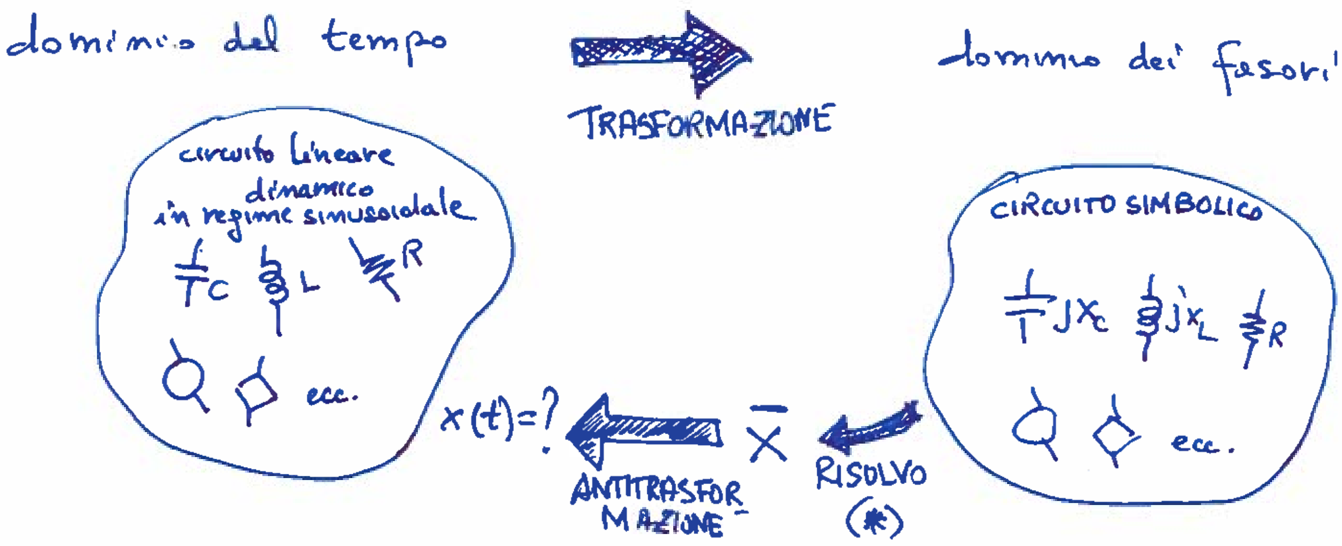
# ☐ ANALISI DI CIRCUITI NEL DOMINIO DEI FASORI






(*) • SI RISOLVE IL CIRCUITO SIMBOLICO CON GLI STESSI METODI VISTI PER I CIRCUITI ADINAMICI, INFATTI È RETTO DA EQUAZIONI LINEARI ALGEBRICHE (con numeri complessi anziché numeri reali) FORMALMENTE SIMILI

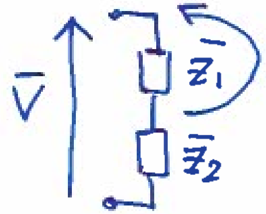
• SI SOSTITUISCE IL CONCETTO DI IMPEDENZA AL CONCETTO DI RESISTENZA
DI AMMETTENZA " " " CONDUTTANZA

IN TUTTI I METODI.

• QUINDI SI PUÒ USARE: Partitori; Trasf. generatori; Sovrapposizione degli effetti; teoremi di Thevenin e di Norton; analisi modale; ecc...

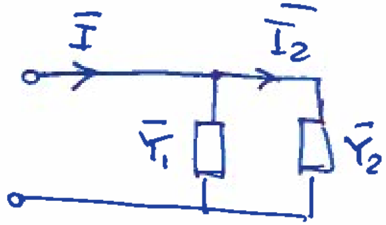
Esempi:

- Partitore di tensione



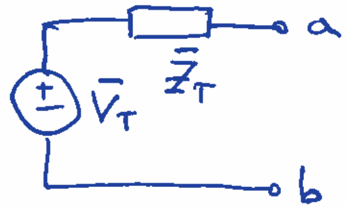

$$\bar{V}_1 = \bar{V}\,\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1+\bar{Z}_2}$$

