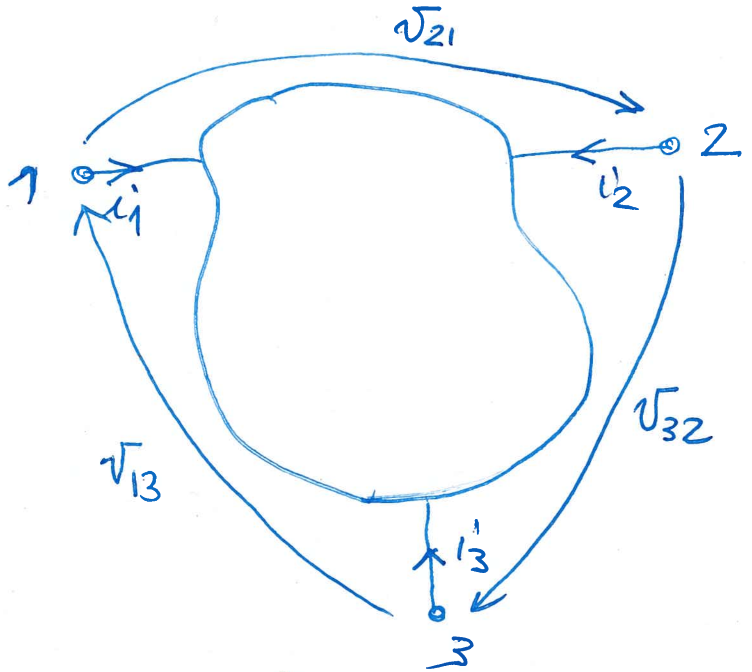
MULTIPOLI

Un n-polo ha $n-1$ tensioni e $n-1$ correnti indipendenti

Esempio:
- bipolo $n=2$ $\longrightarrow$ 1 tensione & 1 corrente indipendenti
- tripolo $n=3$ $\longrightarrow$ 2 tensioni & 2 correnti indipendenti

Infatti



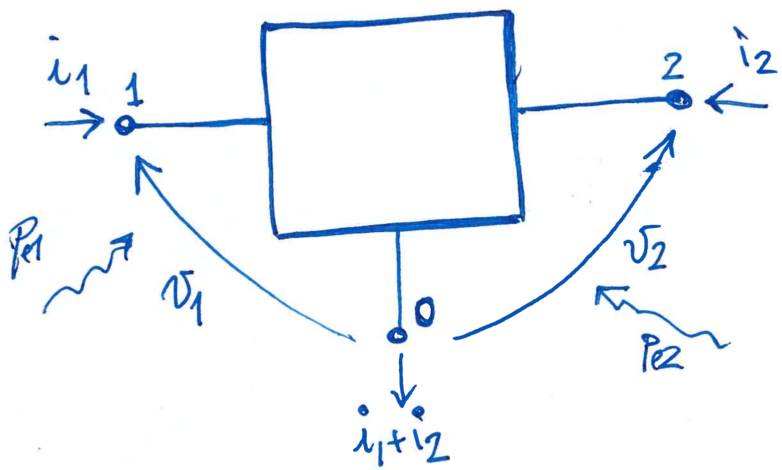
posso indicare tre correnti i_1, i_2, i_3 ai poli
posso indicare " tensioni v_{13}, v_{21}, v_{32} a coppie di poli

MA i vincoli delle KCL e KVL impongono

$$\begin{cases} \text{KCL: } i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ \text{KVL: } v_{13} + v_{21} + v_{32} = 0 \end{cases}$$

così una tensione e una corrente si possono esprimere in funzione delle altre

☐ TRIPOLO: TENSIONI E CORRENTI, CONCETTO DI PORTA



- un polo (0) e' riferimento comune (-) per le tensioni v_1, v_2
- i poli (1) e (2) indicano le correnti i_1, i_2
- Le coppie tensione corrente v_1, i_1 e v_2, i_2 definiscono DUE PORTE ELETTRICHE (con polo comune (*)). La porta generalizza il concetto di bipolo.
- Con la conv. degli utilizzatori a ciascuna porta:

