3x^2$;

a) controllare che per $x\to 0$ le funzioni sono tutte degli infinitesimi;
b) per ciascuna determinare la più semplice funzione asintotica;
c) disporle in ordine decrescente di infinitesimo.

ESERCIZIO 7

Date le seguenti funzioni:

1) $f_1 = 9 + xe^{-5x} + x\ln x + x^3$;

2) $f_2 = 2x + \left(\ln x^3\right)^{10} - 7x^4$;

3) $f_3 = x^5 + \dfrac{x^6}{e^{-x}} + \dfrac{2}{x^4}$;

4) $f_4 = e^{-2x} + x^2 + \sqrt{x^9} + 8x$;

a) controllare che per $x \to +\infty$ sono tutte degli infiniti;
b) per ciascuna determinare la più semplice funzione asintotica;
c) disporle in ordine crescente di infinito.

ESERCIZIO 8

Data la funzione $y = \sqrt[3]{x^2(x+3)}$ risolvere i seguenti quesiti:

a) calcolare i limiti alla frontiera del dominio e indicare le equazioni di eventuali asintoti;
b) individuare gli zeri e per ciascuno indicare l'ordine di infinitesimo;
c) disegnare un grafico probabile della funzione compatibile con i risultati ottenuti;
d) dedurre dal grafico disegnato il numero minimo di flessi presenti e dichiarare – nel caso fossero in numero maggiore – se tale numero è pari oppure è dispari.

ESERCIZIO 9

Per ciascuna delle seguenti funzioni:

1) $y = 2x - \dfrac{5}{\sqrt[3]{x+1}}$;

2) $y = \ln\left|x^3 + \dfrac{1}{x}\right|$;

3) $y = \dfrac{\ln|x-2|}{\sqrt{x+4}}$;

4) $y = \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{5}{\sqrt{6+x}}$;

5) $y = x^2 + \sqrt{\dfrac{2+x^2}{x^4}}$.

risolvere i seguenti quesiti:

a) calcolare i limiti alla frontiera del dominio e indicare le equazioni di eventuali asintoti;
b) individuare gli zeri e per ciascuno indicare l'ordine di infinitesimo;

c) disegnare un grafico probabile della funzione compatibile con i risultati ottenuti;
d) dedurre dal grafico disegnato il numero minimo di flessi presenti e dichiarare – nel caso fossero in numero maggiore – se tale numero è pari oppure è dispari.

ESERCIZIO 10

Data la seguente funzione definita a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} -2 & x \leq -2 \\ \sqrt[3]{x+3} & -2 < x < 5 \\ (x-6)^2 & 5 \leq x \leq 7 \\ \log_7 x & x > 7 \end{cases}$$

dopo aver rappresentato la funzione nel piano cartesiano, dichiarare l'insieme di continuità e motivare la risposta.

ESERCIZIO 11

Date le seguenti funzioni:

1) $f_1 = \sqrt[3]{x^3 - 1}$;
2) $f_2 = \sqrt[5]{x^4 - 1}$;
3) $f_3 = \ln^2 x$;
4) $f_4 = \sin \sqrt[7]{x - 1}$.

a) controllare che per $x \to 1$ le funzioni sono tutte degli infinitesimi;
b) per ciascuna determinare la più semplice funzione asintotica;
c) disporle in ordine crescente di infinitesimo.

6 DERIVABILITÀ DI UNA FUNZIONE

“Evoluzione” – Particolare
scultura di Paolo Mazzuferi
anno 2012

PREMESSA

Ricordiamo che una funzione $f: R \to R$ risulta derivabile in un punto x_0, interno al suo dominio e nel quale la funzione è continua, se esiste finito il limite del rapporto incrementale della funzione. Il valore di tale limite è detto derivata prima di f in x_0 e si scrive: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

L'insieme dei punti in cui una funzione è derivabile, è detto **insieme di derivabilità**.
È importante ricordare che se una funzione f è derivabile nel punto x_0 allora f è continua nel punto x_0, cioè $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Non vale invece il viceversa. Se, invece, una funzione non è continua in un punto del dominio allora in questo essa non è derivabile.

Il dominio di una funzione costituita da combinazioni di funzioni elementari oppure composta da funzioni elementari coincide sempre con il suo dominio di continuità.
Il dominio della derivata prima di una funzione può coincidere con il dominio di continuità della funzione stessa oppure essere contenuto in esso, ma non può mai essere più ampio.

Inoltre una funzione f ha derivata prima continua in un insieme $A \subseteq R$ se è derivabile con continuità in ogni punto $x_0 \in A$, in questo caso si scrive $f \in C^1(A)$.
Se questo accade anche per le derivate successive (seconda, terza, ...) fino alla derivata di qualunque ordine, allora si scrive $f \in C^2(A)$, $f \in C^3(A)$, ... ,$f \in C^\infty(A)$.

I punti in cui una funzione risulta continua ma non derivabile vengono detti **punti singolari** (o di non derivabilità) e si distinguono in:
- punti angolosi (quando la derivata destra e sinistra esistono finite e sono diverse tra loro);
- cuspidi (quando la derivata destra e la derivata sinistra sono infinite ma di segno opposto);
- flessi a tangente verticale (quando le derivate destra e sinistra sono entrambe infinite dello stesso segno).

Ricordiamo un teorema utile per controllare la derivabilità di una funzione in un punto in alcuni casi particolari: il **teorema del limite della derivata**. Consideriamo una funzione f continua su un intervallo (a,b) a valori in R, se $c \in (a,b)$ e f è derivabile in un intorno di c ed esiste $\lim_{x \to c} f'(x) = L$ (con L finito o infinito) allora f è derivabile in c ed è $f'(c) = L$; ovvero il valore della derivata in quel punto è proprio il valore del limite della derivata stessa.
Ricordiamo inoltre che se il limite della derivata non esiste, nulla si può affermare sulla derivabilità; in tal caso è necessario usare la definizione.

Ricordiamo che geometricamente la derivata prima di una funzione in un punto rappresenta il coefficiente angolare della retta passante per il punto $(x_0, f(x_0))$ e tangente al grafico di f. Da quanto detto ricaviamo che l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione nel punto x_0 è: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Dalla definizione di derivata prima è possibile ricavare, in forma generale, le derivate delle funzioni elementari e le regole per eseguire le operazioni con le derivate.

ESEMPI GUIDATI

ESEMPIO 1

Calcolare, con la definizione, la derivata prima di $f(x) = 3x^2 + \ln(x+1)$ nel punto $x = 0$ e scrivere l'equazione della retta tangente nel punto $x = 0$.

Il dominio della funzione è l'insieme $D \equiv (-1, +\infty)$ e in tale insieme essa è continua, quindi è continua nel punto $x = 0$. Calcoliamo la derivata prima utilizzando il limite del rapporto incrementale della funzione:

$$\lim_{h \to 0} \frac{3(0+h)^2 + \ln(0+h+1) - 3(0)^2 - \ln(0+1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + \ln(h+1)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[3h + \frac{\ln(h+1)}{h} \right] = 0 + 1 = 1$$

Quindi $f'(0) = 1$. Essendo $f(0) = 0$, l'equazione della retta tangente in $x = 0$ risulta: $y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$ ovvero $y = x$.

ESEMPIO 2

Per ciascuna delle seguenti funzioni calcolare la derivata prima, evidenziando l'insieme di derivabilità e nel caso della presenza di punti di non derivabilità classificarli:

1) $y = 2x^3 - 7x + 5 + \sin(x)$;

2) $y = 2x - x^{-4} + 2\ln(x)$;

3) $y = \dfrac{5x - x^2 + 3}{2x + 1}$;

4) $y = x^3 e^x$;

5) $y = \ln(x^2 + 1)$;

6) $y = e^x \cdot \ln\left(5 + 3x^4\right)$;

7) $y = 2x^3 - \dfrac{3}{x} + 5\sqrt{x}$;

8) $y = 2x^3 - \dfrac{3}{x^2} + \ln|2x|$;

9) $y = 2x^7 + \sqrt{x}$.

10) $y = \sinh\left(\dfrac{2 + \sqrt{x}}{x^2 + 1}\right)$.

SOLUZIONI

1) La funzione è somma algebrica di funzioni elementari definite e continue in tutto R e quindi è a sua volta una funzione definita e continua su tutto R. Calcoliamo la derivata prima come somma delle derivate delle singole funzioni che la costituiscono. Le prime tre sono funzioni potenza (usiamo quindi la regola: se $f(x) = x^a$ allora $f'(x) = ax^{a-1}\ \forall a \in R$); nel nostro caso: $y' = 6x^2 - 7 + \cos(x)$ essendo $\cos(x)$ la derivata di sin(x).
Anche la derivata prima ha come dominio tutto R e quindi non ci sono punti di non derivabilità.

2) Anche nella funzione proposta compare la somma algebrica di funzioni elementari, ma compaiono una potenza negativa e un logaritmo quindi la funzione data esiste ed è continua su tutto l'insieme $D \equiv (0, +\infty)$, $y \in C^0(D)$; ricordando le regole di derivazione e applicandole troviamo che la derivata prima è la seguente: $y' = 2 - (-4)x^{-4-1} + 2 \cdot \dfrac{1}{x}$ ovvero $y' = 2 + 4x^{-5} + \dfrac{2}{x}$ anch'essa esiste ed è continua nel dominio della funzione.

3) Si tratta di una funzione quoziente che risulta continua nel dominio

$$D \equiv \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right).$$

Ricordiamo che la derivata del quoziente si esegue nel seguente modo:

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Nel nostro caso:

$$y' = \frac{(5 - 2x)(2x + 1) - \left(5x - x^2 + 3\right)2}{(2x + 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2x - 1}{(2x + 1)^2}$$

L'insieme di derivabilità coincide con il dominio di continuità della funzione: $y \in C^1(D)$.

4) La funzione esiste ed è continua in tutto l'insieme *R*, possiamo calcolare la derivata prima utilizzando la regola della derivata del prodotto che ricordiamo:

$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

In questo caso otteniamo: $y' = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x = e^x x^2 (3+x)$.

Il dominio della derivata prima è ancora tutto l'insieme R : $y \in C^1(R)$.

5) Si tratta di una funzione definita e continua su tutto R ed è una funzione composta la cui derivata si esegue moltiplicando tra loro le derivate di tutte le funzioni che la compongono:

$$D[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

La derivata della funzione risulta dunque:

$$y' = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}.$$

Anche la derivata risulta continua e derivabile in *R*.

6) La funzione esiste ed è continua in tutto R ed è prodotto di due funzioni. Per calcolare la derivata usiamo la formula della derivata del prodotto tra due funzioni ricordata in un esempio precedente. Il calcolo della derivata è dunque:

$$y' = e^x \cdot \ln(5+3x^4) + e^x \cdot \frac{1}{5+3x^4} \cdot (12x^3) = e^x \cdot \left[\ln(5+3x^4) + \frac{12x^3}{5+3x^4} \right].$$

L'insieme di derivabilità della funzione è uguale al dominio della funzione: $D' \equiv (-\infty, +\infty)$, dunque non ci sono punti di non derivabilità.

7) Si tratta di una funzione definita e continua nell'insieme $D \equiv (0, +\infty)$ ed è una somma di funzioni continue in D e quindi la derivata prima è uguale alla somma delle derivate.

Calcoliamo, separatamente, le derivate dei tre addendi; notiamo che ciascuno di essi è una potenza di x: per il primo addendo la derivata è $6x^2$; per il secondo ($3x^{-1}$) la derivata è $-3x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$; infine per il terzo (che scriviamo $5x^{\frac{1}{2}}$) la derivata è

$$\frac{5}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{5}{2\sqrt{x}}.$$

Dunque la derivata della funzione è $y' = 6x^2 + \frac{3}{x^2} + \frac{5}{2\sqrt{x}}$.

Il dominio della derivata prima è $D' \equiv (0,+\infty)$. Dunque la funzione è continua e derivabile nel suo dominio e non presenta punti di non derivabilità.

8) La funzione non si discosta da quelle trattate se non per il logaritmo nel cui argomento compare un modulo, questo ci permette di ricordare la regola da usare per calcolare la derivata che è la seguente:
se $f(x) = \ln|x|$ allora $f'(x) = \frac{1}{x}$ (si deriva come se il modulo non ci fosse).
Notiamo che la funzione esiste e continua nell'insieme $D \equiv (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.
Nel nostro caso:

$y' = 6x^2 + \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x}$ anch'essa continua in D. Non esistono punti singolari.

9) In questo caso la funzione ha come dominio $D \equiv [0,+\infty)$, ma sappiamo dalle regole di derivazione che $\sqrt{x}$ non è derivabile in $x = 0$, perché x è elevato ad una potenza maggiore di zero e minore di uno. Infatti la derivata risulta: $y' = 14x^6 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e il dominio della derivata è ovviamente $D' \equiv (0,+\infty)$. Il punto $x = 0$ è un punto di non derivabilità (da destra), calcoliamo il limite della derivata per $x \to 0^+$:
$\lim_{x\to 0^+}\left(14x^6 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = +\infty$. Nel punto $x = 0$ la funzione presenta una semicuspide.

10) Si tratta di una funzione composta che ha come dominio l'insieme R (abbiamo già ricordato la regola di derivazione della funzione composta in alcuni esempi precedenti), calcoliamo la derivata che esiste in tutto R:

$$y' = \cosh\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x^2+1}\right) \cdot \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x^2+1) - (2+\sqrt{x}) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}.$$

ESEMPIO 3

Calcolare la derivata prima della funzione $f(x) = \left|2x^2 + 7x - 4\right|$ e individuare l'insieme di derivabilità. Nel caso fossero presenti punti di non derivabilità, classificarli.

La funzione ha come dominio l'insieme $D \equiv R$ e in tale insieme è continua.

Procediamo con il calcolo della derivata prima:

$$f'(x) = (4x+7) \cdot \operatorname{sgn}\left(2x^2 + 7x - 4\right)$$

che possiamo scrivere nel seguente modo:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x+7 & x < -4 \vee x > \dfrac{1}{2} \\ -4x-7 & -4 < x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Dobbiamo controllare la derivabilità in $x = -4$ e in $x = \frac{1}{2}$, i punti in cui si annulla l'argomento del modulo. Utilizziamo il teorema del limite della derivata:

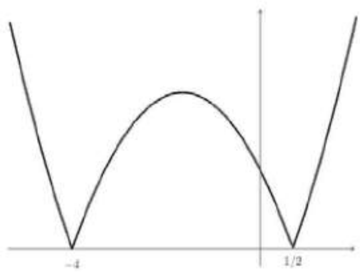
$$\lim_{x \to -4^-} (4x+7) = -9, \quad \lim_{x \to -4^+} (-4x-7) = 9$$

I due limiti sono finiti ma diversi, quindi $x = -4$ è un punto angoloso. Inoltre:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} (4x+7) = 9, \quad \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} (-4x-7) = -9.$$

I due limiti sono finiti ma diversi, quindi anche $x = \frac{1}{2}$ è un punto angoloso.

Il grafico della funzione (a noi già noto grazie alle trasformazioni analizzate nel Capitolo 2) è quello di una parabola traslata al quale viene applicato il valore assoluto, risulta dunque:



Quindi il dominio della derivata prima è: $D' \equiv R - \left\{-4, \frac{1}{2}\right\}$.

Ricordiamo quanto avevamo già annunciato già nel Capitolo 2: i punti che annullano l'argomento di un modulo diventano punti in cui è necessario controllare l'eventuale derivabilità.

ESEMPIO 4

Data la seguente funzione definita a tratti $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2-x} & x<1\\ 2x^2-1 & x\geq 1\end{cases}$ dire, giustificando la risposta, se risulta continua e derivabile su R.

Si tratta di una funzione definita a tratti che ha come dominio tutto R; entrambe le funzioni che compongono la f risultano continue nel loro intervallo di definizione. Si deve però controllare se la funzione è continua in $x=1$.
Usiamo la definizione di funzione continua in un punto.

$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{2-x}=1$,

$\lim_{x\to 1^+}\left(2x^2-1\right)=1$,

$f(1)=1$.

Poiché il limite nel punto considerato esiste finito e coincide con il valore della funzione nel punto, la funzione risulta continua in $x=1$ e dunque la funzione è continua in tutto il suo dominio.
Per verificare la derivabilità si procede con il calcolo della derivata prima:

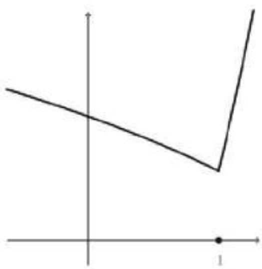
$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} & x<1\\ 4x & x>1\end{cases}$$

e, come fatto per la continuità, si verifica cosa accade nel punto $x=1$. Utilizziamo ancora il teorema del limite della derivata:

$\lim_{x\to 1^-}\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}}\right)=-\dfrac{1}{2}$

$\lim_{x\to 1^+}4x=4$

I limiti risultano entrambi finiti ma assumono valori diversi, dunque $x=1$ è un punto angoloso.
Il grafico (che sappiamo rappresentare essendo ottenuto come trasformazioni di funzioni elementari) nell'intorno del punto in questione è il seguente:



La funzione risulta derivabile nell'insieme $R-\{1\}$, $f \in C^1(R-\{1\})$.

ESEMPIO 5

Data la funzione $g(x)=\sqrt[3]{2x-4}$ determinare l'insieme di derivabilità. Classificare gli eventuali punti di non derivabilità.

La funzione risulta definita e continua su tutto R.
Di questa funzione sappiamo già disegnare il grafico come trasformazione di una funzione elementare che è $y=\sqrt[3]{x}$ e quindi sappiamo già che in $x=2$ ha un punto di flesso a tangente verticale; certezza del fatto che in $x=2$ c'è un punto di non derivabilità viene anche dalle regole di derivazione ($f(x)=x^a$ non è derivabile in $x=0$ se l'esponente a è maggiore di zero e minore di 1).
Calcoliamo la derivata prima:

$$g'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-4)^2}}.$$

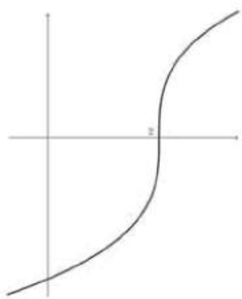
Il dominio della derivata prima è uguale all'insieme $R-\{2\}$, dunque la funzione risulta continua ma non derivabile in $x=2$.

In un intorno di $x=2$ la derivata prima risulta:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-4)^2}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-4)^2}}=+\infty$$

Si ha dunque, in corrispondenza del punto $x=2$, un flesso a tangente verticale.



ESEMPIO 6

Data la funzione $g(x)=\sqrt[3]{|2x-4|}$ determinare l'insieme di derivabilità e classificare gli eventuali punti di non derivabilità.

La funzione esiste ed è continua in tutto l'insieme R inoltre, come si può notare, è identica alla precedente ma presenta il modulo nel radicando, quindi anche di questa funzione sappiamo disegnare il grafico che risulterà simmetrico rispetto alla retta $x=2$, in corrispondenza di tale punto la funzione presenterà una cuspide. Controlliamo la natura di $x=2$, punto in cui la funzione non è derivabile.

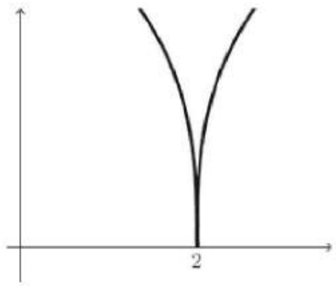
$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(2x-4)^2}} & x>2\\ \dfrac{-2}{3\sqrt[3]{(-2x+4)^2}} & x<2\end{cases}$$

Usiamo il teorema del limite della derivata e troviamo:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-2}{3\sqrt[3]{(-2x+4)^2}}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-4)^2}}=+\infty$$

Quindi $x=2$ è un punto di cuspide.



L'insieme di derivabilità è ovviamente l'insieme $R-\{2\}$.

ESERCIZI SVOLTI

ESERCIZIO 1

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni evidenziando per ciascuna l'insieme di continuità e quello di derivabilità e infine classificare gli eventuali punti di non derivabilità:

1) $y=2^{\frac{1}{x}}-\cos\left(\sqrt[3]{2x}\right)$;

2) $y=\sqrt{4x+1}\cdot e^{-\sin x}$;

3) $y = \ln(x-3)\cdot\sqrt[3]{x^2 - x}$;

4) $y = \sqrt[4]{\left|x^2 - 1\right|}$;

5) $y = \left|x^3\right| e^{-x^2}$.

SOLUZIONI

1) Il dominio della funzione risulta $D \equiv (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e in esso la funzione è continua.

La derivata prima della funzione $y = 2^{\frac{1}{x}} - \cos\left(\sqrt[3]{2x}\right)$ è dunque:

$$y' = 2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \sin\left(\sqrt[3]{2x}\right) \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(2x)^2}} \cdot 2 = -\frac{2^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 2}{x^2} + \frac{2\sin\left(\sqrt[3]{2x}\right)}{3\sqrt[3]{(2x)^2}} .$$

La funzione è derivabile in tutto il suo dominio $D \equiv (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Possiamo scrivere anche $f \in C^1(D)$.

2) Il dominio della funzione risulta essere $D \equiv \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ e in esso è anche continua.

Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \frac{2}{\sqrt{4x+1}} \cdot e^{-\sin x} + \sqrt{4x+1} \cdot e^{-\sin x} \cdot (-\cos x) = e^{-\sin x}\left[\frac{2}{\sqrt{4x+1}} - \sqrt{4x+1} \cdot \cos x\right]$$

Il dominio della derivata è l'insieme $D' \equiv \left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$. Dunque $x = -\frac{1}{4}$ è un punto di non derivabilità. Per classificarlo andiamo a calcolare il limite della derivata in un intorno destro di $x = -\frac{1}{4}$:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{4}^+} e^{-\sin x}\left[\frac{2}{\sqrt{4x+1}} - \sqrt{4x+1} \cdot \cos x\right] = +\infty$$

poiché, per $x \to -\frac{1}{4}^+$, $\frac{2}{\sqrt{4x+1}}$ risulta tendere a $+\infty$ mentre l'addendo $-\sqrt{4x+1} \cdot \cos x$ tende a zero.

Quindi in $x = -\frac{1}{4}$ la funzione presenta una semicuspide.

3) Il dominio della funzione risulta essere $D \equiv (3,+\infty)$ e in esso la funzione è anche continua.
Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \frac{1}{x-3} \cdot \sqrt[3]{x^2 - x} + \ln(x-3) \cdot \frac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x)^2}}$$

il dominio della derivata è ancora l'insieme $D' \equiv (3,+\infty)$ e la funzione risulta continua e derivabile nel suo dominio, $y \in C^1(D)$.

4) Il dominio della funzione risulta essere $D \equiv R$ e in esso la funzione è continua.
Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \frac{2x}{4\sqrt[4]{(|x^2-1|)^3}} \cdot \operatorname{sgn}(x^2-1)$$

Per calcolare il dominio della derivata prima, dobbiamo controllare che cosa accade nei punti $x=-1$ e $x=1$. Osserviamo il comportamento della derivata in un loro intorno; a tale scopo scriviamo la derivata prima nel seguente modo:

$$y' = \begin{cases} \dfrac{x}{2\sqrt[4]{(x^2-1)^3}} & x < -1 \vee x > 1 \\ \dfrac{-x}{2\sqrt[4]{(-x^2+1)^3}} & -1 < x < 1 \end{cases}$$

Calcoliamo il limite della derivata negli intorni dei due punti in questione:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2-1)^3}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{-x}{2\sqrt[4]{(1-x^2)^3}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{-x}{2\sqrt[4]{(1-x^2)^3}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2-1)^3}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

In corrispondenza di ciascuno dei punti $x=-1$ e $x=1$ la funzione presenta una cuspide; sono pertanto punti di non derivabilità per la funzione. In conclusione il dominio della derivata è l'insieme $D' \equiv R - \{-1,1\}$.

5) Il dominio della funzione è $D \equiv R$ e in esso la funzione risulta anche continua.
Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = 3x^2 \operatorname{sgn}\left(x^3\right) \cdot e^{-x^2} + \left|x^3\right| \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x).$$

Poiché è presente il modulo verifichiamo cosa accade alla derivata in un intorno di $x=0$; a tale scopo scriviamola nel seguente modo:

$$y' = \begin{cases} 3x^2 \cdot e^{-x^2} + x^3 \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) & x > 0 \\ -3x^2 \cdot e^{-x^2} - x^3 \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) & x < 0 \end{cases}$$

Cioè:

$$y' = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}\left(3-2x^2\right) & x > 0 \\ -x^2 e^{-x^2}\left(3-2x^2\right) & x < 0 \end{cases}$$

Controlliamo in $x=0$:

$$\lim_{x \to 0^+}\left(x^2 e^{-x^2}\left(3-2x^2\right)\right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-}\left(-x^2 e^{-x^2}\left(3-2x^2\right)\right) = 0$$

Quindi in $x=0$ la funzione risulta derivabile e la sua derivata vale 0; dunque il dominio della derivata prima coincide con il dominio della funzione: $D' \equiv R$.
In questo caso possiamo scrivere la derivata prima della funzione nel seguente modo:

$$y' = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}\left(3-2x^2\right) & x \geq 0 \\ -x^2 e^{-x^2}\left(3-2x^2\right) & x < 0 \end{cases}$$

Notiamo dagli ultimi due esercizi affrontati che la presenza di un modulo nella definizione di una funzione non implica necessariamente un punto di non derivabilità; di sicuro sono punti in cui questa va controllata.

ESERCIZIO 2

Data la funzione $f(x) = \sqrt{|2x|} + 1$ determinare dominio e insieme di derivabilità.

Il dominio della funzione risulta $D \equiv R$.
Possiamo riscrivere la funzione nel seguente modo:

$$f(x) = \sqrt{|2x|} + 1 = \begin{cases} \sqrt{2x} + 1 & x \geq 0 \\ \sqrt{-2x} + 1 & x < 0 \end{cases}$$

La derivata prima è:

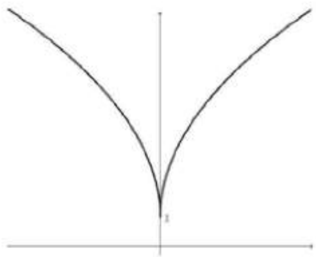
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2x}} & x > 0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{-2x}} & x < 0 \end{cases}$$

La funzione in $x = 0$ risulta continua ma dobbiamo controllare la derivabilità.
In un intorno di $x = 0$ il calcolo del limite della derivata fornisce il seguente risultato (utilizziamo il teorema del limite della derivata):

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{\sqrt{-2x}} = -\infty$$

Quindi in corrispondenza del punto $x = 0$ si è in presenza di una cuspide.



L'insieme di derivabilità, ottenuto intersecando il dominio della derivata prima con il dominio della funzione, risulta $D' \equiv (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ESERCIZIO 3

Dimostrare che la funzione $g(x) = \dfrac{\sinh x^2}{x}$ è continua e derivabile in $x = 0$.

La funzione ha come dominio l'insieme $D \equiv (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ed è dispari. Calcolando il limite della funzione per $x \to 0$ si nota che il limite esiste ed è finito, per simmetria calcoliamolo per $x \to 0^+$:

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sinh x^2}{x}$ si presenta come una forma di indecisione $\dfrac{0}{0}$, ma ricordando che $\sin x^2 \sim x^2$ per $x \to 0$, calcolare il limite equivale a calcolare $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{x}$ che risulta essere: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$.

Questo vuol dire che la funzione data può essere prolungata con continuità nel punto $x = 0$. Attribuendo alla funzione il valore 0 nel punto $x = 0$ essa risulta continua in tutto l'insieme R.

Quindi la funzione:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sinh x^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è continua in tutto l'insieme R.

Controlliamo se, essendo continua, è anche derivabile nel punto $x = 0$. Proviamo utilizzando il teorema del limite della derivata:

$$g'(x) = \frac{2x^2 \cosh x^2 - \sinh x^2}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2 \cosh x^2 - \sinh x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^2 \cosh x^2}{x^2} - \frac{\sinh x^2}{x^2}\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\left(2\cosh x^2\right) - \lim_{x\to 0} \frac{\sinh x^2}{x^2} = 2 - 1 = 1$$

Quindi $g'(0) = 1$, la funzione è derivabile in $x = 0$. Il dominio della derivata prima coincide con il dominio della funzione. Questo risultato era prevedibile avendo sottolineato che per $x \to 0$ la funzione è asintotica a x.

Attenzione: ricordiamo che se il limite della derivata non esistesse occorrerebbe procedere con il calcolo della derivata con la definizione.

ESERCIZI PARTICOLARI

ESERCIZIO 1

Controllare, motivando la risposta, se la seguente funzione:

$$y = \begin{cases} \sqrt{x+2} & x \geq 2 \\ \dfrac{8}{x+2} & x < 2 \end{cases}$$

è continua e derivabile in tutto il suo dominio.

La funzione è definita in tutto l'insieme R. Controlliamo se è continua nel punto $x = 2$.
Usiamo la definizione:

$$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{x+2} = 2$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{8}{x+2} = 2$$

$$y(2) = 2$$

La funzione è continua in $x = 2$ e quindi è continua in tutto R.
Controlliamo se è derivabile in $x = 2$, usiamo per questo il teorema del limite della derivata.
Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}} & x > 2 \\ \dfrac{-8}{(x+2)^2} & x < 2 \end{cases}$$

Allora:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{8}{(x+2)^2} = \frac{1}{2}$$

Il punto $x = 2$ è un punto di non derivabilità per la funzione e in particolare è un punto angoloso.

ESERCIZIO 2

Trovare i valori di $a, b \in R$ per i quali la funzione $h(x) = \begin{cases} 1 - ax^2 & x \le 2 \\ b + x^3 & x > 2 \end{cases}$ sia continua e derivabile su R.

Entrambe le espressioni che definiscono la funzione risultano continue nel proprio intervallo.
Imponiamo la continuità nel punto $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^-} \left(1 - ax^2\right) = \lim_{x \to 2^+} \left(b + x^3\right) = f(2)$$

da cui si ricava

$$1 - 4a = b + 8.$$

La derivata prima è:

$$h'(x) = \begin{cases} -2ax & x < 2 \\ 3x^2 & x > 2 \end{cases}$$

Se la funzione deve essere derivabile in $x = 2$ deve accadere che:

$$\lim_{x \to 2^-} (-2ax) = \lim_{x \to 2^+} 3x^2$$

uguagliando:

$$-4a = 12$$

Le due condizioni devono essere soddisfatte contemporaneamente:

$$\begin{cases} 1 - 4a = b + 8 \\ -4a = 12 \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \end{cases}$$

Quindi la funzione:

$$h(x) = \begin{cases} 1 + 3x^2 & x \le 2 \\ 5 + x^3 & x > 2 \end{cases}$$

è continua e derivabile su tutto R.

ESERCIZIO 3

Trovare l'insieme di continuità e quello di derivabilità della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{2 + x} & x < -1 \\ 2x^2 - 1 & -1 \le x \le 2 \\ 7 - \ln(x - 1) & x > 2 \end{cases}$$

Ciascuna delle tre funzioni che compongono $f(x)$ è continua nel proprio intervallo di definizione, controlliamo cosa accade nei punti in cui cambia la definizione:

$$\lim_{x \to -1^-} \sqrt[3]{2 + x} = 1$$

$$\lim_{x \to -1^+} \left(2x^2 - 1\right) = 1$$

$$f(-1) = 1$$

Quindi la funzione è continua in $x = -1$.

$$\lim_{x \to 2^+} \left(7 - \ln(x - 1)\right) = 7$$

$$\lim_{x \to 2^-} \left(2x^2 - 1\right) = 7$$

$$f(2) = 7$$

Deduciamo che la funzione è continua in $x = 2$.
Concludiamo che l'insieme di continuità della funzione è $D \equiv (-\infty, +\infty)$.

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(2+x)^2}} & x < -1 \wedge x \neq -2 \\ 4x & -1 < x < 2 \\ \dfrac{1}{1-x} & x > 2 \end{cases}$$

Dobbiamo verificare se la funzione è derivabile in $x = -1$, $x = 2$ e $x = -2$. Usiamo il teorema del limite della derivata:

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{1}{3\sqrt[3]{(2+x)^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \to -1^+} 4x = -4$$

quindi la funzione non è derivabile in $x = -1$, il limite destro e quello sinistro sono diversi ma finiti se ne deduce che $x = -1$ è un punto angoloso.
Allo stesso modo:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{1-x} = -1$$

$$\lim_{x \to 2^-} 4x = 8$$

quindi la funzione non è derivabile neppure in $x = 2$ e con le stesse osservazioni precedenti si conclude che anche $x = 2$ è un punto angoloso.
Infine controlliamo cosa accade in $x = -2$:

$$\lim_{x \to -2} \frac{1}{3\sqrt[3]{(2+x)^2}} = +\infty$$

quindi $x = -2$ è un punto di flesso a tangente verticale.
Il dominio della derivata prima è dunque: $D' \equiv (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

ESERCIZIO 4

Data la seguente funzione $y = x^2 \ln|x|$ controllare la continuità e la derivabilità all'interno del dominio.

Il dominio è l'insieme $D \equiv (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ma la funzione è prolungabile con continuità nel punto $x = 0$; infatti nell'intorno di tale punto si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln|x| = \lim_{x\to 0^-} x^2 \ln|x| = 0$$

Allora la funzione:

$$y = \begin{cases} x^2 \ln|x| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è continua in tutto R. Controlliamo adesso se è derivabile in tutto R, ovvero controlliamo se è derivabile in $x = 0$. Per fare questo usiamo il teorema del limite della derivata.

La derivata prima della funzione è:

$$y' = 2x \cdot \ln|x| + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln|x| + x$$

$$y' = x(2\ln|x| + 1)$$

allora

$$\lim_{x\to 0} y' = \lim_{x\to 0} x(2\ln|x| + 1) = 0$$

La funzione è derivabile in $x = 0$ e in tale punto la sua derivata vale 0: $y'(0) = 0$.

La funzione, prolungata con continuità in $x = 0$, risulta continua e derivabile in tutto R: $y \in C^1(R)$.

ESERCIZIO 5

Data la seguente funzione $y = \begin{cases} \sinh 2x + a & x \geq 0 \\ b\sqrt{4+x} & x < 0 \end{cases}$ controllare per quali valori dei parametri reali a e b la funzione risulta continua e derivabile all'interno di tutto il dominio.

L'unico punto del dominio, che è l'insieme $D \equiv R$, in cui è necessaria un'indagine è $x = 0$ che è il punto dove c'è la doppia definizione.