- Partitore di corrente

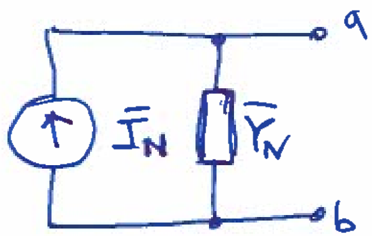



$$\bar{I}_2 = \bar{I}\,\frac{\bar{Y}_2}{\bar{Y}_1+\bar{Y}_2}$$

- Circuito eq. di Thevenin




- Circuito eq. di Norton

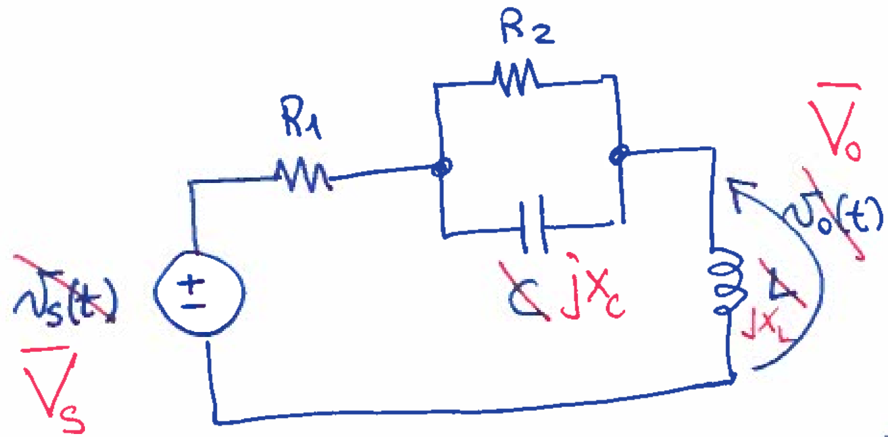



- Doppi bipoli: rappresentazioni $\underset{\sim}{\bar{Z}}$, $\underset{\sim}{\bar{Y}}$, $\underset{\sim}{\bar{H}}$, $\underset{\sim}{\bar{H}}'$ ecc...
- ecc... (!)

- Dal risultato fasore $\bar{X}$ si può tornare nel dominio del tempo per esprimere la sinusoide a regime $x(t)$ con ANTITRASFORMAZIONE

2bis

# Esempio




$$v_s(t) = \sqrt{2}\cdot 60 \cos(200t) \text{ , V}$$

$R_1 = 30\,\Omega$

$R_2 = 50\,\Omega$

$C = 50\,\mu F$

$L = 0{,}1\,H$

Determinare $v_o(t)$ a regime

$$\overline{V}_s = 60\,e^{j0°} = 60 \text{ V} \quad (\text{RMS})$$

Nota: ho deciso di usare la definizione in valore efficace del modulo del fasore

$$\omega = 200 \text{ rad/s}$$

$$X_L = \omega L = 200 \cdot 0.1 = 20\,\Omega$$

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{200\cdot 50\cdot 10^{-6}} = -100\,\Omega$$

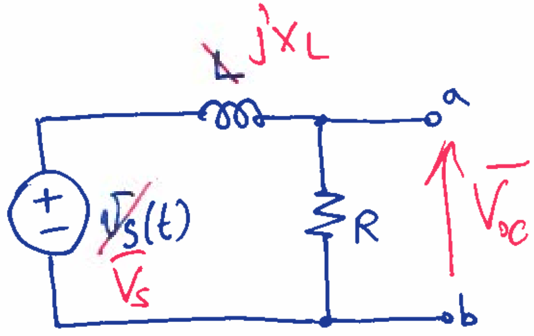
$$\overline{Z}_{eq} = R_2 /\!/ jX_C = \frac{R_2\, jX_C}{R_2 + jX_C} = \frac{50(-j100)}{50 - j100}\,\frac{1+j2}{1+j2} = \frac{-j100+200}{5} = 40 - j20\,\Omega$$