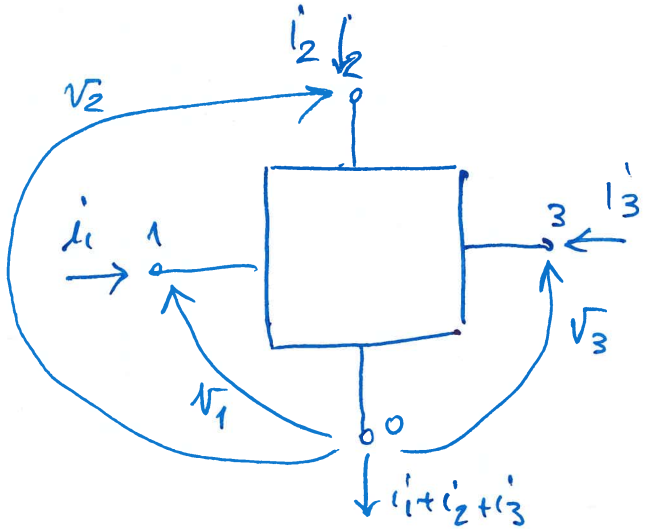
$$p_{e1} = v_1 i_1 \qquad p_{e2} = v_2 i_2$$

la potenza entrante nel tripolo $\boxed{p_e = p_{e1} + p_{e2} = v_1 i_1 + v_2 i_2}$

[(*) porte con polo comune, dette anche "porte sbilanciate"]

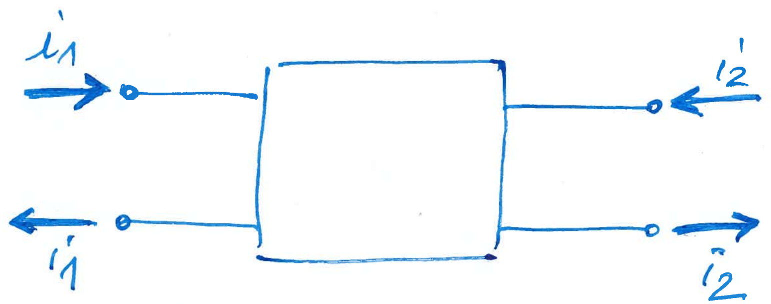
☐ QUADRIPOLI E DOPPI-BIPOLI

Un quadripolo ha tre tensioni e tre correnti indipendenti



(Tre porte elettriche)

In questo corso non siamo interessati al quadripolo ma ad un suo caso particolare (semplificato) detto doppio-bipolo. Un doppio-bipolo e' un quadripolo in cui i poli possono essere raggruppati a due a due. In ciascuna coppia di poli c'e' una sola corrente elettrica entrante e uscente (come accade in un bipolo).



DOPPIO-BIPOLO:

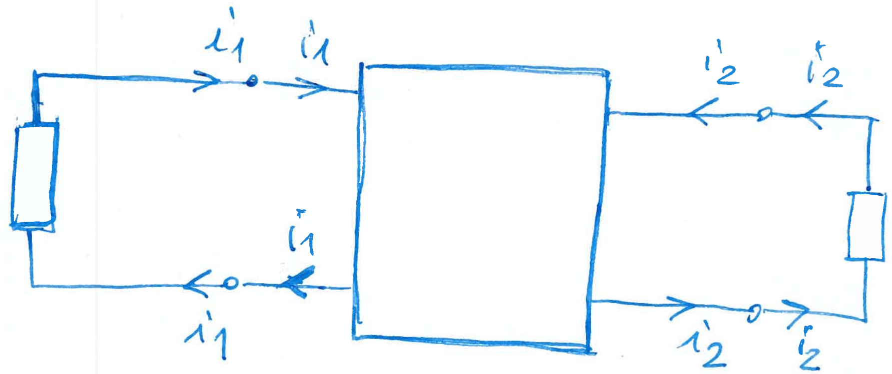
due correnti indipendenti

- DOPPIO-BIPOLO INTRINSECO

quando il quadripolo funziona come doppio-bipolo in virtù della sua costituzione. È quindi una proprietà garantita.