Controlliamo la continuità nell'intorno di tale punto:

$$\lim_{x\to 0^+} (\sinh 2x + a) = a$$

$$\lim_{x\to 0^-} b\sqrt{4+x} = 2b$$

$$y(0) = a$$

deve essere $a = 2b$.

Controlliamo la derivabilità della funzione:

$$y' = \begin{cases} 2\cosh 2x & x > 0 \\ \dfrac{b}{2\sqrt{4+x}} & x < 0 \end{cases}$$

controlliamo se è derivabile in $x = 0$ e per fare questo usiamo il teorema del limite della derivata, cioè:

$$\lim_{x \to 0^+} (2\cosh 2x) = 2$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{b}{2\sqrt{4+x}} = \frac{b}{4}$$

La funzione è derivabile in $x = 0$ se $2 = \frac{b}{4}$. Quindi devono essere verificate contemporaneamente le due condizioni:

$$\begin{cases} a = 2b \\ \frac{b}{4} = 2 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} a = 16 \\ b = 8 \end{cases}.$$

Quindi la funzione $y = \begin{cases} \sinh 2x + 16 & x \geq 0 \\ 8\sqrt{4+x} & x < 0 \end{cases}$ risulta continua e derivabile in tutto R.

ESERCIZI PROPOSTI

ESERCIZIO 1

Dopo aver indicato l'insieme di continuità, calcolare per ciascuna delle seguenti funzioni la derivata prima e il relativo dominio; nel caso di eventuali punti di non derivabilità classificarli.

1) $y = \dfrac{3x^2 - 4x}{x-1}$; 2) $y = \sqrt[3]{|x^2 - 1|}$; 3) $y = \ln|x^2 - 1| + 3x^4 + \cos(x)$;

4) $y = \ln^2(x-3) - \dfrac{2x}{x+2}$; 5) $y = \ln\dfrac{5x}{2x+1}$; 6) $y = 7 + \sqrt[3]{\dfrac{2x}{x+2}}$;

7) $y = \sqrt[3]{e^x - x}$; 8) $y = \dfrac{e^x - 1}{x}$; 9) $y = (x^4 - 5x^2 + 3)\ln^3(5x-3)$;

10) $y = x^3 e^{-|x|}$; 11) $y = x^2 \ln(x)$; 12) $y = \cosh(x^2 - |x|)$;

13) $y = \dfrac{e^x + x}{2 + \sqrt{x}}$.

ESERCIZIO 2

Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni, indicando l'insieme di derivabilità; classificare inoltre gli eventuali punti di non derivabilità:

1) $y = \begin{cases} \sqrt{2-x} & x \leq 2 \\ x^2 - 4 & x > 2 \end{cases}$; 2) $y = \begin{cases} -\ln(5x+1) & x > 0 \\ 5x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$; 3) $y = \ln|2x+1| + 3|x|$;

4) $y = x\left|e^{x} - 1\right|$; 5) $y = x^{3}\ln|x|$; 6) $y = \sqrt{\left|x^{2} - 4\right|}$;

7) $y = \sinh|x - 1|$.

7 STUDIO DI FUNZIONE

"Singolarità" – Particolare
scultura di Paolo Mazzuferi
anno 2011

PREMESSA

In questo capitolo affrontiamo :

- Lo studio completo di funzione ovvero lo studio all'interno di tutto il dominio seguendo un percorso che, attraverso il calcolo dei limiti, degli zeri, il relativo comportamento asintotico e ancora utilizzando il calcolo e lo studio della derivata prima (e quando è possibile anche della derivata seconda), porti alla possibilità di tracciare un grafico probabile della funzione in tutto il dominio che sia compatibile con i risultati ottenuti dal percorso appena descritto.

- La ricerca dei massimi e minimi assoluti di una funzione all'interno di un intervallo chiuso e limitato contenuto nel dominio (utilizzando anche il teorema di Weierstrass).

- Lo studio, o meglio l'analisi, di un funzione nell'intorno di un punto fino alla relativa rappresentazione grafica nell'intorno stesso (utilizzando la relativa approssimazione polinomiale ovvero gli sviluppi di Taylor) e il calcolo di limiti particolari che presentano forme di indecisione.

ESEMPI GUIDATI

ESEMPIO 1

Data la funzione $y = 2x + \dfrac{1}{x+2}$ calcolare:

a) il dominio e gli eventuali zeri della funzione, per ciascuno stabilire l'ordine di infinitesimo;
b) le equazioni di tutti gli asintoti;
c) la derivata prima e determinare eventuali punti di massimo e/o di minimo precisando se esistono anche massimi e/o minimi assoluti e motivando tutte le risposte;
d) la derivata seconda e studiarla;
e) disegnare un grafico della funzione compatibile con tutti i risultati ottenuti.

a) Per il calcolo del dominio occorre porre:

$x+2 \neq 0$, $x \neq -2$

Il dominio è l'insieme: $D = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

Inoltre la funzione si annulla nei punti $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

In ciascuno di questi punti la funzione è un infinitesimo del primo ordine, si deduce facilmente una volta scomposto il numeratore della frazione in binomi di primo grado.

b) Per calcolare le equazioni di tutti gli asintoti, calcoliamo i limiti alla frontiera del dominio:

$\lim_{x\to -2^-}\left(2x+\frac{1}{x+2}\right)=-\infty$ infatti per $x\to -2^-$ la funzione è asintotica a $\frac{1}{x+2}$.

$\lim_{x\to -2^+}\left(2x+\frac{1}{x+2}\right)=+\infty$ per lo stesso motivo del limite precedente.

Da quanto detto deduciamo che la retta di equazione $x=-2$ è un asintoto verticale per la funzione.

$\lim_{x\to -\infty}\left(2x+\frac{1}{x+2}\right)=-\infty$ infatti per $x\to -\infty$ la funzione è asintotica a $2x$, ovvero è un infinito del primo ordine.

$\lim_{x\to +\infty}\left(2x+\frac{1}{x+2}\right)=+\infty$ per lo stesso motivo del limite precedente.

Sappiamo che la funzione ha un asintoto obliquo (in quanto è una funzione razionale con al numeratore un polinomio di grado uguale a quello del denominatore aumentato di uno); calcoliamolo per $x\to +\infty$, per $x\to -\infty$ il procedimento e il risultato sono identici.

$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x+\frac{1}{x+2}}{x}$ è uguale al seguente limite (uso della funzione asintotica)

$\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to +\infty}2=2$. Questo è il valore del coefficiente angolare dell'asintoto obliquo.

Calcoliamo l'ordinata all'origine, otteniamo:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(2x+\frac{1}{x+2}-2x\right)=0.$$

Quindi per $x\to +\infty$ la funzione ha un asintoto obliquo di equazione $y=2x$.
Ripetendo il percorso per $x\to -\infty$ concludiamo che la funzione ha un asintoto obliquo di equazione $y=2x$ sia per $x\to +\infty$ sia per $x\to -\infty$.

c) Calcoliamo la derivata prima:

$y'=2-\frac{1}{(x+2)^2}$.

Studiamola:

$y'\geq 0$ se $2-\frac{1}{(x+2)^2}\geq 0$.

Possiamo procedere nel seguente modo: $2-\frac{1}{(x+2)^2}\geq 0$.

Cioè $2\geq \frac{1}{(x+2)^2}$ quindi $(x+2)^2\geq \frac{1}{2}$.

Risolvendola si ha: $|x+2| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ e quindi le soluzioni $x \leq -2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $x \geq -2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

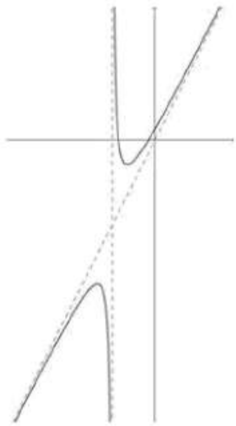
I punti $x = -2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ sono di stazionarietà e in particolare $x = -2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ è un punto di massimo relativo (o locale) per la funzione e $x = -2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ è invece un punto di minimo relativo (o locale).
Osserviamo che entrambi gli estremanti non sono assoluti in quanto la funzione, per quanto ottenuto nel calcolo dei limiti agli estremi del dominio tende all'infinito.

d) Calcoliamo infine la derivata seconda ottenendo:

$$y'' = \frac{2}{(x+2)^3}.$$

Lo studio del segno è semplicissimo, la derivata seconda della funzione è positiva quando $x > -2$ ed è negativa quando $x < -2$. Insomma quando $x > -2$ la funzione è convessa, quando $x < -2$ la funzione è concava. Non ci sono punti di flesso.

e) Il grafico della funzione compatibile con tutti i risultati ottenuti è il seguente:



ESEMPIO 2

Anche per la funzione $y = \frac{x^2-1}{x^2+9}$ calcolare:

a) il dominio e gli eventuali zeri della funzione, per ciascuno stabilire l'ordine di infinitesimo;
b) le equazioni degli eventuali asintoti;
c) la derivata prima e determinare eventuali punti di massimo e/o di minimo precisando se esistono anche massimi e/o minimi assoluti e motivando tutte le risposte;
d) la derivata seconda e studiarla;
e) disegnare un grafico della funzione compatibile con tutti i risultati ottenuti.

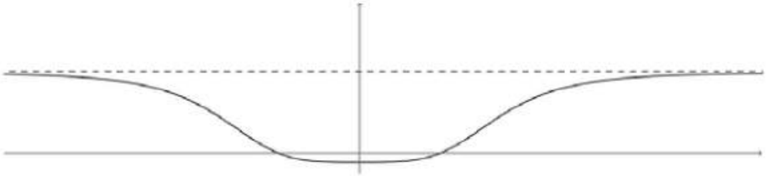
a) Il dominio della funzione coincide con l'insieme R, inoltre notiamo che la funzione è pari quindi il suo grafico risulterà simmetrico rispetto all'asse delle y.
La funzione si annulla nei punti $x = \pm 1$.
In ciascuno di questi punti la funzione è un infinitesimo del primo ordine; infatti per $x \to 1$ la funzione è asintotica a $\frac{1}{5}(x-1)$ mentre per $x \to -1$ (ricordiamo la simmetria) la funzione è asintotica a $-\frac{1}{5}(x+1)$.

b) Per calcolare le equazioni di eventuali asintoti, calcoliamo i limiti alla frontiera del dominio:
$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-1}{x^2+9} = 1$ infatti per $x \to -\infty$ la funzione è asintotica a $\frac{x^2}{x^2} = 1$.
Allo stesso modo per la simmetria dichiarata: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-1}{x^2+9} = 1$.
Deduciamo che la funzione sia per $x \to -\infty$ sia per $x \to +\infty$ ha un asintoto orizzontale la cui equazione è $y = 1$.

c) Calcoliamo la derivata prima:
$$y' = \frac{20x}{\left(x^2+9\right)^2}.$$
Dallo studio della derivata prima si evidenzia un punto di stazionarietà $x = 0$; per $x < 0$ si ha che $y' < 0$, mentre per $x > 0$ si ha che $y' > 0$. Quindi $x = 0$ risulta essere un punto di minimo relativo e in questo caso anche assoluto.

d) Calcoliamo infine la derivata seconda ottenendo:
$$y'' = \frac{60\left(-x^2+3\right)}{\left(x^2+9\right)^3}.$$
Lo studio del segno coincide con lo studio del segno del numeratore e si ottiene: che $y'' = 0$ quando $x = \pm\sqrt{3}$, inoltre $y'' < 0$ (quindi la funzione è concava) per $x < -\sqrt{3}$ e per $x > +\sqrt{3}$ mentre risulta $y'' > 0$ (quindi la funzione è convessa) per $-\sqrt{3} < x < +\sqrt{3}$. Sono presenti due punti di flesso e i valori $x = \pm\sqrt{3}$ sono le ascisse degli stessi.

e) Il grafico della funzione compatibile con tutti i risultati ottenuti è il seguente:



ESEMPIO 3

Per la funzione $y = -3\sqrt{\dfrac{x^2 - x}{x+9}}$ calcolare:

a) il dominio e gli eventuali zeri della funzione, per ciascuno stabilire l'ordine di infinitesimo;
b) equazioni degli eventuali asintoti;
c) la derivata prima e determinare eventuali punti di massimo e/o di minimo precisando se esistono anche massimi e/o minimi assoluti e motivando tutte le risposte;
d) disegnare un grafico della funzione compatibile con tutti i risultati ottenuti, precisando il numero minimo di punti di flesso compatibile con il grafico rappresentato.

a) Per il calcolo del dominio occorre porre il radicando maggiore o uguale a zero: $\dfrac{x^2 - x}{x+9} \geq 0$, risolvendo la disequazione si ottiene che il dominio è l'insieme: $D = (-9, 0] \cup [1, +\infty)$.

Inoltre la funzione si annulla nei punti $x = 0$ e $x = 1$.

Calcoliamo in ciascuno di questi punti la funzione asintotica.

Per $x \to 0^-$ la funzione è asintotica a $-\sqrt{-x}$, quindi la funzione è un infinitesimo di ordine $\dfrac{1}{2}$, mentre per $x \to 1^+$ la funzione è asintotica a $-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{x-1}$, la funzione è ancora un infinitesimo di ordine $\dfrac{1}{2}$.

b) Per calcolare le equazioni di tutti gli asintoti, calcoliamo i limiti alla frontiera del dominio:

$\lim\limits_{x \to -9^+} \left(-3\sqrt{\dfrac{x^2 - x}{x+9}} \right) = -\infty$ infatti per $x \to -9^+$ la funzione è asintotica a: $-18\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+9}}$.

Se ne deduce che la retta di equazione $x = -9$ è un asintoto verticale per la funzione.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-3\sqrt{\dfrac{x^2 - x}{x+9}} \right) = -\infty$ infatti per $x \to +\infty$ la funzione è asintotica a: $-3\sqrt{x}$.

Da quest'ultimo limite deduciamo che la funzione per $x \to +\infty$ è un infinito di ordine $\dfrac{1}{2}$, cioè minore di uno (il grafico della funzione va a meno infinito con la concavità rivolta verso l'alto). Per quanto detto non possono esserci asintoti obliqui.

c) Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2 - x}{x+9}}} \cdot \frac{(2x-1)(x+9) - \left(x^2 - x\right) \cdot 1}{(x+9)^2}$$

Facendo qualche conto:

$$y' = -\frac{3}{2} \cdot \frac{x^2+18x-9}{(x+9)^2\sqrt{\frac{x^2-x}{x+9}}}$$

Studiamola:

$y' \geq 0$ se $-\frac{3}{2} \cdot \frac{x^2+18x-9}{(x+9)^2\sqrt{\frac{x^2-x}{x+9}}} \geq 0$ ovvero $-\left(x^2+18x-9\right) \geq 0$, cioè $x^2+18x-9 \leq 0$

$y' = 0$ quando $x = -9 \pm 3\sqrt{10}$, ma questi sono punti non interni al dominio della funzione, che pertanto non presenta punti di stazionarietà.
In particolare per $-9 < x < 0$ la funzione è crescente, mentre per $x > 1$ la funzione è decrescente.
I punti $x = 0$ e $x = 1$ non appartengono al dominio della derivata prima ma sono punti in cui la funzione è continua; sono punti di non derivabilità che andiamo a classificare utilizzando il teorema del limite della derivata.

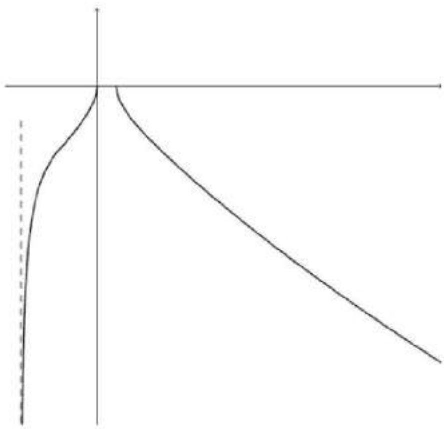
$$\lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{x^2+18x-9}{(x+9)^2\sqrt{\frac{x^2-x}{x+9}}} \right) = +\infty$$

se ne deduce che in $x = 0$ la funzione presenta una semicuspide.
Allo stesso modo procediamo per l'altro punto:

$$\lim_{x \to 1^+} \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{x^2+18x-9}{(x+9)^2\sqrt{\frac{x^2-x}{x+9}}} \right) = -\infty$$

se ne deduce che anche in $x = 1$ la funzione presenta una semicuspide.

d) Il grafico della funzione compatibile con tutti i risultati ottenuti è il seguente:



Il numero minimo di flessi è uno, nel caso fossero in numero maggiore sarebbero comunque in numero dispari.

ESEMPIO 4

Per la seguente funzione $y = \ln\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$, calcolare:

a) il dominio della funzione;
b) le equazioni degli eventuali asintoti;
c) la derivata prima e determinare eventuali punti di massimo e/o di minimo precisando se esistono anche massimi e/o minimi assoluti e motivando tutte le risposte;
d) disegnare un grafico della funzione compatibile con tutti i risultati ottenuti, precisando il numero minimo di punti di flesso compatibile con il grafico rappresentato.

a) Per calcolare il dominio occorre porre: $x^2 + \frac{1}{x} > 0$ e risolvendo la disequazione otteniamo $D = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

b) Per calcolare le equazioni di eventuali asintoti, calcoliamo i limiti alla frontiera del dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

in questo caso infatti per $x \to -\infty$ se calcoliamo la funzione asintotica otteniamo:

$$\ln\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left[x^2\left(1 + \frac{1}{x^3}\right)\right] = \ln x^2 + \ln\left(1 + \frac{1}{x^3}\right).$$

Ne segue che per $x \to -\infty$ $\ln\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) \sim \ln\left(x^2\right) = 2\ln|x| = 2\ln(-x)$; quindi la funzione va all'infinito con ordine minore di uno (va a più infinito concava): non ci possono essere asintoti obliqui.
Calcoliamo ora gli altri limiti:

$$\lim_{x \to -1^-} \ln\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$$

la retta di equazione $x = -1$ è un asintoto verticale da sinistra.

$$\lim_{x \to 0^+} \ln\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

la retta di equazione $x = 0$ è un asintoto verticale da destra.

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$$

con osservazioni analoghe a quelle fatte per $x \to -\infty$, solo che in questo caso si ha $y \sim 2\ln(x)$.

c) Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \frac{2x - \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x}} \text{ da cui: } y' = \frac{2x^3 - 1}{x\left(x^3 + 1\right)}.$$

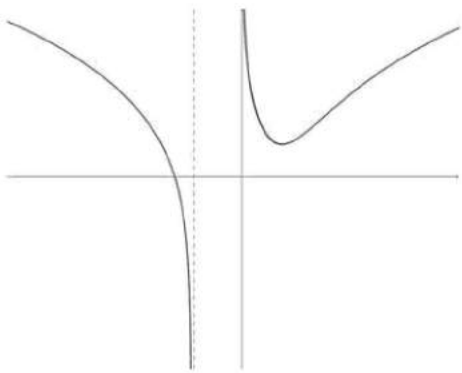
Dallo studio della derivata prima, notando che il denominatore è sempre positivo nel dominio, si evidenzia un punto di stazionarietà in $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ e in particolare:

per $x < -1 \vee 0 < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ si ha che $y' < 0$, quindi la funzione decresce;

per $x > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ si ha che $y' > 0$ e quindi la funzione cresce.

Quindi $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ risulta essere un punto di minimo relativo (dai limiti calcolati se ne deduce che non è assoluto).

d) Il grafico della funzione compatibile con tutti i risultati ottenuti è il seguente:



Nel grafico compare un solo punto di flesso, se ce ne fossero in numero maggiore sarebbero comunque in numero dispari.

ESEMPIO 5

Calcolare i massimi e i minimi assoluti della funzione $y = (x-1)\left(x^3 - x^2\right)$ nell'intervallo $\left[-1,2\right]$. Motivare il risultato raggiunto.

La funzione esiste ed è continua in tutto l'intervallo assegnato (in realtà la funzione esiste ed è continua in tutto l'insieme *R*). Pertanto, in virtù del teorema di Weierstrass, la funzione ammetterà massimo e minimo assoluti nell'intervallo dato (compresi gli estremi).

Notiamo che la funzione può essere riscritta nel seguente modo: $y = x^2(x-1)^2$.

Calcoliamo i punti stazionari della funzione e controlliamo se tra questi compaiono massimi e o minimi relativi:

$y' = 2x(x-1)^2 + 2x^2(x-1) = 2x(x-1)(2x-1)$

da cui

$y' = 0$ quando $x = 0$, $x = 1$ e $x = \frac{1}{2}$ tutti e tre compresi nell'intervallo considerato.

Studiando il segno della derivata prima affermiamo che $x = 0$ è un punto di minimo relativo, $x = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo relativo per la funzione e infine $x = 1$ è ancora un punto di minimo relativo.

Inoltre:

$y(0) = y(1) = 0$ è il valore del minimo relativo;

$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$ è il valore del massimo relativo.

Per determinare i massimi e minimi assoluti dobbiamo ricordare il teorema di Weierstrass visto che la funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato.

Calcoliamo i valori della funzione agli estremi dell'intervallo:

$y(-1) = 4$

$y(2) = 4$

Se ne deduce che la funzione ha il massimo assoluto in $x = -1$ e $x = 2$, gli estremi dell'intervallo; mentre ha il minimo assoluto in $x = 0$ e $x = 1$.

ESEMPIO 6

Data la funzione $y(x) = -2x^2 + \ln(2-x)$ scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado centrato nel punto $x = 1$ e rappresentare poi il grafico della funzione nell'intorno considerato.

Ricordiamo che il polinomio di Taylor di secondo grado centrato nel punto $x = x_0$ è il seguente:

$$P_{2,1}(x) = y(x_0) + y'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

Quindi dobbiamo calcolare, essendo $x_0 = 1$:

$y(1)$

$y'(1)$

$y''(1)$

Cominciamo con il calcolare le derivate:

$$y'(x) = -4x - \frac{1}{2-x} = -4x + \frac{1}{x-2}$$

$$y''(x) = -4 - \frac{1}{(x-2)^2}$$

Nel nostro caso:

$y(1) = -2$

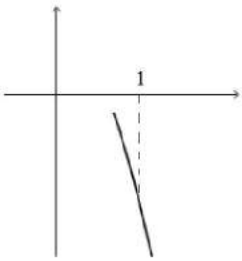
$y'(1) = -5$

$y''(1) = -5$

Quindi il polinomio di Taylor richiesto è il seguente:

$P_{2,1}(x) = -2 - 5(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2$.

Ricordiamo che stiamo considerando il punto $(1,-2)$, in questo la retta tangente al grafico della funzione ha coefficiente angolare -5 e la funzione è concava; possiamo disegnare il grafico nell'intorno del punto $x = 1$ che è il seguente:



ESEMPIO 7

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \sin x}{x^2 - \ln\left(1 + x^2\right)}$$

Si presenta la forma di indecisione $\frac{0}{0}$ che risolviamo utilizzando gli sviluppi di MacLaurin; a tal proposito ricordiamo che:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)$$

$$\ln\left(1 + x^2\right) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)$$

Quindi riscriviamo il limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x - \sin x}{x^2 - \ln\left(1 + x^2\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)}{x^2 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)}{\frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right)} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = +\infty$$

ESERCIZI SVOLTI

ESERCIZIO 1

Data la funzione $y=-x^5\ln|3x|$ calcolare:

a) il dominio della funzione;
b) i limiti alla frontiera del dominio;
c) la derivata prima e il relativo dominio. Studiare la derivata prima e dichiarare se la funzione ha massimi e/o minimi relativi e/o assoluti;
d) la derivata seconda e controllare se esistono eventuali punti di flesso;
e) disegnare il grafico della funzione compatibile con i risultati ottenuti;
f) scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado relativo alla funzione data nel punto $x=1$ e controllare che il grafico della funzione nell'intorno del punto stesso corrisponda alle informazioni ottenute.

a) Per il calcolo del dominio poniamo $x \neq 0$, quindi:
$D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; notiamo che la funzione è dispari.

b) Calcoliamo i limiti alla frontiera del dominio:
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^5\ln|3x|\right)=-\infty$ (infinito di ordine maggiore di 5)
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^5\ln|3x|\right)=+\infty$
$\lim\limits_{x\to0^+}\left(-x^5\ln|3x|\right)=0^+$ (è presente la forma di indecisione $0\cdot\infty$ che risulta 0 poiché l'infinitesimo derivante dalla potenza di x è preponderante rispetto all'infinito derivante dal logaritmo).
$\lim\limits_{x\to0^-}\left(-x^5\ln|3x|\right)=0^-$ per lo stesso motivo del limite precedente.
La funzione è dunque prolungabile con continuità in $x=0$, ponendo $y(0)=0$.

La funzione: $y=\begin{cases}-x^5\ln|3x| & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ è continua in tutto R.

c) Calcoliamo la derivata prima:
$y'=-5x^4\ln|3x|-x^5\dfrac{3}{3x}=-x^4\left(5\ln|3x|+1\right)$.

Studiamola:
$y'\geq 0$
$-x^4\left(5\ln|3x|+1\right)\geq 0$

poiché $-x^4\leq 0$ per ogni $x\in D$, deve essere $5\ln|3x|+1\leq 0$

$5\ln|3x|+1\leq 0$ per $|3x|\leq e^{-\frac{1}{5}}$.

Quindi $y'\geq 0$ per $-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{5}}\leq x\leq \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{5}}$.

Dunque la funzione ammette un minimo relativo nel punto $x=-\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{5}}$ e un massimo relativo nel punto $x=\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{5}}$. Entrambi non sono assoluti in quanto la funzione, per quanto visto, ha limiti infiniti.
Anche la derivata prima, ponendo $y'(0)=0$, è continua nel punto $x=0$ (basta usare il teorema del limite della derivata). Quindi il dominio della derivata prima coincide con il dominio della funzione.

d) Calcoliamo la derivata seconda:

$y''=-20x^3\ln|3x|-5x^3-4x^3=-x^3\left(20\ln|3x|+9\right)$

$y''\geq 0$ quando:

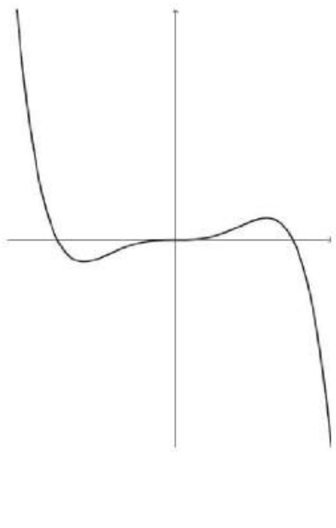
$-x^3\left(20\ln|3x|+9\right)\geq 0$

$-x^3\geq 0$ per $x\leq 0$

$20\ln|3x|+9\geq 0$ per $|3x|\geq e^{-\frac{9}{20}}$, cioè $x\leq -\frac{1}{3}e^{-\frac{9}{20}}\vee x\geq \frac{1}{3}e^{-\frac{9}{20}}$.

Quindi $y''\geq 0$ per $x\leq -\frac{1}{3}e^{-\frac{9}{20}}\vee 0\leq x\leq \frac{1}{3}e^{-\frac{9}{20}}$.
Dunque la funzione ammette un flesso a tangente orizzontale in $x=0$ e altri due flessi in $x=-\frac{1}{3}e^{-\frac{9}{20}}$ e $x=\frac{1}{3}e^{-\frac{9}{20}}$.

e) Il grafico della funzione, compatibile con i risultati ottenuti, è il seguente:



f) Per scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado relativo alla funzione data nel punto $x = 1$ dobbiamo usare la formula:

$$P_{2,1}(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{1}{2}y''(1)(x-1)^2$$

Nel nostro caso:

$$P_{2,1}(x) = -\ln 3 - (5\ln 3 + 1)(x-1) - \frac{1}{2}(20\ln 3 + 9)(x-1)^2$$

Il grafico disegnato, controllato nell'intorno del punto $x = 1$, presenta tutte le informazioni dedotte dal polinomio trovato.

ESERCIZIO 2

Data la seguente funzione $y = x\sqrt{x^2+1}$

a) calcolare il dominio;
b) calcolare i limiti e scrivere le equazioni di eventuali asintoti;
c) calcolare e studiare la derivata prima evidenziando - se esistono - eventuali punti di minimo e/o di massimo;
d) calcolare e studiare la derivata seconda evidenziando - se esistono - eventuali punti di flesso;
e) tracciare un grafico della funzione compatibile con i risultati ottenuti;
f) scrivere per la funzione data il polinomio di Taylor di secondo grado nel punto $x = 1$ e disegnare il grafico nell'intorno del punto.

a) Per calcolare il dominio dobbiamo porre $x^2 + 1 \geq 0$ verificata per $\forall x \in R$. Il dominio è l'insieme:
$D = (-\infty, +\infty)$.

b) Calcoliamo i limiti alla frontiera del dominio:

$\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x^2+1} = +\infty$ poiché $y \sim x^2$ per $x \to +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x\sqrt{x^2+1} = -\infty$ Poiché $y \sim -x^2$ per $x \to -\infty$

Osserviamo inoltre che la funzione non ammette asintoti obliqui poiché l'ordine di infinito è due (la funzione va all'infinito con la concavità rivolta verso l'alto).

c) Calcoliamo e studiamo la derivata prima:

$$y' = \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

notiamo che il dominio di y' coincide con il dominio della funzione e inoltre $y' > 0 \; \forall x \in D$, dunque la funzione è sempre crescente e non ammette né massimi né minimi.

d) Calcoliamo e studiamo la derivata seconda:

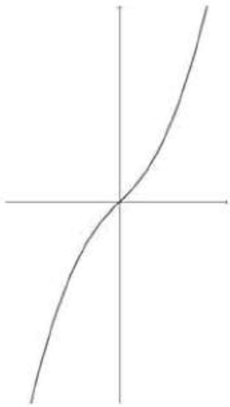
$$y'' = \frac{4x\sqrt{x^2+1} - \left(2x^2+1\right)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{2x^3+3x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

ossia

$$y'' = \frac{x\left(2x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$y'' \geq 0$ se $x \geq 0$, da cui ricaviamo che $x = 0$ è punto di flesso.

e) Il grafico della funzione compatibile con i risultati ottenuti è il seguente:

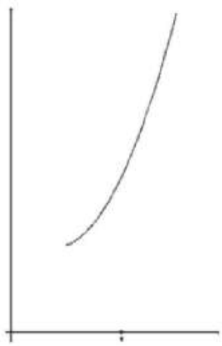


f) Per scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado nel punto $x = 1$ basta procedere nel seguente modo:

$$P_{2,1}(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{1}{2}y''(1)(x-1)^2$$

$$P_{2,1}(x) = \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}(x-1) + \frac{5\sqrt{2}}{8}(x-1)^2$$

Graficamente:



ESERCIZIO 3

Calcolare il massimo e il minimo assoluto della funzione $y = e^{2x}\left(x^2 - x\right)$ relativamente all'intervallo [-2,2].

La funzione esiste ed è continua in tutto l'insieme dei numeri reali e quindi risulta continua sull'intervallo compatto [-2,2]. Perciò, in virtù del teorema di Weierstrass, la funzione ammetterà massimo e minimo assoluti nell'intervallo dato (compresi gli estremi).
Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = 2e^{2x}\left(x^2 - x\right) + e^{2x}(2x - 1)$$

$$y' = e^{2x}\left(2x^2 - 1\right)$$

Andando a studiare gli zeri e il segno della derivata ricaviamo che:
$y' \geq 0$ se $x \leq -\sqrt{\frac{1}{2}} \vee x \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$ e quindi la funzione presenta un punto di massimo relativo in $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ e un punto di minimo relativo in $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Ma poiché studiamo la funzione in [-2,2] e per il teorema di Weierstrass i punti di massimo e minimo assoluti potrebbero trovarsi agli estremi dell'intervallo, osserviamo che anche in $x = -2$ si ha un punto di minimo relativo e in $x = 2$ si ha un punto di massimo relativo.
Per stabilire quale degli estremanti trovati sia assoluto calcoliamo le immagini di ciascuno:

$$y\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = e^{-\frac{2}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$y(2) = 2e^4$$

$$y\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = e^{\frac{2}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$y(-2) = 6e^{-4}$$

da cui ricaviamo che $x = 2$ è punto di massimo assoluto e $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ è punto di minimo assoluto.