Partitore di tensione

$$\overline{V}_o = \overline{V}_s\,\frac{jX_L}{jX_L + \overline{Z}_{eq} + R_1} = 60\,\frac{j20}{\cancel{j20}+40\cancel{-j20}+30} = j\,\frac{1200}{70} = j17.14 \text{ V} = 17.14\,e^{j90°} \text{ V}$$

$$\overline{V}_o \longrightarrow \boxed{v_o(t) = \sqrt{2}\cdot 17{,}14 \cos(200t + 90°) = -\sqrt{2}\cdot 17.14 \sin(200t) \text{, V}}$$

## Esempio




$v_s(t) = 5\cos(100t)$, V

$L = 50$ mH

$R = 5\,\Omega$

Det. il circuito eq. di Thevenin nel dominio dei fasori

$\bar{V}_s = 5e^{j0°} = 5$ V (AMP)

Nota: ho deciso di usare la def. in ampiezza

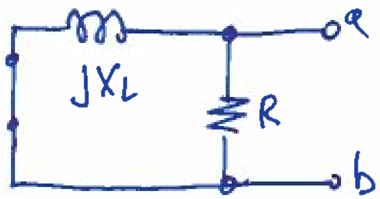
$\omega = 100$ rad/s

$X_L = \omega L = 100 \cdot 50 \cdot 10^{-3} = 5\,\Omega$

- Tensione a vuoto $\bar{V}_{oc}$

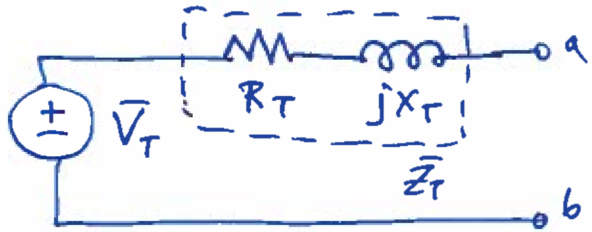
$$\bar{V}_{oc} = \bar{V}_s \frac{R}{R+jX_L} = 5\frac{\cancel{5}^{\,1}}{\cancel{5}+j\cancel{5}}\left(\frac{1-j}{1-j}\right) = \frac{5(1-j)}{2}\ \text{V}$$

- Impedenza equivalente $\bar{Z}_{ab}$




$$\bar{Z}_{ab} = \frac{R\cdot jX_L}{R+jX_L} = \frac{\cancel{5}\cdot j5}{\cancel{5}+j5}\left(\frac{1-j}{1-j}\right) = \frac{5+j5}{2}\ \Omega \quad \text{RESISTIVA-INDUTTIVA}$$

- CIRCUITO EQ. DI THEVENIN




$\bar{V}_T = \bar{V}_{oc} = \frac{5}{2}(1-j)$ V

$R_T = 5/2\,\Omega$

$X_T = 5/2\,\Omega$

## ☐ SORGENTI NON ISOFREQUENZIALI $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$

Non si può definire un unico insieme di fasori!!

LINEARITÀ $\longrightarrow$ SOVRAPPOSIZIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO

$$x(t) = x'(t) + x''(t) + \dots + x^{(N)}(t)$$

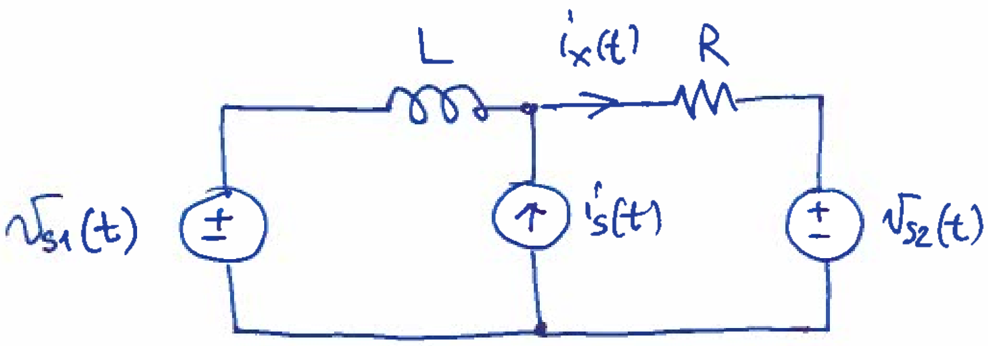
- $x'(t)$: GRUPPO DI SORGENTI CON PULSAZIONE $\omega_1$
- $x''(t)$: IDEM $\omega_2$
- $x^{(N)}(t)$: IDEM $\omega_N$

<u>LE ALTRE SPENTE</u>

IL REGIME È UNA SOMMA DI SINUSOIDI A FREQUENZE DIVERSE (NON È SINUSOIDALE!)