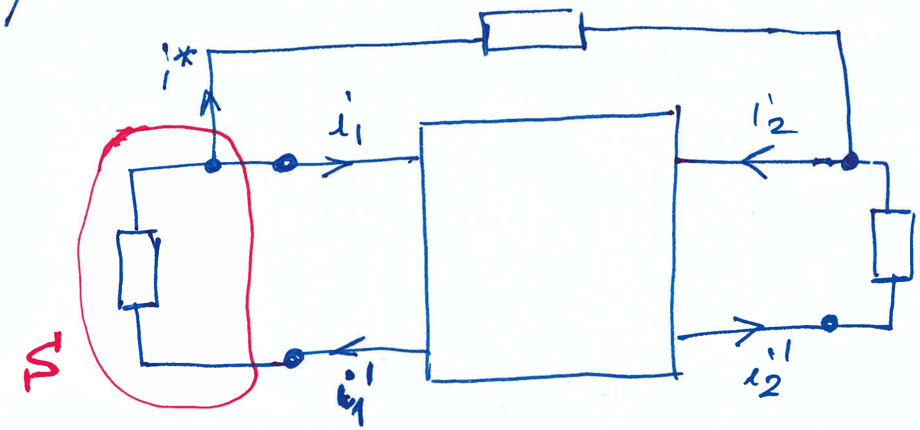
- DOPPIO-BIPOLO NON-INTRINSECO

quando il quadripolo funziona come doppio-bipolo a motivo delle interconnessioni esterne (circuito in cui viene inserito):



I due bipoli (a destra e sinistra) impongono il funzionamento con due correnti indipendenti del quadripolo (che in principio avrebbe tre correnti indipendenti)

Se il doppio bipolo non è intrinseco, in questa connessione:

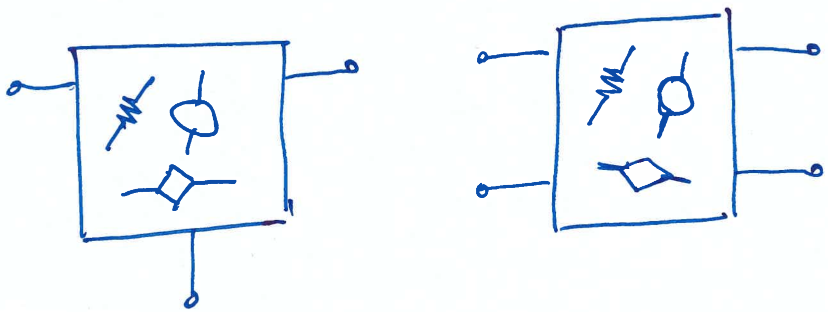


si ha $i_1'' \neq i_1$ in generale infatti KCL S: $i_1 - i_1'' + i^* = 0$ $\quad i_1 = i_1' - i^*$

quindi <u>NON</u> funziona come doppio bipolo ma come quadripolo.

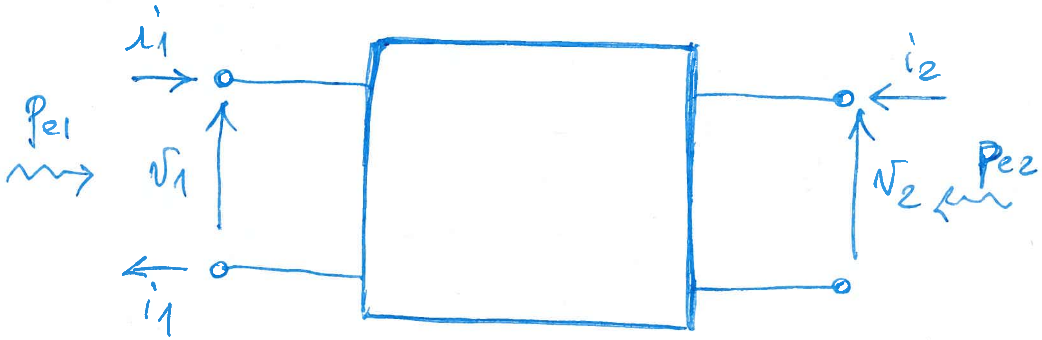
Similmente $i_2'' \neq i_2'$ in generale.