ESERCIZIO 4

Data la funzione $y = \ln\left(e^{2x} + 1\right)$ rispondere ai seguenti quesiti motivando le risposte:

a) indicare il dominio della funzione;
b) indicare eventuali zeri;
c) calcolare i limiti alla frontiera del dominio e nel caso di limite infinito calcolare l'ordine dell'infinito rispetto all'infinito campione standard;

d) la derivata prima e il relativo dominio. Studiare la derivata prima e dichiarare se la funzione ha massimi e/o minimi relativi e/o assoluti;
e) la derivata seconda e controllare se esistono eventuali punti di flesso;
f) disegnare il grafico della funzione compatibile con i risultati ottenuti;
g) scrivere il polinomio di MacLaurin di secondo grado relativo alla funzione data.

a) Per quanto riguarda il dominio della funzione notiamo che l'argomento del logaritmo è sempre positivo quindi la funzione esiste in tutto l'insieme dei numeri reali, cioè $D \equiv R$.

b) La funzione non presenta zeri in quanto non esiste alcun valore di x che renda l'argomento del logaritmo uguale a uno.

c) Calcoliamo i limiti alla frontiera del dominio:
$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(e^{2x}+1\right) = +\infty$ poiché $y = \ln\left[e^{2x}\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)\right] = \ln e^{2x} + \ln\left(1+\frac{1}{e^{2x}}\right)$

e per $x \to +\infty$ $y \sim \ln e^{2x} = 2x$.
Poiché la funzione è un infinito di ordine uno può avere un asintoto obliquo. Cerchiamolo:
$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(e^{2x}+1\right)}{x} = 2$ avendo detto che $y \sim 2x$ per $x \to +\infty$.
Poi calcoliamo il valore dell'ordinata all'origine:
$\lim_{x \to +\infty} \left(\ln\left(e^{2x}+1\right) - 2x\right) = 0$ per ottenere questo risultato basta scomporre il logaritmo come abbiamo fatto nel calcolo del primo limite.
Concludiamo che per $x \to +\infty$ la funzione ha come asintoto obliquo la retta di equazione $y = 2x$.
Per quanto riguarda l'altro limite si ha:
$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(e^{2x}+1\right) = 0$
quindi la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

d) Calcoliamo la derivata prima:

$$y' = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$$

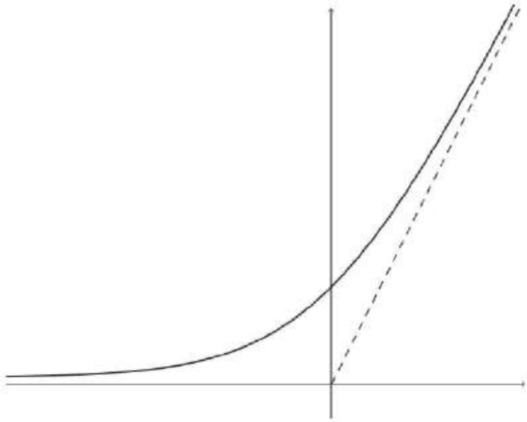
è facile controllare che la derivata prima ha come dominio tutto R e che in esso è sempre positiva, di conseguenza la funzione è sempre crescente e non presenta né massimi né minimi.

e) Calcoliamo la derivata seconda:

$$y'' = 2 \cdot \frac{2e^{2x}\left(e^{2x}+1\right) - e^{2x} \cdot 2e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \frac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}.$$

Anche la derivata seconda ha come dominio tutto l'insieme dei numeri reali ed è sempre positiva in tutto il suo dominio; di conseguenza la funzione è sempre convessa e non presenta alcun flesso.

f) Il grafico della funzione compatibile con i risultati ottenuti è il seguente:



g) Il polinomio di MacLaurin di secondo grado relativo alla funzione data (nel punto $x=0$) è nella forma generale il seguente:

$$P_{2,0}(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{1}{2}y''(0)x^2$$

Nel nostro caso:

$y(0)=\ln 2$

$y'(0)=1$

$y''(0)=1$

quindi

$$P_{2,0}(x)=\ln 2+x+\frac{1}{2}x^2$$

ESERCIZIO 5

Calcolare – utilizzando gli sviluppi di MacLaurin – il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+x^3\right)-\sin x^3}{-\frac{1}{2}x^2+1-\cos x}.$$

Notiamo che per $x\to 0^+$ il limite si presenta nella forma $\frac{0}{0}$. Poiché ci accorgiamo che usando l'asintotico non si arriva al risultato, per calcolarlo utilizziamo gli sviluppi di MacLaurin e li ricordiamo in questo caso specifico:

$\ln\left(1+x^3\right)=x^3-\frac{x^6}{2}+o\left(x^6\right)$ (non basta fermarsi al primo termine che è l'asintotico!)

$$\sin\left(x^3\right) = x^3 - \frac{x^9}{3!} + o\left(x^9\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)$$

Quindi calcolare il limite dato equivale a calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^3 - \frac{x^6}{2} + o\left(x^6\right) - x^3 + \frac{x^9}{3!} + o\left(x^9\right)}{-\frac{1}{2}x^2 + 1 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{x^6}{2} + o\left(x^6\right)}{\frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)} = \lim_{x\to0^+} \left(12x^2 + o\left(x^2\right)\right) = 0$$

ESERCIZIO 6

Data la funzione $f(x) = \begin{cases} -x^2 \cdot \ln\left(x+1\right) & x > 0 \\ \sqrt{-x} & x \le 0 \end{cases}$ rispondere ai seguenti quesiti motivando le risposte:

a) scrivere il dominio della funzione;
b) indicare l'insieme di continuità e classificare eventuali punti di discontinuità;
c) indicare l'insieme di derivabilità e classificare eventuali punti di non derivabilità;
d) calcolare i limiti alla frontiera del dominio e nel caso di limite infinito indicare l'ordine dell'infinito rispetto all'infinito campione standard;
e) la funzione presenta punti in cui si annulla? Precisare quali;
f) disegnare un grafico qualitativo compatibile con i risultati ottenuti.

a) Il dominio della funzione è $D \equiv R$.

b) Controlliamo se la funzione è continua in $x = 0$:

$$\lim_{x\to0^+} \left(-x^2 \cdot \ln\left(x+1\right)\right) = 0$$

$$\lim_{x\to0^-} \left(-\sqrt{x}\right) = 0$$

$$f(0) = 0$$

la funzione è dunque continua in $x = 0$, quindi $f \in C^0\left(R\right)$.

c) Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x \cdot \ln\left(x+1\right) - \frac{x^2}{x+1} & x > 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{-x}} & x < 0 \end{cases}$$

e controlliamo se la funzione è derivabile in $x = 0$ usando il teorema del limite della derivata:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-2x\cdot\ln(x+1)-\frac{x^2}{x+1}\right)=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}}\right)=-\infty$$

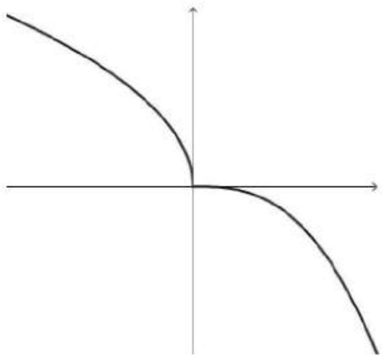
in $x = 0$ la funzione non è derivabile e presenta una semicuspide.
L'insieme di derivabilità è $D' \equiv R - \{0\}$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^2\cdot\ln(x+1)\right)=-\infty$, infinito di ordine maggiore di 2

$\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{-x}=+\infty$, infinito di ordine $\frac{1}{2}$

e) La funzione si annulla solo in $x = 0$.

f) Il grafico della funzione compatibile con i risultati ottenuti è il seguente:



ESERCIZIO 7

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[5]{x^5-2x}-\sqrt[7]{x^7+2}\right).$$

Il limite dato presenta un forma di indecisione della forma $+\infty-\infty$. La risoluzione è semplice basta ricordare i limiti notevoli (dobbiamo mettere in evidenza x^5 e x^7 rispettivamente dai due radicandi ed estrarli dalla radice):

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[5]{1-\frac{2}{x^4}}-\sqrt[7]{1+\frac{2}{x^7}}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2}{5x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)-1-\frac{2}{7x^7}+o\left(\frac{1}{x^7}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{2}{5x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{5x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)=0.$$

ESERCIZI PARTICOLARI

ESERCIZIO 1

Data la funzione $f(x)=x^2\left(e^{3x}+2\right)$

a) calcolare la derivata prima e la derivata seconda della funzione;
b) scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado per la funzione centrato nel punto $x=1$;
c) disegnare nel piano cartesiano il grafico della funzione nell'intorno del punto $x=1$.

a) $f\in C^{\infty}(R)$

$f'(x)=2x\left(e^{3x}+2\right)+x^2\left(3e^{3x}\right)=e^{3x}\left(2x+3x^2\right)+4x$

$f''(x)=e^{3x}\left(9x^2+12x+2\right)+4$

b) $P_{2,1}(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\dfrac{f''(1)}{2}(x-1)^2$

$f(1)=e^3+2$

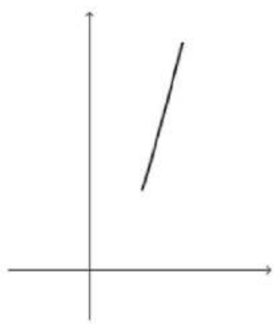
$f'(1)=5e^3+4$

$f''(1)=23e^3+4$

quindi

$$P_{2,1}(x)=e^3+2+\left(5e^3+4\right)(x-1)+\frac{23e^3+4}{2}(x-1)^2$$

c) Il grafico della funzione nell'intorno considerato risulta:



ESERCIZIO 2

Data la funzione $y=\ln\left(\dfrac{e^{2x}-2e^x+1}{e^x+1}\right)$:

a) indicare il dominio della funzione;
b) calcolare i limiti alla frontiera del dominio e calcolare l'equazione di eventuali asintoti;
c) calcolare e studiare la derivata prima e indicare eventuali massimi e/o minimi;
d) esistono massimi e/o minimi assoluti? Motivare la risposta;
e) disegnare il grafico della funzione, compatibile con i risultati ottenuti e dichiarare il minimo numero di flessi presenti nella rappresentazione.

a) La funzione si può riscrivere nel seguente modo:

$$y = \ln \frac{\left(e^x - 1\right)^2}{e^x + 1}$$

quindi esiste quando

$x \neq 0$, cioè $D \equiv R - \{0\}$.

b) Calcoliamo i limiti:

$$\lim_{x \to +\infty} \ln \frac{\left(e^x - 1\right)^2}{e^x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \ln \frac{e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)^2}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \ln \left[e^x \cdot \frac{\left(1 - e^{-x}\right)^2}{\left(1 + e^{-x}\right)} \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[x + 2\ln\left(1 - e^{-x}\right) - \ln\left(1 + e^{-x}\right) \right].$$

Poiché $\left[x + 2\ln\left(1 - e^{-x}\right) - \ln\left(1 + e^{-x}\right) \right]$ per $x \to +\infty$ è asintotico a x , allora il limite è equivalente al seguente:
$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$ e la funzione per $x \to +\infty$ può ammettere un asintoto obliquo.
Controlliamo calcolando il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln \frac{\left(e^x - 1\right)^2}{e^x + 1} \right)$$

Per quanto detto precedentemente, equivale a calcolare:
$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$. Quindi questo è il valore del coefficiente angolare dell'eventuale asintoto.
Calcoliamo poi il valore dell'ordinata all'origine, ripetendo il percorso fatto per il calcolo del primo limite, si ottiene:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\ln \frac{\left(e^x - 1\right)^2}{e^x + 1} - x \right) = 0 .$$

Quindi la retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
Calcoliamo l'altro limite:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\frac{\left(e^x-1\right)^2}{e^x+1}\right]=0$$

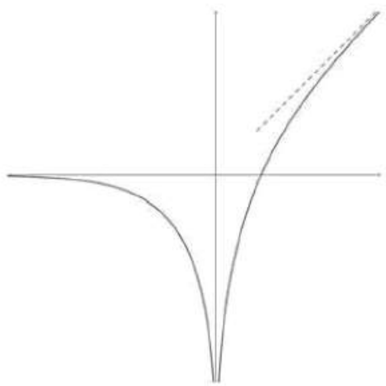
di conseguenza la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.
c) La derivata prima è:

$$y' = \frac{e^x\left(e^x+3\right)}{\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)}.$$

La derivata prima non si annulla per alcun valore di $x \in D$. Il suo segno dipende dal fattore $e^x - 1$ che si trova al denominatore; per cui per $x < 0$ $y' < 0$ dunque la funzione è decrescente, per $x > 0$ $y' > 0$ dunque la funzione è crescente.

d) Non esistono massimi e minimi né relativi né assoluti.

e) Il grafico della funzione compatibile con i risultati ottenuti è il seguente:



Si noti che il numero minimo di flessi presenti nel grafico è zero, se fossero in numero maggiore sarebbero in numero pari.

ESERCIZIO 3

Calcolare il seguente limite (utilizzando gli sviluppi di MacLaurin):

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(2x)-\ln(1+2x)-2x^2}{1-\cos(2x)}$$

Il limite si presenta nella forma di indecisione $\frac{0}{0}$.

Procediamo con gli sviluppi di MacLaurin:

$$\sin(2x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o\left(x^3\right)$$

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3!} + o\left(x^3\right)$$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

Per la scelta dell'ordine di derivazione a cui fermarsi, bisogna fare attenzione che non ci siano addendi (all'interno degli sviluppi parziali) che si semplifichino dando somma zero.
Calcolare il limite significa infine calcolare:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x - \frac{4}{3}x^3 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2}{1 - 1 + 2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{8}{3}x^3}{2x^2} = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{4}{3}x\right) = 0^- .$$

ESERCIZIO 4

Data la funzione $f(x) = e^{-|x|}\left(x^3 - x^2\right)$

a) indicare i dominio;
b) calcolare i limiti alla frontiera;
c) calcolare gli eventuali zeri e per ciascuno stabilire l'ordine di infinitesimo rispetto all'infinitesimo campione standard;
d) disegnare nel piano cartesiano il grafico della funzione nell'intorno di ciascuno degli zeri individuati;
e) calcolare la derivata prima;
f) la funzione è derivabile nel punto $x = 0$? Motivare la risposta;
g) la funzione ha punti di massimo e/o di minimo? Se sì indicare quali;
h) disegnare un grafico compatibile con i risultati ottenuti;
i) indicare il numero dei punti di flesso compatibili con il grafico disegnato e nel caso fossero in numero maggiore dichiarare se in numero pari o dispari.

a) Il dominio è l'insieme: $D \equiv R$ e possiamo affermare che la funzione è derivabile in tutto l'insieme dei numeri reali ad esclusione di $x = 0$ (valore che annulla il modulo) dove dovremo controllare l'eventuale derivabilità.

b) Calcoliamo i limiti alla frontiera:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-|x|}\left(x^3 - x^2\right) = 0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-|x|}\left(x^3 - x^2\right) = 0^-$$

La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale sia per $x \to -\infty$ che per $x \to +\infty$.

c) $f(x) = 0$ per $x = 0$ e per $x = 1$.

Quando $x \to 0$ $f(x) \sim -x^2$ ed è un infinitesimo di ordine 2.

Quando $x \to 1$ $f(x) \sim \dfrac{1}{e}(x-1)$ ed è un infinitesimo di ordine 1.

d) Negli intorni di $x = 0$ e $x = 1$ la funzione si comporta nel seguente modo:

e) La derivata prima della funzione è la seguente:

$f'(x) = -e^{-|x|} \cdot \mathrm{sgn}(x) \cdot \left(x^3 - x^2\right) + e^{-|x|} \cdot \left(3x^2 - 2x\right)$

che possiamo riscrivere come:

$$f'(x) = \begin{cases} xe^{-x}\left(-x^2 + 4x - 2\right) & x > 0 \\ xe^{x}\left(x^2 + 2x - 2\right) & x < 0 \end{cases}$$

f) Per verificare la derivabilità in $x = 0$ applichiamo il teorema del limite della derivata:

$$\lim_{x \to 0^+} \left[xe^{-x}\left(-x^2 + 4x - 2\right)\right] = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} \left[xe^{-x}\left(x^2 + 2x - 2\right)\right] = 0$$

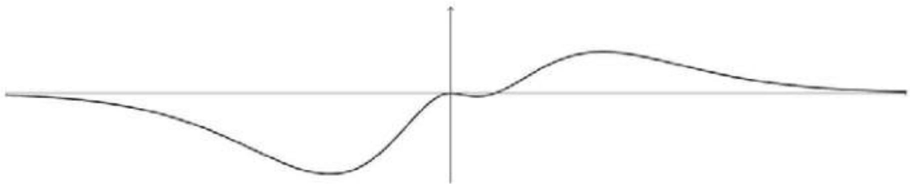
la funzione è quindi derivabile in $x = 0$ e risulta $f'(0) = 0$.
Quindi la derivata prima della funzione è:

$$f'(x) = \begin{cases} xe^{-x}\left(-x^2 + 4x - 2\right) & x \geq 0 \\ xe^{x}\left(x^2 + 2x - 2\right) & x < 0 \end{cases}$$

Pertanto $f \in C^1(R)$.

g) Studiamo la derivata prima:
per $x > 0$ si ha $f'(x) \geq 0$ per $2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 + \sqrt{2}$
per $x < 0$ si ha $f'(x) \geq 0$ per $-1 - \sqrt{3} \leq x < 0$
In particolare:
$x = 2 - \sqrt{2}$ è un punto di minimo locale;
$x = 2 + \sqrt{2}$ è un punto di massimo locale;
$x = -1 - \sqrt{3}$ è un punto di minimo locale;
$x = 0$ è un punto di massimo locale.

h) Il grafico della funzione risulta:



i) I punti di flesso sono 5, se fossero di più sarebbero comunque in numero dispari.

ESERCIZIO 5

Data la funzione $f(x)=3^{\sqrt{x^2-1}}$:

a) indicare il dominio;
b) calcolare i limiti alla frontiera;
c) calcolare la derivata prima e analizzare il suo dominio;
d) indicare se la funzione ammette massimi e/o minimi, specificando se sono locali e/o globali;
e) disegnare un grafico qualitativo compatibile con i risultati ottenuti.

a) Il dominio è: $D\equiv(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. La funzione è pari e il suo grafico risulterà simmetrico rispetto all'asse delle y.

b) Calcoliamo i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to+\infty} 3^{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$$

e ovviamente

$$\lim_{x\to-\infty} 3^{\sqrt{x^2-1}}=+\infty$$

poiché l'ordine di infinito è sicuramente maggiore di uno, la funzione va all'infinito convessa.

Osserviamo inoltre che: $f(-1)=f(1)=1$.

c) La derivata prima risulta:

$$f'(x)=3^{\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln 3\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Osserviamo che la funzione derivata non risulta continua in $x=\pm1$, quindi l'insieme di derivabilità risulta $D'\equiv(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

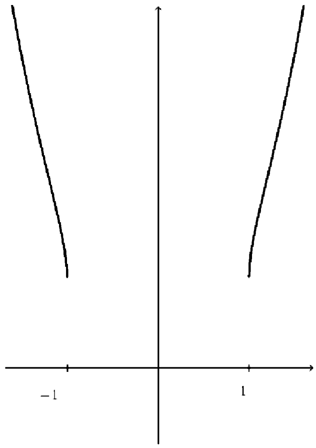
In particolare nei punti $x=\pm1$ la funzione presenta due punti di semicuspide in quanto:

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+}\left(3^{\sqrt{x^2-1}}\frac{x\ln 3}{\sqrt{x^2-1}}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-}\left(3^{\sqrt{x^2-1}}\frac{x\ln 3}{\sqrt{x^2-1}}\right) = -\infty$$

d) Dallo studio del segno della derivata prima ricaviamo che la funzione è decrescente in $(-\infty,-1)$ e crescente in $(1,+\infty)$. In particolare in $x=\pm 1$ si hanno due punti di minimo locali e, ricordando i limiti calcolati, globali.

e) Il grafico della funzione all'interno del dominio risulta:



ESERCIZIO 6

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-\sin x^2-\frac{1}{2}x^4}{\sqrt[5]{1-5x}+\ln(1+x)-1}$$

Il limite dato presenta un forma di indecisione del tipo $\frac{0}{0}$, procediamo con gli sviluppi di MacLaurin:

$$e^{x^2} = 1+x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3!}+o\left(x^6\right)$$

$$\sin x^2 = x^2-\frac{x^6}{3!}+o\left(x^6\right)$$

$$\sqrt[5]{1-5x} = 1-x+10x^2+o\left(x^2\right)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

Sostituendo, otteniamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + o\left(x^6\right) - 1 - \left[x^2 - \frac{x^6}{3!} + o\left(x^6\right)\right] - \frac{1}{2}x^4}{1 - x + 10x^2 + o\left(x^2\right) + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^6}{3!} + \frac{x^6}{3!} + o\left(x^6\right)}{10x^2 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^6}{3} + o\left(x^6\right)}{\frac{19}{2}x^2 + o\left(x^2\right)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{57}x^4 + o\left(x^4\right)\right) = 0$$

ESERCIZIO 7

Data la funzione $f(x) = e^{-\frac{x}{5}} - \sqrt[5]{1-x}$:

a) indicare il dominio;
b) calcolare gli zeri e l'ordine di infinitesimo;
c) calcolare i limiti alla frontiera;
d) individuare il più ampio insieme in cui la funzione è derivabile con continuità;
e) indicare un eventuale punto di flesso a tangente verticale;
f) disegnare un grafico qualitativo compatibile con i risultati ottenuti;
g) la funzione ha massimi o minimi globali? Motivare la risposta.

a) Il dominio è tutto l'insieme dei numeri reali.

b) La funzione si annulla in $x = 0$, punto nel quale andiamo a controllare il comportamento asintotico.

Per $x \to 0$ $f(x) = 1 - \frac{x}{5} + \frac{x^2}{50} + o\left(x^2\right) - \left(1 - \frac{x}{5} - \frac{2}{25}x^2 + o\left(x^2\right)\right) = \frac{1}{10}x^2 + o\left(x^2\right)$

quindi la funzione è un infinitesimo di ordine due.

c) Calcoliamo i limiti alla frontiera del dominio:

$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-\frac{x}{5}} - \sqrt[5]{1-x}\right) = +\infty$ in quanto $e^{-\frac{x}{5}} - \sqrt[5]{1-x} \sim -\sqrt[5]{1-x}$.

Osserviamo che non ammette asintoto obliquo in quanto infinito di ordine $\frac{1}{5}$, la funzione è concava.

$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{-\frac{x}{5}} - \sqrt[5]{1-x}\right) = +\infty$ in questo caso $e^{-\frac{x}{5}} - \sqrt[5]{1-x} \sim e^{-\frac{x}{5}}$

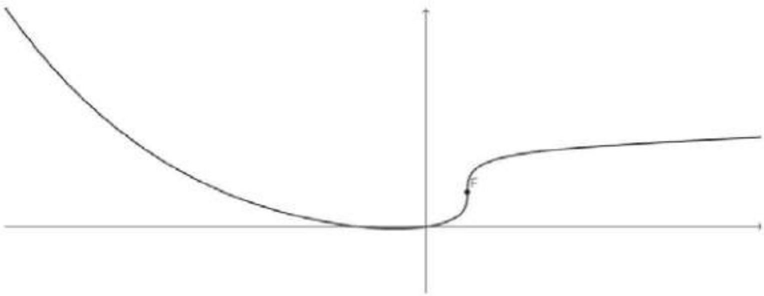
la funzione è convessa.

Anche in questo caso non ammette asintoto obliquo in quanto infinito di ordine superiore a qualsiasi potenza di x.

d) Poiché lo zero della radice è di ordine $\frac{1}{5}$, il più ampio insieme in cui la funzione risulta derivabile con continuità è dato dai valori per cui $1-x \neq 0$, ovvero $(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$.

e) Poiché la funzione risulta non derivabile in $x=1$, in corrispondenza di tale punto si ha un punto singolare. Si tratta in particolare di un punto di flesso a tangente verticale in quanto, come detto prima, $x=1$ è uno zero per la funzione $\sqrt[5]{1-x}$ di ordine $\frac{1}{5}<1$. Pertanto si ha un flesso a tangente verticale in $\left(1,\ e^{-1/5}\right)$.

f) Il grafico della funzione compatibile con i risultati ottenuti risulta:



g) La funzione non ammette massimi globali in quanto i limiti alla frontiera sono entrambi uguali a $+\infty$. Invece la funzione ammette un minimo globale in $x=0$.

ESERCIZIO 8

Data la funzione $y = e^{-|x|}\left(-x^2+x^4\right)\ \ln\left(1+\sqrt[5]{x}\right)$:

a) indicare il dominio;
b) dire se esistono punti in cui la funzione si annulla e indicare - dopo aver stabilito la più semplice funzione asintotica - l'ordine di infinitesimo (nel caso non fosse possibile determinarlo, dire solo se è maggiore o minore di uno) nell'intorno di ognuno;
c) calcolare i limiti alla frontiera del dominio e per ciascuno indicare la più semplice funzione asintotica; indicare - se esistono - eventuali asintoti e scriverne le equazioni;
d) disegnare un grafico della funzione compatibile con le informazioni ottenute attraverso le operazioni fin qui eseguite;
e) indicare il minimo numero di flessi compatibili con i risultati ottenuti precedentemente.

a) Il dominio è dato dai valori di x per cui $1+\sqrt[5]{x}>0$ e quindi $x>-1$, $D=(-1,+\infty)$.

b) La funzione si annulla in $x=0$ e $x=1$.

Per $x\to 0$, $y \sim -x^2\cdot\sqrt[5]{x}=-x^{\frac{11}{5}}$, ordine di infinitesimo pari a $\frac{11}{5}$ e in $x=0$ la funzione ha una tangente orizzontale.

Per $x\to 1$, $y \sim \frac{1}{e}\cdot 2\cdot(x-1)\ln 2$, ordine di infinitesimo pari a 1.

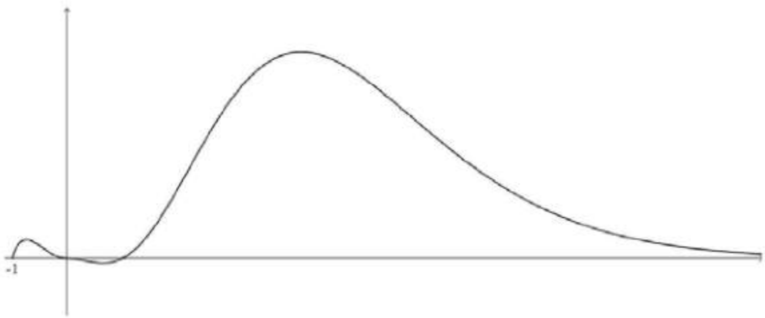
c) Per $x\to -1$, $y \sim e^{-1}\cdot(-2)\cdot(x+1)\ln\left(1+\sqrt[5]{x}\right) \sim -\frac{2}{e}\cdot(x+1)\ln\left(1+\sqrt[5]{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to -1} y=0^+$ (presenta la forma $0\cdot\infty$ che a questo punto sappiamo risolvere) l'ordine di infinitesimo per $x\to -1$ è minore di uno (tangente verticale!).

Per $x\to +\infty$, $y \sim e^{-|x|}\cdot x^4\cdot\ln\left[\sqrt[5]{x}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)\right] \sim e^{-|x|}\cdot x^4\cdot\sqrt[5]{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} y=0^+$, l'ordine di infinitesimo è superiore a qualunque potenza di $\frac{1}{x}$; la retta $y=0$ è un asintoto orizzontale per la funzione.

d) Il grafico della funzione compatibile con i risultati ottenuti è:



e) Il numero di flessi, compatibilmente con il grafico, è al minimo 4, se fossero di più sarebbero in numero pari.

ESERCIZIO 9

Data la funzione $f(x)=x^2\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$:

a) indicare l'insieme in cui la funzione è continua;
b) calcolare gli zeri;
c) calcolare i limiti alla frontiera del dominio;
d) calcolare la derivata prima e indicare eventuali massimi e/o minimi;

e) disegnare un grafico qualitativo compatibile con i risultati ottenuti.

a) La funzione esiste per ogni $x \neq 0$. Ma la funzione in $x = 0$ è prolungabile con continuità, infatti:

$\lim_{x \to 0} x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ poiché $\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ è una funzione limitata.

In conclusione basta porre $f(0) = 0$ affinché la funzione sia continua su tutto R.

Insomma la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è di classe $C^0(R)$.

b) Notiamo subito che la funzione è pari; calcoliamo gli zeri:

$f(x) = 0$ se $x = 0$ e se $\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, ovvero $\frac{1}{x} = k\pi$ con $k \in Z$ e diverso da zero, insomma $x = \frac{1}{k\pi}$.

Notiamo che, essendo

$$0 \leq \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

si ha

$$0 \leq x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

ovvero la funzione è compresa tra l'asse delle ascisse e la funzione $y = x^2$. Calcoliamo le intersezioni tra le due funzioni:

$$x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$$

da cui

$\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) = 1$, cioè $\sin\frac{1}{x} = \pm 1$. Insomma $\frac{1}{x} = k\frac{\pi}{2}$ con $k \in Z$ e diverso da zero, da cui $x = \frac{2}{k\pi}$.

c) Calcoliamo i limiti alla frontiera ricordando la simmetria della funzione:

$\lim_{x \to +\infty} x^2 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ in quanto per $x \to +\infty$ $\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \sim \left(\frac{1}{x}\right)^2$, la retta di equazione $y = 1$ è un asintoto orizzontale per la funzione.

d) Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = 2x \cdot \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot 2\sin\frac{1}{x} \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

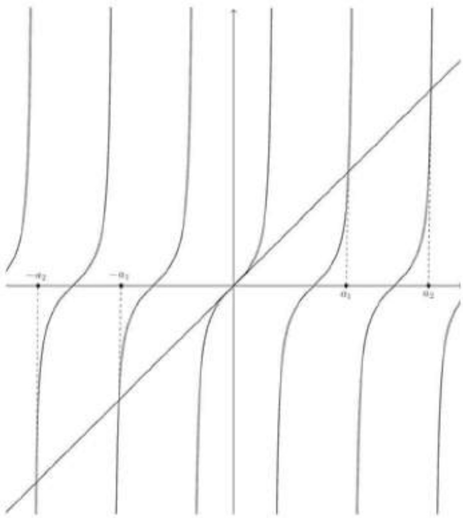
da cui

$$f'(x) = 2\sin\frac{1}{x}\left(x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right).$$

La derivata prima si annulla in questi due casi:

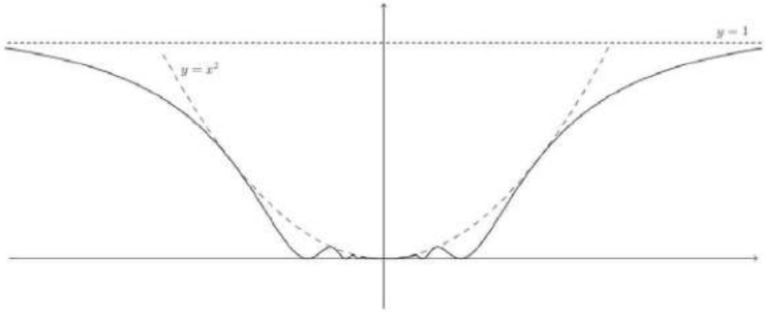
- $\sin\frac{1}{x} = 0$, ovvero tutti i punti in cui la funzione interseca l'asse delle ascisse, che risultano essere punti di minimo che si addensano quanto più ci si avvicina all'origine;
- $x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = 0$, cioè posto $\cos\frac{1}{x} \neq 0$ diventa $x\tan\frac{1}{x} - 1 = 0$, ovvero per $x \neq 0$ $\tan\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$.

  Ponendo $\frac{1}{x} = a$ si ha $\tan a = a$, dobbiamo confrontare i grafici delle funzioni $y_1 = \tan a$ e $y_2 = a$:



Da un accurato studio grafico del segno della derivata prima (ricordando anche il segno di $\cos\frac{1}{x}$) si deduce che i punti $\frac{1}{x} = a_1$, $\frac{1}{x} = a_2$, …, da cui $x = \frac{1}{a_1}$, $x = \frac{1}{a_2}$, … sono tutti punti di massimo locale che si addensano quanto più ci si avvicina all'origine con ordinata che tende a zero.

e) Il grafico qualitativo è dunque:



ESERCIZIO 10

Data la funzione $y = \left(\sinh x^2\right) \cdot \ln\left(1 + \sqrt[3]{x^2}\right)$:

a) indicare il dominio;
b) calcolare gli zeri;
c) calcolare i limiti alla frontiera del dominio;
d) calcolare il dominio della derivata prima ed eventuali punti singolari;
e) disegnare un grafico qualitativo compatibile con i risultati ottenuti.

a) La funzione esiste ed è continua in tutto R. Osserviamo inoltre che la funzione è pari.

b) La funzione si annulla in $x = 0$. Per $x \to 0$, $y \sim x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{8}{3}}$.

c) Per $x \to +\infty$ (data la simmetria della funzione il risultato che otterremo è analogo a quello del caso $x \to -\infty$) $y \sim \dfrac{e^{x^2}}{2} \cdot \ln\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$ poiché per $x \to +\infty$ si ha:

$$\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right) = \ln\left[\sqrt[3]{x^2}\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\right] = \ln\sqrt[3]{x^2} + \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) \sim \ln\left(\sqrt[3]{x^2}\right).$$

Quindi $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$ con un ordine di infinito superiore a qualsiasi potenza di x e ovviamente non ammette asintoto obliquo.

d) Calcoliamo la derivata prima:

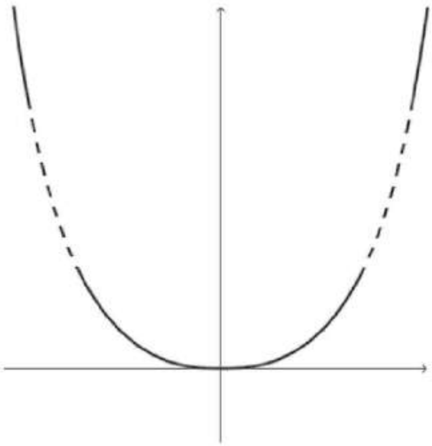
$$y' = \left(\cosh x^2\right) \cdot 2x \cdot \ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right) + \left(\sinh x^2\right) \cdot \frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}} \cdot \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

notiamo subito che occorre controllare la derivabilità in $x = 0$.
Applichiamo il teorema del limite della derivata:

$\lim_{x \to 0} y' = 0$ poiché $y' \sim 2x \cdot \sqrt[3]{x^2} + x^2 \cdot \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{8}{3}\sqrt[3]{x^5}$.

quindi la funzione è derivabile in $x = 0$ e in tale punto ha una tangente orizzontale.

e) Dalle informazioni ottenute possiamo rappresentare il seguente grafico:



ESERCIZI PROPOSTI

ESERCIZIO 1

Data la seguente funzione: $y = \frac{-4x}{x-3} + 3x$:

a) calcolare il dominio;
b) calcolare i limiti e scrivere le equazioni di eventuali asintoti;
c) calcolare e studiare la derivata prima evidenziando eventuali punti di minimo e/o di massimo;
d) tracciare un grafico della funzione compatibile con i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 2

Data la funzione $y = \ln\left(\frac{x^2+9}{x+5}\right)$ calcolare:

a) il dominio;
b) i limiti alla frontiera del dominio;
c) la derivata prima e studiarla. Dichiarare se la funzione ha massimi e/o minimi relativi e/o assoluti;
d) disegnare un grafico compatibile con i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 3

Data la funzione $y = -2x + \ln|2 + x|$ calcolare:

a) il dominio;
b) i limiti alla frontiera del dominio e per ciascuno calcolare la più semplice funzione asintotica;
c) la derivata prima e studiarla. Dichiarare se la funzione ha massimi e/o minimi relativi e/o assoluti;
d) la derivata seconda e studiarla. Dichiarare se la funzione ha punti di flesso;
e) disegnare un grafico compatibile con i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 4

Data la funzione $y = \begin{cases} \sqrt{-x^2 + 9} & -\sqrt{5} \le x < 3 \\ 2^{x^2-9} - 1 & 3 \le x \le 4 \end{cases}$

rispondere ai seguenti quesiti motivando le risposte:

a) dare la definizione di punto di minimo per una funzione $y = f(x)$ spiegando anche la differenza tra relativi e assoluti;
b) enunciare il teorema di Weierstrass;
c) dire se la funzione è continua nell'intervallo $\left[-\sqrt{5}, 4\right]$;
d) dire se la funzione è derivabile nell'intervallo $\left[-\sqrt{5}, 4\right]$;
e) calcolare gli eventuali massimi e/o minimi locali e globali della funzione all'interno del dominio assegnato.