Ogni sottoproblema con sorgenti ISOFREQUENZIALI si può risolvere definendo il suo sistema di fasori

# Esempio




$v_{s1}(t) = \cos(100t)$, V

$v_{s2}(t) = 1$ V

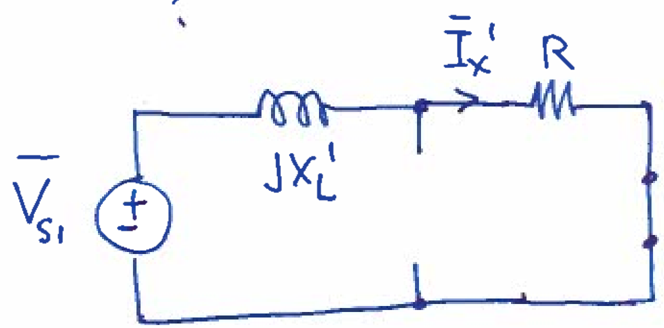
$i_s(t) = \sin(50t)$, A

$L = 10$ mH ; $R = 1\Omega$

Determinare $i_x(t)$ a regime

Tre pulsazioni: $\omega_1 = 100$ rad/s ; $\omega_2 = 50$ rad/s ; $\omega_3 = 0$ (REGIME COSTANTE)

1) $\omega_1$ (SOLO $v_{s1}$)




$\bar{V}_{s1} = 1$ V (AMP)

$X_L' = \omega_1 L = 100 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 1\Omega$

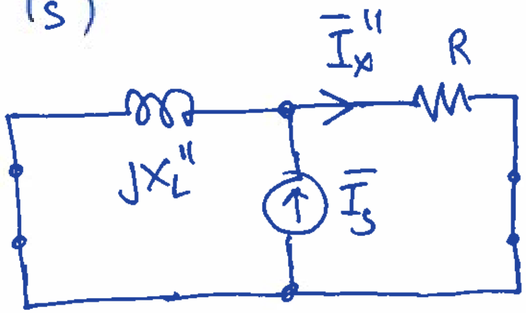
$$\bar{I}_x' = \frac{\bar{V}_{s1}}{R + jX_L'} = \frac{1}{1+j}\frac{(1-j)}{(1-j)} = \frac{1-j}{2} = $$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j45°} A$$

$$i_x'(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(100t - 45°), A$$

3 bis

## 2) $\omega_2$ (SOLO $i_s$)




$$i_s(t) = \sin(50t) = \cos(50t - 90°)$$

$$\overline{I_s} = 1\, e^{-j90°} = -j \text{ A} \quad \text{(AMP)}$$

$$X_L'' = \omega_2 L = 50 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = 0.5\ \Omega$$

$$\overline{I}_x'' = \overline{I}_s \frac{jX_L''}{R + jX_L''} = -j \frac{j0.5}{1+j0.5} = \frac{0.5}{1+j0.5} = \frac{1}{2+j}\left(\frac{2-j}{2-j}\right)$$

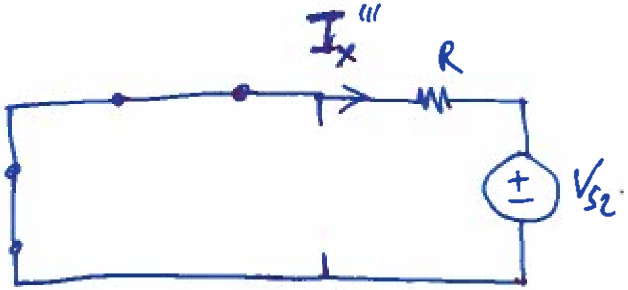
$$= \frac{2-j}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5} e^{j\,\mathrm{arctg}\,-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} e^{-j26.56°} \text{ A}$$

$$i_x''(t) = \frac{\sqrt{5}}{5}\cos(50t - 26.56°) \text{ , A}$$

## 3) $\omega_3 = 0$ REGIME COSTANTE (SOLO $V_{S2}$)

Non servono i fasori!

