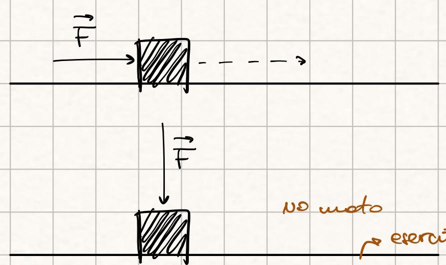
?cause di un moto

→ analisi delle forze → **DINAMICA** di un punto materiale
↓
interazione tra punto materiale e ambiente

- 1° LEGGE DELLA DINAMICA (PRINCIPIO DI INERZIA) : In assenza di forza un corpo permane nel suo stato di moto. ($\vec{F}=0$)
  $\vec{v}=0$
  se $\vec{v}\neq 0$ $\vec{v}$ costante MOTO RETTILINEO UNIFORME

→ vale in un sistema di riferimento INERZIALE (non soggetti a forze) → può muoversi di moto rettilineo uniforme
solidale con le stelle fisse
ideale

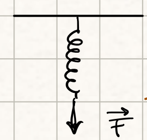
→ FORZE NATURALI
- interazione a distanza
  1) gravitazionali
  2) elettriche
  3) magnetiche
  4) nucleari
- di contatto



NO moto
→ esercita una forza uguale e contraria

⇒ la forza è una grandezza vettoriale $\vec{F}$

Def. statica di forza (operativa) : usando il DINAMOMETRO



} allungamento proporzionale alla forza applicata : $|\vec{F}| = \frac{x}{x_c}|\vec{F}_c|$
↳ forza campione
$\vec{F}_c$ → allung. x_c

DEFINIZIONE DINAMICA DELLA FORZA:

- 2° LEGGE DI NEWTON : legame tra la forza applicata a un punto materiale e la variazione del suo stato di moto

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

↳ costante, caratteristica intrinseca del punto m. (no nella relatività)

m = MASSA INERZIALE
↳ a parità di $\vec{F}$: $+m \to -\vec{a}$

- $\vec{F}=0 \Rightarrow \vec{a}=0 \Rightarrow \vec{v}$ cost (1° legge)

$$\Rightarrow \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

la massa può variare perché (• durante il moto si modifica l'oggetto)
• dipendenza della massa dalla velocità

< RELATIVITÀ RISTRETTA

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \longrightarrow \text{se } v \to c \Rightarrow m \to +\infty$$

↳ $F \to +\infty$ per accelerare il corpo

m = MASSA RELATIVA
m_0 = MASSA A RIPOSO
$c \simeq 3 \cdot 10^8\ m/s$

→ trascurabile nella vita quotidiana

velocità di fuga: $v_f \sim 10^4\ m/s$

↳ correzione relativistica della massa: $\frac{m-m_0}{m_0} \simeq \frac{1}{10^{10}}$

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\cdot\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{q}}{dt}$$

vale anche in meccanica relative

QUANTITÀ DI MOTO: $\vec{q} = m\vec{v}$ (vettoriale)

$$[F] = [M][L][T]^{-2} \rightarrow kg\ m \cdot s^{-2} = N \text{ (Newton)}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} \Rightarrow \vec{F}\cdot dt = d\vec{q}$$

$$\underline{\int_{t_0}^{t} \vec{F}\, dt} = \int_{q_0}^{q} d\vec{q} = \vec{q} - \vec{q}_0 = \Delta\vec{q}$$

q_0: quantità di moto iniziale

↱ vettoriale

(IMPULSO DELLA FORZA) $\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F} dt = \int_{\vec{q}_0}^{\vec{q}} d\vec{q} = \vec{q} - \vec{q}_0 = \Delta\vec{q}$ | TEOREMA DELL'IMPULSO

considerando la massa costante: $\vec{I} = m(\vec{v} - \vec{v}_0) = m\Delta\vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{1}{m}\vec{I}(t)$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t}\left[\vec{v}_0 + \frac{1}{m}\vec{I}(t)\right]dt \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t}\vec{I}(t)\,dt$$

$$[I] = [q] = [M][L][T]^{-1} \longrightarrow kg\ m\ s^{-1} = N\cdot s$$

Nota l'andamento della forza nel tempo $\rightarrow$ moto nel tempo:

se $\vec{F} = cost$ $\quad m = cost \quad t_0 = 0 \quad \Rightarrow$ t. impulso: $\vec{F}t = m(\vec{v} - \vec{v}_0)$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{F}}{m}\int_0^t t\,dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}}{m}t^2 = \boxed{\vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2}$$

moto rettilineo uniform. acceler.

se $\vec{F}(t)$ non è nota: $\displaystyle\int_0^t \vec{F}dt = \vec{F}_m t = \Delta\vec{q}$

$\llcorner$ forza media

- PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

→ sistema isolato: $\Sigma\vec{q} = 0$ (conservaz. globale di $\vec{p}$)
↳ $\Sigma\vec{F} = 0$

- il risultato di un moto dipende dalla risultante di tutte le forze applicate sul corpo.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

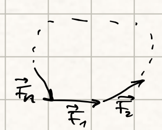
(! somma vettoriale)

sugli assi cartesiani:

$$\vec{R} = \begin{cases} R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \\ R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \\ R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{iz} \end{cases}$$

! se $R_x = R_y = R_z = 0$ → corpo in quiete — CONDIZIONE DI EQUILIBRIO

= risultante di tutte le forze vale 0



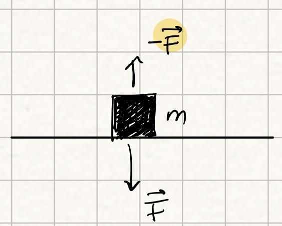
poligono chiuso

Reazioni Vincolari:

passive

↳ l'intensità dipende dalla forza a cui si deve opporre (non a priori, solo quando viene sollecitato un vincolo)

es,



$\vec{R} = 0$

- opporsi completamente
- rallentare il moto

$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_T + \vec{a}_N) = m\vec{a}_T + m\vec{a}_N = \underline{\underline{\vec{F}_T}} + \underline{\underline{\vec{F}_N}}$ scomposizione geometrica della forza rispetto la traiettoria

componente tangente — componente normale

$//$ $\vec{F}_T = m\frac{dv}{dt}\vec{u}_T$ → variazione modulo v (se moto uniforme : $\vec{F}_T = 0$)