ESERCIZIO 5

Data la funzione $y = x^2 + \ln\left(x^2\right)$ calcolare:

a) il dominio;
b) i limiti alla frontiera del dominio e per ciascuno calcolare la più semplice funzione asintotica;
c) la derivata prima e studiarla. Dichiarare se la funzione ha massimi e/o minimi relativi e/o assoluti;
d) la derivata seconda, studiarla e dichiarare se la funzione ha punti di flesso;
e) disegnare un grafico compatibile con i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 6

Data la funzione $y = x^3 - \dfrac{1}{x}$ calcolare:

a) il dominio;
b) i limiti alla frontiera del dominio e per ciascuno calcolare la più semplice funzione asintotica;

c) la derivata prima e studiarla. Dichiarare se la funzione ha massimi e/o minimi relativi e/o assoluti;
d) la derivata seconda e studiarla. Dichiarare se la funzione ha punti di flesso;
e) disegnare un grafico compatibile con i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 7

Data la funzione $f(x) = \sinh\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$ rispondere ai seguenti quesiti motivando le risposte:

a) indicare il dominio della funzione;
b) calcolare i limiti alla frontiera del dominio e nel caso di limite infinito stabilire attraverso la più semplice funzione asintotica se l'ordine dell'infinito è > 1 oppure < 1;
c) individuare l'equazione di eventuali asintoti;
d) calcolare e studiare la derivata prima della funzione;
e) la funzione ha punti di massimo e/o di minimo? Se sì individuarli e precisarne la natura;
f) disegnare un grafico qualitativo compatibile con i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 8

Data la funzione $y = \begin{cases} e^{-2x}(x+1) & x \geq 0 \\ x(3-x)^2 & x < 0 \end{cases}$:

a) calcolare il dominio;
b) calcolare i limiti agli estremi non inclusi del dominio;
c) calcolare le equazioni degli eventuali asintoti;
d) la funzione è crescente nel punto $x = 1$? Motivare la risposta;
e) la funzione è continua nel punto $x = 0$?
f) la funzione è derivabile nel punto $x = 0$?

ESERCIZIO 9

Data la funzione $f(x) = -x^3 + 2x^4$ rispondere ai seguenti quesiti motivando le risposte:

a) indicare il dominio della funzione;
b) calcolare i limiti alla frontiera del dominio e nel caso di limite infinito stabilire attraverso la più semplice funzione asintotica l'ordine dell'infinito;
c) calcolare e studiare la derivata prima della funzione;
d) la funzione ha punti di massimo e/o di minimo? Se sì individuarli;
e) disegnare un grafico qualitativo compatibile con i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 10

Calcolare il seguente limite (utilizzando gli sviluppi di MacLaurin)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-3x + \ln(1+3x) - \frac{9}{2}x^2}{e^{-x} + \sinh(x) - 1}.$$

ESERCIZIO 11

Data la funzione $f(x) = \left|x^3 - 2x^2\right| e^{-x}$

a) calcolare gli eventuali zeri e per ciascuno stabilire l'ordine di infinitesimo rispetto all'infinitesimo campione standard;
b) disegnare nel piano cartesiano il grafico della funzione nell'intorno di ciascuno degli zeri individuati;
c) calcolare la derivata prima e studiarla;
d) la funzione ha punti di massimo e/o di minimo? Se sì precisare se sono locali e/o globali;
e) disegnare un grafico qualitativo compatibile con i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 12

Calcolare il seguente limite (utilizzando gli sviluppi di MacLaurin)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(4x) - \ln(1+4x)}{e^{-x} + \sinh(x) - 1}.$$

ESERCIZIO 13

Data la funzione $f(x) = 2^{\sqrt[3]{x^2+x}}$:

a) indicare il dominio;
b) calcolare i limiti alla frontiera;
c) calcolare la derivata prima e analizzare il suo dominio;
d) studiare la derivata prima e indicare se la funzione ammette massimi e/o minimi, specificando se sono locali e/o globali;
e) disegnare un grafico qualitativo compatibile con i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 14

Data la funzione $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$:

a) indicare l'insieme in cui la funzione è continua;
b) calcolare gli zeri;
c) calcolare i limiti alla frontiera del dominio;
d) calcolare la derivata prima e indicare eventuali massimi e/o minimi;
e) disegnare un grafico qualitativo compatibile con i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 15

Calcolare il seguente limite (utilizzando gli sviluppi di MacLaurin):

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 - x^2} - \sqrt[3]{x^3 - 3} \right).$$

ESERCIZIO 16

Scrivere il polinomio di secondo grado centrato nel punto $x = 2$ della funzione $f(x) = e^{-x}\left(x^2 + x\right)$ e disegnare il grafico nell'intorno del punto considerato.

8 INTEGRALI

"Verticale" – Particolare
scultura di Paolo Mazzuferi
anno 2011

PREMESSA

Data una funzione $f: R \to R$ continua in R si definiscono **primitive** della funzione l'insieme delle funzioni reali di variabile reale aventi come derivata prima la funzione f; detta $G(x)$ una primitiva di $f(x)$, essa è tale che $G'(x) = f(x)$.

Ricordiamo che:

1) $\int f(x)dx$ è detto integrale indefinito, essendo f continua;
2) $\int_a^b f(x)dx$ è detto integrale definito, essendo f continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$.

Teniamo presente che per la funzione f definita precedentemente si ha:

1) $\int f(x)dx = G(x) + c$ con $c \in R$. Notiamo che le primitive di una funzione differiscono tra loro solo per una costante $c \in R$, si tratta cioè di una famiglia di funzioni.
2) $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$, dove $G(x)$ è una primitiva di $f(x)$. Notiamo che il risultato è un numero. In particolare se $f(x) \geq 0$ su $[a,b]$ allora $\int_a^b f(x)dx$ è un numero positivo e rappresenta l'area della regione di piano compresa tra $y = f(x)$, l'asse delle ascisse e le rette di equazione $x = a$ e $x = b$.

Ricordiamo il **teorema di Torricelli-Barrow** che afferma che data una funzione f continua su un intervallo $[a,b]$ e definita la funzione integrale $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ con $c,\ x \in [a,b]$, allora la funzione integrale risulta continua e derivabile su tutto $[a,b]$ e in particolare $F'(x) = f(x)$.

Alla fine di questo capitolo vedremo anche alcuni esempi di integrazione per serie.

ESEMPI GUIDATI

ESEMPIO 1

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\int \left(x^2 + \frac{1}{x^4} - 2 \right) dx$;

2) $\int\left(\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{1}{x}-e^{x}\right)dx$;

3) $\int\frac{x^5-4x^2+1}{x^4}dx$;

4) $\int\left(2\cos x-\frac{3}{5}\sin x\right)dx$;

5) $\int\left(-\frac{6}{\sqrt[3]{x}}+1\right)dx$.

SOLUZIONI

1) La funzione di cui vogliamo calcolare l'integrale è somma algebrica di funzioni elementari. Ricordiamo che una delle proprietà dell'integrale è la linearità, dunque calcoliamo gli integrali come somma degli integrali delle singole funzioni.

La prime due sono funzioni potenza (usiamo quindi la regola: $\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+c$ $\forall a\neq -1$) mentre la terza è una costante (ricordiamo che $\int kdx = kx+c$), quindi:

$$\int\left(x^2+\frac{1}{x^4}-2\right)dx=\int x^2dx+\int\frac{1}{x^4}dx-\int 2dx=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3x^3}-2x+c\ .$$

2) Come prima si tratta della somma di funzioni elementari, di cui la prima una funzione potenza. Ricordando che $\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c$ e $\int e^x dx=e^x+c$, risolviamo l'integrale indefinito:

$$\int\left(\frac{\sqrt{x}}{3}+\frac{1}{x}-e^{x}\right)dx=\frac{1}{3}\int\sqrt{x}dx+\int\frac{1}{x}dx-\int e^x dx=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}+\ln|x|-e^x+c=\frac{2}{9}\sqrt{x^3}+\ln|x|-e^x+c\ .$$

3) Osserviamo che la funzione da integrare è una funzione razionale, prima di procedere con la soluzione possiamo dividere ogni singolo termine del numeratore per il denominatore:

$$\int\frac{x^5-4x^2+1}{x^4}dx=\int\left(\frac{x^5}{x^4}-\frac{4x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}\right)dx\ .$$

A questo punto si tratta di una somma di funzioni elementari, quindi risulta:

$$\int\left(\frac{x^5}{x^4}-\frac{4x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}\right)dx=\int xdx-4\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^4}dx=\frac{x^2}{2}+\frac{4}{x}-\frac{1}{3x^3}+c\ .$$

4) Procediamo come fatto precedentemente ricordando che $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ e $\int \cos x\,dx = \sin x + c$:

$$\int\left(2\cos x - \frac{3}{5}\sin x\right)dx = 2\int \cos x\,dx - \frac{3}{5}\int \sin x\,dx = 2\sin x + \frac{3}{5}\cos x + c\,.$$

5) Si tratta di una somma di funzioni elementari e quindi:

$$\int\left(-\frac{6}{\sqrt[3]{x}} + 1\right)dx = -6\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx + \int dx = -6\int x^{-\frac{1}{3}}dx + x = -6\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2} + x + c = -9\sqrt[3]{x^2} + x + c\,.$$

ESEMPIO 2

Calcolare i seguenti integrali indefiniti, spiegando il procedimento seguito:

1) $\int (2x-4)^7\,dx$; 2) $\int x\left(x^2+2\right)^5 dx$; 3) $\int \frac{1}{x^2-6x+9}dx$;

4) $\int \frac{10}{5x+6}dx$; 5) $\int \frac{4x+1}{2x^2+x-2}dx$; 6) $\int (\sin x)\sqrt{\cos x}dx$;

7) $\int \frac{e^x}{4+2e^x}dx$; 8) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$; 9) $\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x^2+1}}dx$;

10) $\int x^2 e^{2x^3}dx$; 11) $\int \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$.

SOLUZIONI

Gli integrali di questo esempio sono tutti riconducibili a integrali immediati, eventualmente utilizzando piccoli accorgimenti, e in quanto tali facilmente risolubili.

1) La funzione di cui vogliamo calcolare l'integrale si presenta come potenza di una funzione elementare, quindi, ricordando la generalizzazione dell'integrale indefinito per le funzioni potenza $\int [f(x)]^a \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{a+1}}{a+1} + c \quad \forall a \neq -1$, si ha:

$$\int (2x-4)^7\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cdot(2x-4)^7\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-4)^8}{8} + c = \frac{(2x-4)^8}{16} + c\,.$$

2) Come prima si tratta di un polinomio elevato a potenza con $f(x) = x^2+2$ e $f'(x) = 2x$; risolviamo l'integrale indefinito:

$$\int x\left(x^2+2\right)^5 dx = \frac{1}{2}\int 2x\left(x^2+2\right)^5 dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+2\right)^6}{6} + c = \frac{\left(x^2+2\right)^6}{12} + c\,.$$

3) Osserviamo che il trinomio al denominatore non è altro che lo sviluppo del quadrato di un binomio quindi possiamo riscrivere l'integrale nella seguente maniera:
$\int \frac{1}{x^2-6x+9}dx = \int \frac{1}{(x-3)^2}dx = \int (x-3)^{-2}dx$.

Come prima si tratta di una funzione potenza:

$\int (x-3)^{-2}dx = \frac{(x-3)^{-1}}{-1}+c = -\frac{1}{(x-3)}+c$.

4) Ricordiamo che $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+c$:

$\int \frac{10}{5x+6}dx = 2\int \frac{5}{5x+6}dx = 2\ln|5x+6|+c$.

5) Si tratta di un integrale come quello fatto al punto precedente con al numeratore la derivata del denominatore:
$f(x)=2x^2+x-2$ e $f'(x)=4x+1$, quindi
$\int \frac{4x+1}{2x^2+x-2}dx = \ln\left|2x^2+x-2\right|+c$.

6) Riscriviamo la funzione nel seguente modo:

$\int (\sin x)\sqrt{\cos x}dx = \int (\sin x)(\cos x)^{\frac{1}{2}}dx$

si tratta nuovamente di una funzione potenza con $f(x)=\cos x$ e $f'(x)=-\sin x$, quindi

$$-\int -(\sin x)(\cos x)^{\frac{1}{2}}dx = -\frac{(\cos x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = -\frac{2}{3}\sqrt{(\cos x)^3}+c$$

7) Osserviamo che al numeratore abbiamo, a meno di una costante, la derivata del denominatore ($f(x)=4+2e^x$ e $f'(x)=2e^x$) e quindi:

$\int \frac{e^x}{4+2e^x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^x}{4+2e^x}dx = \frac{1}{2}\ln\left|4+2e^x\right|+c$.

Poiché l'argomento del logaritmo è sempre positivo, possiamo riscrivere il risultato nel seguente modo: $\frac{1}{2}\ln\left(4+2e^x\right)+c$.

8) Riscriviamo l'integranda come segue:
$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}dx$.

Osserviamo che si tratta dell'integrale di una funzione del tipo $\frac{f'(x)}{f(x)}$, quindi:

$\int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x} dx = \ln|\ln x| + c$.

9) L'integrale può essere riscritto nel seguente modo:

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{2x^2+1}} dx = \int x\left(2x^2+1\right)^{-\frac{1}{3}} dx$$

si tratta ancora una volta di una funzione potenza con $f(x) = 2x^2 + 1$ e $f'(x) = 4x$.

$$\frac{1}{4}\int 4x\left(2x^2+1\right)^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{4}\frac{\left(2x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(2x^2+1\right)^2} + c.$$

10) Ricordando che $\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + c$, in questo caso $f(x) = 2x^3$ e $f'(x) = 6x^2$, quindi:

$$\int x^2 e^{2x^3} dx = \frac{1}{6}\int 6x^2 e^{2x^3} dx = \frac{1}{6}e^{2x^3} + c.$$

11) Poiché $\int \sin[f(x)] \cdot f'(x)dx = -\cos[f(x)] + c$ e analogamente $\int \cos[f(x)] \cdot f'(x)dx = \sin[f(x)] + c$, in questo caso $f(x) = \sqrt{x}$ e $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$\int \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} dx = \int \sin\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\int \sin\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} dx = -2\cos\left(\sqrt{x}\right) + c.$$

ESEMPIO 3

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\int (x+1)\ln x\, dx$;

2) $\int x^2(\sin x)dx$;

3) $\int (\cos x)e^{-x}dx$.

SOLUZIONI

Per il calcolo dei tre integrali ricordiamo il metodo di integrazione per parti, che stabilisce: $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$.

1) In questo caso $f'(x) = x + 1$, da cui si ricava che $f(x) = \frac{x^2}{2} + x$; dunque:

$$\int (x+1)\ln x\, dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \int\left(\frac{x^2}{2} + x\right) \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\int\left(\frac{x}{2}+1\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\left(\frac{x^2}{4}+x\right)+c\,.$$

2) Per calcolare l'integrale $\int x^2(\sin x)dx$, pensiamo $\sin x$ come fattore differenziale cioè come la derivata della funzione $-\cos x$, applicando il metodo di integrazione per parti otteniamo:

$$\int x^2(\sin x)dx=-x^2\cos x+\int 2x(\cos x)dx$$

Dobbiamo applicare ancora una volta il metodo per parti:

$$\int x^2(\sin x)dx=-x^2\cos x+\int 2x(\cos x)dx=$$
$$=-x^2\cos x+2x\sin x-\int 2\sin x\,dx=$$
$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+c.$$

3) In questo caso consideriamo e^{-x} come fattore differenziale, otteniamo:

$$\int(\cos x)e^{-x}dx=-(\cos x)e^{-x}-\int(\sin x)e^{-x}dx$$

Di nuovo:

$$\int(\cos x)e^{-x}dx=-(\cos x)e^{-x}-\int(\sin x)e^{-x}dx=$$

$$=-(\cos x)e^{-x}+(\sin x)e^{-x}-\int(\cos x)e^{-x}dx\,.$$

Di conseguenza:

$$2\int(\cos x)e^{-x}dx=-(\cos x)e^{-x}+(\sin x)e^{-x}+k\,.$$

Infine:

$$\int(\cos x)e^{-x}dx=\frac{-(\cos x)e^{-x}+(\sin x)e^{-x}}{2}+c\,.$$

ESEMPIO 4

Calcolare il seguente integrale definito: $\int_1^2\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx\,.$

Iniziamo con la ricerca di una primitiva della funzione. L'integrale si risolve con il metodo di sostituzione.
Poniamo $\sqrt{x-1}=t$, da cui $x=t^2+1$ e quindi $dx=2tdt$, sostituendo i valori ottenuti ricaviamo:

$$\int\frac{\sqrt{x-1}}{x}dx=\int\frac{t}{t^2+1}2tdt=2\int\frac{t^2}{t^2+1}dt=2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=2\int dt-2\int\frac{1}{t^2+1}dt=$$

$= 2t - 2\arctan(t) + c = 2\sqrt{x-1} - 2\arctan(\sqrt{x-1}) + c$.

Quindi:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx = \left[2\sqrt{x-1} - 2\arctan(\sqrt{x-1})\right]_1^2 = 2 - 2\arctan(1) - 0 + 2\arctan(0) = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

ESEMPIO 5

Data la funzione $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-3x-4}$, trovare una sua primitiva passante per il punto $(5,-1)$.

Cerchiamo prima l'insieme delle primitive della funzione, calcolando il seguente integrale:

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x-4}\,dx$$

Osserviamo che si tratta di una funzione razionale con al denominatore un trinomio di secondo grado avente radici reali distinte e sappiamo già che le primitive sono funzioni logaritmiche.
Possiamo riscrivere la funzione integranda nel seguente modo:

$$\frac{2x-3}{x^2-3x-4} = \frac{2x-3}{(x-4)(x+1)}$$

che vogliamo scomporre come somma di due frazioni più facilmente integrabili:

$$\frac{2x-3}{(x-4)(x+1)} \equiv \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+1}.$$

Da cui:

$$\frac{2x-3}{(x-4)(x+1)} \equiv \frac{A(x+1)+B(x-4)}{(x-4)(x+1)} = \frac{(A+B)x + A - 4B}{(x-4)(x+1)}$$

affinché si verifichi l'identità, è necessario imporre che:

$\begin{cases} A + B = 2 \\ A - 4B = -3 \end{cases}$ e risolvendo il sistema otteniamo i seguenti valori $\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$.

Possiamo riscrivere l'integrale di partenza nel seguente modo:

$$\int \frac{2x-3}{x^2-3x-4}\,dx = \int\left(\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x+1}\right)dx = \int \frac{1}{x-4}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx =$$

$= \ln|x-4| + \ln|x+1| + c$.

Dunque l'insieme delle primitive è $G(x) = \ln|x-4| + \ln|x+1| + c$.

Imponiamo il passaggio per il punto $(5,-1)$ e otteniamo:

$-1 = \ln|5-4| + \ln|5+1| + c$, da cui $c = -1 - \ln 6$.

Infine la primitiva cercata è: $G(x) = \ln|x-4| + \ln|x+1| - 1 - \ln 6$.

ESEMPIO 6

Calcolare il seguente integrale indefinito:

$$\int \frac{-x}{4x^2+4x+1}dx.$$

Osserviamo che si tratta di una funzione razionale con al denominatore un trinomio di secondo grado con due radici reali coincidenti e nella primitiva comparirà una funzione razionale oltre a quella logaritmica. In questo caso è possibile riscrivere la funzione integranda attraverso la seguente scomposizione:

$$\frac{-x}{4x^2+4x+1} = \frac{-x}{(2x+1)^2} \equiv \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{(2x+1)^2}.$$

da cui:

$$\frac{-x}{(2x+1)^2} \equiv \frac{A(2x+1)+B}{(2x+1)^2} = \frac{2Ax+A+B}{(2x+1)^2}$$

Affinché si verifichi l'identità, è necessario imporre che:

$$\begin{cases} 2A = -1 \\ A + B = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} A = -\dfrac{1}{2} \\ B = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Infine calcoliamo l'integrale:

$$\int \frac{-x}{4x^2+4x+1}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+1)^2}dx = -\frac{1}{4}\ln|2x+1| - \frac{1}{4(2x+1)} + c.$$

ESEMPIO 7

Trovare una primitiva della funzione: $f(x) = \dfrac{1}{2+4x^2}$.

Si nota che si tratta di una funzione razionale con al denominatore un trinomio di secondo grado con radici complesse coniugate e qui la primitiva sarà definita da un'arcotangente. Quindi è necessario ricondurci alla forma:

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}dx = \arctan[f(x)] + c.$$

Procediamo:

$$\int \frac{1}{2+4x^2}dx = \int \frac{1}{2(1+2x^2)}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2}dx =$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{\sqrt{2}}{1+\left(\sqrt{2}x\right)^2}dx=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}x\right)+c\,.$$

Dunque una primitiva della funzione data si ottiene dando a c un qualsiasi valore, ad esempio $c=2$ e si ottiene: $G(x)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}x\right)+2$.

ESEMPIO 8

Calcolare i seguenti integrali:

1) $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x+3\cos x}dx$;

2) $\int\frac{3}{2\cos^2 x+\sin 2x+\sin^2 x}dx$;

3) $\int\frac{1}{\sin x}dx$.

SOLUZIONI

Le funzioni integrande di tutti gli integrali proposti si presentano come funzioni razionali di funzioni trigonometriche; queste prevedono, caso per caso, sostituzioni adeguate.

1) In questo caso basta eseguire la sostituzione $\cos x=t$ per ottenere l'integrale di una funzione razionale, procediamo:

$\cos x=t$, $-\sin x\,dx=dt$, si ha $\int\frac{-1}{t^2+3t}dt$.

$$\int\frac{-1}{t^2+3t}dt=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t+3}-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{1}{3}\left(\ln|t+3|-\ln|t|\right)+c\,.$$

Concludendo si ha:

$$\int\frac{\sin x}{\cos^2 x+3\cos x}dx=\frac{1}{3}\left(\ln|\cos x+3|-\ln|\cos x|\right)+c\,.$$

2) In questo caso la sostituzione è $\tan x=t$ da cui $\frac{1}{\cos^2 x}dx=dt$, si ottiene:

$$\int\frac{3}{2\cos^2 x+\sin 2x+\sin^2 x}dx=\int\frac{3}{\cos^2 x\left(2+2\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)}dx=$$

$$=\int\frac{3}{2+2t+t^2}dt=3\int\frac{1}{(t+1)^2+1}dt=3\arctan(t+1)+c=3\arctan(\tan x+1)+c\,.$$

3) In questo caso occorre usare le formule parametriche e sostituire $\tan\frac{x}{2}=t$ da cui $\frac{x}{2}=\arctan t$ e quindi $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$. Ricordando che $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, l'integrale diventa:

$$\int\frac{1}{\sin x}dx=\int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+c=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c.$$

ESEMPIO 9

Calcolare i seguenti integrali:

1) $\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$;

2) $\int_3^6\sqrt{x^2-9}\,dx$.

SOLUZIONI

Gli integrali proposti sono molto particolari e si risolvono utilizzando sostituzioni specifiche a seconda della tipologia di funzioni da integrare; tali sostituzioni dipendono dalla potenza di x (che sia pari o dispari) e dal tipo di radicando della radice quadrata.

1) Risolviamo applicando la sostituzione $x=3\sin t$ da cui $dx=3\cos t\,dt$ e $\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9\sin^2 t}=\sqrt{9\cos^2 t}=3|\cos t|$; si ottiene:

$$\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}9|\cos t|\cdot\cos t\,dt$$

poiché il $\cos t$ tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ è positivo possiamo togliere il valore assoluto e diventa:

$$\int_0^{\pi/2}9\cos^2 t\,dt=9\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=9\cdot\left[\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi/2}=\frac{9}{4}\pi.$$

2) In questo caso applichiamo la sostituzione $x=3\cosh t$, $dx=3\sinh t\,dt$, $\sqrt{x^2-9}=\sqrt{9\cosh^2 t-9}=\sqrt{9\sinh^2 t}=3|\sinh t|$.

Calcoliamo i nuovi estremi di integrazione: per $x=3$, $\cosh t=1$ quindi $t=0$; mentre quando $x=6$, $\cosh t=2$ e $t=\mathit{sett}\cosh 2$ che può essere scritto anche $t=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Eseguendo la sostituzione l'integrale diventa:

$$\int_3^6 \sqrt{x^2-9}\,dx = 9\int_0^{sett\cosh 2} |\sinh t| \cdot \sinh t\, dt$$

poiché il $\sinh t$ nell'intervallo di integrazione è positivo possiamo togliere il valore assoluto e diventa:

$$9\int_0^{sett\cosh 2} \sinh^2 t\, dt = 9\int_0^{sett\cosh 2} \frac{\cosh 2t - 1}{2}\, dt =$$

$$= 9\cdot\left[\frac{1}{4}\sinh 2t - \frac{1}{2}t\right]_0^{sett\cosh 2} = 9\cdot\left[\frac{1}{2}\sinh t \cdot \cosh t - \frac{1}{2}t\right]_0^{sett\cosh 2} =$$

$$= \frac{9}{2}\left(2\sinh\left(sett\cosh 2\right) - sett\cosh 2\right) =$$

ricordando che $sett\cosh x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ si ha:

$$= \frac{9}{2}\left[2\sinh\left(\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right) - \ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right].$$

ESEMPIO 10

Data la funzione $f(x) = 2x + e^{3x}$, calcolare l'area compresa tra $f(x)$ e l'asse delle x nell'intervallo $[1,3]$.

La funzione è positiva nell'intervallo considerato, quindi per calcolare l'area è sufficiente risolvere l'integrale definito:

$$\int_1^3 \left(2x + e^{3x}\right)dx = \int_1^3 2x dx + \int_1^3 e^{3x} dx = 2\int_1^3 x dx + \frac{1}{3}\int_1^3 3e^{3x} dx =$$

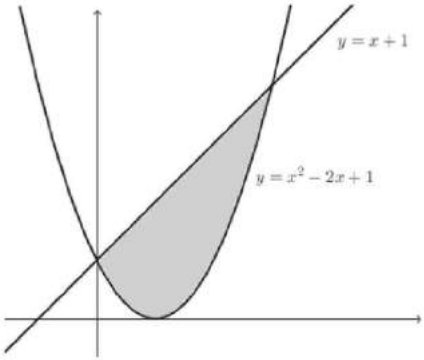
$$= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 + \frac{1}{3}\left[e^{3x}\right]_1^3 = [9-1] + \frac{1}{3}\left[e^9 - e^3\right] = 8 + \frac{e^9 - e^3}{3}.$$

Notiamo che il risultato è positivo.

ESEMPIO 11

Calcolare l'area della regione di piano finita compresa tra i grafici delle due funzioni $y = x^2 - 2x + 1$ e $y = x + 1$.

L'area della regione di piano da calcolare è la seguente:



Calcoliamo le intersezioni tra le due funzioni:

$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$, da cui $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$.

Osservando il grafico notiamo che la retta è tutta al di sopra della parabola nell'intervallo considerato, quindi l'area è uguale a:

$$A = \int_0^3 \left[(x+1) - \left(x^2 - 2x + 1\right) \right] dx = \int_0^3 \left(x + 1 - x^2 + 2x - 1 \right) dx = \int_0^3 \left(3x - x^2 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}.$$

ESERCIZI SVOLTI

ESERCIZIO 1

Calcolare il seguente integrale definito: $\int_1^2 \frac{1}{1-e^x} dx$.

La funzione integranda si presenta come funzione razionale di e^x; in tal caso l'integrale si risolve con il metodo di sostituzione, ponendo $e^x = t$, da cui $x = \ln t$ e $dx = \frac{1}{t} dt$. Con questa sostituzione, nel nostro caso, si ottiene:

$$\int \frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t(1-t)} dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} \right) dt =$$

$$= \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{1}{1-t} dt = \ln|t| - \ln|1-t| + c.$$

Ritornando al nostro integrale definito:

$$\int_1^2 \frac{1}{1-e^x}dx = \left[\ln\left|e^x\right| - \ln\left|1-e^x\right|\right]_1^2 = \left[x - \ln\left|1-e^x\right|\right]_1^2 =$$

$$= \left(2 - \ln\left|1-e^2\right|\right) - \left(1 - \ln\left|1-e\right|\right) = 1 + \ln\left(\frac{1}{e^2-1}\right) + \ln(e-1) =$$

$$= 1 + \ln\left(\frac{e-1}{e^2-1}\right) = 1 + \ln\left(\frac{1}{e+1}\right).$$

ESERCIZIO 2

Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_1^2 \frac{x^2+x-2}{(x^2-4x)(x-4)}dx .$$

Notiamo che:

$$\int_1^2 \frac{x^2+x-2}{(x^2-4x)(x-4)}dx = \int_1^2 \frac{x^2+x-2}{x(x-4)^2}dx$$

Osserviamo che al denominatore compaiono una radice semplice e una con molteplicità due, la primitiva sarà costituita da funzioni logaritmiche e funzioni razionali. Per risolvere l'integrale scomponiamo la funzione integranda nel seguente modo:

$$\frac{x^2+x-2}{x(x-4)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2}$$

$$\frac{x^2+x-2}{x(x-4)^2} \equiv \frac{A(x-4)^2 + Bx(x-4) + Cx}{x(x-4)^2}$$

$$\frac{x^2+x-2}{x(x-4)^2} \equiv \frac{A\left(x^2-8x+16\right) + B\left(x^2-4x\right) + Cx}{x(x-4)^2}$$

$$\frac{x^2+x-2}{x(x-4)^2} \equiv \frac{(A+B)x^2 + (-8A-4B+C)x + 16A}{x(x-4)^2}$$

Affinché l'identità sia verificata, deve essere:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -8A-4B+C=1 \\ 16A=-2 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} A=-\dfrac{1}{8} \\ B=\dfrac{9}{8} \\ C=\dfrac{9}{2} \end{cases}$$

Dunque l'integrale diventa:

$$\int_1^2 \frac{x^2+x-2}{(x^2-4x)(x-4)}dx = \int_1^2 \left[\frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{(x-4)^2}\right]dx =$$

$$= -\frac{1}{8}\int_1^2 \frac{1}{x}dx + \frac{9}{8}\int_1^2 \frac{1}{x-4}dx + \frac{9}{2}\int_1^2 \frac{1}{(x-4)^2}dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{8}\ln|x| + \frac{9}{8}\ln|x-4| - \frac{9}{2}\frac{1}{(x-4)}\right]_1^2 = \ln 2 - \frac{9}{8}\ln 3 + \frac{15}{4}.$$

ESERCIZIO 3

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 x^5 e^{x^3} dx .$$

Cominciamo col ricercare le primitive attraverso l'integrazione per parti:

$$\int x^5 e^{x^3} dx = \int x^3 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int x^3 3x^2 e^{x^3} dx =$$

(poiché $3x^2 e^{x^3}$ è la derivata prima di e^{x^3})

$$= \frac{1}{3}x^3 e^{x^3} - \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}x^3 e^{x^3} - \frac{1}{3}e^{x^3} + c .$$

A questo punto possiamo calcolare l'integrale:

$$\int_0^1 x^5 e^{x^3} dx = \left[\frac{1}{3}x^3 e^{x^3} - \frac{1}{3}e^{x^3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

In altro modo poteva essere utile porre, prima di calcolare l'integrale, $x^3 = t$ da cui $3x^2 dx = dt$. Con tale sostituzione, sostituendo anche gli estremi, l'integrale diventa:

$$\frac{1}{3}\int_0^1 te^t dt = \left[\frac{1}{3}e^t(t-1)\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

ESERCIZIO 4

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^2+x}{(x+1)^2(x^2+4)} dx .$$

Notiamo che il denominatore presenta una radice reale con molteplicità due e due radici complesse coniugate. Per risolvere l'integrale è necessario scomporre la funzione integranda nella seguente maniera:

$$\frac{x^2+x}{(x+1)^2(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$\frac{x^2+x}{(x+1)^2(x^2+4)} \equiv \frac{A(x+1)(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+4)}$$

si ottiene:

$$\frac{x^2+x}{(x+1)^2\left(x^2+4\right)} \equiv \frac{(A+C)x^3+\left(A+B+2C+D\right)x^2+(4A+C+2D)x+4A+4B+D}{(x+1)^2\left(x^2+4\right)}$$

da cui:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B+2C+D=1 \\ 4A+C+2D=1 \\ 4A+4B+D=0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} A=-\dfrac{1}{5} \\ B=0 \\ C=\dfrac{1}{5} \\ D=\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

dunque:

$$\int_0^1 \frac{x^2+x}{(x+1)^2\left(x^2+4\right)}dx = \int_0^1 \left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+4\right)}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{5}\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{x}{x^2+4}dx + \frac{4}{5}\int_0^1 \frac{1}{x^2+4}dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{5}\ln|x+1| + \frac{1}{10}\ln\left|x^2+4\right| + \frac{2}{5}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{5}\ln 2 + \frac{1}{10}\ln 5 + \frac{2}{5}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{10}\ln 4 =$$

$$= -\frac{2}{5}\ln 2 + \frac{1}{10}\ln 5 + \frac{2}{5}\arctan\left(\frac{1}{2}\right).$$

ESERCIZIO 5

Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x^2+1\right)\cos x\, dx$.

Ricaviamo le primitive attraverso l'integrazione per parti:

$$\int \left(x^2+1\right)\cos x\, dx = \left(x^2+1\right)\sin x - \int 2x\sin x\, dx =$$

$$= \left(x^2+1\right)\sin x + 2x\cos x - \int 2\cos x\, dx =$$

$$= \left(x^2+1\right)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c.$$

A questo punto è possibile calcolare l'integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x^2+1\right)\cos x\, dx = \left[\left(x^2+1\right)\sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$
$$= \left(\frac{\pi^2}{16}+1\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2}\,.$$

ESERCIZIO 6

Calcolare il seguente integrale: $\int_1^2 \frac{-2x+1}{(x+4)(x+3)^2}\, dx$.

Il denominatore presenta uno zero con molteplicità uno e uno zero con molteplicità due (caso già analizzato nell'esercizio 2, ma utile da ripetere).
La scomposizione è la seguente:

$$\frac{-2x+1}{(x+4)(x+3)^2} \equiv \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$$

$$\frac{-2x+1}{(x+4)(x+3)^2} \equiv \frac{A(x+3)^2 + B(x+4)(x+3) + C(x+4)}{(x+4)(x+3)^2}$$

$$\frac{-2x+1}{(x+4)(x+3)^2} \equiv \frac{A\left(x^2+6x+9\right) + B(x^2+7x+12) + C(x+4)}{(x+4)(x+3)^2}$$

$$\frac{-2x+1}{(x+4)(x+3)^2} \equiv \frac{(A+B)x^2 + (6A+7B+C)x + 9A+12B+4C}{(x+4)(x+3)^2}$$

Da cui, per l'identità, ricaviamo che:

$\begin{cases} A+B=0 \\ 6A+7B+C=-2 \\ 9A+12B+4C=1 \end{cases}$ e risolvendo il sistema otteniamo i seguenti valori $\begin{cases} A=9 \\ B=-9 \\ C=7 \end{cases}$.