VEDI LEZIONE APPOSITA IN PRECEDENZA




$$\overline{I}_x''' = -\frac{V_{S2}}{R} = -1 \text{ A}$$

SOVRAPPOSIZIONE NEL DOMINIO DEL TEMPO:

$$\boxed{i_x(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(100t - 45°) + \frac{\sqrt{5}}{5}\cos(50t - 26.56°) - 1}$$

# COMPORTAMENTO DI  E  IN FREQUENZA

INDUTTORE  $jX_L = j\omega L$

valori estremi
$$\begin{cases} X_L = 0 \text{ per } \omega = 0 \text{ (regime costante, dc)} \\ X_L \to \infty \text{ per } \omega \to \infty \end{cases}$$

CORTOCIRCUITO

CIRCUITO APERTO

CONDENSATORE  $jX_C = j\left(-\frac{1}{\omega C}\right)$

$$\begin{cases} X_C \to \infty \text{ per } \omega \to 0 \text{ (regime costante, dc)} \\ X_C \to 0 \text{ per } \omega \to \infty \end{cases}$$

CIRCUITO APERTO

CORTOCIRCUITO

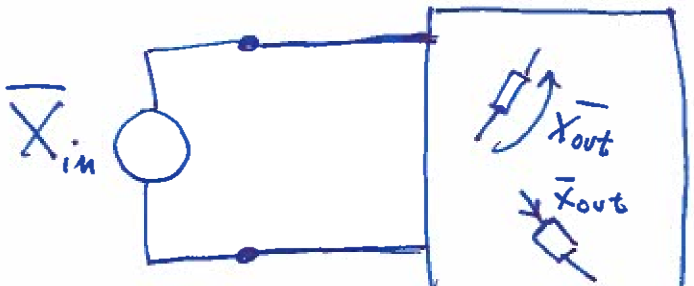
- I due comportamenti sono del tutto duali!

- QUESTI COMPORTAMENTI SONO RESPONSABILI DELLA "RISPOSTA IN FREQUENZA" NEI CIRCUITI, ovvero la possibilità di un circuito di variare le proprie impedenze a seconda della frequenza delle sorgenti

# ☐ DOMINIO DELLA FREQUENZA

E' il consueto dominio dei fasori, ma lasciando la frequenza ω come parametro che può variare tra 0 e ∞.

Conviene studiare solitamente l'eccitazione del circuito con una singola sorgente che ha il significato di INGRESSO (input) e una singola grandezza che ha il significato di USCITA (output)




$\overline{X}_{in}$ TENSIONE O CORRENTE DI INGRESSO (SORGENTE INDIPENDENTE DI COMANDO)

$\overline{X}_{out}$ TENSIONE O CORRENTE DI USCITA

Si chiama FUNZIONE DI RETE o FUNZIONE DI TRASFERIMENTO il rapporto

$$\boxed{\overline{H}(j\omega) = \frac{\overline{X}_{out}}{\overline{X}_{in}}}$$

DIPENDE DALLA FREQUENZA COMPLESSA $j\omega$

dove ω è la pulsazione della sorgente che eccita il circuito

CASI:

| $\bar{X}_{in}$ | $\bar{X}_{out}$ | $\bar{H}(j\omega)$ |
|---|---|---|
| $\bar{V}$ | $\bar{V}$ | funzione di trasferimento di tensione [adimensionale] |
| $\bar{I}$ | $\bar{I}$ | funzione di trasferimento di corrente [adimensionale] |
| $\bar{V}$ | $\bar{I}$ | ammettenza di trasferimento [S] |
| $\bar{I}$ | $\bar{V}$ | impedenza di trasferimento [$\Omega$] |

Proprieta' Detto $s = j\omega$ per comodita' di scrittura

La funzione di rete e' una funzione razionale fratta (rapporto di polinomi in $s$ con coefficienti reali)

$$\bar{H}(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \qquad a_k, b_k \in \mathbb{R}$$