$\perp$ traiettoria $\vec{F}_N = m\frac{v^2}{\rho}\vec{u}_N$ componente centripeta → variazione direzione moto es. campo magnetico

- $3°$ LEGGE DI NEWTON (PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE)

si applica su $\vec{F}_i^{(I)}$

sistema di punti materiali (almeno 2) che interagiscono tra di loro

forze su P_i (punto materiale) : $F_i = \underline{\underline{\vec{F}_i^{(I)}}} + \vec{F}_i^{(E)}$ (interna, esterna)

di interazione

P_i su P_j $\quad \vec{F}_{ij}$

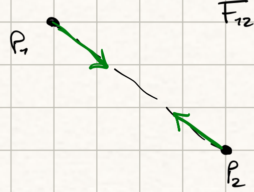
P_j su P_i $\quad \vec{F}_{j,i} = -\vec{F}_{i,j}$

forze uguali e contrarie
ma $\vec{a}$ può essere molto diverso ⇒ effetti diversi
perchè dipende anche dalla massa

→ ma risultante su ogni punto materiale del sistema non è detto sia 0.

$\sum \vec{F}_{interne} = 0$ ⇒ quantità di moto globale costante

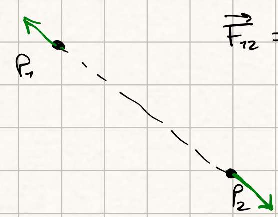
→ Il moto del sistema dipende da $\vec{F}$ esterne.



$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ attrattive

es. 2 masse

2 cariche elettriche +, −



$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ REPULSIVE

es. cariche −, −

+, +

PROBLEMA GENERALE DELLA DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

↳ predizione del moto di un punto materiale

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} \vec{I}(t)\,dt$$

$$\vec{I}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(t)\,dt$$

↳ con $\vec{F}$ nota

Dipendenza della forza:

$$F_x\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right) = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad x(t)$$

$$y(t)$$

$$z(t)$$

- $\vec{F}$ funzione della posizione
  del tempo
  della velocità

→ $\vec{F}$ GRAVITAZIONALE

- attrattiva
- diretta lungo la congiungente delle due masse
- $|\vec{F}| = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$

$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2 kg^{-2}$

→ $\vec{F}$ ELETTROSTATICHE (DI COULOMB)

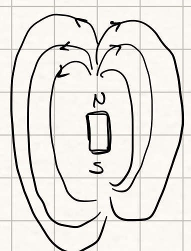
- lungo la congiungente delle due cariche elettriche
  (radiale) (puntiformi)

$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$; $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ C^2 N^{-1} m^{-2}$

- repulsiva se $+,+$ $-,-$
  attrattiva se $+,-$

→ $\vec{F}$ MAGNETICHE (DI LORENTZ) :

$|\vec{F}| = q \cdot \vec{v} \times \underbrace{\vec{B}}_{\text{campo magnetico}}$



- fa cambiare la direzione di moto della particella
- ha componente tangente nulla

⇒ materiali diamagnetici : non sentono la forza
⇒ materiali ferromagnetici : sentono la forza

($\rightarrow \vec{F}$ NUCLEARI)

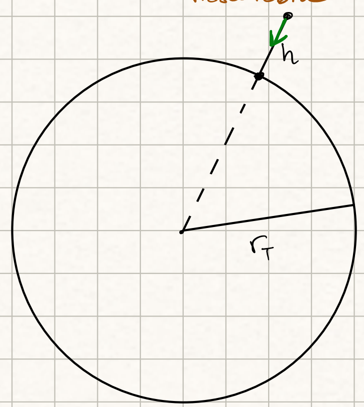
FORZA PESO ($\vec{F}$ GRAVITAZIONALE)

→ non dipende dalla massa

m_T $\quad r_T$ $\quad \Rightarrow$ Terra ipotesi: massa distribuita uniforme sferica

m a h $\quad$ = massa concentrata nel centro

$$|\vec{F}| = \gamma \frac{m_T m}{(r_T + \underbrace{h}_{\text{trascurabile}})^2} \simeq \gamma \frac{m_T m}{r_T^2}$$



$h << r_T$

- direzione radiale rispetto al centro della Terra, verso il centro
- attrattiva

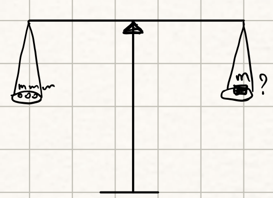
$|\vec{F}| = m|\vec{a}|$ $\qquad a = \gamma \frac{m_T}{r_T^2} = g$ $\qquad \Rightarrow$ azione-reazione: ma la Terra non ne risente $a = \gamma \frac{m}{r_T^2}$ trascurabile

$\vec{g} \downarrow$ $\qquad g \simeq 9{,}807 \ m/s^2$

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

→ cilindro di Sèvres

→ bilancia a bracci



$$\frac{|\vec{P}_?|}{|\vec{P}_c|} = \frac{m_?}{\underbrace{m_c}_{\text{campione}}}$$

DENSITÀ : $\boxed{\rho_m = \frac{m}{V}}$ $\rho(x,y,z) = \frac{dm}{dV}$

Grandezza
- **INTENSIVA** → non dipende dalla massa
- **ESTENSIVA** → dipende dalla massa

$[\rho] = [M][L]^{-3} \rightarrow kg \cdot m^{-3}$

PESO SPECIFICO : $\boxed{P_{sm} = \frac{mg}{V} = \rho_m g}$

$[P_{sm}] = [M][L]^{-2}[T]^{-2} \longrightarrow N\,m^{-3} = kg\,m^{-2}\,s^{-2}$

→ si può trovare la massa attraverso la forza peso

massa ↓ MASSA GRAVITAZIONALE

= inerziale

forza peso: agisce sulla massa con effetto che dipende solo dalla massa inerziale