Dunque possiamo riscrivere l'integrale di partenza nel seguente modo:

$$\int_1^2 \left[\frac{9}{x+4} - \frac{9}{x+3} + \frac{7}{(x+3)^2}\right] dx = \int_1^2 \frac{9}{x+4}\, dx - \int_1^2 \frac{9}{x+3}\, dx + \int_1^2 \frac{7}{(x+3)^2}\, dx =$$

$$= \left[9\ln|x+4| - 9\ln|x+3| - \frac{7}{(x+3)}\right]_1^2 = 9\ln 6 - 18\ln 5 + 9\ln 4 + \frac{7}{20}\,.$$

Potevamo scomporre la funzione integranda anche in un altro modo. Infatti da:

$$\frac{-2x+1}{(x+4)(x+3)^2} \equiv \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$$

si ricava che:

$$-2x+1 \equiv A(x+3)^2 + B(x+4)(x+3) + C(x+4).$$

E poiché l'identità deve essere verificata per ogni valore di x:
quando $x=-3$, sostituendo si ottiene $C=5$
quando $x=-4$, sostituendo si ottiene $A=9$
e infine, sostituendo quanto trovato nell'identità, si ottiene $B=-9$ in modo molto semplice.

ESERCIZIO 7

Risolvere il seguente integrale definito: $\int_{-1}^{1} \frac{3}{x^2+2x+5}dx$.

Si tratta di una funzione razionale il cui denominatore è un polinomio di secondo con radici complesse e coniugate.
Cominciamo con la ricerca delle primitive:

$$\int \frac{3}{x^2+2x+5}dx = 3\int \frac{1}{x^2+2x+1+4}dx = 3\int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx =$$

$$=3\int \frac{1}{4\left[\frac{(x+1)^2}{4}+1\right]}dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}dx =$$

$$\frac{3}{4}\cdot 2\int \frac{1/2}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}dx = \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)+c.$$

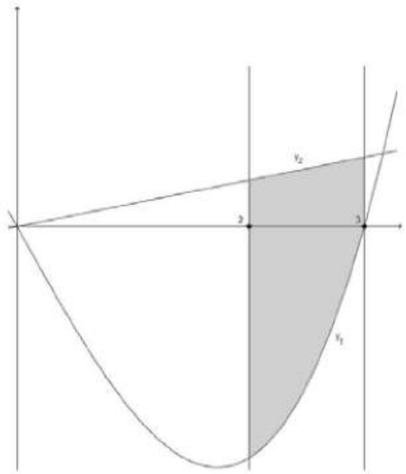
Quindi:

$$\int_{-1}^{1} \frac{3}{x^2+2x+5}dx = \left[\frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{3}{2}\arctan(1) - \frac{3}{2}\arctan(0) = \frac{3}{8}\pi$$

ESERCIZIO 8

Calcolare l'area della regione finita di piano compresa tra le funzioni $y_1 = x^3 - 9x$ e $y_2 = x$ e tra le due rette di equazioni $x=2$ e $x=3$.

Rappresentiamo (non in scala) sul piano cartesiano la regione di piano di cui si richiede il calcolo dell'area:



Poiché l'area della regione è la parte di piano compresa tra le funzioni y_1 e y_2 e delimitata dai valori $x=2$ e $x=3$, l'area richiesta è data da:

$$A=\int_2^3 |y_1-y_2|\,dx=\int_2^3 \left|x^3-9x-x\right|dx\,.$$

Poiché dal grafico notiamo che la funzione y_2 è al di sopra della funzione y_1, si ha che:

$$A=\int_2^3 (y_2-y_1)\,dx=\int_2^3 \left(x-x^3+9x\right)dx=$$

$$=\int_2^3 \left(10x-x^3\right)dx=\left[5x^2-\frac{x^4}{4}\right]_2^3=\frac{35}{4}\,.$$

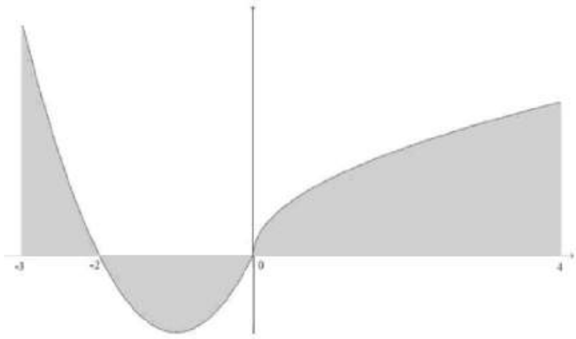
ESERCIZIO 9

Data la seguente funzione definita a tratti:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & -3\le x<0 \\ \sqrt{x} & 0\le x\le 4 \end{cases}$$

calcolare l'area della regione di piano compresa tra la funzione data e l'asse delle ascisse.

Si tratta di una funzione quasi elementare il cui grafico risulta:



Poiché è una funzione definita a tratti dobbiamo separare l'integrale rispetto alle due definizioni della funzione. Inoltre nella parte di piano delimitata dalle rette di equazione $x=-2$ e $x=0$, il grafico della funzione si trova nel semipiano negativo delle ordinate, quindi, per calcolare l'area, dobbiamo considerare (come sempre) il valore assoluto della funzione::

$$A=\int_{-3}^{0}\left|x^2+2x\right|dx+\int_{0}^{4}\sqrt{x}\,dx=\int_{-3}^{-2}\left(x^2+2x\right)dx+\int_{-2}^{0}\left(-x^2-2x\right)dx+\int_{0}^{4}\sqrt{x}\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-3}^{-2}-\left[\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_{0}^{4}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{16}{3}=\frac{24}{3}=8\,.$$

ESERCIZIO 10

Calcolare il seguente integrale definito: $\displaystyle\int_{3}^{4}\frac{e^x+2}{e^{2x}-5e^x+4}dx$.

Si tratta di una funzione razionale di e^x, ricerchiamo le primitive con il metodo di sostituzione ponendo:

$e^x=t$, $x=\ln t$, $dx=\dfrac{1}{t}dt$

da cui

$$\int\frac{e^x+2}{e^{2x}-5e^x+4}dx=\int\frac{t+2}{\left(t^2-5t+4\right)t}dt=\int\frac{t+2}{(t-1)(t-4)t}dt\,.$$

Si tratta di una funzione razionale, le radici al denominatore sono semplici (cioè reali con molteplicità uno) e quindi si procede nel seguente modo:

$$\frac{t+2}{(t-1)(t-4)t}\equiv\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t-4}+\frac{C}{t}$$

$$\frac{t+2}{(t-1)(t-4)t}\equiv\frac{At(t-4)+Bt(t-1)+C(t-4)(t-1)}{(t-1)(t-4)t}$$

$$\frac{t+2}{(t-1)(t-4)t} \equiv \frac{(A+B+C)t^2+(-4A-B-5C)t+4C}{(t-1)(t-4)t}.$$

Da cui, per l'identità:

$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -4A-B-5C=1 \\ 4C=2 \end{cases}$, risolvendo si ottiene $\begin{cases} A=-1 \\ B=1/2 \\ C=1/2 \end{cases}$.

È possibile riscrivere l'integrale nel seguente modo e risolverlo:

$$\int \frac{t+2}{(t-1)(t-4)t}dt = -\int \frac{1}{t-1}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-4}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}dt =$$

$$= -\ln|t-1| + \frac{1}{2}\ln|t-4| + \frac{1}{2}\ln|t| + c$$

tornando all'integrale dato:

$$\int \frac{e^x+2}{e^{2x}-5e^x+4}dx = -\ln\left|e^x-1\right| + \frac{1}{2}\ln\left|e^x-4\right| + \frac{1}{2}\ln\left|e^x\right| + c =$$

$$= -\ln\left|e^x-1\right| + \frac{1}{2}\ln\left|e^x-4\right| + \frac{1}{2}x + c.$$

Il valore dell'integrale definito è dunque dato da:

$$\int_3^4 \frac{e^x+2}{e^{2x}-5e^x+4}dx = \left[-\ln\left|e^x-1\right| + \frac{1}{2}\ln\left|e^x-4\right| + \frac{1}{2}x\right]_3^4 = \ln\left|\frac{\left(e^3-1\right)\sqrt{e^4-4}}{\left(e^4-1\right)\sqrt{e^3-4}}\right| + \frac{1}{2}.$$

ESERCIZI PARTICOLARI

ESERCIZIO 1

Data la funzione $F(x) = \int_2^x \frac{e^{t-3}}{16+t^2}dt$

a) calcolare $F(2)$, $F'(2)$, $F''(2)$;

b) scrivere l'equazione della retta tangente nel punto $x=2$;

c) scrivere il polinomio di Taylor arrestato al secondo ordine in $x=2$ e rappresentare la funzione nell'intorno considerato.

a) $F(2) = \int_2^2 \frac{e^{t-3}}{16+t^2}dt = 0$.

Per il teorema di Torricelli-Barrow:

$F'(x) = \frac{e^{x-3}}{16+x^2}$, quindi $F'(2) = \frac{e^{2-3}}{16+4} = \frac{1}{20e}$

$$F''(x)=\frac{e^{x-3}\left(x^2-2x+16\right)}{\left(16+x^2\right)^2}$$, quindi $F''(2)=\frac{1}{25e}$

b) L'equazione della retta tangente è:

$$y-F(2)=F'(2)(x-2)$$

sostituendo i valori ottenuti si ottiene:

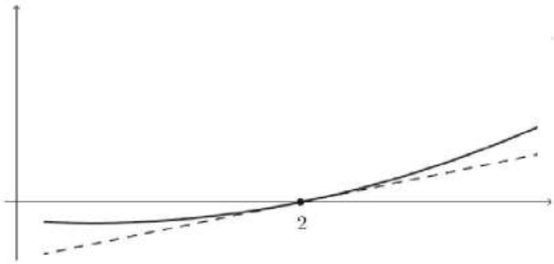
$$y=\frac{x}{20e}-\frac{1}{10e}$$

c) Il polinomio Taylor arrestato al secondo ordine in $x=2$ è:

$$P_{2,2}(x)=F(2)+F'(2)(x-2)+\frac{F''(2)}{2}(x-2)^2$$

$$P_{2,2}(x)=\frac{1}{20e}(x-2)+\frac{1}{50e}(x-2)^2.$$

Deduciamo il seguente grafico nell'intorno di $x=2$ tenendo conto del fatto che la derivata prima nel punto è positiva ma è minore di uno e la derivata seconda è maggiore di zero:



ESERCIZIO 2

Calcolare i seguenti integrali:

1) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$;

2) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}dx$.

SOLUZIONI

1) In questo caso, poiché x è elevato a una potenza dispari, basta sostituire $\sqrt{x^2+1}=t$, da cui $x^2+1=t^2$ e di conseguenza $x\,dx=t\,dt$. L'integrale diventa:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_1^{\sqrt{2}}\frac{t}{t}dt=\int_1^{\sqrt{2}}dt=\sqrt{2}-1.$$

2) Per calcolare l'integrale dato occorre eseguire una particolare sostituzione (molto precisa e legata al tipo di integrale), bisogna porre: $x = 2\sinh t$, in tal caso $dx = 2\cosh t\, dt$ e l'integrale diventa:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \int_0^{Sett\sinh(1/2)} \frac{4\sinh^2 t}{\sqrt{4\sinh^2 t+4}}\,2\cosh t dt = \int_0^{Sett\sinh(1/2)} \frac{4\sinh^2 t}{2\cosh t}\,2\cosh t\, dt =$$

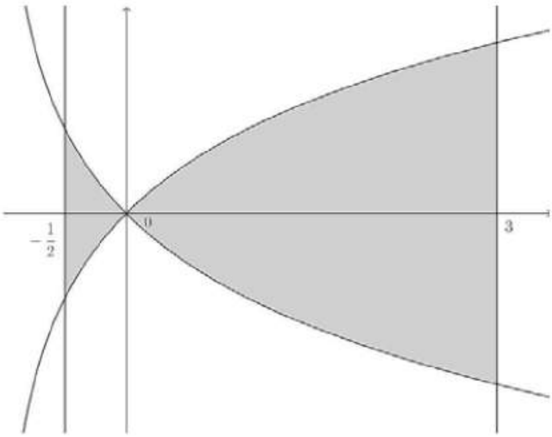
$$= \int_0^{Sett\sinh(1/2)} 4\sinh^2 t\, dt = 4\int_0^{Sett\sinh(1/2)} \frac{\cosh 2t - 1}{2}\,dt = 4\left[\frac{1}{4}\sinh 2t - \frac{1}{2}t\right]_0^{Sett\sinh(1/2)} =$$

$$= \left[\sinh 2t - 2t\right]_0^{Sett\sinh(1/2)}.$$

ESERCIZIO 3

Calcolare l'area della regione finita di piano compresa tra i grafici delle due funzioni $y_1 = \ln(1+x)$ e $y_2 = -\ln(1+x)$ e le rette di equazione $x = -\dfrac{1}{2}$ e $x = 3$.

L'area della regione di piano da calcolare è la seguente:



L'area si calcola nel seguente modo:

$$\int_{-1/2}^{3} |y_1 - y_2|\,dx$$

osservando la simmetria della regione rispetto all'asse delle ascisse, l'integrale diventa:

$$\int_{-1/2}^{3} |y_1 - y_2|\,dx = 2\left(\int_{-1/2}^{0} -\ln(x+1)\,dx + \int_0^3 \ln(x+1)\,dx\right) =$$

$$= 2\left(\left[-x\ln(x+1) \right]_{-1/2}^{0} + \int_{-1/2}^{0} \frac{x}{x+1}\,dx + \left[x\ln(x+1) \right]_{0}^{3} - \int_{0}^{3} \frac{x}{x+1}\,dx \right) =$$

$$= 2\left(\left[-x\ln(x+1) + x - \ln|x+1| \right]_{-1/2}^{0} + \left[x\ln(x+1) - x + \ln|x+1| \right]_{0}^{3} \right) =$$

$$= 2\left(\left[-x\ln(x+1) + x - \ln|x+1| \right]_{-1/2}^{0} + \left[x\ln(x+1) - x + \ln|x+1| \right]_{0}^{3} \right) = 15\ln 2 - 5\,.$$

ESERCIZIO 4

Data la funzione $F(x) = \int_{1}^{x} \frac{t^3 - 4t}{\ln\left(1+t^2\right)}\,dt$

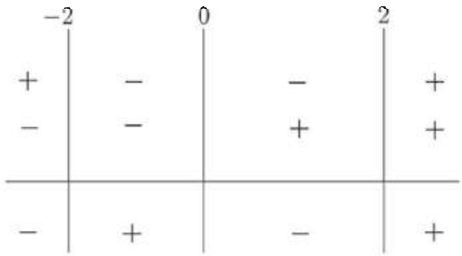
a) calcolare e studiare la derivata prima individuando eventuali punti di massimo e/o minimo;

b) calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to 1} \frac{F(x)}{\ln x}$.

a) Il dominio della funzione è tutto l'insieme dei numeri reali. Calcoliamo la derivata:

$$F'(x) = \frac{x^3 - 4x}{\ln\left(1+x^2\right)}\,.$$

Il denominatore è sempre positivo, quindi il segno della derivata prima dipende dal numeratore $x^3 - 4x$; studiamo il segno di $x^3 - 4x$:



Quindi $x = -2$ è un punto di minimo locale, $x = 0$ è un punto di massimo locale e infine $x = 2$ è un punto di minimo locale.

b) Il limite dato si presenta come forma di indecisione $\frac{0}{0}$, applichiamo il teorema di de l'Hospital (sono verificate tutte le ipotesi):

$$\lim_{x\to 1} \frac{F(x)}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{x^3 - 4x}{\ln\left(1+x^2\right)}}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 4x^2}{\ln\left(1+x^2\right)} = -\frac{3}{\ln 2}\,.$$

ESERCIZIO 5

Calcolare la derivata prima per ciascuna delle seguenti funzioni integrali:

1) $F(x)=\int_{2}^{4x^2}\frac{\ln\left(1+t^2\right)}{\sqrt[3]{t^3-1}}dt$;

2) $G(x)=\int_{x^2+1}^{\sin x}\frac{2^{-t}}{\sqrt[5]{3-t}}dt$.

SOLUZIONI

In tutti e due i casi applichiamo il teorema di Torricelli Barrow con l'unica attenzione che si tratta di funzioni composte. Ricordiamo la regola: se $F(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(t)dt$, allora $F'(x)=f(\beta(x))\cdot\beta'(x)-f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$.

1) $F'(x)=\frac{\ln\left(1+16x^4\right)}{\sqrt[3]{\left(4x^2\right)^3-1}}\cdot 8x$.

2) $G'(x)=\frac{2^{-\sin x}}{\sqrt[5]{3-\sin x}}\cdot\cos x-\frac{2^{-(x^2+1)}}{\sqrt[5]{3-(x^2+1)}}\cdot 2x$.

ESERCIZIO 6

Calcolare per serie il seguente integrale: $\int_0^1\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$. Maggiorare l'errore che si commette assumendo come risultato la somma dei primi 2 termini della serie, precisando se il risultato è ottenuto per difetto o per eccesso. Motivare il percorso seguito.

Notiamo che la funzione integranda è continua in tutto l'intervallo $[0,1]$. Ricordiamo che lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\cos x$ è il seguente:

$\cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, la serie converge per ogni x reale.

Lo sviluppo in serie di Taylor della funzione integranda è quindi:

$\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{(2n)!2^{2n}}$ e anche questa converge per ogni x reale.

È possibile dunque calcolare l'integrale dato per serie nell'intervallo $[0,1]$, infatti si tratta di una serie di Taylor e quindi si può integrare termine a termine:

$$\int_0^1 \cos\left(\frac{x^2}{2}\right)dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!2^{2n}} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!2^{2n}} \int_0^1 x^{4n} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!2^{2n}} \left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!2^{2n}(4n+1)}.$$

Quella ottenuta è una serie numerica con termini di segno alternato. Notiamo che si tratta di una serie convergente, l'errore è minore del primo termine trascurato quindi del terzo termine (se indichiamo con b_n il generico termine della serie, si tratta di b_2):

$$|E| < b_2 = \frac{1}{4!\ 16 \cdot 9} = \frac{1}{3456}.$$

Il valore approssimato della somma è dato da $b_0 - b_1 = 1 - \frac{1}{40}$ e ovviamente l'approssimazione è per difetto.

ESERCIZI PROPOSTI

ESERCIZIO 1

Calcolare il seguente integrale definito: $\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2} - \frac{3x+1}{x^3 - 9x}\right)dx$

ESERCIZIO 2

Trovare la primitiva della funzione $g(x) = \left(x^2 - 3x\right)e^{3x}$ passante per il punto $(0,2)$.

ESERCIZIO 3

Trovare l'insieme delle primitive delle seguenti funzioni:

1) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 4x + 5}$;

2) $g(x) = \dfrac{x-4}{x^2(x+5)}$;

3) $h(x) = \dfrac{x^2+2}{(x-1)^2(2-x)}$;

4) $l(x) = \dfrac{2x+1}{(x-1)(x^2+x+5)}$.

ESERCIZIO 4

Risolvere il seguente integrale definito:

$$\int_1^2 \frac{2t+1}{(t-4)(t-3)^2}\,dt\,.$$

ESERCIZIO 5

Calcolare l'integrale definito:

$$\int_0^1 \frac{e^{1-2\sqrt{x+3}}}{\sqrt{x+3}}\,dx\,.$$

ESERCIZIO 6

Calcolare l'integrale definito:

$$\int_1^e \frac{\sqrt{3+\ln x}}{x}\,dx\,.$$

ESERCIZIO 7

Calcolare l'integrale:

$$\int_2^3 \frac{2x+3}{x\left(x^2-1\right)}\,dx\,.$$

ESERCIZIO 8

Calcolare i seguenti integrali:

1) $\displaystyle\int_0^1 \left(x^2+x\right)e^{3x}\,dx\,;$

2) $\displaystyle\int_{-1}^0 \left(x^2e^{-2x}+\frac{x+1}{1+9x^2}\right)dx\,;$

3) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x^2-2\left(x+|x|\right)+4}\,dx\,.$

ESERCIZIO 9

Calcolare i seguenti integrali:

1) $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\,dx$;

2) $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{4+x^2}\,dx$.

ESERCIZIO 10

Data la funzione

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x\le 0 \\ x\sin\left(x^2\right) & 0<x<1 \\ \dfrac{\ln x}{x} & x\ge 1 \end{cases}$$

calcolare prima $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ e poi $\displaystyle\int_{-2}^3 f(x)dx$.

ESERCIZIO 11

Calcolare il valore dei seguenti integrali definiti:

1) $\displaystyle\int_3^4 \frac{x-1}{x^4-16}\,dx$;

2) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{2x+1}{9x^2-1}+\frac{2}{4x^2+1}\right)dx$.

ESERCIZIO 12

Calcolare l'area della regione finita di piano compresa tra le funzioni $y_1=\sqrt{x+1}$ e $y_2=x$ e le rette di equazioni $x=2$ e $x=6$.

ESERCIZIO 13

Calcolare l'area della regione finita di piano compresa tra l'asse delle ascisse, la funzione $y=\dfrac{x^2-3x+2}{4x-x^2}$ e le rette di equazioni $x=1$ e $x=3$.

ESERCIZIO 14

Data la funzione $g(x)=\ln\left(|x|+1\right)$, calcolare $\displaystyle\int_{-1}^1 g(x)dx$.

ESERCIZIO 15

Data la funzione $F(x)=\int_0^x \frac{t^2+4t}{e^t+1}dt$

a) calcolare il dominio;
b) calcolare e studiare la derivata prima individuando eventuali punti di massimo e/o minimo;
c) scrivere il polinomio di MacLaurin al secondo ordine e rappresentare la funzione nell'intorno considerato.

ESERCIZIO 16

Calcolare la derivata prima per ciascuna delle seguenti funzioni integrali:

1) $F(x)=\int_{3x^3}^{1} \frac{2t}{e^{t^2}+1}dt$;

2) $G(x)=\int_{-x^3+x}^{\ln x} \frac{\sqrt[7]{3+2t}}{\ln|t+1|}dt$.

9 INTEGRALI GENERALIZZATI E FUNZIONI INTEGRALI

“Esplosione”
scultura di Paolo Mazzuferi
anno 2012

PREMESSA

Ricordiamo che esistono due tipi di integrali generalizzati, uno riferito a una funzione illimitata da integrare su un intervallo limitato (integrale di prima specie), l'altro riferito a una funzione limitata da integrare su un intervallo illimitato (integrale di seconda specie).

Integrale di prima specie: una funzione f definita e continua (tranne al più un'infinità numerabile di discontinuità di salto) in un intervallo $[a,b)$ che tende a $+\infty$ per $x \to b^-$ si dice integrabile in senso generalizzato se esiste finito $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$; il valore finito di tale limite è il valore dell'integrale: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$.
In tal caso si dice anche che l'integrale converge. Se il limite risulta infinito o non esiste, si dice, rispettivamente, che l'integrale diverge o non esiste.
Ricordiamo che in questo caso, in cui la funzione integranda è infinita, l'integrale converge quando l'ordine di infinito è minore di $h < 1$; sottolineiamo che se la funzione integranda tende a un valore finito allora l'integrale converge.

Integrale di seconda specie: una funzione f definita e continua (tranne al più un'infinità numerabile di discontinuità di salto) in $[a,+\infty)$ si dice integrabile in senso generalizzato se esiste finito $\lim\limits_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)\,dx$; il valore finito di tale limite è il valore dell'integrale: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)\,dx$.
In tal caso si dice anche che l'integrale converge. Se il limite risulta infinito o non esiste, si dice, rispettivamente, che l'integrale diverge o non esiste.
Questa tipologia di integrali converge solo nel caso in cui la funzione integranda risulta un infinitesimo di ordine maggiore di $k > 1$; in tutti gli altri casi diverge.

Ricordiamo che esistono dei criteri di convergenza (confronto, confronto asintotico, assoluta convergenza).

Ricordiamo anche che il **dominio di una funzione integrale** $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ è il più grande intervallo I contenente x_0 e tale che per ogni $x \in I$ la funzione risulta integrabile (in senso proprio o generalizzato) sull'intervallo $[x_0,x]$.

Ricordiamo anche in questo caso il **Teorema di Torricelli-Barrow** che afferma data una funzione f integrabile su un intervallo $[a,b]$ e definita la funzione integrale

$F(x)=\int_c^x f(t)dt$ con $c,x\in[a,b]$, allora la funzione integrale F risulta continua su tutto $[a,b]$ e se f è anche continua, allora F è derivabile ed è $F'(x)=f(x)$.

In questo capitolo sono presenti esempi di applicazione dell'integrale generalizzato per la maggiorazione del resto delle serie armoniche generalizzate; concluderemo con esempi di calcolo di integrali con l'uso delle serie numeriche.

ESEMPI GUIDATI

ESEMPIO 1

Discutere, in base alla definizione di integrale generalizzato, la convergenza o meno dei seguenti integrali:

1) $\int_0^3 \frac{1}{x^2}dx$;

2) $\int_0^1 x\ln x\,dx$;

3) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$;

4) $\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}dx$;

5) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

SOLUZIONI

1) Applichiamo la definizione di integrale di prima specie:

$\int_0^3 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^3 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{x}\right]_\varepsilon^3 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{\varepsilon}\right]=+\infty$, se ne deduce che l'integrale diverge e quindi la funzione non è integrabile in senso generalizzato.

Notiamo che la funzione integranda per $x\to 0$ è un infinito di ordine 2 pertanto l'integrale diverge.

2) Analogamente a quanto fatto sopra:

$\int_0^1 x\ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 x\ln x\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon^2}{2}\ln\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, la funzione è integrabile in senso generalizzato.

Notiamo che la funzione integranda per $x \to 0$ tende a zero e quindi è integrabile nell'intervallo $[0, 1]$.

3) In questo caso utilizziamo la definizione dell'integrale di seconda specie:
$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \lim_{c \to +\infty} \left[2\sqrt{x-1}\right]_1^c = \lim_{c \to +\infty} \left(2\sqrt{c-1}\right) = +\infty$, l'integrale diverge. Notiamo che la funzione integranda per $x \to +\infty$ è un infinitesimo di ordine 1/2 pertanto l'integrale diverge.

4) Nel seguente integrale di seconda specie, notiamo subito che la funzione integranda ha la forma di $\frac{f'}{f}$ a meno di una costante moltiplicativa quindi $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} dx = 2\ln\left|\sqrt{x}-1\right| + k$. Allora:

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} dx = \lim_{c \to +\infty} \int_4^c \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)} dx = \lim_{c \to +\infty} \left[2\ln\left|\sqrt{x}-1\right|\right]_4^c = \lim_{c \to +\infty} \left(2\ln\left|\sqrt{c}-1\right|\right) = +\infty,$$

l'integrale diverge.

5) Per quanto riguarda l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ dobbiamo controllare la convergenza sia per $x \to 0$ sia per $x \to +\infty$, quindi: $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx + \int_2^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ essendo $x = 2$ un punto in cui la funzione è continua.

Procediamo con la definizione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^2 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx + \lim_{c \to +\infty} \int_2^c \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_\varepsilon^2 + \lim_{c \to +\infty} \left[-2e^{-\sqrt{x}}\right]_2^c =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-2e^{-\sqrt{2}} + 2e^{-\sqrt{\varepsilon}}\right] + \lim_{c \to +\infty} \left[-2e^{-\sqrt{c}} + 2e^{-\sqrt{2}}\right] = 2,$$ l'integrale converge.

ESEMPIO 2

Utilizzando i criteri noti e motivando il percorso seguito, discutere la convergenza o meno dei seguenti integrali:

1) $\int_0^{+\infty} (x + x^2 + 5)e^x dx$;

2) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$;

3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+e^{-x}}{x^2+2x+\ln x}dx$;

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{1-\cos x}dx$;

5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$;

6) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{x^2+x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$.

SOLUZIONI

1) Nell'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (x+x^2+5)e^x dx$ analizziamo che cosa accade per $x \to +\infty$; qui la funzione integranda è asintotica a x^2e^x che tende a $+\infty$. L'integrale diverge.

2) Il problema si pone per $x \to 3$, in tal caso per il criterio del confronto asintotico $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{6(3-x)}}$, la funzione integranda risulta essere un infinito di ordine $\frac{1}{2}$, pertanto l'integrale $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$ converge.

3) Utilizziamo ancora il criterio del confronto asintotico, per $x \to +\infty$ $\displaystyle\frac{x+e^{-x}}{x^2+2x+\ln x} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$. La funzione asintotica non è integrabile in senso generalizzato quindi anche quella di partenza non lo è. L'integrale diverge.

4) Utilizziamo di nuovo il confronto asintotico: per $x \to 0$ $\displaystyle\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{1-\cos x} \sim \frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{x^{5/3}}$, quest'ultimo risulta essere un infinito di ordine $\frac{5}{3}$. L'integrale diverge.

5) Controlliamo la convergenza dell'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ con i criteri dell'assoluta convergenza e del confronto.
$\displaystyle\left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ converge per $x \to 0$ quindi anche l'integrale della minorante converge assolutamente. Di conseguenza converge anche semplicemente.

6) Per la convergenza dell'integrale $\int_0^4 \frac{1}{x^2+x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$ applichiamo i criteri dell'assoluta convergenza e del confronto:

$\left|\frac{1}{x^2+x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{x^2+x} \sim \frac{1}{x}$ per $x \to 0$; $\int_0^4 \frac{1}{x}dx$ diverge, quindi in questo caso, per ora, con questo criterio, non possiamo concludere nulla sulla convergenza o meno dell'integrale dato.

ESEMPIO 3

Calcolare il valore del seguente integrale: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$.

Dobbiamo solo analizzare l'intorno di $x=0$. Per l'integrale $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$ notiamo immediatamente che la funzione integranda per $x \to 0$ risulta un infinito di ordine 1/2 e quindi è integrabile in senso generalizzato, cioè l'integrale converge.

Calcoliamo $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$ utilizzando la sostituzione $t=\sqrt{x}$ e $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ e otteniamo

$\int \frac{2}{t^2+1}dt = 2\arctan t + k$, quindi $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = 2\arctan\sqrt{x} + k$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\arctan\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = 2\arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{2}.$$

ESEMPIO 4

Discutere la convergenza per ciascuno dei seguenti integrali:

1) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}dx$;

2) $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{(x+4)^2}dx$;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}-1}{x^2\left(1+x+x^2\right)}dx$.

SOLUZIONI

1) Per $x \to +\infty$ la funzione integranda risulta essere un infinitesimo di ordine maggiore di qualunque potenza di $\frac{1}{x}$, infatti sappiamo che per $x \to +\infty$ $e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^n}\right)$, quindi l'integrale converge.

2) Analogo ragionamento ma per $x \to -\infty$. La funzione integranda tende a zero con ordine maggiore di qualunque potenza di $\frac{1}{x}$. L'integrale converge.

3) Dobbiamo analizzare la convergenza per $x \to +\infty$, per $x \to -\infty$ e per $x \to 0$.

Per $x \to +\infty$ $\quad \dfrac{e^{-x^2}-1}{x^2\left(1+x+x^2\right)} \sim -\dfrac{1}{x^4}$ infinitesimo di ordine 4, l'integrale converge.

Allo stesso modo per $x \to -\infty$ dove l'integrale converge di nuovo.

Infine, per $x \to 0$ $\quad \dfrac{e^{-x^2}-1}{x^2\left(1+x+x^2\right)} \sim \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$, l'integrale converge.

Quindi l'integrale dato converge.

ESERCIZI SVOLTI

ESERCIZIO 1

Motivare se il seguente integrale converge o diverge: $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}\,dx$.

La funzione integranda non è continua in $x = 0$ e per $x \to 0^+$

$\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt[4]{1-\cos x}} \sim \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{\frac{1}{2}x^2}} = \sqrt[4]{2}$; quindi la funzione è integrabile in senso generalizzato, l'integrale converge.

ESERCIZIO 2

Discutere la convergenza del seguente integrale: $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x^2+x}{x^2+x+3}\,dx$.

È necessario analizzare cosa accade per $x \to -\infty$, in tale intorno la funzione integranda tende a 1, quindi non è integrabile in senso generalizzato (ricordiamo che l'unico caso in cui tale tipologia di integrale converge è quando la funzione integranda è un infinitesimo di ordine maggiore di $\dfrac{1}{|x|^n}$, con $n > r > 1$). L'integrale dato diverge.

ESERCIZIO 3

Motivare se il seguente integrale converge o diverge: $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{3x}-1}{x\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Per $x \to 0$ utilizziamo il criterio del confronto asintotico: $\frac{e^{3x}-1}{x\sqrt[3]{x}} \sim \frac{3x}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$ che è un infinito di ordine $\frac{1}{3}$ e quindi integrabile.

Anche per $x \to -\infty$ utilizziamo il criterio del confronto asintotico: $\frac{e^{3x}-1}{x\sqrt[3]{x}} \sim \frac{-1}{x^{4/3}}$ che è un infinitesimo di ordine $\frac{4}{3}$ e quindi integrabile. L'integrale converge.

ESERCIZIO 4

Discutere la convergenza dell'integrale: $\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos\left(e^{x}\right)+\sin x}{x(x-1)^{1/2}}\,dx$.

Per $x \to 1$ applichiamo il criterio del confronto asintotico e otteniamo $\frac{\cos\left(e^{x}\right)+\sin x}{x(x-1)^{1/2}} \sim \frac{\cos(e)+\sin 1}{(x-1)^{1/2}}$ un infinito di ordine $\frac{1}{2}$ che è integrabile in senso generalizzato.
Per $x \to +\infty$ applichiamo il criterio di assoluta convergenza e otteniamo $\left|\frac{\cos\left(e^{x}\right)+\sin x}{x(x-1)^{1/2}}\right| \le \frac{2}{x^{3/2}}$, la funzione maggiorante per $x \to +\infty$ è un infinitesimo di ordine $\frac{3}{2}$ quindi integrabile in senso generalizzato, l'integrale converge. L'integrale dato pertanto converge assolutamente e di conseguenza semplicemente per $x \to +\infty$.
In conclusione l'integrale converge.

ESERCIZIO 5

Discutere la convergenza del seguente integrale: $\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$.

Per $x \to 0$ $\frac{\sin x}{x^2} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ che non è integrabile in quanto infinito di ordine 1. L'integrale dato diverge.