☐ MULTIPOLI COMPOSTI



Sono internamente costituiti dalla connessione di altri multipoli (per esempio bipoli)

☐ DOPPIO BIPOLO: TENSIONI, CORRENTI, PORTE



- due correnti indipendenti i_1, i_2
- per l'uguaglianza fra numero di correnti e numero di tensioni consideriamo due tensioni v_1, v_2
- Le coppie v_1, i_1 e v_2, i_2 definiscono DUE PORTE ELETTRICHE (*)
- con la conv. degli utilizzatori

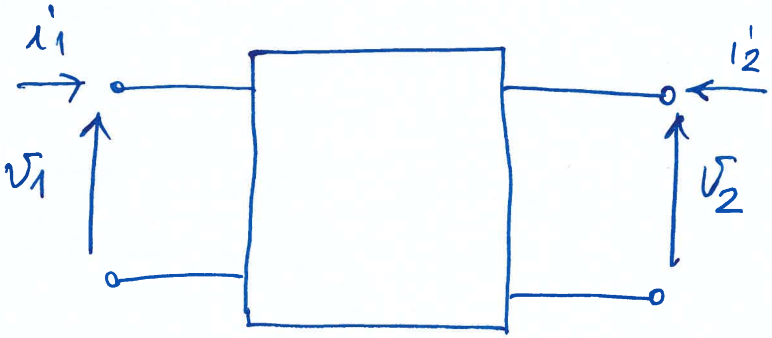
$$p_{e1} = v_1 i_1 \qquad p_{e2} = v_2 i_2$$

La potenza entrante nel doppio-bipolo e' $\boxed{p_e = p_{e1} + p_{e2} = v_1 i_1 + v_2 i_2}$

[(*) porte senza polo comune, dette anche "porte bilanciate"]

☐ RELAZIONE COSTITUTIVA DI CIRCUITI CON DUE PORTE (TRIPOLI ; DOPPI BIPOLI)

disegniamo doppi bipoli: quanto detto vale anche per tripoli



Per motivi d'ordine assumiamo sempre la conv. degli utilizzatori ad entrambe le porte

quattro variabili: i_1, i_2, v_1, v_2

FORMA IMPLICITA

$$\boxed{\begin{cases} f_1(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \\ f_2(v_1, v_2, i_1, i_2) = 0 \end{cases}}$$

due equazioni!

Se il circuito e' LINEARE, le due funzioni sono lineari.

Possono esistere o meno le FORME ESPLICITE in cui esprimiamo due variabili in funzione delle restanti due. Le vediamo nel seguito:

☐ COMANDO IN CORRENTE (RAPPRESENTAZIONE TIPO THEVENIN)

FORMA ESPLICITA

$$\begin{cases} v_1 = f_1(i_1, i_2) \\ v_2 = f_2(i_1, i_2) \end{cases}$$

- variabili indipendenti (di comando) sono le correnti i_1, i_2
- variabili dipendenti sono le tensioni v_1, v_2

ovvero (caso lineare):

$$\boxed{\begin{cases} v_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2 + v_{T1} \\ v_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2 + v_{T2} \end{cases}}$$