↳ agisce solo sull'aspetto inerziale / meccanica dei corpi

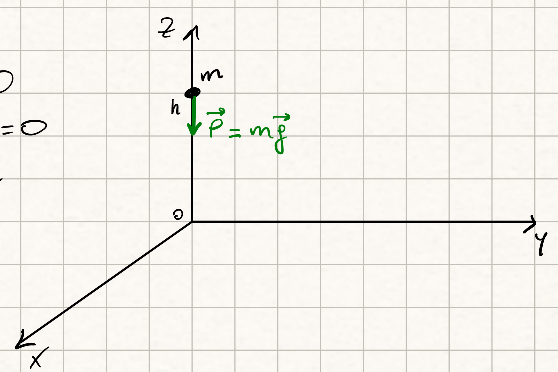
CADUTA LIBERA

$t_0 = 0$

$x_0 = y_0 = 0$

$z_0 = h$

$\vec{v}_0 = 0$



$\vec{F} = m\vec{g}$

$F_z = -\cancel{m}g = \cancel{m}\frac{d^2z}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2z}{dt^2} = -g$

moto rettilineo uniformemente accelerato

$v_z = \frac{dz}{dt} = -gt$

$z = h - \frac{1}{2}gt^2$

? T impiegato per arrivare a $z=0$ $T = t(z=0) \Rightarrow 0 = h - \frac{1}{2}gT^2$

$\Rightarrow \boxed{T = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$ (trascurando l'attrito)

? v finale di caduta $\boxed{v_f} = \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=T} = -gT = \boxed{-\sqrt{2hg}}$

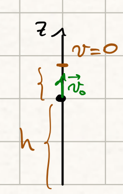
} ! non dipendono dalla massa

< massa gravitazionale ≡ massa inerziale

se $\vec{v}_0 \neq 0$ • $\vec{v}_0 \parallel \vec{u}_z$ → cambierà T e v_f

- se $\vec{v}_0$ verso l'alto T aumenta (perché aumenta la quota di partenza)

v_f aumenta



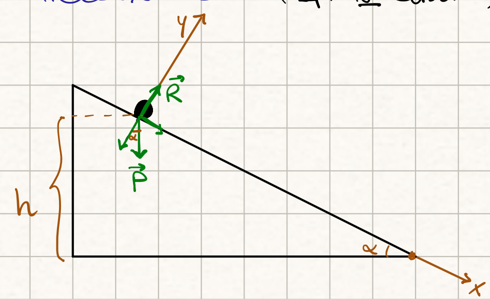
- se $\vec{v}_0$ verso il basso   T minore
v_f maggiore

• $\vec{v}_0 \not\parallel \vec{u}_z$: $\vec{v}_0 = \underline{v_{0x}\vec{u}_x} + \underline{v_{0y}\vec{u}_y} + v_{0z}\vec{u}_z$

moto rettilineo uniforme lungo x e y

⇒ risultato: traiettoria parabolica

PIANO INCLINATO (Ip. NO attrito)



$\vec{P} = m\vec{g}$

$F_y = -mg\cos\alpha + R \underline{\underline{=0}}$ (No moto lungo y)

$F_x = mg\sin\alpha = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$

se $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\vec{v}_0 = 0$: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = g\sin\alpha$ $\dfrac{dx}{dt} = g\sin\alpha \cdot t$

⇒ $x = \frac{1}{2}g(\sin\alpha)t^2$

$x_f = \dfrac{h}{\sin\alpha}$;

diminuito di $\sin\alpha$ rispetto alla caduta libera

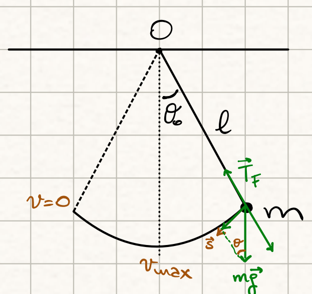
$\dfrac{h}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{2}g\sin\alpha T^2 \Rightarrow T = \sqrt{\dfrac{2h}{g\sin^2\alpha}} = \dfrac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

$v_f = g\sin\alpha T = g\sin\alpha\sqrt{\dfrac{2h}{g\sin^2\alpha}} = \sqrt{2gh}$ $\equiv v_f$ della caduta libera

↓

< CAMPO GRAVITAZIONALE è CONSERVATIVO
(dipende solo da punto di partenza e di arrivo)

MOTO DEL PENDOLO SEMPLICE (Ip. filo inestensibile e di massa trascurabile)



$F_T = -mg\sin\theta = ma_T$

tensione del filo

$F_N = -mg\cos\theta + T_F = ma_N$ $=0$ se $\theta = \theta_0$ (cioè $T_F = ma_N$)

$a_T = \ell\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$a_N = \dfrac{v^2}{\ell}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{\ell}\sin\theta \\ m\dfrac{v^2}{\ell} = T_F - mg\cos\theta \end{cases}$$

per $\theta \leq 7°$ $(= 0{,}122 \text{ rad})$: $\sin\theta \simeq \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

moto armonico semplice con pulsazione $\omega^2 = \dfrac{g}{\ell}$

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

ISOCRONISMO DELLE PICCOLE OSCILLAZIONI

↳ indipendenza dalla massa e dall'ampiezza dell'oscillazione.

$$s = \ell\theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

vel. ang. $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega\theta_0 \cos(\omega t + \phi)$

$$v = \frac{ds}{dt} = \ell\frac{d\theta}{dt} = \ell\,\omega\theta_0\cos(\omega t + \phi)$$

- max se $\theta = 0$
- $= 0$ se $\theta = \theta_0$ (p. di inversione)

Tensione del filo: $T_F = mg\cos\theta(t) + m a_N = m\left[g\cos\theta(t) + \dfrac{v^2(t)}{\ell}\right]$

- max se $\theta = 0$
- min se $\theta = \theta_0$ (p. di inversione)

? limite di rottura → Tensione di rottura valutata per $\theta = 0$ (T_F è max)

FORZA ELASTICA

$$\vec{F} = -k\, \underset{\text{deformazione}}{x}\, \vec{u}_x \quad ; \quad k>0 \text{ (costante)}$$

dimensionale

↳ $[F][L]^{-1} \rightarrow N/m = [M][L][T]^{-2}[L]^{-1} = [M][T]^{-2} \rightarrow kg/s^2$

- → unidimensionale (direzione costante)
- → verso il centro della forza
- → modulo proporzionale alla distanza dal centro
- → tende a portare i corpi nello stato di riposo
- → elasticità = caratteristica intrinseca dei corpi (idealmente corpi rigidi no elasticità)

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = -\frac{k}{m} x \vec{u}_x = -\underset{\text{PULSAZIONE}}{\omega^2} x \vec{u}_x$$

(MOTO ARMONICO SEMPLICE)