ESERCIZIO 6

Discutere la convergenza del seguente integrale: $\int_{-2}^{3} \frac{e^x - 2}{\left(x^2 + x\right)\sqrt[3]{x^3 - x}} dx$.

Nell'intervallo $[-2,3]$ la funzione integranda è discontinua nel punti $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.
Analizziamo per ciascuno di essi l'eventuale convergenza. Per $x \to -1$, la funzione integranda $\frac{e^x - 2}{\left(x^2 + x\right)\sqrt[3]{x^3 - x}} \sim \frac{e^{-1} - 2}{-(x+1)\sqrt[3]{2(x+1)}} = \frac{2 - e^{-1}}{\sqrt[3]{2}\,(x+1)^{4/3}}$, risulta dunque un infinito di ordine $\frac{4}{3} > 1$; l'integrale diverge per $x \to -1$.
A questo punto possiamo concludere che l'integrale dato diverge (indipendentemente da eventuali convergenze in altri intorni).

ESERCIZIO 7

Discutere la convergenza o meno dei seguenti integrali descrivendo il ragionamento seguito:

1) $\int_{0}^{+\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$;

2) $\int_{0}^{+\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right) dx$.

SOLUZIONI

1) Per $x \to 0$ la funzione integranda $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$ quindi è integrabile in senso generalizzato; per $x \to +\infty$, invece, $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \to 1$ quindi non è integrabile. L'integrale dato non converge.

2) Per $x \to 0$ la funzione integranda $x^2 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right) \to 0$ quindi è integrabile in senso generalizzato; per $x \to +\infty$, invece, $x^2 \sin\left(\frac{1}{x^4}\right) \sim x^2 \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^2}$, si tratta di un infinitesimo di ordine 2 e quindi è integrabile in senso generalizzato. L'integrale dato converge.

ESERCIZIO 8

Individuare il dominio delle seguenti funzioni integrali, motivando la scelta effettuata:

1) $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{\sqrt[3]{t-1}}$;

2) $F(x)=\int_0^x \frac{dt}{2-t}$.

SOLUZIONI

1) La $f(t)$ è continua nell'insieme $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$; per $x\to 1$ la funzione integranda risulta un infinito di ordine 1/3 quindi è integrabile in senso generalizzato. Possiamo concludere affermando che il dominio della funzione F coincide con tutto l'insieme dei numeri reali.

2) La $f(t)$ è continua nell'insieme $(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$; per $x\to 2$ la funzione integranda risulta un infinito di ordine 1 quindi non è integrabile in senso generalizzato. Possiamo concludere affermando che il dominio della funzione F, che deve essere continua in esso, coincide con l'insieme $(-\infty,2)$.

ESERCIZIO 9

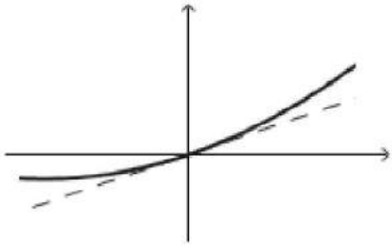
Data la funzione $F(x)=\int_0^x \frac{2^t}{t+3}dt$

a) determinare il dominio;
b) calcolare la derivata prima;
c) scrivere il polinomio di MacLaurin di secondo grado e disegnare il grafico nell'intorno di $x=0$;
d) calcolare il limite della funzione per $x\to+\infty$.

a) La $f(t)$ è continua nell'insieme $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$; per $x\to 3$ la funzione integranda risulta un infinito di ordine 1 quindi non è integrabile in senso generalizzato. Possiamo concludere affermando che il dominio della funzione F, che come abbiamo già affermato nell'esercizio precedente, deve essere continua nel suo dominio, coincide con l'insieme $(-\infty,3)$;

b) Per calcolare la derivata prima basta ricordare il teorema di Torricelli Barrow: $F'(x)=\frac{2^x}{x+3}$;

c) Il polinomio di MacLaurin è il seguente: $P_2(x) = F(0) + F'(0) \cdot x + \frac{F''(0)}{2!} \cdot x^2$, calcoliamo: $F(0) = 0$, $F'(0) = \frac{1}{3}$, $F''(x) = \frac{2^x \ln 2 \cdot (x+3) - 2^x}{(x+3)^2}$ da cui $F''(0) = \frac{3\ln 2 - 1}{9}$. Possiamo scrivere il polinomio richiesto: $P_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{3\ln 2 - 1}{18}x^2$. Dai risultati ottenuti il grafico della funzione nell'intorno del punto $x = 0$ è il seguente:



d) Per $x \to +\infty$ la funzione integranda è un infinito di ordine maggiore di qualunque potenza di x, quindi non è integrabile in senso generalizzato; risulta $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$ (notiamo che la funzione integranda per $x \to +\infty$, è positiva e l'intervallo di integrazione è crescente).

ESERCIZIO 10

Determinare per $x \to 0$ l'ordine di infinitesimo della seguente funzione: $F(x) = \frac{x^4}{4} - x + \int_0^x e^{-t^3} dt$.

Confrontiamo, per $x \to 0$, la funzione con l'infinitesimo campione, cioè calcoliamo $\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^\alpha}$ con $\alpha \in R$ e determiniamo il valore di $\alpha \in R$ che rende il limite finito; nel nostro caso: $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{4} - x + \int_0^x e^{-t^3} dt}{x^\alpha}$. Siamo di fronte a una forma di indecisione del tipo $\frac{0}{0}$ e in questo caso, in verità uno dei pochi, risulta utile applicare il teorema di de l'Hospital dopo aver verificato le ipotesi. Abbiamo dunque $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{4} - x + \int_0^x e^{-t^3} dt}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 1 + e^{-x^3}}{\alpha x^{\alpha - 1}}$; ancora una volta la forma di indecisione è $\frac{0}{0}$, ma possiamo utilizzare lo sviluppo di MacLaurin al numeratore, ottenendo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-1+e^{-x^3}}{\alpha\, x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-1+1-x^3+\frac{x^6}{2}+o\left(x^6\right)}{\alpha\, x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^6}{2}+o\left(x^6\right)}{\alpha\, x^{\alpha-1}}.$$

Come abbiamo detto il limite deve risultare un valore finito, questo significa che il numeratore e il denominatore devono avere lo stesso ordine di infinitesimo, ovvero la stessa potenza di x, nel nostro caso deve essere $\alpha-1=6$ ovvero $\alpha=7$.

L'ordine di infinitesimo di $F(x)$ è 7 e per $x\to 0$ si ha che $F(x)\sim\frac{1}{14}x^7$.

ESERCIZIO 11

Discutere la convergenza o meno dei seguenti integrali descrivendo il ragionamento seguito:

1) $\int_0^1 x^2\ln x dx$;

2) $\int_0^1 \frac{x}{\ln^2(x+1)}dx$.

SOLUZIONI

1) Poiché per $x\to 0$, $x^2\ln x\to 0$, l'integrale converge.

2) In questo caso, per $x\to 0$ $\frac{x}{\ln^2(x+1)}\sim\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$ per il criterio del confronto asintotico, l'integrale dato diverge.

ESERCIZIO 12

Discutere la convergenza dei seguenti integrali:

1) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2\ln^2 x}dx$;

2) $\int_0^5\frac{1}{x\ln^2 x}dx$.

SOLUZIONI

Questa tipologia di integrali generalizzati segue la regola relativa alla forma $\int_c^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha\ln^\beta x}dx$ che per $x\to+\infty$ converge solo nei seguenti due casi: $\alpha>1$ e $\forall\beta$, $\alpha=1$ e $\beta>1$; per $x\to 0$ converge solo nei seguenti due casi: $\alpha<1$ e $\forall\beta$, $\alpha=1$ e $\beta<1$.

1) Nel nostro caso l'integrale converge poiché $\alpha = 2$ e quindi siamo nel caso in cui la funzione integranda è un infinitesimo di ordine maggiore di r maggiore di 1.

2) Per la suddetta regola per $x \to 0$ la funzione non è integrabile in senso generalizzato $\alpha = 1$ e $\beta = 2 > 1$ (è possibile controllare anche applicando direttamente la definizione, basta eseguire la sostituzione $t = \ln x$).

ESERCIZIO 13

Discutere al variare del parametro reale λ la convergenza dei seguenti integrali:

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\lambda \left|x^4 - 1\right|^{\lambda/3}} dx$;

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)(x+1)^{1+2\lambda} x^{\frac{1}{2}+\lambda}} dx$;

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda\sqrt{x}} \cos^2 x}{x^{2\lambda}\sqrt{x}} dx$;

4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda x} - 1}{(x^2+1)^\lambda \left(x^3 - 1\right)^{1/5}} dx$;

5) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{\left(x^2 + x\right)^{2\lambda+4}}{\sqrt[3]{x^2 - 4}\left(x^4 + x^2\right)^\lambda} dx$.

SOLUZIONI

1) La funzione integranda non è continua in $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$, pertanto nell'intervallo di integrazione dobbiamo controllare la convergenza dell'integrale per $x \to 0$, per $x \to 1$ e per $x \to +\infty$.

Per $x \to 0$, $\dfrac{1}{x^\lambda \left|x^4 - 1\right|^{\lambda/3}} \sim \dfrac{1}{x^\lambda}$ che converge se $\lambda < 1$.

Per $x \to 1$, $\dfrac{1}{x^\lambda \left|x^4 - 1\right|^{\lambda/3}} = \dfrac{1}{x^\lambda \left(x^2+1\right)^{\lambda/3} (x+1)^{\lambda/3} \left|x-1\right|^{\lambda/3}} \sim \dfrac{1}{2^{2\lambda/3}\left|x-1\right|^{\lambda/3}}$ che converge se $\dfrac{\lambda}{3} < 1$ cioè se $\lambda < 3$.

Per $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{x^\lambda \left|x^4 - 1\right|^{\lambda/3}} \sim \dfrac{1}{x^\lambda \cdot x^{4\lambda/3}} = \dfrac{1}{x^{7\lambda/3}}$, che converge se $\dfrac{7}{3}\lambda > 1$ da cui $\lambda > \dfrac{3}{7}$.

Intersecando i tre intervalli, deduciamo che l'integrale converge se $\dfrac{3}{7} < \lambda < 1$.

2) Nell'intervallo di integrazione dobbiamo controllare la convergenza dell'integrale per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$.

Per $x \to 0$, $\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)(x+1)^{1+2\lambda}\, x^{\frac{1}{2}+\lambda}} \sim \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}+\lambda}}$ che converge se $\dfrac{1}{2}+\lambda<1$ da cui $\lambda<\dfrac{1}{2}$.

Per $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)(x+1)^{1+2\lambda}\, x^{\frac{1}{2}+\lambda}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}\cdot x^{1+2\lambda}\cdot x^{\frac{1}{2}+\lambda}} = \dfrac{1}{x^{2+3\lambda}}$ che converge se $2+3\lambda>1$ da cui $\lambda>-\dfrac{1}{3}$.

Dunque l'integrale converge se $-\dfrac{1}{3}<\lambda<\dfrac{1}{2}$.

3) Anche in questo caso nell'intervallo di integrazione dobbiamo controllare la convergenza dell'integrale per $x \to 0$ e per $x \to +\infty$.

Poiché nella funzione integranda compare un esponenziale, affermiamo subito che per $x \to +\infty$ l'integrale converge solo se $\lambda>0$; in tal caso la funzione integranda è un infinitesimo di ordine superiore a qualsiasi potenza di $\dfrac{1}{x}$ e quindi l'integrale converge.

Per $x \to 0$, $\dfrac{e^{-\lambda\sqrt{x}}\cos^2 x}{x^{2\lambda}\sqrt{x}} \sim \dfrac{1}{x^{2\lambda}\sqrt{x}} = \dfrac{1}{x^{2\lambda+\frac{1}{2}}}$ che converge se $2\lambda+\dfrac{1}{2}<1$ da cui $\lambda<\dfrac{1}{4}$.

L'integrale converge se $0<\lambda<\dfrac{1}{4}$.

4) Nell'intervallo di integrazione dobbiamo controllare la convergenza dell'integrale per $x \to 1$ e per $x \to +\infty$.

Esattamente come nell'esercizio precedente, nella funzione integranda compare un esponenziale, dunque per $x \to +\infty$ l'integrale può convergere solo se $\lambda>0$; in questo caso però:

per $x \to +\infty$, $\dfrac{e^{-\lambda x}-1}{(x^2+1)^{\lambda}\left(x^3-1\right)^{1/5}} \sim \dfrac{-1}{x^{2\lambda}\cdot x^{3/5}} = -\dfrac{1}{x^{2\lambda+\frac{3}{5}}}$ che converge se $2\lambda+\dfrac{3}{5}>1$ da cui $\lambda>\dfrac{1}{5}$. Quindi, intersecando le condizioni $\lambda>0$ e $\lambda>\dfrac{1}{5}$, per $x \to +\infty$ l'integrale converge per $\lambda>\dfrac{1}{5}$;

per $x \to 1$, $\dfrac{e^{-\lambda x}-1}{(x^2+1)^{\lambda}\left(x^3-1\right)^{1/5}} = \dfrac{e^{-\lambda x}-1}{(x^2+1)^{\lambda}(x-1)^{1/5}\left(x^2+x+1\right)^{1/5}} \sim \dfrac{e^{-\lambda}-1}{2^{\lambda}\sqrt[5]{3}\,(x-1)^{1/5}}$ che converge per ogni valore di λ.

Concludiamo affermando che l'integrale converge se $\lambda>\dfrac{1}{5}$.

5) La funzione integranda non è continua nei punti $x = \pm 2$ e $x = 0$, pertanto nell'intervallo di integrazione dobbiamo controllare la convergenza dell'integrale per $x \to -2$, per $x \to 0$ e per $x \to 2$.

Per $x \to -2$, $\dfrac{\left(x^2+x\right)^{2\lambda+4}}{\sqrt[3]{x^2-4}\left(x^4+x^2\right)^{\lambda}} \sim \dfrac{2^{2\lambda+4}}{(20)^{\lambda}\sqrt[3]{-4}\,(x+2)^{1/3}}$ che converge per ogni valore di λ.

Per $x \to 0$, $\dfrac{\left(x^2+x\right)^{2\lambda+4}}{\sqrt[3]{x^2-4}\left(x^3+x^2\right)^{\lambda}} \sim \dfrac{x^{2\lambda+4}}{\sqrt[3]{-4}\cdot x^{2\lambda}} = \dfrac{x^4}{\sqrt[3]{-4}}$, che converge per ogni valore di λ in quanto la funzione integranda per $x \to 0$ converge a 0.

Per $x \to 2$, $\dfrac{\left(x^2+x\right)^{2\lambda+4}}{\sqrt[3]{x^2-4}\left(x^4+x^2\right)^{\lambda}} \sim \dfrac{6^{2\lambda+4}}{(20)^{\lambda}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{x-2}}$ che converge per ogni valore di λ essendo un infinitesimo di ordine $\dfrac{1}{3}$.

Deduciamo che l'integrale converge per ogni valore di λ.

ESERCIZIO 14

Controllare la convergenza della seguente serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4+|\sin n|}$.

Stabilire poi quanti termini occorre sommare per avere un valore approssimato della somma con un errore che non superi 10^{-2}.

Si può verificare che la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4+|\sin n|}$ è convergente perché per il criterio del confronto asintotico si ha $\dfrac{1}{n^4+|\sin n|} \sim \dfrac{1}{n^4}$; poiché la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4}$ è convergente anche quella data è convergente.

Per calcolare e maggiorare il resto non basta conoscere la funzione asintotica, è necessaria una serie maggiorante, notiamo che: $\dfrac{1}{n^4+|\sin n|} < \dfrac{1}{n^4}$.

Quindi:

$$|E| = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^4+|\sin k|} \le \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^4} \le \int_{n-1}^{+\infty}\frac{1}{x^4}dx = \lim_{c\to+\infty}\int_{n-1}^{c}\frac{1}{x^4}dx = \lim_{c\to+\infty}\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{n-1}^{c} = \frac{1}{3(n-1)^3}$$

È necessario che sia $\dfrac{1}{3(n-1)^3} \le 10^{-2}$, da cui $n \ge \sqrt[3]{\dfrac{100}{3}}+1$, quindi $n \ge 5$. In conclusione è sufficiente sommare i primi quattro termini.

ESERCIZI PARTICOLARI

ESERCIZIO 1

Data la funzione integrale $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{e^t}{\sqrt[3]{t-1}} dt$, studiarla e tracciare un grafico qualitativo.

La funzione integranda $f(t)$ è continua nell'insieme $(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$, ma per $x \to 1$ è integrabile in senso generalizzato (poiché risulta essere un infinito di ordine 1/3), quindi il dominio di F è tutto l'insieme dei numeri reali.
Calcoliamo i limiti alla frontiera del dominio:

$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_{-1}^{x} \frac{e^t}{\sqrt[3]{t-1}} dt = +\infty$ poiché l'integranda per $x \to +\infty$ tende a $+\infty$ e l'intervallo di integrazione è crescente.

Per quanto riguarda $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} \int_{-1}^{x} \frac{e^t}{\sqrt[3]{t-1}} dt = l > 0$ poiché per $x \to -\infty$ la funzione integranda tende a 0 con ordine maggiore di qualunque potenza di $\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha > 1$ quindi il limite risulta un valore finito; inoltre, poiché la funzione integranda è negativa e l'intervallo di integrazione è decrescente, il valore del limite risulta positivo. La retta di equazione $y = l > 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.
Calcoliamo la derivata prima:

$F'(x) = \frac{e^x}{\sqrt[3]{x-1}}$, il dominio della derivata prima è l'insieme $R - \{1\}$; analizziamo il punto $x = 1$ calcolando i limiti alla frontiera della derivata prima:

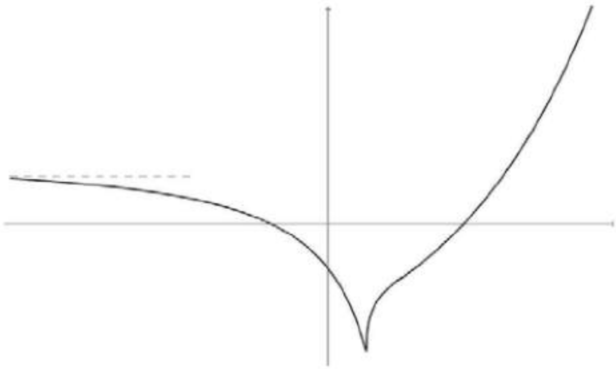
$$\lim_{x\to1^+} F'(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{e^x}{\sqrt[3]{x-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} F'(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{e^x}{\sqrt[3]{x-1}} = -\infty$$

concludiamo che il punto $x = 1$ è un punto di cuspide.
Inoltre il segno della derivata prima è positivo per $x > 1$ quindi la F è crescente, negativo per $x < 1$ quindi la F è decrescente.
Calcoliamo la derivata seconda:

$F''(x) = \frac{e^x\left(x - \frac{4}{3}\right)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$, il segno di F'' dipende dal segno del fattore $x - \frac{4}{3}$; F è convessa per $x > \frac{4}{3}$, F è concava per $x < \frac{4}{3}$ e in $x = \frac{4}{3}$ ha un flesso a tangente obliqua.

Alla luce dei risultati ottenuti il grafico qualitativo della funzione risulta:



Dal grafico si osserva che in $x = 1$ la funzione presenta un punto di minimo globale.

ESERCIZIO 2

Calcolare l'area delimitata dall'asse delle x e dalla funzione $y = \frac{1}{x^2}$ nel tratto $x \geq 1$.

Per calcolare l'area occorre calcolare il seguente integrale:

$$A = \int_1^{+\infty} \left| \frac{1}{x^2} \right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2} dx = \lim_{c \to +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^c = \lim_{c \to +\infty} \left(-\frac{1}{c} + 1 \right) = 1$$

ESERCIZIO 3

Discutere la convergenza del seguente integrale: $\int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

Applicando i criteri noti non si ottiene alcun risultato, proviamo ad applicare il metodo di integrazione per parti e fare una prima integrazione. Nel nostro caso abbiamo: $\lim_{c \to +\infty} \int_a^c \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{c \to +\infty} \left\{ \left[\frac{-\cos x}{\sqrt[3]{x^2}} \right]_a^c - \frac{2}{3} \int_a^c \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x^5}} dx \right\}$

Notiamo che il primo addendo converge, il secondo (l'integrale) converge poiché la funzione integranda è un infinitesimo di ordine $\frac{5}{3}$ maggiore di 1.

Osserviamo che anche se l'estremo a fosse negativo non avremmo problemi perché la convergenza in $x = 0$ resta confermata.

ESERCIZIO 4

Tenendo conto dell'esercizio precedente, controllare la convergenza della serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2 + 1}}$.

I criteri non aiutano è necessario maggiorare con l'integrale generalizzato.
Essendo verificata la condizione necessaria la serie potrebbe convergere. Procediamo con la maggiorazione attraverso l'integrale generalizzato:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2+1}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^2}} \leq \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2}} dx .$$

L'integrale è stato già trattato nell'esercizio precedente, procedendo allo stesso modo arriviamo a concludere che l'integrale converge e quindi anche la serie numerica data converge.

ESERCIZIO 5

Controllare la convergenza della seguente serie: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n^3+3n+4}$.

Stabilire poi quanti termini occorre sommare per avere un valore approssimato della somma con un errore che non superi 10^{-2}.

Si può verificare che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n^3+3n+4}$ è convergente perché per il criterio del confronto asintotico si ha $\frac{n+2}{n^3+3n+4} \sim \frac{1}{n^2}$; poiché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ è convergente anche quella data è convergente.

Per calcolare e maggiorare il resto non basta conoscere la funzione asintotica, è necessaria una serie maggiorante: $\frac{n+2}{n^3+3n+4} < \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2}$. Quindi:

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k+2}{k^3+3k+4} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k^2} \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{3}{x^2} dx = \lim_{c\to+\infty} \int_{n-1}^{c} \frac{3}{x^2} dx = \lim_{c\to+\infty} \left[-\frac{3}{x}\right]_{n-1}^{c} = \frac{3}{(n-1)}.$$

Quindi è necessario che sia $\frac{3}{(n-1)} \leq 10^{-2}$, da cui $n \geq 301$. Quindi è sufficiente sommare i primi 300 termini.

ESERCIZIO 6

Discutere la convergenza del seguente integrale: $\int_0^1 \frac{\cos x}{\ln x} dx$.

Notiamo che la funzione integranda è prolungabile con continuità in $x = 0$, infatti $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\ln x} = 0$, pertanto è integrabile per $x \to 0$.

Osserviamo che per $x \to 1$ la funzione integranda risulta asintotica a $\frac{\cos(1)}{x-1}$, è un infinito di ordine 1 e quindi diverge.
Si conclude che l'integrale dato diverge.

ESERCIZIO 7

Calcolare per serie il seguente integrale: $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin\left(x^3\right)}{x} dx$.

Notiamo subito che la funzione integranda è prolungabile con continuità in $x = 0$, infatti $\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x^3\right)}{x} = 0$.

Ricordando che la serie di MacLaurin della funzione $y = \sin x$ è: $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

scriviamo la serie relativa alla funzione $y = \sin\left(x^3\right)$ che è $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(x^3\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$; questa è ancora una serie di Taylor e converge per ogni $x \in R$ e gode di tutte le proprietà delle serie di Taylor.

Allora $y = \frac{\sin\left(x^3\right)}{x} = \frac{x^3}{x} - \frac{\left(x^3\right)^3}{3!x} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(2n+1)!}$, ancora una serie di Taylor, una particolare serie di potenze!

La serie di Taylor si può integrare termine a termine e quindi tornando all'integrale si ha:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin\left(x^3\right)}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^{\frac{1}{4}} x^{6n+2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left[\frac{x^{6n+3}}{6n+3}\right]_0^{1/4} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! \cdot 4^{6n+3} \cdot (6n+3)}$$; la serie ottenuta è una serie numerica convergente.

Osserviamo che calcolare un valore approssimato dell'integrale dato equivale a calcolare un valore approssimato della serie ottenuta.

ESERCIZI PROPOSTI

ESERCIZIO 1

Discutere l'eventuale convergenza dei seguenti integrali:

1) $\int_0^5 x\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$;

2) $\int_{-\infty}^{-1} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)dx$;

3) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x+\ln\left(x^2+2\right)}$;

4) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1+\ln(x+1)}$;

5) $\int_{-2}^{1}\frac{x}{\left(x^3+x^2\right)^{1/5}\sqrt[3]{x-1}}dx$;

6) $\int_{-1}^{+\infty}\frac{1}{\left(1+x^2\right)\sqrt[5]{x^2-1}}dx$;

7) $\int_0^4 \sin\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)dx$.

ESERCIZIO 2

Data la funzione $F(x)=\int_2^x \frac{e^t}{t^2+1}dt$

a) determinare il dominio;
b) calcolare la derivata prima e la derivata seconda;
c) scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado centrato nel punto $x=2$ e disegnare il grafico nell'intorno di $x=2$.

ESERCIZIO 3

Discutere l'eventuale convergenza dei seguenti integrali:

1) $\int_0^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right)dx$;

2) $\int_0^{+\infty}\sin x^2 dx$.

ESERCIZIO 4

Calcolare il seguente limite, motivando il percorso seguito:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{\ln\left(1+x^4\right)}.$$

ESERCIZIO 5

Discutere al variare del parametro reale λ la convergenza dei seguenti integrali:

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\left(x^2-4\right)^{\lambda}}{x\sqrt{x-2}}dx$;

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(1-e^{-x}\right)}{x^{\lambda}\left|x-1\right|^{3\lambda}}dx$;

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{10}\frac{\sqrt[3]{x}\,e^{\lambda x}}{\left|x\right|^{\lambda}\sqrt[3]{(x+1)(x-2)}}dx$;

4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{\lambda-2}\left(x+1\right)^{\lambda}}\sinh\left(\frac{2}{x}\right)dx$.

ESERCIZIO 6

Data la seguente funzione $F\left(x\right)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{\ln_2\left(2-t^2\right)}dt$:

a) determinare il dominio;
b) calcolare i limiti alla frontiera del dominio;
c) calcolare e studiare la derivata prima e la derivata seconda;
d) disegnare un grafico qualitativo compatibile con i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 7

Data la funzione integrale: $F\left(x\right)=\displaystyle\int_{-2}^{x}\frac{3t}{\sqrt[3]{t^2-1}}dt$:

1) calcolare il dominio;
2) calcolare i limiti alla frontiera del dominio;
3) calcolare eventuali punti di massimo e/o di minimo;
4) indicare eventuali punti di non derivabilità e classificarli;
5) rappresentare un grafico qualitativo compatibile con i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 8

Controllare la convergenza della seguente serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+1}{n^5+3n^2+4}$.

Stabilire poi quanti termini occorre sommare per avere un valore approssimato della somma con un errore che non superi 10^{-2}.

ESERCIZIO 9

Controllare la convergenza del seguente integrale e, in caso affermativo, calcolarlo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)dx.$$

ESERCIZIO 10

Calcolare il valore dei seguenti integrali con un errore che non superi 10^{-2}:

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{\ln\left(1+x^3\right)}{x}dx$;

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{e^{x^4}-1}{x^2}dx$.

10 NUMERI COMPLESSI

"Movimento" - Particolare
scultura di Paolo Mazzuferi
anno 2010

PREMESSA

Ricordiamo le diverse forme con le quali è possibile esprimere un numero complesso:
- $z = (a,b)$: coppia ordinata con $a,b \in R$;
- $z = a + ib$ con $a, b \in R$: è la **forma algebrica** di un numero complesso; $a = \mathrm{Re}(z)$ si chiama parte reale di z e $b = \mathrm{Im}(z)$ è detta parte immaginaria di z ;
- $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ con $\rho, \vartheta \in R$: è la **forma trigonometrica** di un numero complesso; ρ è detto modulo di z e ϑ argomento di z ;
- $z = \rho e^{i\vartheta}$ con $\rho, \vartheta \in R$: è la **forma esponenziale** di un numero complesso.

Ricordiamo che nel campo complesso C non esiste la relazione d'ordine.

Ricordiamo alcune operazioni con i numeri complessi; detto $z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ si ha:
- la potenza n-esima di un numero complesso:
  $z^n = \rho^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)$;
- le radici n-esime di un numero complesso:
  $\sqrt[n]{z} = \rho^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\vartheta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right)$ con $k \in Z$, le radici n-esime di un numero complesso sono infinite ma solo n sono distinte e si ottengono per i valori $k = 0,1,2,\ldots,n-1$;
- il logaritmo di un numero complesso:
  $\ln z = \ln\rho + i(\vartheta + 2k\pi) \quad k \in Z$

  il logaritmo di un numero complesso è costituito da infiniti valori distinti.

Ricordiamo il **teorema fondamentale dell'algebra** che afferma che un'equazione polinomiale di grado n in C ammette sempre n radici purché ciascuna contata con la propria molteplicità.

L'uguaglianza tra numeri complessi prevede a seconda della scrittura:
- l'uguaglianza tra le rispettive parti reali e parti immaginarie;
- l'uguaglianza tra i moduli e quella tra gli argomenti modulo 2π .

ESEMPI GUIDATI

ESEMPIO 1

Dati i seguenti numeri complessi in forma algebrica, scriverli in forma trigonometrica ed esponenziale:
1) $z = -1 + i$;
2) $z = 1 + \sqrt{3}i$;
3) $z = -3 - 3i$.

SOLUZIONI

1) Calcoliamo il modulo e l'argomento. Il modulo è $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ dove in questo caso $a=-1$ e $b=1$, quindi $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$. Per calcolare l'argomento ricordiamo che $\tan\vartheta = \frac{b}{a} = -1$ da cui $\vartheta = \arctan(-1)+k\pi = -\frac{\pi}{4}+k\pi$, con $k=0$ oppure $k=1$. In questo caso z si trova nel secondo quadrante quindi $\vartheta = -\frac{\pi}{4}+\pi = \frac{3}{4}\pi$.

In conclusione la forma trigonometrica di z è $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ e la forma esponenziale è $z=\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi}$.

2) Procediamo in modo analogo a quello precedente e calcoliamo il modulo e l'argomento di z, otteniamo: $\rho=2$ e $\tan\vartheta=\sqrt{3}$, poiché z è nel primo quadrante si deduce che $\vartheta=\frac{\pi}{3}$. Concludendo la forma trigonometrica di z è $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ e la forma esponenziale è $z=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

3) Calcoliamo subito modulo e argomento del numero dato. Il modulo è $\rho=3\sqrt{2}$ e risulta $\tan\vartheta=1$ da cui $\vartheta=\frac{\pi}{4}+k\pi$, poiché z è nel terzo quadrante si deduce che $\vartheta=\frac{5}{4}\pi$. Possiamo scrivere le due forme richieste: quella trigonometrica è $z=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$ e la forma esponenziale è $z=3\sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}$.

ESEMPIO 2

Dati i seguenti numeri complessi in forma esponenziale, scriverli in forma algebrica e trigonometrica:

1) $z=3e^{i\pi}$;

2) $z=2e^{i\frac{\pi}{3}}$;

3) $z=e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

SOLUZIONI

1) Dalla forma esponenziale ricaviamo subito il modulo e l'argomento e scriviamo la forma trigonometrica: $\rho=3$ e $\vartheta=\pi$ quindi $z=3(\cos\pi+i\sin\pi)$. La forma algebrica è immediata: $z=-3$.

2) Allo stesso modo: $\rho = 2$ e $\vartheta = \frac{\pi}{3}$ quindi la forma trigonometrica risulta: $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. La forma algebrica è immediata: $z = 1 + i\sqrt{3}$.

3) Anche in questo caso ricaviamo dalla scrittura i valori del modulo e dell'argomento $\rho = 1$ e $\vartheta = \frac{4}{3}\pi$ quindi la forma trigonometrica risulta: $z = \cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi$.

La forma algebrica è immediata: $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ESEMPIO 3

Considerare i seguenti numeri complessi e per ciascuno di essi individuare la parte reale e la parte immaginaria:

1) $z = \frac{2}{i - \sqrt{3}}$;

2) $z = (1 + 2i)(1 - 2i)$.

SOLUZIONI

1) Per individuare la parte reale e la parte immaginaria è necessario che non compaia l'unità immaginaria al denominatore, quindi procediamo con un'operazione simile alla razionalizzazione moltiplicando e dividendo z per $i + \sqrt{3}$:

$$z = \frac{2}{i - \sqrt{3}} \cdot \frac{i + \sqrt{3}}{i + \sqrt{3}} = \frac{2\left(i + \sqrt{3}\right)}{i^2 - 3} = -\frac{1}{2}\left(i + \sqrt{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Quindi $\mathrm{Re}(z) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{2}$.

2) In questo caso eseguendo l'operazione si ottiene:

$$z = (1 + 2i)(1 - 2i) = 1 - 4i^2 = 5$$

da cui $\mathrm{Re}(z) = 5$ e $\mathrm{Im}(z) = 0$.

ESEMPIO 4

Scrivere in forma trigonometrica il seguente numero complesso:

$$z = -2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Notiamo immediatamente che la scrittura data non è la forma esponenziale di un numero complesso (in quanto il modulo deve essere un numero positivo, –2 non può essere il modulo). Scriviamo quindi la forma esponenziale, ricordando che $z = -2$ in forma esponenziale risulta $z = 2e^{i\pi}$. Dunque:

$z = -2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)} = 2e^{i\frac{7}{6}\pi}$.
A questo punto possiamo scrivere la forma trigonometrica che è:
$z = 2\left(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi\right)$.

ESEMPIO 5

Individuare modulo e argomento del seguente numero complesso:
$z = 1 + 2i$.

In questo caso il modulo è $\rho = \sqrt{5}$ e $\tan\vartheta = 2$; poiché la rappresentazione del numero complesso è nel primo quadrante, allora $\vartheta = \arctan 2$.

ESEMPIO 6

Dato il numero complesso $z = 2 - 2i$ calcolare il modulo e l'argomento di z^7 e scriverne la forma esponenziale.

Calcoliamo il modulo e l'argomento di $z = 2 - 2i$ e otteniamo $\rho = 2\sqrt{2}$ e $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$; applichiamo la formula della potenza di un numero complesso e otteniamo:
$z^7 = \left(2\sqrt{2}\right)^7\left(\cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{7}{4}\pi\right)\right)$.
E quindi:
$z^7 = 2^{10}\sqrt{2}\,e^{-i\frac{7}{4}\pi}$.

ESEMPIO 7

Rappresentare nel piano di Gauss le immagini dei numeri complessi z soluzioni della seguente equazione: $|z - 2i| = |z + 2|$.

