CIRCUITI PRIMO ORDINE CON SORGENTI COSTANTI:

SOLUZIONE GENERALE PER QUALUNQUE VARIABILE (non necessariamente di stato)

- Si dimostra che

$$\boxed{x(t) = \left[x(0^+) - x(\infty)\right] e^{-t/\tau} + x(\infty) \qquad \text{per } t > 0}$$

dove IN GENERALE $x(0^+) \neq x(0^-)$ (discontinuita' a salto in $t=0$)

- SOLO PER VARIABILI DI STATO 

si' ha GARANTITA LA CONTINUITA'

$$x(0^+) = x(0^-) = x(0) \quad \text{e la soluzione vale per } t \geq 0 \quad (\text{incluso } 0)$$

SOLUZIONE PASSO-PASSO analizzando istanti specifici

Sia
- $t=0$ istante di un EVENTO (apertura/chiusura interruttori; variazione sorgenti)
- $x(t)$ variabile (qualunque) da trovare per $t>0$

1) $t=0^-$ (prima dell'evento)

Mediante informazioni dei dati si deduce

$\boxed{\begin{matrix} v_C(0^-) \\ x(0^-) \end{matrix}}$ var. di stato / var. qualunque di interesse

2) $t=0^+$ (appena dopo l'evento)

$\boxed{v_C(0^+)=v_C(0^-)}$ continuità var. stato

Rappresento il  come  $v_C(0^+)$ (*)

risolvo il circuito <u>adinamico</u> e $\boxed{\text{trovo } x(0^+)}$

(*) giustificazione: teorema di sostituzione

1) $t=0^-$

Idem $\boxed{\begin{matrix} i_L(0^-) \\ x(0^-) \end{matrix}}$ var. di stato / var. qualunque di interesse

2) $t=0^+$

Idem $\boxed{i_L(0^+)=i_L(0^-)}$

Idem  come  $i_L(0^+)$

Idem $\boxed{\text{trovo } x(0^+)}$

Idem

3) $t \to \infty$ (regime)

rappresento  come un  circuito aperto

risolvo il circuito adinamico e $\boxed{\text{trovo } x(\infty)}$

4) costante di tempo

Trovo R_{ab} resistenza del circuito equivalente di Thevenin visto ai morsetti ab del condensatore

$$\boxed{\tau = R_{ab}\, C}$$

5) soluzione (ho tutti i parametri!)

$$\boxed{x(t) = \left[x(0^+) - x(\infty)\right] e^{-t/\tau} + x(\infty)}$$

6) grafico se richiesto

3) $t \to \infty$ (regime)

Idem  come un  cortocircuito

Idem $\boxed{\text{trovo } x(\infty)}$

4) costante di tempo

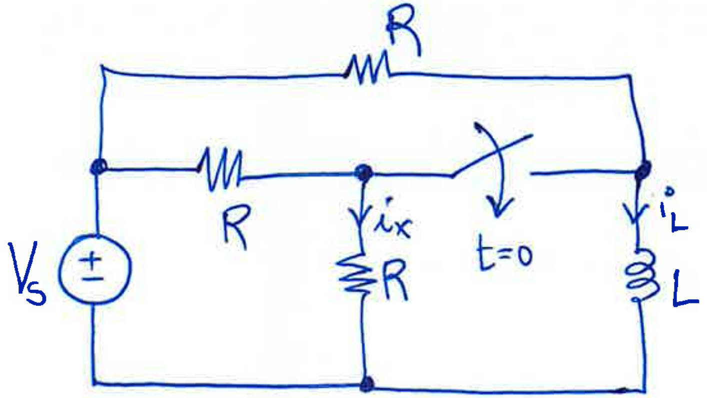
Idem visto ai morsetti ab dell'induttore

$$\boxed{\tau = L / R_{ab}}$$

5) Idem

6) Idem

Esempio

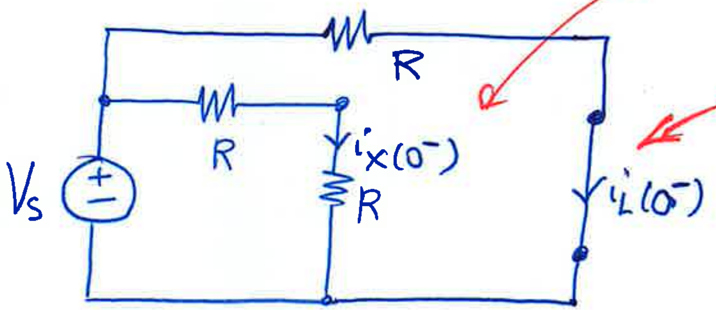


$V_s = 10V$
$R = 5\,\Omega$
$L = 5\,mH$

L'interruttore e' aperto da lungo tempo e si chiude in $t=0$ (evento)
Determinare $i_x(t)$ e $i_L(t)$ per $t>0$