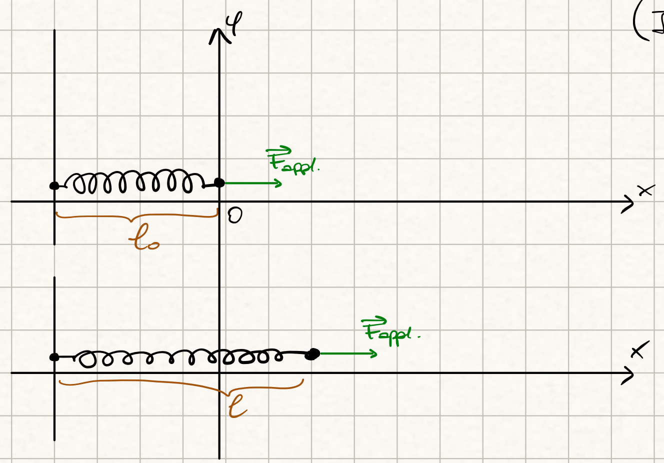
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

periodo di oscillazione

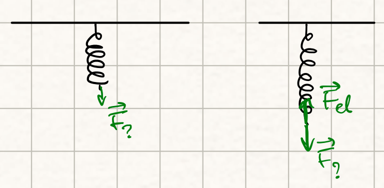
! dipendono dalla massa

(Ip. molla di m trascurabile)



$$F_{el} = -k(\ell - \ell_0) = -k \cdot x$$

DINAMOMETRO



$$|\vec{F}_?| = |\vec{F}| = k\Delta x$$

FORZA DI ATTRITO

~ resistenza

∃ sempre tra due oggetti

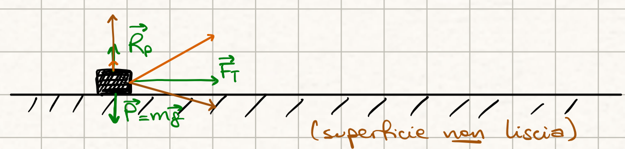
1) ATTRITO RADENTE → resistenza di una superficie al moto di un corpo (traslazione) → che strisciano l'uno sull'altro
2) ATTRITO VOLVENTE → dovuto alla scabrosità delle superfici e non perfetta elasticità quando due corpi rotolano l'uno sull'altro
3) ATTRITO VISCOSO → resistenza di un fluido al moto di un corpo (es. in aria, acqua)
4) ATTRITO INTERNO → tra particelle di un fluido

1) ATTRITO RADENTE

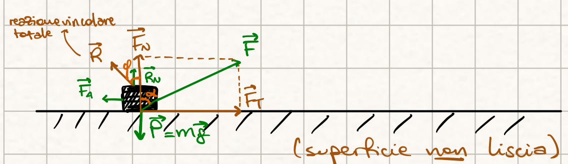
- STATICO (resistenza a iniziare un moto)

$$|\vec{F}_T| > |\vec{F}_A| = \mu_s |\vec{R}_N|$$

tangente al piano



$$\vec{R}_N + \vec{F}_N + \vec{P} = 0 \quad (\text{Ip. } |\vec{F}_N| < |\vec{P}|)$$



$$\vec{F}_A = -\mu_s |\vec{R}_N| \vec{u}_T$$

$$|\vec{F}_T| > \mu_s |\vec{R}_N|$$

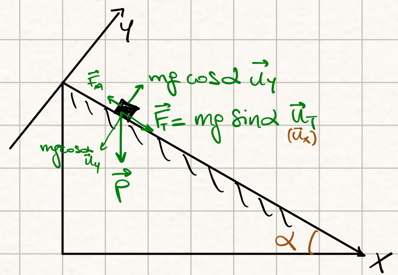
$\perp$ piano: $R_N - P + F_N = 0 \Rightarrow R_N = mg - F\cos\alpha$

// piano: $F_T - F_A = 0 \Rightarrow F_T = F\sin\alpha$

CONDIZIONE DI QUIETE: $\boxed{F_T \leq \mu_s R_N = \mu_s (mg - F\cos\alpha)}$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_T}{R_N} \leq \mu_s}$$

PIANO INCLINATO



lungo y: $R_N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow R_N = mg\cos\alpha$

lungo x: $-F_A + mg\sin\alpha = 0$ limite al movimento

$\geq$ → ✓ movimento

$$mg\sin\alpha \leq \mu_s mg\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \boxed{\operatorname{tg}\alpha \leq \mu_s}$$

aumentando l'inclinazione, se supera α, l'oggetto scivola

se l'angolo sta dentro il "CONO DI ATTRITO" il corpo rimane fermo, mentre se esce dal cono scivola.

→ DINAMICO : ⇒ quando le forze applicate > forza di attrito

Quando il corpo inizia a muoversi (si supera la condizione):

$$mg\sin\alpha - \mu_d R_N = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

che danno l'accelerazione

⇒ L'attrito radente dipende solo dal bilanciamento tra la forza di trascinamento e la forza di attrito, non dalla velocità (viscoso sì)

$$\vec{F}_A = -\mu_d R_N \vec{u}_{\vec{v}} = -\mu_d R_N \vec{u}_T$$

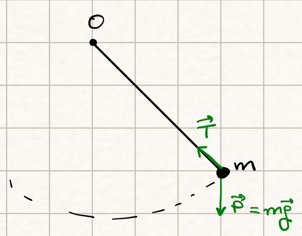
↳ tg traiettoria di moto
opposto al moto

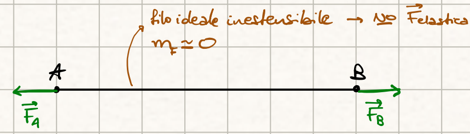
- non dipende dalla velocità
- dipende dalla ?coesione tra i due corpi
- dipende dalla reazione vincolare normale

3) ATTRITO VISCOSO : Nel fluido: $\vec{F}_A = -k\eta\vec{v}$

TENSIONI :