Riscritto in forma matriciale:

$$\boxed{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{T1} \\ v_{T2} \end{bmatrix}}$$

$$\underline{v} = \underset{\sim}{R} \cdot \underline{i} + \underline{v}_T$$

$\underline{v}$ vettore (colonna) tensioni

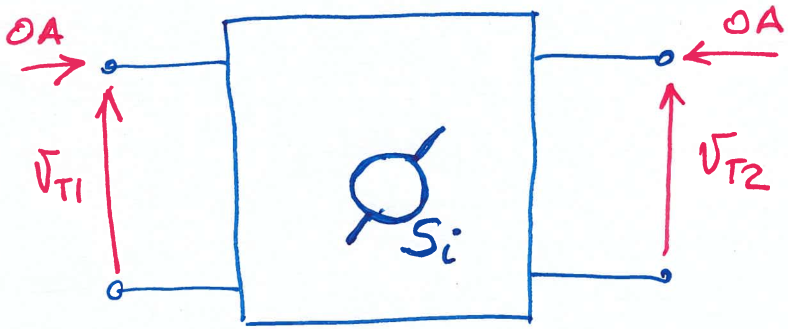
$\underline{i}$ vettore (colonna) correnti

$\underline{v}_T$ vettore sorgenti

$\underset{\sim}{R}$ matrice delle RESISTENZE A VUOTO.

- SIGNIFICATO DI $\underline{v}_T$ (vettore delle sorgenti)

Con porte A vuoto ovvero circuito aperto $\underline{i} = 0 \longrightarrow \underline{v} = \underline{v}_T$



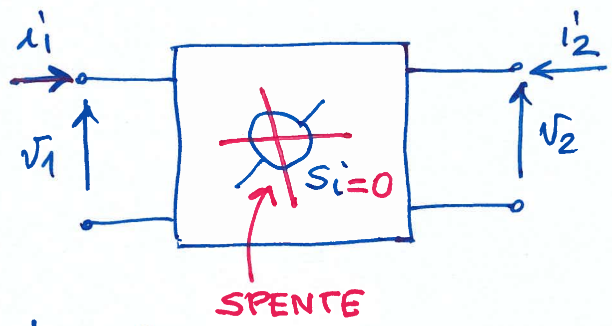
- Le tensioni v_{T1} e v_{T2} sono le tensioni alle porte lasciate aperte (corrente nulla)

N.B. $v_{T1} = v_{T2} = 0$ SE NON CI SONO S_i (O SONO SPENTE) SORGENTI INDIPENDENTI DENTRO IL TRIPOLO/DOPPIO BIPOLO

• SIGNIFICATO DI $\underset{\sim}{R}$ (matrice delle resistenze)

Ora spegniamo le sorgenti interne S_i $\rightarrow$ $\underline{v_T}=0$ $\rightarrow$ $\underline{v} = \underset{\sim}{R}\,\underline{i}$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

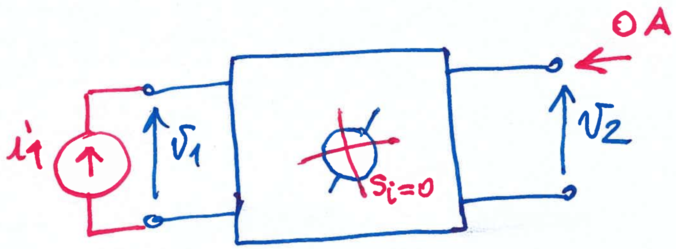


Per sovrapposizione posso dare un significato agli elementi delle due colonne

I) comando i_1 acceso ; $i_2=0$ spenta (porta 2 a vuoto)

$$r_{11} = \left.\frac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0} \qquad [\Omega]$$

$$r_{21} = \left.\frac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0} \qquad [\Omega]$$

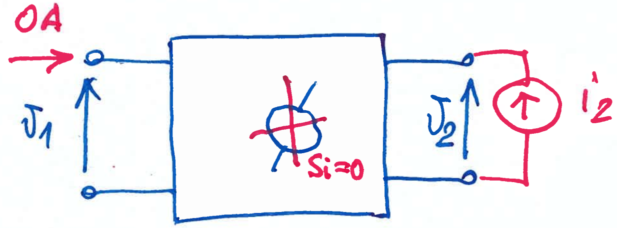


r_{11} resistenza di ingresso alla porta 1

r_{21} resistenza di trasferimento da porta 1 a porta 2 (trans-resistenza)