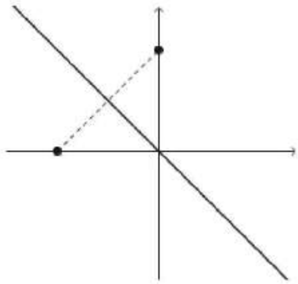
Posto $z = x + iy$ calcoliamo l'equazione del luogo geometrico richiesto:

$|x + iy - 2i| = |x + iy + 2|$

$|x + i(y-2)| = |x + 2 + iy|$

$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$

elevando al quadrato ambo i membri (che sono tutti e due positivi):
$x^2 + (y-2)^2 = (x+2)^2 + y^2$
Eseguendo le operazioni e semplificando, si ottiene:
$y = -x$



Il luogo geometrico trovato è l'asse (cioè il luogo dei punti equidistanti) del segmento che ha per estremi i punti $(-2,0)$ e $(0,2)$. Avremmo potuto leggere l'equazione data come quella del luogo geometrico descritto dai punti z che hanno uguale distanza da $2i$ e da -2.

ESEMPIO 8

Trovare in C le soluzioni della seguente equazione: $z^3 = 1 - i$.

Poiché quella data è un'equazione algebrica, per il teorema fondamentale dell'algebra sappiamo che le soluzioni sono tre.
Dobbiamo calcolare $z = \sqrt[3]{1-i}$, individuiamo modulo e argomento di $1-i$: $\rho = \sqrt{2}$ e $\vartheta = -\frac{\pi}{4}$.
Quindi:

$$z_k = \sqrt[3]{1-i} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right) \text{ con } k = 0,1,2.$$

Che possiamo riscrivere così:

$$z_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}+k\frac{2\pi}{3}\right)\right) \text{ con } k = 0,1,2.$$

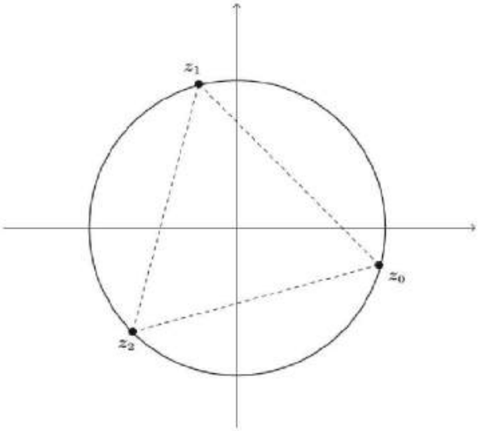
Scriviamo le tre radici che sono:

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{7}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{12}\pi\right)\right)$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right)$$

Le radici si ottengono l'una dall'altra ruotando in senso antiorario di un angolo di ampiezza $\frac{2}{3}\pi$ e quindi sono posizionate, nel piano di Gauss, ai vertici di un triangolo equilatero inscritto in una circonferenza con centro nell'origine e raggio $\sqrt[6]{2}$.



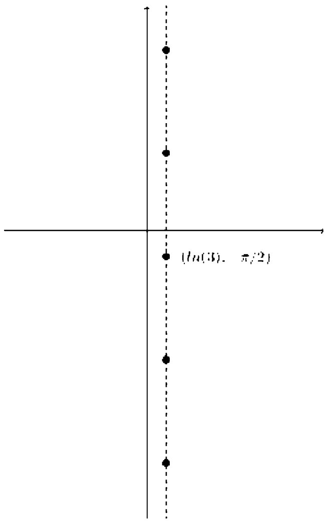
ESEMPIO 9

Calcolare i numeri complessi soluzioni della seguente equazione:
$z = \ln(-3i)$.

Applichiamo la formula:
$z_k = \ln(-3i) = \ln 3 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad k \in Z$

Le soluzioni hanno tutte la stessa parte reale quindi si trovano su una retta verticale a distanza $\ln 3$ dall'origine. La prima soluzione per $k = 0$ è $z_0 = \ln 3 + i\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

rappresentando nel piano di Gauss le immagini di tutte le soluzioni, queste distano l'una dall'altra per un segmento pari a 2π. Rappresentiamole:



ESEMPIO 10

Risolvere nel campo complesso la seguente equazione:
$z^2 - 2iz + 8 = 0$.

Sappiamo che le radici sono due e le calcoliamo usando la nota formula:
$z_{1,2} = i + \sqrt{i^2 - 8}$
(poiché la radice quadrata in C ammette due soluzioni complesse coniugate evitiamo di scrivere il doppio segno davanti alla radice quadrata)

$z_{1,2} = i \pm 3i$

da cui:

$z_1 = -2i$
$z_2 = 4i$

ESERCIZI SVOLTI

ESERCIZIO 1

Risolvere le seguenti equazioni non algebriche:
1) $z^2 + 2z\bar{z} = 0$;
2) $|z|^2 + 2z - i = 1$.

SOLUZIONI

1) Riscrivendo l'equazione nel seguente modo $z(z + 2\bar{z}) = 0$ è evidente che una soluzione è $z = 0$.
Eventuali altre soluzioni si trovano sostituendo $z = x + iy$ e si ottiene:
$x + iy + 2x - 2iy = 0$
$3x - iy = 0$
questa è verificata solo per $x = 0$ e $y = 0$. Quindi $z = 0$ è l'unica soluzione.

2) Posto $z = x + iy$ si ha:
$x^2 + y^2 + 2x + 2iy - i = 1$
$x^2 + y^2 + 2x + i(2y - 1) = 1$
L'uguaglianza tra i due numeri complessi si riduce all'uguaglianza tra le parti reali e quelle immaginarie:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 1 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} 4x^2 + 8x - 3 = 0 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi le soluzioni sono i due numeri complessi:

$$z_1 = \frac{-2+\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$z_2 = \frac{-2-\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{2}i\,.$$

ESERCIZIO 2

Risolvere la seguente equazione algebrica e rappresentare le immagini delle soluzioni nel piano di Gauss:
$z^5 = -2i$.

Si tratta di calcolare le radici quinte di un numero complesso. Dalla formula otteniamo:

$$z_k = \sqrt[5]{-2i} = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{5}\right) \quad \text{con } k = 0,1,2,3,4$$

scriviamole:

$$z_0 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right)$$

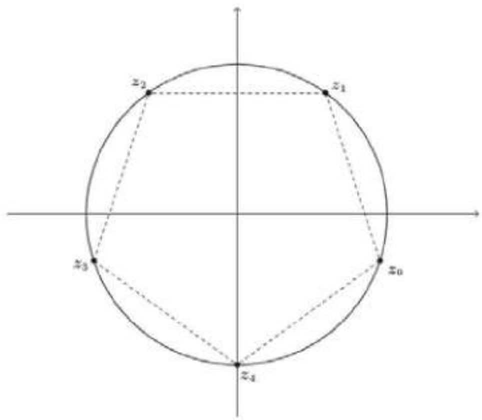
$$z_1 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{3}{10}\pi + i\sin\frac{3}{10}\pi\right)$$

$$z_2 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{7}{10}\pi + i\sin\frac{7}{10}\pi\right)$$

$$z_3 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{11}{10}\pi + i\sin\frac{11}{10}\pi\right)$$

$$z_4 = \sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi\right)$$

Le immagini delle soluzioni sono posizionate ai vertici di un pentagono regolare inscritto nella circonferenza con centro nell'origine e raggio $\sqrt[5]{2}$. La rappresentazione è la seguente:



ESERCIZIO 3

Risolvere la seguente equazione:
$z^4 = i^4$.

In questo caso è facile risolvere l'equazione evidenziando una soluzione che è $z = i$. Allora possiamo scrivere l'equazione nel seguente modo:
$z = i\sqrt[4]{1}$.
Calcoliamo le radici quarte dell'unità:
$\varepsilon_k = \sqrt[4]{1} = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}$ con $k = 0,1,2,3$

$\varepsilon_0 = 1$

$\varepsilon_1 = i$

$\varepsilon_2 = -1$

$\varepsilon_3 = -i$

Da $z = i\sqrt[4]{1}$ (moltiplicare ε_k per i significa eseguire una rotazione di $\pi/2$ in senso antiorario) otteniamo:

$z_0 = i$

$z_1 = -1$

$z_2 = -i$

$z_3 = 1$.

ESERCIZIO 4

Risolvere la seguente equazione e rappresentare le immagini nel piano di Gauss:
$z^6 - 2z^3 + 2 = 0$.

L'equazione ammette sei radici in C. Per calcolarle poniamo $z^3 = t$ e otteniamo:
$t^2 - 2t + 2 = 0$
risolvendo si ottiene:
$t = 1 \pm i$.
Non resta che risolvere le due equazioni elementari $z^3 = 1 + i$ e $z^3 = 1 - i$. Procediamo:

$z^3 = 1 + i$

$z = \sqrt[3]{1+i}$

$$z_k = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right) \text{ con } k = 0,1,2$$

$$z_0 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17}{12}\pi + i\sin\frac{17}{12}\pi\right).$$

Allo stesso modo risolviamo $z^3 = 1 - i$, ottenendo:

$$z = \sqrt[3]{1-i}$$

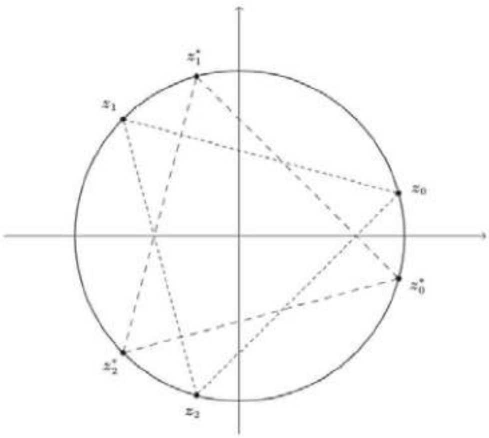
$$z_k^* = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right) \text{ con } k = 0,1,2$$

$$z_0^* = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

$$z_1^* = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$

$$z_2^* = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi\right).$$

Notiamo che il secondo gruppo di soluzioni è costituito dai complessi coniugati del primo gruppo.
Rappresentiamo:



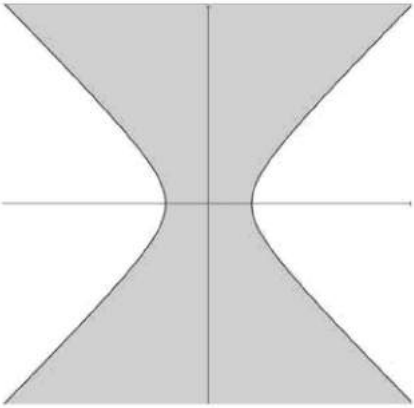
ESERCIZIO 5

Rappresentare nel piano di Gauss l'insieme:

$$E \equiv \left\{z \in C : (\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2 \le 1\right\}.$$

Osserviamo subito che la disuguaglianza presente nella definizione dell'insieme E è tra elementi reali.
Posto $z = x + iy$ il luogo geometrico diventa:

$x^2 - y^2 \le 1$, che rappresenta la regione di piano compresa tra i due rami di un'iperbole (rami inclusi).
Possiamo rappresentare, ottenendo:



ESERCIZIO 6

Risolvere in C la seguente equazione e rappresentare le immagini delle soluzioni nel piano di Gauss:

$z = -\frac{1}{i}\ln(-2)$.

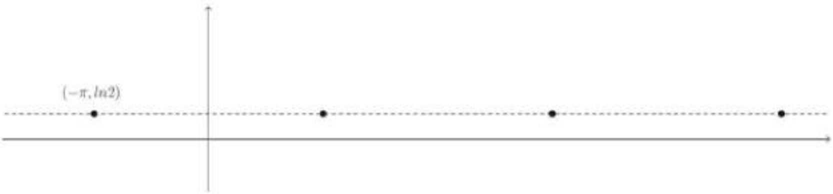
L'equazione $z = -\frac{1}{i}\ln(-2)$ è equivalente a $z = i\ln(-2)$.

Risolviamo:

$z = i[\ln 2 + i(\pi + 2k\pi)] \quad k \in Z$

Infine:

$z = i\ln 2 - (\pi + 2k\pi)$ con $k \in Z$, quindi le soluzioni hanno tutte la stessa parte immaginaria mentre la parte reale varia al variare di k.



ESERCIZI PARTICOLARI

ESERCIZIO 1

Data l'equazione nel campo complesso:

$(z-1)^3 + iz^3 = 0$

dire se essa può ammettere radici reali; calcolarne poi le radici in C.

Supponiamo che l'equazione ammetta radici reali del tipo $z = a$ con $a \in R$, l'equazione diventa:

$(a-1)^3 + ia^3 = 0$

l'uguaglianza è verificata quando:

$\begin{cases}(a-1)^3 = 0 \\ a^3 = 0\end{cases}$ ovvero $\begin{cases}a = 1 \\ a = 0\end{cases}$ e quindi è impossibile.

Se ne conclude che l'equazione non ammette radici reali.

Risolviamo:

$(z-1)^3 = -iz^3$

Per quanto detto, sappiamo che $z = 0$ non è soluzione quindi possiamo dividere per z^3, otteniamo:

$$\frac{(z-1)^3}{z^3} = -i$$

che possiamo scrivere nel seguente modo:

$$\left(\frac{z-1}{z}\right)^3 = i^3$$

Quindi:

$\frac{z-1}{z} = \sqrt[3]{i^3}$ cioè $\frac{z-1}{z} = i\sqrt[3]{1}$

Ricavando infine z:

$$z = \frac{1}{1 - i\sqrt[3]{1}}$$

Calcoliamo le radici cubiche di 1:

$\varepsilon_k = \sqrt[3]{1} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}$ con $k = 0,1,2$

$\varepsilon_0 = 1$

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

sostituiamo e calcoliamo le soluzioni:

$$z_0 = \frac{1}{1-i}$$

$$z_1 = \frac{2}{2+\sqrt{3}+i}$$

$$z_2 = \frac{2}{2-\sqrt{3}+i}$$

Razionalizzando:

$$z_0 = \frac{1}{2}(1+i)$$

$$z_1 = \frac{1}{4+\sqrt{3}}\left(2+\sqrt{3}-i\right)$$
$$z_2 = \frac{1}{4-\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{3}-i\right).$$

ESERCIZIO 2

Risolvere in C la seguente equazione, scrivere in forma algebrica le soluzioni e rappresentare le immagini delle soluzioni nel piano di Gauss:

$$\left(z-3+3i\right)^3-\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3=0\,.$$

Dall'equazione data:

$$\left(z-3+3i\right)^3-\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3=0$$

otteniamo:

$$\left(z-3+3i\right)^3=\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3$$

che possiamo scrivere nel seguente modo:

$$\left(z-3+3i\right)=\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\cdot\sqrt[3]{1}$$

Ricordiamo che:

$$\sqrt[3]{1}=\cos\frac{0+2k\pi}{3}+i\sin\frac{0+2k\pi}{3}\qquad k=0,1,2$$

otteniamo quindi: $1; -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Se indichiamo con $\omega=\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right)\cdot\sqrt[3]{1}$, le soluzioni dell'equazione sono del tipo $z=\omega+3-3i$ (cioè per trovare z basta traslare ω).

Calcoliamo i valori di ω:

$$\omega_0 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+0\right)}$$

$$\omega_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$\omega_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)}$$

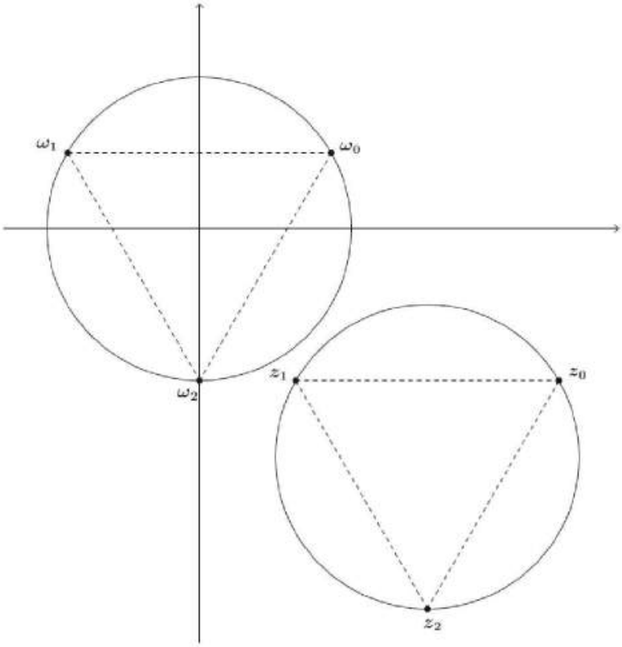
A questo punto z:

$z_0 = \sqrt{3} + i + 3 - 3i = 3 + \sqrt{3} - 2i$

$z_1 = -\sqrt{3} + i + 3 - 3i = 3 - \sqrt{3} - 2i$

$z_2 = -2i + 3 - 3i = 3 - 5i$

Nel piano di Gauss si ottiene la seguente rappresentazione



ESERCIZIO 3

Risolvere in C la seguente equazione:

$z\bar{z} + 2z = z^2 + 4$.

Si tratta di un'equazione non algebrica che risolviamo sostituendo $z = x + iy$, si ottiene:

$(x+iy)(x-iy) + 2(x+iy) = (x+iy)^2 + 4$

$2y^2 + 2x - 4 + i(2y - 2xy) = 0$.

Affinché sia verificata:

$\begin{cases} 2y^2 + 2x - 4 = 0 \\ 2y - 2xy = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} y^2 + x - 2 = 0 \\ y(1-x) = 0 \end{cases}$.

Il sistema ha soluzioni quando:

$\begin{cases} y^2 + x - 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

e

$$\begin{cases} y^2 + x - 2 = 0 \\ 1 - x = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Le soluzioni sono dunque:

$z_1 = 2$

$z_2 = 1 + i$

$z_3 = 1 - i$.

ESERCIZIO 4

Risolvere in C la seguente equazione e descrivere come si posizionano le immagini delle soluzioni nel piano di Gauss: $z = (1+i)^i$.

Per calcolare le soluzioni si procede nel seguente modo:

$z = (1+i)^i = e^{\ln(1+i)^i} = e^{i\ln(1+i)}$.

Ricordiamo che in C: $\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ con $k \in Z$.

Sostituendo si ottiene $z = e^{i\left[\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right]}$, quindi:

$z = e^{i\ln\sqrt{2} - \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}$.

Le soluzioni, scritte in forma esponenziali, sono costituite da numeri complessi aventi tutti lo stesso argomento pari a $\ln\sqrt{2}$ (in radianti) e, invece, modulo che varia al variare di $k \in Z$ che vale $e^{-\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)}$.

Se volessimo rappresentare le immagini, queste si trovano su una semiretta che parte dall'origine e forma con l'asse orizzontale un angolo di ampiezza $\ln\sqrt{2}$; per $k > 0$ le immagini si addensano sempre più intorno all'origine, mentre per $k < 0$ le immagini si allontanano sulla semiretta.

ESERCIZIO 5

Rappresentare nel piano di Gauss l'insieme:

$$E \equiv \left\{ z \in C : -\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} > 1, |z| \le 3 \right\}.$$

Dopo rappresentare gli insiemi:

$\Omega_1 \equiv \{ \omega \in C : \omega = \bar{z}, z \in E \}$

$\Omega_2 \equiv \{ \omega \in C : \omega = iz, z \in E \}$

$\Omega_3 \equiv \left\{ \omega \in C : \omega = \frac{1}{z}, z \in E \right\}$.

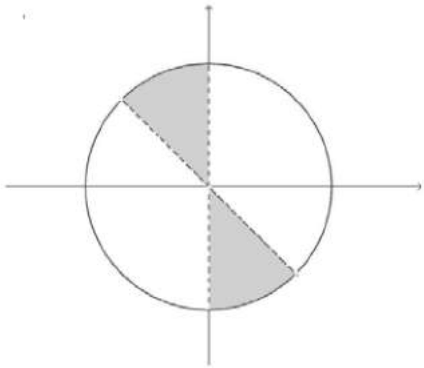
Chiamato $z = x + iy$, l'insieme E pone le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} -\dfrac{y}{x} > 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} \le 3 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} \dfrac{y}{x} < -1 \\ x^2 + y^2 \le 9 \end{cases}$$

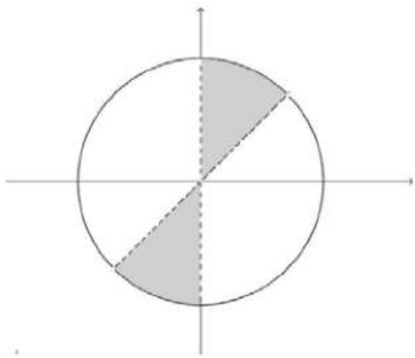
La prima disuguaglianza implica:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < -x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x < 0 \\ y > -x \end{cases}.$$

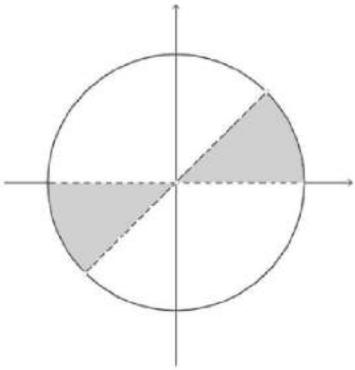
Possiamo rappresentare l'insieme E:



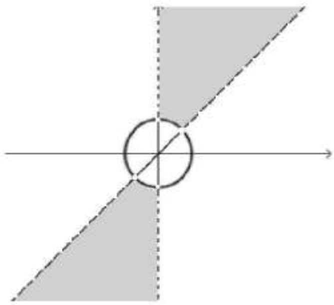
Gli insiemi che dobbiamo rappresentare si ottengono eseguendo delle trasformazioni sull'insieme E.
Per rappresentare Ω_1 (che è composto dai coniugati degli elementi di E) basta rappresentare il simmetrico rispetto all'asse orizzontale:



Per rappresentare Ω_2 (che si ottiene moltiplicando per i tutti gli elementi di E) basta ruotare l'insieme E di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario:



Rappresentiamo Ω_3 (che si ottiene eseguendo i reciproci di tutti gli elementi di E, quindi questi ω hanno come moduli i reciproci dei moduli di z e come argomenti gli opposti degli argomenti di z):



ESERCIZIO 6

Rappresentare nel piano di Gauss l'insieme:
$E \equiv \left\{ z \in C : (\mathrm{Re}\, z)^2 + 4(\mathrm{Im}\, z)^2 \leq 4(\mathrm{Im}\, z) + 1 \right\}$.

Posto $z = x + iy$ il luogo geometrico diventa:

$x^2 + 4y^2 \leq 4y + 1$

$x^2 + 4y^2 - 4y \leq 1$.

Si vede subito che $x^2 + 4y^2 - 4y = 1$ è l'equazione di un'ellisse traslata, riportiamola in forma canonica:

$x^2 + 4y^2 - 4y + 1 - 1 = 1$

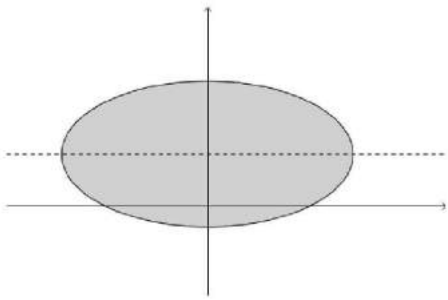
cioè:

$x^2 + 4y^2 - 4y + 1 = 2$, da cui: $x^2 + (2y-1)^2 = 2$. Dividiamo per 2: $\frac{x^2}{2} + \frac{(2y-1)^2}{2} = 1$.

Infine: $\frac{x^2}{2}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}}=1$, un'ellisse con centro nel punto $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ e semiassi di simmetria pari a $\sqrt{2}$ e $\sqrt{\frac{1}{2}}$. A questo punto concludiamo che il luogo geometrico rappresentato dall'insieme E è il seguente:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}}\le 1$$

ovvero la parte interna dell'ellisse e il bordo.
Possiamo rappresentare, ottenendo:



ESERCIZIO 7

Rappresentare nel piano di Gauss le soluzioni della seguente relazione:

$$\left|e^{(z+1)^2}\right|\ge e\,.$$

Esplicitiamo il modulo sostituendo $z=x+iy$:

$$e^{(z+1)^2}=e^{(x+iy)^2+2(x+iy)+1}=e^{x^2-y^2+2ixy+2x+2ixy+1}=e^{x^2-y^2+2x+1+4ixy}$$

Questo è un numero complesso scritto in forma esponenziale, il modulo è $e^{x^2-y^2+2x+1}$ e l'argomento è $4xy$.
Sostituiamo nella disuguaglianza e otteniamo:

$$\left|e^{(z+1)^2}\right|=e^{x^2-y^2+2x+1}=e^{(x+1)^2-y^2}\,.$$

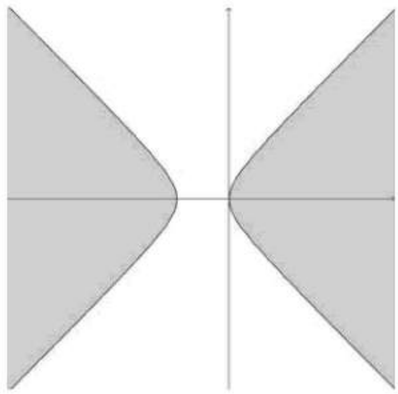
Deve essere:

$$e^{(x+1)^2-y^2}\ge e$$

Da cui:

$$(x+1)^2-y^2\ge 1\,.$$

Il luogo richiesto è costituito dalle due regioni individuate da un'iperbole equilatera il cui centro di simmetria è traslato nel punto $(-1,0)$, la rappresentazione è dunque:



ESERCIZI PROPOSTI

ESERCIZIO 1

Dati i seguenti numeri complessi individuare la parte reale e la parte immaginaria:

1) $z = \dfrac{1+2i}{-2+i}$;

2) $z = \dfrac{(1-i)(4+2i)}{i\,(1+i)}$.

ESERCIZIO 2

Individuare modulo e argomento del seguente numero complesso:

$z = -3e^{i\frac{\pi}{6}}$.

ESERCIZIO 3

Dati i seguenti numeri complessi in forma algebrica, scriverli in forma trigonometrica ed esponenziale:

1) $z = -4+4i$;

2) $z = -3$;

3) $z = -\sqrt{3}+i$.

ESERCIZIO 4

Individuare modulo e argomento del seguente numero complesso:

$z = -\sqrt{5}-2i$.

ESERCIZIO 5

Rappresentare nel piano di Gauss le immagini dei numeri complessi z che soddisfano le seguenti relazioni:

1) $|z+1+i| \le 3$;
2) $1 \le |z+3i| \le 4$;
3) $|z-1| \le |2z-1+i|$.

ESERCIZIO 6

Rappresentare nel piano di Gauss il seguente numero complesso:

$z = (1-i)^5$.

ESERCIZIO 7

Risolvere le seguenti equazioni non algebriche:

1) $\dfrac{\overline{z}}{z^2} + 2 = 0$;
2) $z\overline{z} = i(1+2i)$.

ESERCIZIO 8

Risolvere le seguenti equazioni algebriche:

1) $z^5 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$;
2) $\left(1-\sqrt{3}i\right)z = 2i$.

ESERCIZIO 9

Risolvere le seguenti equazioni e rappresentare le immagini delle soluzioni nel piano di Gauss:

1) $z^3 = -4e^{i\frac{\pi}{4}}$;
2) $z^4 = 16$;
3) $z^6 = (1+i)^6$;
4) $z^4 = 2\left(-1+i\sqrt{3}\right)$.

ESERCIZIO 10

Risolvere l'equazione e rappresentare le immagini delle soluzioni nel piano di Gauss:

$[z+(1-i)]^4 = -4$.

ESERCIZIO 11

Risolvere l'equazione e rappresentare le immagini delle soluzioni nel piano di Gauss:

$$z = \frac{1}{i}\ln\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right).$$

ESERCIZIO 12

Risolvere le seguenti equazioni e rappresentare le immagini delle soluzioni nel piano di Gauss:

1) $(z-i)^3 = \left(1+\sqrt{3}i\right)^3$;

2) $z^5 - (1-i)^5 = 0$.

ESERCIZIO 13

Rappresentare nel piano di Gauss le immagini dei numeri complessi z che descrivono il seguente insieme:

$$E \equiv \left\{ z \in C : (\operatorname{Re} z)^2 - \operatorname{Im} z < 1 \right\}.$$

ESERCIZIO 14

Rappresentare nel piano di Gauss le immagini dei complessi z che verificano la seguente seguente relazione :

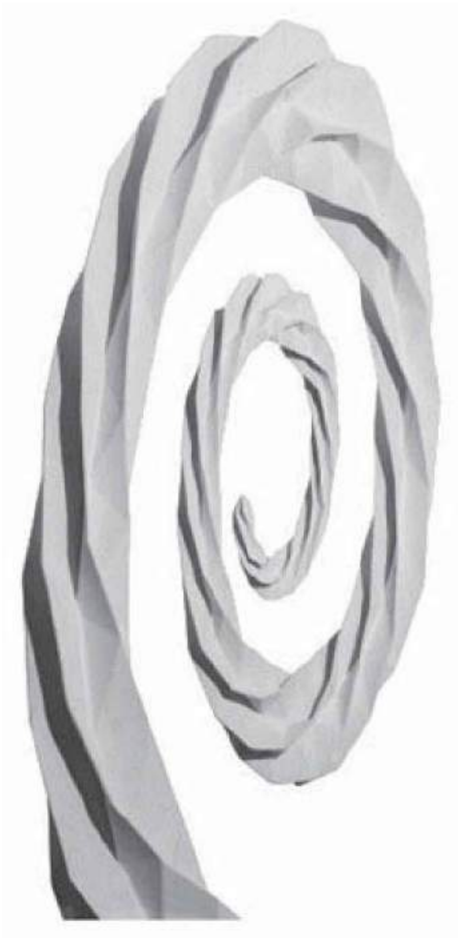
$$\left| e^{2z^2-2iz} \right| \geq 1 .$$

ESERCIZIO 15

Risolvere l'equazione e rappresentare le immagini delle soluzioni nel piano di Gauss:

$$z = (1-i)^i .$$

11 AUTOVALUTAZIONI



"Crescita"
scultura di Paolo Mazzuferi
anno 2008

PREMESSA

Per concludere, presentiamo una raccolta di esercizi raggruppati per argomenti ma non per modalità di svolgimento; ad esempio nella raccolta intitolata "Limiti e sviluppi di Taylor" gli esercizi proposti possono essere svolti con tutte le modalità apprese (comportamento asintotico, sviluppi di Taylor, ...), è necessario scegliere la più adatta ma anche la più semplice e la meno elaborata.

L'obiettivo è sempre quello di valutare la preparazione di ciascuno studente per affrontare lo svolgimento di un tema d'esame.

SUCCESSIONI

ESERCIZIO 1

Controllare il carattere delle seguenti successioni e motivare le risposte:

1) $a_n = (-1)^n \dfrac{n+4}{n^3+n}$; 2) $a_n = \dfrac{2^n - 3^n}{n+1}$; 3) $a_n = \dfrac{\sin n + 4}{n^2+1}$;

4) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2}{(n+1)^n}}$; 5) $a_n = \dfrac{n+4}{n^3+n}$; 6) $a_n = \dfrac{\ln(n+4)}{n+1}$;

7) $a_n = \dfrac{e^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}}{n^2+1}$; 8) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ 9) $a_n = \dbinom{2n+3}{n}$;

10) $a_n = \dfrac{n!}{n^{2n}}$; 11) $a_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)$; 12) $a_n = n\sin\left(\dfrac{\pi}{2}n\right)$.

ESERCIZIO 2

Considerare le seguenti successioni:

$$a_n = \frac{2}{n^2+n};$$

$$b_n = e^{-n};$$

$$c_n = \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n};$$

$$d_n = \frac{3}{n^n};$$

e rispondere ai quesiti:

a) controllare che siano tutte infinitesime;
b) disporle in ordine crescente di infinitesimo;

c) stabilire l'ordine di infinitesimo per la successione g_n ottenuta nel seguente modo $g_n = a_n + b_n + c_n + d_n$.

ESERCIZIO 3

Considerare le seguenti successioni:

$a_n = e^{n+n^2}$;

$b_n = \cosh n^2$;

$c_n = e^{\sqrt{n}+1}$;

$d_n = -n^3 + n^6 + \ln n$;

e rispondere ai quesiti:

a) controllare che siano tutte infinite;
b) disporle in ordine crescente di infinito;
c) stabilire l'ordine di infinito per la successione h_n ottenuta nel seguente modo $h_n = a_n + b_n + c_n + d_n$.

SERIE NUMERICHE

ESERCIZIO 1

Determinare il carattere della seguente serie numerica; giustificare la risposta indicando i criteri utilizzati:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|1 - \sin(n)|}{n^4 + n^2}.$$

Nel caso di serie convergente, determinare quanti termini occorre sommare per avere un valore della somma con un errore che non superi 10^{-3}.

ESERCIZIO 2

Dopo avere dato la definizione di serie convergente, stabilire il carattere delle seguenti serie dichiarando il criterio utilizzato:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3 + n}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{7\ln(n+4)}{n+1}$.

Per ciascuna delle serie convergenti, calcolare quanti termini occorre sommare per avere un errore che, in valore assoluto, non superi 10^{-3}.

ESERCIZIO 3

Dopo aver dato la definizione di serie divergente, determinare il carattere delle seguenti serie e indicare il criterio utilizzato:

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\cos(\pi n)|}{3^n + n^2}$;

2) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+3}{4+n^3+5^n}$;

3) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^n}{n^2+2}$.

Solo per le serie convergenti dire quanti termini occorre sommare per avere un valore della somma con un errore minore di 10^{-2}.

ESERCIZIO 4

Per ciascuna delle seguenti serie numeriche, individuare il carattere e – nel caso di serie convergenti – calcolare quanti termini occorre sommare perché l'errore che si commette assumendo tale valore come somma della serie non superi 10^{-2}:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^3+2}{n^6+2n}$;

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{n^3}+\frac{3}{n}}{4^n+1}$.

ESERCIZIO 5

Data la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2+2n}$, controllare la convergenza e maggiorare l'errore che si commette sommando i primi 10 termini.

ESERCIZIO 6

Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+\ln^2 n}{n^4+2n+3}$:

a) determinarne il carattere precisando il procedimento seguito;
b) scrivere una serie maggiorante la serie data;
c) indicare quanti termini occorre sommare per avere un valore della somma della serie con un errore che non superi 10^{-3}.