↳ vincolare dei corpi o trasmettere forze ai corpi





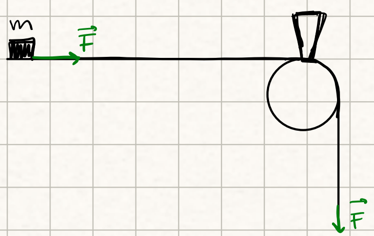
- $\vec{F}_A = -\vec{F}_B$

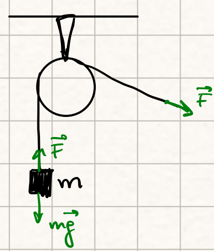
  → T uguale in tutto il filo

- $|\vec{F}_B| > |\vec{F}_A|$ → il filo accelerato verso la forza maggiore

  $\vec{F}_B + \vec{F}_A = \underbrace{m_F}_{\simeq 0} \vec{a}$ ⇒ T uguale in tutto il filo

CARRUCOLA :

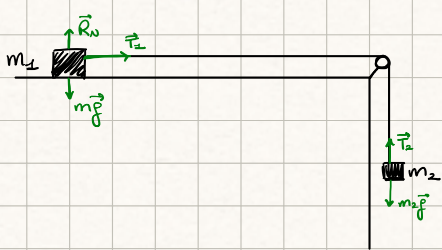




trasmettere forze da un corpo all'altro

→ la forza viene trasmessa uguale in modulo

→ la direzione può cambiare



$m_2 > m_1$

- $m_1\vec{g} + \vec{R}_N = 0$
- su m_1 : $\vec{T}_1 = m_1\vec{a}_1$ ⇒ $T_1 = m_1 a_1$

  su m_2 : $m_2\vec{g} + \vec{T}_2 = m_2\vec{a}_2$ ⇒ $m_2 g - T_2 = m_2 a_2$

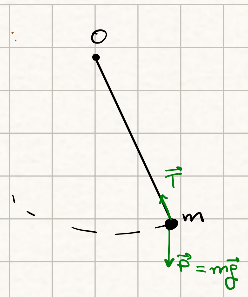
⇒ $a_1 = a_2 = a$: $T_1 = T_2$

⇒ $m_2 g - m_1 a = m_2 a$

$$\boxed{a = \frac{m_2 g}{(m_1 + m_2)}}$$

il moto avviene come se ci fosse un'unica massa $m_1 + m_2$ che si muove per la forza peso di m_2 : $m_2 g = (m_1 + m_2) a$

PENDOLO :



pendolo vincolato al punto O

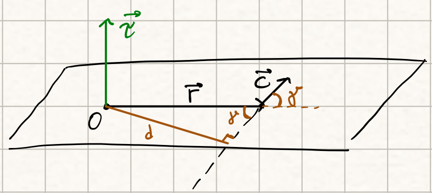
↳ punto privilegiato, rispetto cui studiare il moto
di simmetria

⇓

MOMENTO DI UN VETTORE $\vec{c}$: $\vec{\tau}$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{c}$$

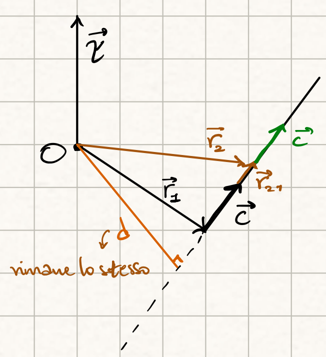
$\vec{r}$: punto di applicazione di $\vec{c}$



$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{c}|\sin\gamma$$
$$= |\vec{c}|\,d$$

d: braccio (scalare, distanza tra O e la retta d'azione)

$|\vec{\tau}|$ non cambia spostando $\vec{c}$ lungo la direz. di $\vec{c}$ (retta d'azione) : (non dipende dal punto di applicazione)



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{c}$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r_2} \times \vec{c} = (\vec{r_1} + \vec{r_{21}}) \times \vec{c} = (\vec{r_1} \times \vec{c}) + \underbrace{\cancel{(\vec{r_{21}} \times \vec{c})}}_{=0} = \vec{\tau}_1$$

$$\vec{r_2} = \vec{r_1} + \vec{r_{21}}$$

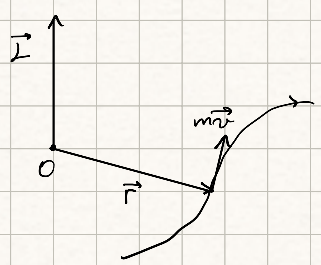
momento della quantità di moto : MOMENTO ANGOLARE

- quando si ha un centro di simmetria
- forze dirette sempre verso un punto fisso

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{q}$$

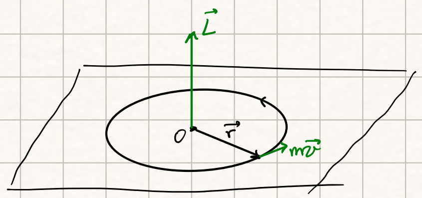
$\vec{L} \perp$ piano $\vec{r}\ \vec{q}$

→ se il moto non avviene in un piano $\vec{L}$ varia di direzione istante per istante, ma sarà sempre $\perp$ piano individuato quell'istante



$$[|\vec{L}|] = [L][M][L][T]^{-1} \rightarrow kg\, m^2 s^{-1}$$

MOTO CIRCOLARE :



$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

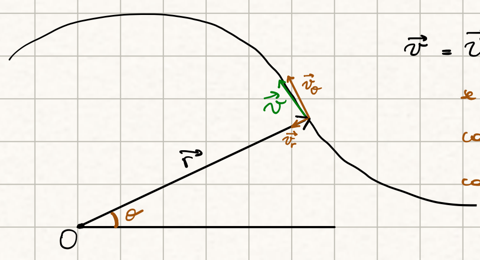
$$|\vec{L}| = mrv = mr(\omega r) = mr^2\omega$$

$$\vec{L} = m\underline{r}^2\vec{\omega}$$

(v. angolare)

costante nel moto circolare

MOTO CURVILINEO



$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

se il moto non è circolare non è detto che coincidano la componente normale con la componente radiale, e la componente trasversa con la componente tangente

ma $\vec{v}$ è sempre tg traiett. e $\vec{v}_r \perp \vec{v}_\theta$

$$\vec{v}_r = \vec{u}_r \frac{dr}{dt} \quad ; \quad \vec{v}_\theta = \vec{u}_\theta \, \omega r$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times v = m\vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = \underbrace{\cancel{m\vec{r} \times \vec{v}_r}}_{=0} + m\vec{r} \times \vec{v}_\theta = m\vec{r} \times \vec{v}_\theta$$