II) comando i_2 acceso; $i_1=0$ spento (porta 1 a vuoto)

$$r_{12} = \left.\frac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0} \quad [\Omega]$$



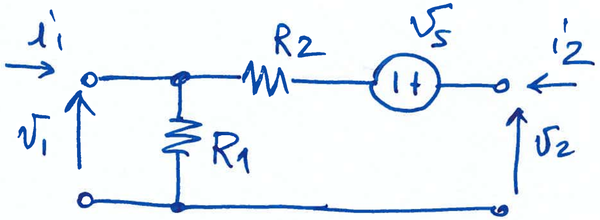
$$r_{22} = \left.\frac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0} \quad [\Omega]$$

r_{22} resistenza di ingresso alla porta 2

r_{12} resistenza di trasferimento da porta 2 a porta 1 (trans-resistenza)

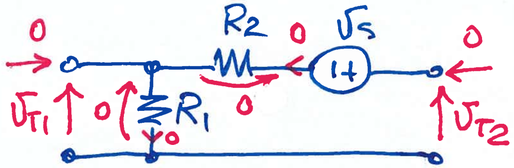
Ecco perchè $\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$ viene chiamata MATRICE DELLE RESISTENZE A VUOTO (A CIRCUITO APERTO)

Esempio (comando in corrente)



Determinare la relazione costitutiva con comando in corrente (rappresentazione di tipo Thevenin)

• Trovo $\underline{v}_T$



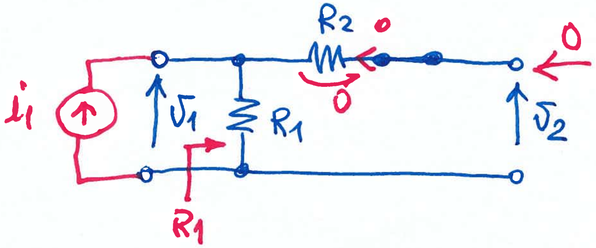
$$\boxed{\begin{array}{l} v_{T1} = 0 \\ v_{T2} = v_S \end{array}}$$

tensioni a vuoto

• Trovo $\underset{\sim}{R}$ (spengo le sorgenti indipendenti interne ; applico sorgenti di comando esterno)

→ comando i_1

($i_2 = 0$)

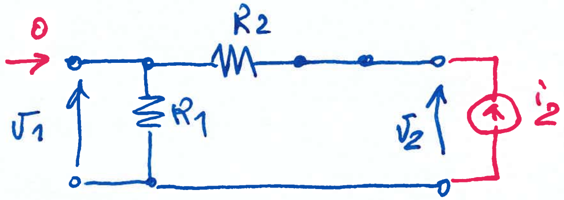


$v_1 = R_1 i_1$; $v_2 = v_1 = R_1 i_1$

$$\boxed{\begin{array}{l} r_{11} = \left.\dfrac{v_1}{i_1}\right|_{i_2=0} = R_1 \\ r_{21} = \left.\dfrac{v_2}{i_1}\right|_{i_2=0} = R_1 \end{array}}$$

→ comando i_2

($i_1 = 0$)



$v_2 = (R_1 + R_2) i_2$; $v_1 = R_1 i_2$

$$\boxed{\begin{array}{l} r_{12} = \left.\dfrac{v_1}{i_2}\right|_{i_1=0} = R_1 \\ r_{22} = \left.\dfrac{v_2}{i_2}\right|_{i_1=0} = R_1 + R_2 \end{array}}$$

RISULTATO:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & R_1 \\ R_1 & R_1 + R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v_S \end{bmatrix}$$

$$\underline{v} = \underset{\sim}{R} \cdot \underline{i} + \underline{v}_T$$