ESERCIZIO 7

Data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2e^{-n}}{n^4+3}$:

a) determinarne il carattere precisando il procedimento seguito;
b) scrivere una serie maggiorante la serie data;
c) indicare quanti termini occorre sommare per avere un valore della somma della serie con un errore che non superi 10^{-3}.

LIMITI E SVILUPPI DI TAYLOR

ESERCIZIO 1

Calcolare i seguenti limiti individuando - se possibile - la più semplice funzione asintotica:

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x^2}{x^4}$; 2) $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2 + x}{x^4}$; 3) $\lim_{x\to 0} \frac{6\sin x^2 - 6\arctan x - x^3}{x^5}$;

4) $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(2x-3)}{x^2-4}$; 5) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3}$ 6) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})(\sin x - x)}{(\cos x - 1)^3 x^2}$;

7) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^4 - x}{x^3}$; 8) $\lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{x-2}$; 9) $\lim_{x\to 0} \frac{2 - x^3 - 2\cos x}{x^4}$;

10) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\cos x}$; 11) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$; 12) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$;

13) $\lim_{x\to 0} \frac{-2\sinh x + x^4 + \arctan x^2}{x^5}$

ESERCIZIO 2

Calcolare i seguenti limiti individuando - se possibile - la più semplice funzione asintotica:

1) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(2x-3)}{x+1}$; 2) $\lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{\frac{1}{x}}$;

3) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x^5(1+x)}{x^3}$; 4) $\lim_{x\to 0} \frac{6\sin x - x^3(6+x^2)}{x^5}$;

5) $\lim_{x\to 0} \frac{2\ln(1+x) - x^2(2-x)}{x^3}$; 6) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2\ln(1-x) - x^2(2-x)}{x^3}$;

7) $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)\cos x - x^3}{x^3}$; 8) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})(\sinh x - x)}{(\cosh x - 1)^3 x^2}$;

9) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2-1}\cdot\ln x}{(x^3-1)^2\cos x}$;

10) $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\ln|x-1|}$;

11) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\ln|x-1|}$;

12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{x^2}$.

ESERCIZIO 3

Calcolare i seguenti limiti e motivare il procedimento seguito e il risultato ottenuto per ciascuno di essi. Dare inoltre, in corrispondenza di ciascuno, la definizioni di limite:

1) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+\ln\left(1+x^2\right)\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x^3\cdot\ln\left(1+x^2\right)}{\left(1-\cos\sqrt[3]{x}\right)^4}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}}{\frac{5}{x}-\frac{6}{x^6}}$;

4) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^{\frac{1}{x}}$.

ESERCIZIO 4

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[5]{2+x^2}-\sqrt[5]{2-x^2}\right).$$

ESERCIZIO 5

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[5]{2x+x^5}-\sqrt[3]{2+x^3}\right).$$

ESERCIZIO 6

Dopo aver enunciato il teorema del confronto tra infinitesimi, mettere in ordine crescente di infinitesimo, per $x\to0$, le seguenti funzioni e per ciascuna disegnare il grafico nell'intorno considerato:

$f_1 = x^3 \ln x^2 + 3x^4$;
$f_2 = x \sin \sqrt[5]{x} + x^2$;
$f_3 = \ln(1 + \sqrt[3]{x})$;
$f_4 = x^3 + 3x^2 - x$.

ESERCIZIO 7

Mettere in ordine crescente di crescente di infinito, per $x \to +\infty$, le seguenti funzioni e per ciascuna disegnare il grafico nell'intorno considerato:
$f_1 = x + x^3 \ln x^2$;
$f_2 = \ln x + x\sqrt[5]{x}$;
$f_3 = e^{\sqrt[3]{x}} + x^6$;
$f_4 = x^3 + 3x^2 - x$.

ESERCIZIO 8

Mettere in ordine crescente di infinitesimo, per $x \to 0$, le seguenti funzioni e per ciascuna disegnare il grafico nell'intorno considerato:
$f_1 = \tanh x^2$;
$f_2 = 1 - \cos x$;
$f_3 = \sqrt[3]{(1-x)x^2}$.

ESERCIZIO 9

Si calcoli il polinomio di MacLaurin di quarto grado della funzione $f(x) = 6x^2 + \cos 2x - e^{4x^2}$ e poi si calcoli il limite per $x \to 0$ della funzione $g(x) = \dfrac{6x^2 + \cos 2x - e^{4x^2}}{2\sin x^4 - x^6}$.

ESERCIZIO 10

Si calcoli il seguente limite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x) - 2x}{\sqrt[3]{x - 2x^2}}$.

Rappresentare poi il grafico corrispondente nell'intorno considerato.

ESERCIZIO 11

Calcolare il seguente limite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+x) - \ln\left(1+x^2\right) + x^3}{\tanh^2\left(x^2\right)}$.

ESERCIZIO 12

Calcolare $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{4x - x^2}$ e motivare il percorso seguito.

ESERCIZIO 13

Individuare l'ordine e la parte principale dell'infinitesimo per $x \to 0$ della seguente funzione $y = \ln\frac{1+\cos(ax)}{2}$ essendo a reale.

ESERCIZIO 14

Data la funzione $f(x) = x\left(\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}\right)$, dopo aver individuato la più semplice funzione asintotica per $x \to 0$, calcolare $\lim_{x\to 0} f(x)$.

ESERCIZIO 15

Calcolare ciascuno dei seguenti limiti motivando il procedimento seguito:

1) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(x^2+\sqrt{x}\right)\cdot\ln\left(1+x+x^2\right)}{x^2+6x^3+e^{-x}}$;

2) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1+\sin x}{x\cdot\left(e^{-2x}-1\right)}$.

ESERCIZIO 16

Calcolare il seguente limite: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\ln(1-x)-1}{1-\cos x}$.

ESERCIZIO 17

Calcolare i seguenti limiti e, dopo aver individuato per ciascuno la più semplice funzione asintotica, disegnare il grafico nell'intorno del punto considerato:

1) $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{-3}{x^4}+2x^4+\frac{1}{x^5}\right)$;

2) $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{4}{x}+\frac{e^x}{x^7}+\frac{7}{x}\right)$;

3) $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{|x|}+x^2-3x^4\right)$.

ESERCIZIO 18

Scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado centrato nel punto $x = \pi$ per la funzione $f(x) = x^2 \sin(x)$. Rappresentare poi il grafico della funzione nell'intorno del punto $x = \pi$.

ESERCIZIO 19

Scrivere lo sviluppo di MacLaurin arrestato al quarto ordine per la funzione $f(x) = x - 2x^2 - \ln(1 + 4x^2)$. Rappresentare poi il grafico della funzione nell'intorno del punto $x = 0$.

ESERCIZIO 20

Calcolare il seguente limite: $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\arcsin 4x}{\cosh \sqrt[3]{x} - 1}$.

ESERCIZIO 21

Calcolare i seguenti limiti:

1) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3+x^2} \sinh x}{e^{x^2 + \frac{x}{2}} \ln x}$;

2) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt[5]{\cosh x - 1} \cdot \ln\left(1 + \sin^3 x\right)}{x^2 \ln\left(1 + x^3\right)}$.

ESERCIZIO 22

Data la funzione $f(x) = x^3 e^{2x}$:

a) scrivere lo sviluppo in serie di MacLaurin precisando l'insieme di convergenza;
b) calcolare $f^{(5)}(0)$ utilizzando lo sviluppo precedentemente calcolato.

ESERCIZIO 23

Data la seguente funzione $y = x^3 e^{x+1}$:

a) scrivere il polinomio di Taylor di secondo grado della funzione nel punto $x = 2$;
b) disegnare il grafico nell'intorno del punto considerato.

ESERCIZIO 24

Calcolare i seguenti limiti, spiegando il procedimento seguito:

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\left(2x - x^5 + 5x^3\right)\cdot \lg\left(1+x^2\right)}{\left(\sin x^2\right)\sqrt{x^2+x^4}}$;

2) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)\cdot\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}+3\right)}{\dfrac{1}{x}\cdot\left(\sin\dfrac{1}{x^2}\right)}$.

ESERCIZIO 25

Data la funzione $y = \sqrt{1+\dfrac{2}{x}} - \sqrt[3]{1+\dfrac{3}{x}}$, calcolare l'ordine di infinitesimo per $x \to +\infty$.

Utilizzando il risultato ottenuto, calcolare $\lim\limits_{x\to 0} x\left(\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}\right)$.

ESERCIZIO 26

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} + \dfrac{1}{2}\ln(1-x) - 1}{\cosh x^2 - \cos x^2}.$$

ESERCIZIO 27

Scrivere il polinomio di MacLaurin $P_2(x)$ della funzione $f(x) = \sin(\cos x^2)$.

ESERCIZIO 28

Scrivere il polinomio di MacLaurin di secondo grado che approssima nell'intorno di $x = 0$, la funzione $F(x) = \int_0^{\sin 2x} \cosh(t-1)^2\,dt$ e disegnare il grafico della funzione nell'intorno del punto $x = 0$.

ESERCIZIO 29

Calcolare il seguente limite spiegando il procedimento seguito:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}.$$

ESERCIZIO 30

Calcolare al variare del parametro reale α il valore dei seguenti limiti:

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^\alpha - \ln\left(1+x^4\right)}{2x^4 - \sin\left(2x^4\right)}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(1-\cos x)^\alpha}{\sqrt[7]{\sinh^5 x} - x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x) - 2\sin x + x + \alpha x^2}{x \sinh x}$.

ESERCIZIO 31

Per ciascuna delle seguenti funzioni:

1) $g_1(x) = \ln(1+x^2)$;
2) $g_2(x) = \ln(1-4x)$;

a) scrivere il polinomio di MacLaurin di quarto grado $P_4(x)$;
b) scrivere lo sviluppo in serie di MacLaurin precisandone l'intervallo di convergenza.

FUNZIONI

ESERCIZIO 1

Per ciascuna delle seguenti funzioni calcolare:

a) il dominio;
b) il più ampio insieme aperto in cui è possibile calcolare la derivata infinite volte;
c) i limiti agli estremi del dominio e per ciascuno individuare la più semplice funzione asintotica;
d) gli zeri (e – se possibile – individuare la più semplice funzione asintotica rispetto al campione standard);
e) la derivata prima e il suo dominio;
f) i massimi e minimi locali e globali della funzione;
g) la derivata seconda e (laddove i calcoli lo consentono) gli eventuali punti di flesso della funzione;
h) rappresentare il grafico della funzione.

1) $y = \ln\left(x \cdot \left|1+\dfrac{1}{x}\right|\right)$; 2) $y = \sqrt[3]{(x+2)\left(x^2-x\right)}$; 3) $y = \dfrac{x^3-3x}{x+1}$;

4) $y = -2x + \dfrac{1}{x+4}$; 5) $y = \left(x^2-x\right)e^{-x^2}$; 6) $y = x^6 - 10x^4$;

7) $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}$; 8) $y = \sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{x+1}$ 9) $y = e^{-x}x^3$;

10) $y = x^2 \ln|x+3|$; 11) $y = \sqrt[3]{|x|}\left(1-x^2\right)$; 12) $y = \left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}$;

13) $y = e^x\left(x^2+x^3\right)$; 14) $y = x^2 \sinh(-x)$; 15) $y = e^{-x}(1+x)^3$;

16) $y = e^x|x-1|$; 17) $y = x^2 - \ln|1+x|$; 18) $y = \ln\left|2-\sqrt[3]{x^2}\right|$;

19) $y = e^{-x^2} + x$; 20) $y = \left|1-\ln^3 x\right|$; 21) $y = x^2 - 2\arctan x$.

ESERCIZIO 2

Data la funzione:

$$y = \begin{cases} -x^2\cos\left(\dfrac{b}{x}\right) & x \neq 0 \\ cx & x = 0 \end{cases}$$

Dopo aver dato la definizione di funzione continua in un punto, dire per quali valori di $b,c \in R$, la funzione è continua nel punto $x = 0$; controllare se per tali valori è anche derivabile in $x = 0$ e classificare la natura del punto $x = 0$.

ESERCIZIO 3

Dire, motivando la risposta, se la funzione $y = x^2 \cos\dfrac{1}{x}$ è prolungabile con continuità nel punto $x = 0$. La funzione è anche derivabile nel punto $x = 0$? Spiegare il risultato ottenuto.

ESERCIZIO 4

Data la funzione $f(x) = e^{-x}\left(\dfrac{x}{x+3}\right)$ nell'intervallo $[-2,2]$:

a) controllare se la funzione ha nell'intervallo considerato punti di massimo e/o di minimo;
b) specificare se gli eventuali massimi e/o minimi sono globali e /o locali;
c) con i risultati ottenuti disegnare nell'intervallo un grafico qualitativo della funzione e indicare il numero minimo di flessi compatibile con le informazioni in possesso.

ESERCIZIO 5

Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & x \geq 1 \\ x & 0 < x < 1 \\ 2\sqrt[3]{x} & -1 < x \leq 0 \\ -2 & x \leq -1 \end{cases}$$

dopo averla rappresentata nel piano cartesiamo, calcolare:

a) il dominio e l'insieme di continuità;
b) classificare gli eventuali punti di discontinuità;
c) i limiti agli estremi del dominio e per ciascuno individuare la più semplice funzione asintotica;
d) gli zeri (e per ciascuno individuare la più semplice funzione asintotica rispetto al campione standard);
e) la derivata prima e il suo dominio;
f) indicare eventuali punti di non derivabilità e classificarli;
g) i massimi e minimi locali e globali della funzione;
h) la derivata seconda e (dove i calcoli lo consentono) gli eventuali punti di flesso della funzione.

ESERCIZIO 6

Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x}$, calcolare:

a) il dominio;
b) i limiti agli estremi del dominio e per ciascuno individuare la più semplice funzione asintotica;
c) gli eventuali asintoti;
d) gli zeri (e per ciascuno individuare la più semplice funzione asintotica rispetto al campione standard);
e) la derivata prima e il suo dominio;
f) i massimi e minimi locali e globali della funzione;
g) rappresentare un grafico della funzione compatibile con i risultati trovati.

ESERCIZIO 7

Data la seguente funzione $y = x^2 + \log_2(x+1)$:

a) calcolare il dominio;
b) calcolare i limiti alla frontiera del dominio e per ciascuno scrivere la funzione asintotica più semplice;
c) scrivere le equazioni di eventuali asintoti e specificarne la natura;
d) disegnare un grafico della funzione tenendo conto dei risultati precedentemente ottenuti e dedurre se la funzione ha massimi o minimi relativi.

ESERCIZIO 8

Data la seguente funzione:

$$y = \begin{cases} x^2 - 16 & x \geq -1 \\ x + 1 & -2 < x < -1 \\ 2 & x < -2 \end{cases}$$

a) disegnarne il grafico;

b) indicare il dominio e l'insieme delle immagini;
c) elencare e classificare gli eventuali punti di discontinuità;
d) la funzione ammette massimo o minimo locali/globali? Se sì quali?

ESERCIZIO 9

Data la seguente funzione $y = \dfrac{2+3^x}{3^x-1}$:

a) calcolare il dominio, il segno e gli zeri della funzione;
b) calcolare i limiti alla frontiera del dominio;
c) scrivere le equazioni di eventuali asintoti;
d) disegnare un grafico della funzione tenendo conto dei risultati precedentemente ottenuti;
e) dal grafico dedurre se la funzione ha massimi e/o minimi assoluti e/o relativi.

ESERCIZIO 10

Data la seguente funzione:

$$y = \begin{cases} x-4 & x \geq 4 \\ \sqrt[3]{x-2} & 0 < x < 4 \\ -x^2 - x & -1 \leq x \leq 0 \\ 3 & x < -1 \end{cases}$$

a) disegnare il grafico;
b) indicare il dominio e l'insieme delle immagini;
c) elencare e classificare gli eventuali punti di discontinuità;
d) indicare e classificare gli eventuali punti di massimo e/o minimo assoluto e/o relativo;
e) indicare e classificare gli eventuali punti di non derivabilità.

ESERCIZIO 11

Controllare se la seguente funzione è continua nel punto $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} \ln x & x > 1 \\ (e-1)\left(x^2 + x\right) & x \leq 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 12

Controllare se la seguente funzione è continua nel punto $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-x^2} & x \leq 1 \\ \sqrt[3]{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 14

Per quale valore di a reale la funzione: $f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - ax + a & 1 < x \le 2 \end{cases}$ è continua in $x = 1$?

ESERCIZIO 16

Data la funzione: $y = \begin{cases} -x^2 \sin x & x \in (0\,,+\infty) \\ 1 - e^{-x} & x \in (-\infty\,,0] \end{cases}$

a) indicare il dominio e il più ampio insieme in cui la funzione è derivabile infinite volte;
b) controllare se la funzione è continua in $x = 0$;
c) calcolare i limiti alla frontiera del dominio;
d) disegnare il grafico della funzione nell'intorno del punto $x = 0$;
e) scrivere la più semplice funzione asintotica della y per $x \to 0$ e per $x \to -\infty$.

ESERCIZIO 17

Data la funzione: $y = \begin{cases} 2x + \dfrac{27}{x^2} & x \ge 2 \\ \ln\left|x^2 - 4\right| & x < 2 \wedge x \ne -2 \end{cases}$

a) calcolare i limiti alla frontiera e scrivere l'equazione di eventuali asintoti;
b) calcolare e studiare la derivata prima, indicare gli eventuali punti di massimo e/o di minimo, specificando se locali e/o globali;
c) disegnare un grafico compatibile con i risultati trovati.

ESERCIZIO 18

Data la seguente funzione definita a tratti:

$$y = \begin{cases} x^2 & x \le 0 \\ x & 0 < x < 4 \\ \sqrt[5]{x-4} & x \ge 4 \end{cases}$$

a) disegnare il grafico;
b) indicare il dominio e l'insieme in cui la funzione è continua; nel caso della presenza di punti di discontinuità indicarli e classificarli;
c) controllare se la funzione è derivabile in $x = 0$ e in $x = 4$ e motivare la risposta.

ESERCIZIO 19

Data la funzione $y = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$ calcolare:

a) il dominio;
b) i limiti alla frontiera del dominio e nel caso di limiti infiniti indicare la più semplice funzione asintotica nell'intorno considerato;
c) le equazioni di eventuali asintoti;
d) la derivata prima e il suo dominio;
e) la funzione presenta punti di non derivabilità? Se sì classificarli;
f) studiare la derivata prima e dichiarare se la funzione ha massimi e/o minimi relativi e/o assoluti;
g) disegnare un grafico compatibile con i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 20

Data la funzione $y = x^2\sqrt{2+x}$ calcolare:

a) il dominio;
b) i limiti alla frontiera del dominio e nel caso di limiti infiniti indicare la più semplice funzione asintotica nell'intorno considerato;
c) la derivata prima e il suo dominio;
d) la funzione presenta punti di non derivabilità? Motivare la risposta;
e) studiare la derivata prima e dichiarare se la funzione ha massimi e/o minimi relativi e/o assoluti;
f) tracciare un grafico qualitativo utilizzando i risultati ottenuti e dichiarare il minor numero di punti di flesso compatibile con il grafico disegnato.

ESERCIZIO 21

Data la funzione $y = x^2 + \ln(-x+4)$ calcolare:

1) il dominio;
2) i limiti alla frontiera del dominio e nel caso di limiti infiniti indicare la più semplice funzione asintotica nell'intorno considerato;
3) la derivata prima e studiarla. Dichiarare se la funzione ha massimi e/o minimi relativi e/o assoluti;
4) la derivata seconda e studiarla, indicando gli eventuali punti di flesso;
5) disegnare un grafico compatibile con i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 22

Data la seguente funzione definita a tratti:

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x & -3 \le x < 0 \\ \sqrt{x} & 0 \le x \le 4 \end{cases}$$

a) disegnare il grafico;
b) controllare se la funzione è continua in $x = 0$ e motivare la risposta;
c) controllare se la funzione è derivabile in $x = 0$ e motivare la risposta;

d) dire se la funzione ammette massimo e/o minimo globale e motivare la risposta;
e) calcolare l'area della regione di piano compresa tra la funzione data e l'asse delle x.

ESERCIZIO 23

Data la funzione $f(x) = \frac{1}{x}\sin^2 x$:

a) indicare l'insieme in cui la funzione è continua;
b) calcolare gli zeri;
c) calcolare i limiti alla frontiera del dominio;
d) calcolare la derivata prima e indicare eventuali massimi e/o minimi;
e) disegnare un grafico qualitativo compatibile con i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 24

Data la funzione $f(x) = e^x \sinh x$:

a) indicare l'insieme in cui la funzione è continua;
b) calcolare gli zeri;
c) calcolare i limiti alla frontiera del dominio;
d) calcolare la derivata prima e indicare eventuali massimi e/o minimi;
e) disegnare un grafico qualitativo compatibile con i risultati ottenuti.

INTEGRALI

ESERCIZIO 1

Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$; 2) $\int x\sqrt{x+2}\,dx$; 3) $\int \frac{3x+1}{x\left(x^2+16\right)}dx$;

4) $\int \frac{2}{x^2+5x+6}dx$; 5) $\int \frac{x^2-2}{x^2\left(x^2-4x+3\right)}dx$; 6) $\int \frac{\sin x}{\cos x+1}dx$;

7) $\int \frac{1}{\cos x}dx$; 8) $\int \frac{3}{x\left(\ln^2 x+\ln x\right)}dx$; 9) $\int e^x \sin x\,dx$;

10) $\int x\arctan x\,dx$; 11) $\int \frac{e^x+3}{e^{2x}+1}dx$; 12) $\int \frac{1}{\cosh 2x}dx$;

13) $\int \frac{5x-1}{(x+3)\left(x^2+4\right)}dx$; 14) $\int \frac{x^2-2}{x^2(x+1)(x-3)}dx$.

ESERCIZIO 2

Calcolare i seguenti integrali definiti:

1) $\int_2^3 \frac{3\ln x}{x\left(\ln^2 x - 2\ln x - 8\right)}\,dx$;

2) $\int_4^6 \left(\frac{2x+1}{x^2-9} + \frac{3}{x^2+16}\right)dx$;

3) $\int_0^2 \left(\frac{x+1}{x^2-9} + 2x\right)dx$;

4) $\int_1^2 x^3 e^{x+1}\,dx$;

5) $\int_0^2 x^2 |x-1|\,dx$;

6) $\int_0^2 x \ln|x-1|\,dx$.

ESERCIZIO 3

Calcolare i seguenti integrali:

1) $\int_0^1 \frac{x^2+x}{(x+1)^2\left(x^2+4\right)}\,dx$;

2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x^2+1\right)\cos x\,dx$;

3) $\int_1^2 \frac{e^x+3}{e^{2x}-e^x}\,dx$;

4) $\int_0^1 \frac{4x+1}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$.

ESERCIZIO 4

Calcolare l'area delimitata dalle funzioni $y = -x^2 - 2x +$ e $y = -\frac{2}{x}$ e dalle rette di equazione $x = 1$ e $x = 2$.

ESERCIZIO 5

Calcolare l'area compresa tra la funzione $y=\sqrt{x}-x+2$, l'asse delle x nell'intervallo $[3,5]$.

ESERCIZIO 6

Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_2^e \frac{\sqrt{\ln x+1}}{x\left(\ln^2 x+\ln x\right)}\,dx\,.$$

ESERCIZIO 7

Calcolare l'area della regione piana compresa tra l'asse delle x, con $x\in[-1,1]$ e il grafico della funzione $f(x)=x^2\ln(5+4x^2)$.

ESERCIZIO 8

Calcolare i seguenti integrali:

1) $\int_0^1 x^2\sqrt{25-x^2}$;

2) $\int_0^2 x\sqrt{16-x^2}$;

3) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+25}}$.

ESERCIZIO 9

Data la funzione $F(x)=\int_0^x \frac{3^{t-2}}{t^2+1}\,dt$, determinare l'equazione della retta tangente in $x=0$.

ESERCIZIO 10

Calcolare il seguente integrale:

$$\int_2^3 (1+6x)\ln\left(x^3-x^2\right)dx\,.$$

ESERCIZIO 11

Data la funzione $F(x)=\int_0^x \frac{t+\sin t}{e^t+1}dt$, determinare il polinomio di MacLaurin di secondo grado. Rappresentare il grafico della funzione nell'intorno del punto considerato.

ESERCIZIO 12

Data la funzione $F(x)=\int_2^x \frac{t^2-4t}{e^{t-1}+1}dt$, determinare se $F(x)$ è crescente nei punti $x=1$ e $x=3$ motivando la risposta.

ESERCIZIO 13

Considerata la funzione $F(x)=\int_0^x \frac{t+\ln(t+1)}{e^t+2}dt$, determinare il polinomio di MacLaurin di secondo grado. Rappresentare il grafico della funzione nell'intorno del punto considerato.

ESERCIZIO 14

Data la funzione integrale $F(x)=\int_0^x \frac{(2-3t)}{\ln(10-t^2)}dt$:

a) calcolare il dominio;
b) calcolare i limiti alla frontiera del dominio;
c) calcolare la derivata prima e gli eventuali massimi o minimo precisando se locali o globali;
d) rappresentare un grafico qualitativo coerente con i risultati ottenuti;
e) scrivere il polinomio di MacLaurin di secondo grado $P_2(x)$ che approssima $F(x)$ in un intorno di $x=0$, e controllare che il grafico disegnato nell'intorno del punto $x=0$ sia corretto;
f) calcolare il $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\{F(x)\}^2}{e^{\frac{x}{2}}-\cosh\sqrt{x}}$.

ESERCIZIO 15

Discutere l'eventuale convergenza dei seguenti integrali generalizzati:

1) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}dx$;

2) $\int_{-\infty}^{-1} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)dx$;

3) $\int_0^1 \frac{x}{\ln^2(x+1)}dx$.

ESERCIZIO 16

Tra tutte le primitive della funzione $y = xe^{3+2x}$ determinare quella che, per $x \to -\infty$, ha limite uguale a zero.

ESERCIZIO 17

Calcolare con la definizione il seguente integrale $\int_{-\infty}^{0} e^x\sqrt{1-e^x}\,dx$.

ESERCIZIO 18

Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in R$ converge il seguente integrale:
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(\sqrt{x}+1\right)(x+9)^{1+2\alpha}\, x^{\frac{1}{2}+\alpha}}$$
e calcolarlo per $\alpha = 0$.

ESERCIZIO 19

Data la funzione $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t+2}dt$:

a) determinare il dominio;
b) $F(x)$ è invertibile? Motivare la risposta;
c) detta $G(x)$ la funzione inversa, determinare $G'(0)$.
(ricordiamo che: $F(1) = 0$)

ESERCIZIO 20

Dire per quali valori di $\lambda \in R$ convergono i seguenti integrali:

1) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}\, e^{\lambda x}}{\sqrt[3]{x-2}\left(x^3+x\right)^{\lambda}}dx$;

2) $\int_{-\infty}^{2} \frac{x^{\lambda}}{\left(e^x-1\right)^{2\lambda+1}\sqrt[3]{x^2-x^4}}dx$.

ESERCIZIO 21

Discutere l'eventuale convergenza del seguente integrale generalizzato:

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos e^x + \sin x}{x\sqrt{x-1}}\, dx\ .$$

ESERCIZIO 22

Calcolare l'area compresa tra le funzioni di equazioni $y = -x^2 - 2x + 1$ e $y = -\frac{2}{x}$.

ESERCIZIO 23

Calcolare l'area compresa tra la funzione $y = \sqrt{x} - x + 2$, l'asse delle x nell'intervallo [3,5].

ESERCIZIO 24

Dopo aver disegnato i grafici delle funzioni $y_1 = \sqrt[3]{x-3}$ e $y_2 = -\frac{1}{4}x(x-5)$, calcolare l'area della regione finita di piano compresa tra i grafici delle funzioni relativamente all'intervallo [0,6].
(suggerimento: le due funzioni nell'intervallo considerato si intersecano nel punto $x = 4$)

ESERCIZIO 25

Data la funzione $F(x) = \int_{0}^{x} \frac{2^t}{\sqrt[3]{t+2}} dt$

a) determinare il dominio;
b) calcolare l'equazione della retta tangente alla $F(x)$ nel punto $x = 0$;
c) calcolare il polinomio di MacLaurin di $F(x)$ di secondo grado e disegnare il grafico della funzione nel punto $x = 0$;
d) calcolare i limiti agli estremi del dominio della funzione.

ESERCIZIO 26

Data la funzione integrale $F(x) = \int_{1}^{x} \frac{\ln|x|}{\sqrt[3]{1-x}} dt$:

a) calcolare il dominio;
b) calcolare i limiti alla frontiera del dominio;
c) calcolare la derivata prima e gli eventuali massimi o minimo precisando se locali o globali;
d) rappresentare un grafico qualitativo coerente con i risultati ottenuti;

ESERCIZIO 27

Calcolare il valore del seguente integrale, con un errore che non superi 10^{-2}:

$$\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{\sin\left(x^4\right)}{x^2}\,dx .$$

NUMERI COMPLESSI

ESERCIZIO 1

Risolvere le seguenti equazioni in C :

1) $z = \sqrt[3]{\frac{1}{(1+i)^2}}$;

2) $z = \sqrt[4]{(1-2i)^2}$;

3) $z^3 = \frac{1}{(-1+i)^3}$;

4) $z = \frac{2}{i} e^{i\frac{2}{3}\pi}$;

5) $z = 3^i$.

ESERCIZIO 2

Rappresentare nel piano di Gauss le immagini dei numeri complessi z che sono soluzioni delle seguenti equazioni:

1) $z = -i\ln(1-i)$;

2) $z = (4-4i)^i$;

3) $z = i^3$;

4) $z = \ln(-2i)$;

5) $z = 2\ln(-2-2i)$;

6) $z = i\ln(-2)$.

ESERCIZIO 3

Calcolare e rappresentare nel piano di Gauss le immagini dei numeri complessi z che verificano le seguenti condizioni:

$\Omega \equiv \left\{ z \in C : \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}^2(z) \le 1 \right\}$.

ESERCIZIO 4

Calcolare e rappresentare nel piano di Gauss le immagini dei numeri complessi z che verificano le seguenti condizioni:

$$\Omega \equiv \left\{ z \in C : \frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(z)} \leq 2, 2 \leq |z| \leq 4 \right\}.$$

ESERCIZIO 5

Calcolare e rappresentare nel piano di Gauss le immagini dei numeri complessi z che verificano le seguenti condizioni:

$$\Omega \equiv \left\{ z \in C : \operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z) \leq 1 + 2\operatorname{Im}(z) + 4\operatorname{Re}(z) \right\}.$$

ESERCIZIO 6

Calcolare e rappresentare nel piano di Gauss le immagini dei numeri complessi z che verificano le seguenti condizioni:

$$\Omega \equiv \left\{ z \in C : \left| e^{iz^2 - 2z} \right| \leq 1 \right\}.$$

ESERCIZIO 7

Dato il numero complesso $u = -3e^{i\frac{\pi}{4}}$, scriverlo in forma esponenziale e in forma trigonometrica. Calcolare e rappresentare nel piano di Gauss $\omega = \sqrt[3]{u}$.

ESERCIZIO 8

Risolvere in C le seguenti equazioni e rappresentare le immagini delle soluzioni nel piano di Gauss:

1) $\left(z^4 - 2e^{\frac{2\pi}{3}i} \right)\left(2\bar{z} - |z| \right) = 0$;

2) $|z|^2 - 3z\bar{z} + iz = 0$.

ESERCIZIO 9

Risolvere in C la seguente equazione e rappresentare le immagini delle soluzioni nel piano di Gauss:

$$\left(z^3 - e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \cdot \left(z^2 - i\,\bar{z} \right) = 0.$$

ESERCIZIO 10

Risolvere in C le seguenti equazioni e rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss:

1) $z^6 - (1-i)^6 = 0$;
2) $z^8 - 6iz^4 - 7 = 0$;
3) $\left(z - e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^4 = 16$;
4) $z^5 - 3z^2 = 0$.

ESERCIZIO 11

Risolvere in C le seguenti equazioni e rappresentare le soluzioni nel piano di Gauss:

1) $z = \ln\left(-i - \sqrt{3}\right)$;
2) $z = \ln(-4i)$.

ESERCIZIO 12

Disegnare il luogo geometrico descritto dalle immagini dei numeri complessi z , che verificano contemporaneamente le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} z \cdot \overline{z} - 2\operatorname{Re} z \le 3 \\ \dfrac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} \le -1 \end{cases}$$

inoltre detto E l'insieme dei suddetti z , disegnare E^* definito nel seguente modo: $E^* = \left\{w \in C : w = -2i\,z, \quad z \in E\right\}$.

.

È convinzione tra gli studenti che gli argomenti trattati all'interno di un primo corso di Analisi Matematica siano quelli in assoluto più difficili perché, a detta loro, bisogna ragionare molto e non c'è sempre una tecnica risolutiva standard. Questa consapevolezza ha spinto gli autori a preparare un testo di esercizi che accompagni lo studente nel ragionamento e ricordi le regole da usare. I commenti e la motivazione della scelta del metodo risolutivo da applicare sono importanti, essere preparati non significa aver risolto meccanicamente tanti esercizi. Di fronte a un qualsiasi quesito si deve avere chiara la sequenza dei passi da compiere onde evitare partenze che poi inevitabilmente si bloccano.
Questo è lo spirito con il quale è stato preparato questo libro, che si avvale dell'esperienza pluriennale degli autori all'interno dei corsi di Analisi Matematica e di Matematica specifici per l'Ingegneria, per l'Architettura e l'Economia.

LILIANA CURCIO è attualmente docente incaricato di Analisi matematica presso il Politecnico di Milano, ma è stata anche docente di Matematica e Fisica all'Istituto Statale Sperimentale d'Arte di Monza. Collabora con le attività del Centro PRISTEM dell'Università Bocconi ed è membro della redazione di *Lettera matematica PRISTEM*. I suoi interessi di studio sono rivolti soprattutto all'indagine formale dei legami tra la Matematica e l'Architettura. Con Esculapio ha pubblicato i volumi *Vettori, rette e piani* (2010) ed *Elementi di Analisi*. *Esercizi e cenni di teoria* (con Jacopo De Tullio, 2016).

JACOPO DE TULLIO è borsista di ricerca presso l'Università degli Studi dell'Insubria. È docente a contratto nell'ambito dei corsi di Matematica e Analisi presso le Università Bocconi e LIUC e partecipa all'attività didattica presso il Politecnico di Milano. Collabora con le attività di ricerca del Centro PRISTEM e i suoi interessi sono rivolti alla storia e alla divulgazione della Matematica, argomenti sui quali ha pubblicato numerosi interventi.

ISBN 978-88-7488-993-8

Euro 26,00

SOCIETÀ EDITRICE ESCULAPIO

www.editrice-esculapio.it