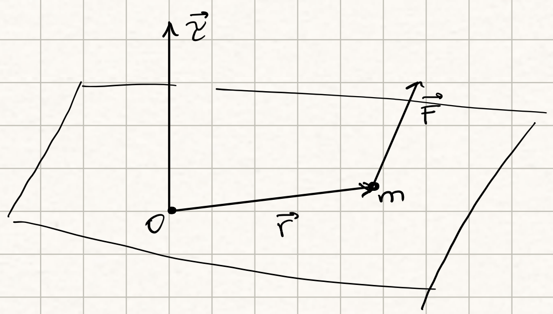
$$|\vec{L}| = mrv_\theta = mr^2\omega$$ lo stesso per il moto circolare

$$\vec{L} = m\underline{r}^2\vec{\omega}$$

non è costante

- potrebbe cambiare $\vec{\omega}$
- potrebbe cambiare r

momento di una forza



$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$[\tau] = [L][F] \rightarrow N \cdot m$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{q})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{q} + \vec{r} \times \frac{d\vec{q}}{dt}$$

$$= \underbrace{\cancel{\vec{v} \times m\vec{v}}}_{=0} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

2° EQ. CARDINALE DELLA DINAMICA :

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

ENUNCIATO : La derivata del momento angolare di un sistema di punti (calcolato rispetto ad un punto fisso o coincidente col baricentro del sistema o con velocità parallela a quella del baricentro) è uguale al momento delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari esterne rispetto a quel punto.

→ se $\vec{\tau} = 0$ allora $\vec{L}$ costante (CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE)

se :
- forza $= 0$
- forza direzione radiale ($\parallel \vec{r}$) verso O (FORZE CENTRALI)

$t_0 = 0$: $\displaystyle\int_0^t \vec{\tau}\,dt = \int_{\vec{L}_{in}}^{\vec{L}_{fin}} d\vec{L} = \vec{L}_{fin} - \vec{L}_{in} = \Delta\vec{L}$

momento meccanico (della forza applicata)

↳ variazione del momento angolare

t molto breve : $\vec{r} \simeq cost$

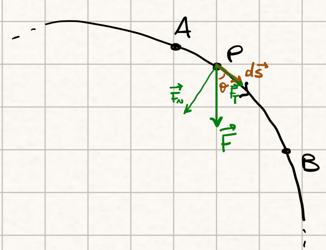
$\rightarrow \displaystyle\int_0^t (\vec{r}\times\vec{F})\,dt \simeq \vec{r}\times\int_0^t \vec{F}\,dt = \vec{r}\times\vec{I} = \Delta\vec{L}$ **TEOREMA DEL MOMENTO DELL'IMPULSO**

↳ variazione del momento angolare

LAVORO :

→ effetto di una forza sul moto di un corpo

· se spostam. infinitesimo



Lavoro di $\vec{F}$ durante ds nell'intervallo t : $\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F\cos\theta\, ds$

dipende dal tipo di forza → non differenziale esatta

- dipendenza solo dal p. iniz. e punt. fin
- dipendenza dalla traiettoria compiuta

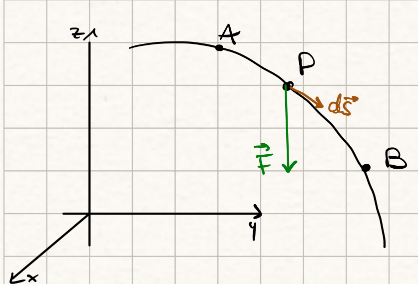
$\vec{F} = \vec{u}_T \underset{=0 \text{ se } \vec{F} \text{ centripeta}}{F_T} + \vec{u}_N \underset{=0 \text{ se forza rettilinea}}{F_N}$

$d\vec{s} = \vec{u}_T\, ds$! solo la componente tangente della forza contribuisce al lavoro

$\delta W = (\vec{u}_T F_T + \vec{u}_N F_N)\cdot\vec{u}_T\, ds = \underbrace{\vec{u}_T F_T \cdot \vec{u}_T}_{=1} ds + \underbrace{\cancel{\vec{u}_N F_N \cdot \vec{u}_T}}_{=0}\, ds$

- se $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$: $\delta W > 0$ spostamento e forza concordi
- se $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$: $\delta W < 0$ spostamento e forza discordi ⇒ LAVORO RESISTENTE < es. forze di attrito
- se $\vec{F} \perp d\vec{s}$ (MOTO CIRCOLARE UNIFORME) : $\cos\theta \equiv 0 \Rightarrow \delta W \equiv 0$

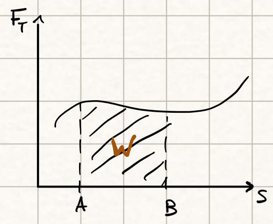
se ds non infinitesimo :



- $W = \displaystyle\int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B F\cos\theta\, ds = \int_A^B F_T\, ds$ → bisogna conoscere F_T in funzione di ds
- in x, y, z : $W = \displaystyle\int_A^B F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$

$\vec{F}(x,y,z)$
traiettoria
} bisogna conoscere la mappatura spaziale della forza

$F_T(s)$



$$W = \int_A^B F_T \, ds$$

se più forze: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$

$$\delta W_1 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} \qquad \delta W_2 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{s} \qquad \dots \qquad \delta W_n = \vec{F}_n \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \delta W = \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{s} + \dots + \vec{F}_n \cdot d\vec{s} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad ; \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

- $W = 0$ se:
  1) $\vec{F}_i = 0 \ \forall i$ — EQUILIBRIO STATICO
  2) $\sum_{i=0}^{n} \vec{F}_i = 0$ — EQUILIBRIO DINAMICO → effetto di bilanciamento di forze diverse
     ↳ v globale $\neq 0$
  3) $\vec{F} \perp d\vec{s}$, $|\vec{v}| \neq 0$

$$[W] = [F][L] = [M][L]^2[T]^{-2} \rightarrow kg\, m^2/s^{-2} = N \cdot m = J \quad \text{(joule)}$$

POTENZA

- istantanea:

$$P = \frac{\delta W}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \underbrace{\vec{F}}_{\text{conta solo } \vec{F}_T} \cdot \overbrace{\vec{v}}^{\text{è tg alla traiett.}} = F_T v$$

- media:

$$P_{media} = \frac{W}{t}$$

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)\, dt$$

$$[P] \rightarrow J s^{-1} = W \quad \text{(Watt)}$$

$$\Rightarrow \delta W = F_T\, ds = m a_T\, ds = m \frac{dv}{dt} ds = m\, dv \frac{ds}{dt} = m\, dv \cdot v$$

$$W = \int_A^B F_T\, ds = \int_{v_A}^{v_B} m v\, dv = m \int_{v_A}^{v_B} v\, dv = \left[\frac{1}{2} m v^2\right]_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

variazione dell'energia cinetica

dipende solo dalla velocità iniziale e finale

ENERGIA CINETICA

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow J$$

(quantità scalare)

sempre positiva

$W = \Delta E_K$ ∀ tipo di forza

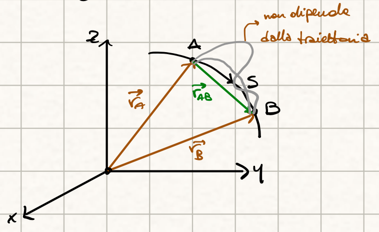
TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

→ a seconda di lavoro conservativo o non.
(forza) ↳ dipendenza solo da p. iniziale - finale.

→ Lavoro = misura dell'interazione lungo lo spostamento

→ FORZE CONSERVATIVE

$\vec{F} = cost$



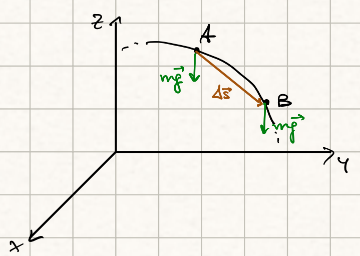
$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{s} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

$(-\vec{F} \cdot \vec{r})$ funzione posizione

$E_p = -\vec{F} \cdot \vec{r}$
↳ compiendo lavoro, E_K aumenta a spese dell'E_p

perché a seconda delle forze può dipendere o meno dal percorso fatto
se energia conservativa
→ $-\Delta E_p$
↳ l'energia potenziale diminuisce compiendo lavoro

• forza peso: $m\vec{g}$



$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s} = \cancel{F_x \Delta x} + \cancel{F_y \Delta y} + F_z \Delta z$$

$F_x = F_y = 0$

$$= -mg(z_B - z_A) = mg z_A - mg z_B = -\Delta E_p = \Delta E_K$$

$E_p = mgz$
↳ quota a cui si trova il corpo

• $z_0 = h$, $v_0 = 0$: $mgh = \frac{1}{2} m v_f^2$ E_p convertito in E_K

→ $v_{fin} = \sqrt{2gh}$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \Delta E_K$$ → la relaz. non dipende dal tipo della forza

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$ → differenziale esatto se dipende solo da punto di partenza e p. finale

forze conservative: → lavoro non dipende dal percorso fatto

- F elastica: $\vec{F} = -kx\,\vec{u}_x$

$$W = \int_A^B -kx\,\underline{\vec{u}_x} \cdot dx\,\underline{\vec{u}_x} = -k\int_{x_A}^{x_B} x\,dx = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2 = -\Delta E_p$$

$\underline{\vec{u}_x} \cdot \underline{\vec{u}_x} = 1$

↳ se $x_A > x_B$: lavoro positivo (moto verso il centro)

$<$: negativo

; $E_{p,el} = \frac{1}{2}kx^2$ ENERGIA POTENZIALE della forza elastica

forze dissipative:

- F attrito radente dinamico:

$$W = \int_A^B \vec{F}_a \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\mu_d R_N\,\underline{\vec{u}_T} \cdot ds\,\underline{\vec{u}_T} = -\mu_d R_N \int_A^B ds$$

$\underline{\vec{u}_T} \cdot \underline{\vec{u}_T} = 1$

costante se moto su un piano

↳ scalare (percorso lineare del punto)

$$= -\mu_d R_N\, \underline{l_{AB}}$$

lavoro dipendente dal percorso fatto

⇒ lavoro sempre negativo (opposto al moto)

↳ dissipativo

→ $\Delta E_K < 0$ → l'energia cinetica diminuisce

moto del punto P di massa m, $v_A = 0$: $-\mu_d R_N l_{AB} = 0 - E_{K,A}$

$$\Rightarrow l_{AB} = \frac{E_{K,A}}{\mu_d R_N} = \frac{1}{2}\frac{m v_P^2}{\mu_d R_N}$$

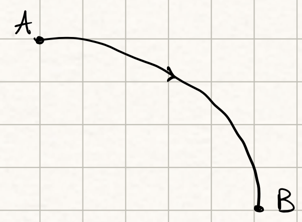
per mantenere il moto di un punto su un piano non liscio bisogna applicare continuamente una forza (FORZA MOTRICE) tale da compensare la dissipazione dell'energia cinetica dovuta all'attrito.

FORZE CONSERVATIVE

$$\int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{l_1} = \int_A^B (\vec{F} \cdot d\vec{s})_{l_2} = \int_A^B \vec{F} \cdot ds = -\int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot ds + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$ lungo un percorso chiuso

↳ CIRCUITAZIONE (percorso chiuso): $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ (def. forze conservative) percorso aperto :



$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \Delta E_K = -\Delta E_p$$

$$\Rightarrow \Delta E_K + \Delta E_p = 0$$

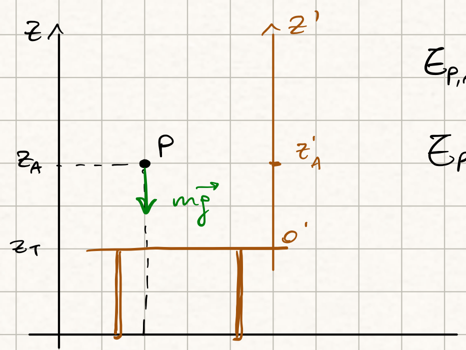
→ conservazione dell'energia meccanica

$\forall$ punto C : $E_{k,C} + E_{p,C} = cost$

$$E_m = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{stessa espressione}} + \underbrace{E_p}_{\text{dipende dalla forza}}$$

moto lungo un percorso chiuso : continuo scambio di en. cinetica e potenziale

↳ ma nel punto d'arrivo (≡ inizio) la somma della variazione di E_k e E_p è uguale a 0.



$$E_{p,A} = mgz_A$$

$$E_{p,A} = mgz'_A = mg(z_A - z_T)$$

(posso cambiare sistema di riferimento)

FORZE NON CONSERVATIVE

$\oint \vec{F}\cdot d\vec{s} \neq 0$ (no conservazione dell'energia meccanica)

→ se $\vec{F} \perp d\vec{s}$ ⇒ F non compie lavoro ⇒ $\oint \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$

($\vec{F}\cdot d\vec{s} \equiv 0$)

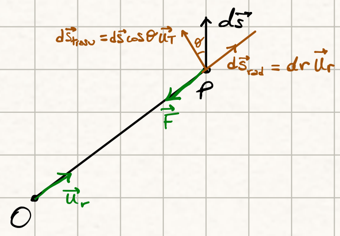
es. tensione del filo del pendolo non compie lavoro

FORZE CENTRALI A SIMMETRIA SFERICA

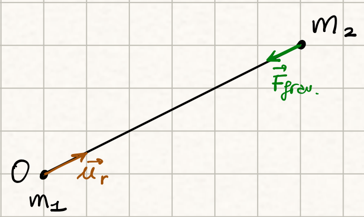
$\vec{F} = \underline{f(r)}\,\vec{u}_r$

modulo di $\vec{F}$

$$W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B f(r)\,\vec{u}_r \cdot (dr\,\underbrace{\vec{u}_r}_{=1} + ds\cos\theta\,\underbrace{\vec{u}_T}_{=0}) = \boxed{\int_A^B f(r)\,dr}$$



· Forza gravitazionale



$$\vec{F}_{grav} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_r$$

$$W = \int_A^B -\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\,dr = \left[\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\right]_A^B = \gamma\frac{m_1 m_2}{r_B} - \gamma\frac{m_1 m_2}{r_A} =$$

$$= -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B}$$

$$\boxed{E_p = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r}}$$

$\Rightarrow$ $E_p = 0$ per $r \to +\infty$

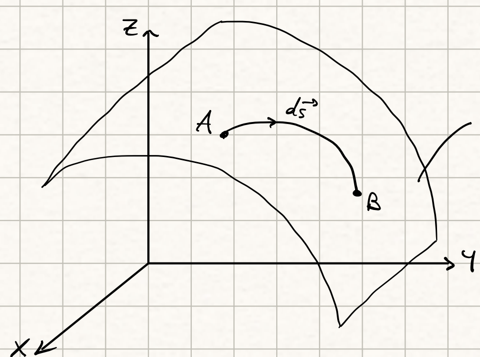
$\Rightarrow$ se $r \to 0$ la dimensione delle masse non sono più trascurabili $\Rightarrow$ NO modello punto materiale

($\to$ E_p non tende $\to +\infty$) ↳ la relazione non vale più

problema inverso: da E_p a F:

$\vec{F}$ conservative

· **SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE** = insieme dei punti del piano che soddisfano $E_p(x,y,z) = cost$



$E_p(x,y,z) = cost$

$$dE_p = -\vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$$

↳ $\boxed{\vec{F} \perp d\vec{s}}$ condizione

forza conservativa

su superfici equipotenziali diverse

$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{s} = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -dE_p \neq 0$$

- dx (senza spostamento lungo y,z): $F_x\,dx = E_p(x,y,z) - E_p(x+dx,y,z)$

$$\Rightarrow F_x = -\frac{E_p(x+dx,y,z) - E_p(x,y,z)}{dx} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$ derivata parziale

- dy (senza spostamento lungo x, z) : $F_y = -\dfrac{E_p(x, y+dy, z) - E_p(x,y,z)}{dy} = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y}$

- dz (senza spostamento lungo x, y) : $F_z = -\dfrac{E_p(x, y, z+dz) - E_p(x,y,z)}{dz} = -\dfrac{\partial E_p}{\partial z}$

$$\vec{F} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{u}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{u}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$= -\text{grad } E_p$$

$$= -\vec{\nabla} E_p$$

GRADIENTE

$$\text{grad} = \vec{\nabla} \quad (\text{operatore vettoriale}) = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

OPERATORE NABLA = operatore differenziale che applicato a una grandezza scalare la trasforma in grandezza vettoriale

quanto rapidamente ci si sposta da una superficie equipot. a un'altra

$dE_p \equiv 0$

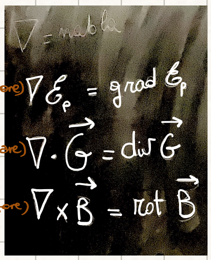
$-dE_p = \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$

$\Rightarrow$ normale lungo la massima variazione dell'E_p

$\Rightarrow$ la direz. gradiente = direz. di massima var. dell'E_p

divergenza $\rightarrow$ flusso

rotore $\rightarrow$ circuitazione



(vettore) (scalare) (vettore)

se solo F. conservative:

$$W = \Delta E_K = -\Delta E_p$$

$$E_K + E_p = \text{cost} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{E_m}} = E_K + E_p = \text{cost}$$

moto dei corpi

L'E_{tot} comunque si conserva, ma in particolare E_m si conserva se ci sono solo F. cons.

se ci sono anche F. dissipative:

$$W = W_{conserv} + W_{dissip} = \Delta E_K = E_{K,B} - E_{K,A}$$

$$-\Delta E_p + W_{diss} = \Delta E_K$$

$$W_{diss} = \Delta E_K + \Delta E_p = (E_{K,B} + E_{p,B}) - (E_{K,A} + E_{p,A}) = \Delta E_m$$

$\rightarrow$ le forze dissipative sono responsabili della diminuzione di energia meccanica

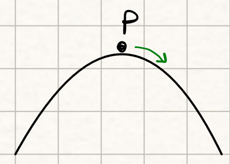
maggiore F_{diss} $\Rightarrow$ maggiore dissipazione E_m

$$\vec{F} = -\nabla E_p$$

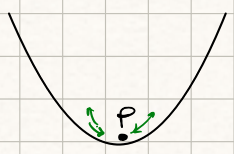
$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$$

in campo conservativo

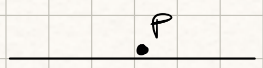
E_p costante

1) 

E_p max $\Rightarrow$ EQUILIBRIO INSTABILE

2) 

E_p min $\Rightarrow$ EQUILIBRIO STABILE

3) 

E_p cost $\Rightarrow$ EQUILIBRIO INDIFFERENTE