1) $t=0^-$ Se il circuito aveva "da lungo tempo" l'interruttore aperto, come affermato, allora deve essere in condizioni di REGIME costante.
(REGIME PREESISTENTE)

quindi:



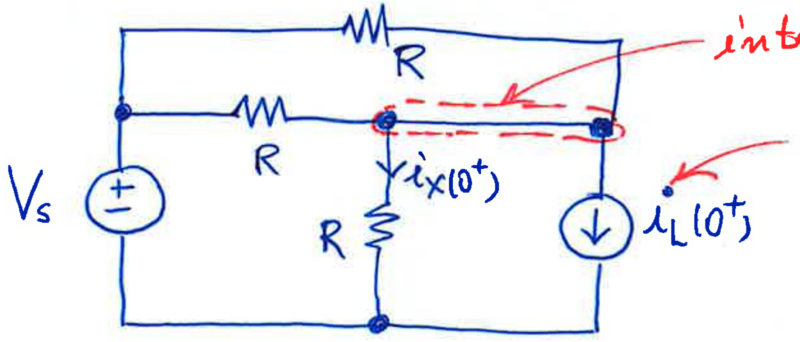
risolvo: $i_L(0^-) = \dfrac{V_s}{R} = 2\,A$; $i_x(0^-) = \dfrac{V_s}{2R} = 1\,A$

2) $t = 0^+$

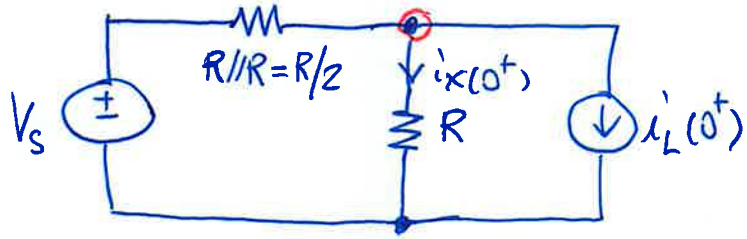
$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 2\,A$ continuità della var. di stato

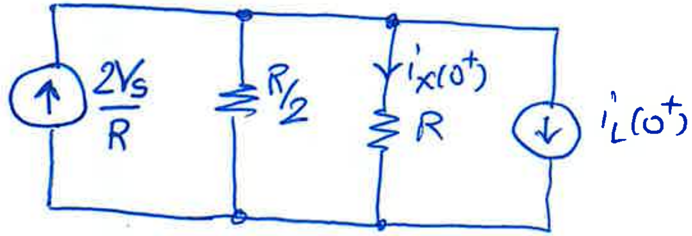
interruttore chiuso

induttore in 0^+



risolvo





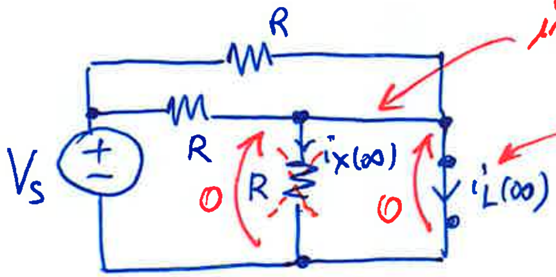
Part. di corrente

$$i_L'(0^+) = \left[\frac{2V_s}{R} - i_L(0^+)\right]\frac{R/2}{R/2 + R} = [4-2]\,\frac{5/2}{5/2+5} = 2\,\frac{5}{15} = \frac{2}{3}\,A$$

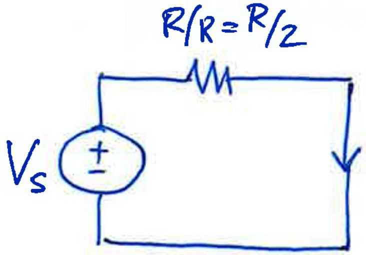
3) $t \to \infty$ (regime dopo l'evento)

interruttore chiuso

induttore a regime costante

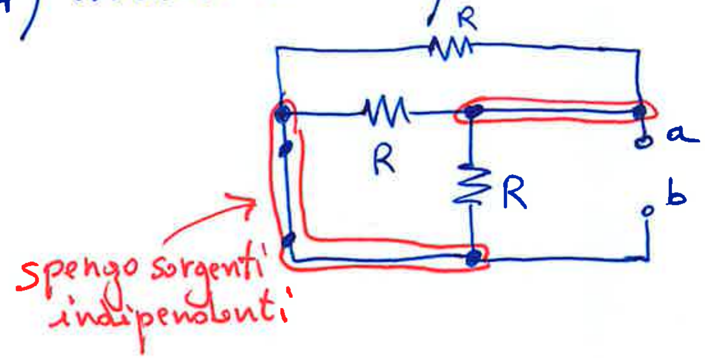


$$i_x(\infty) = \frac{0}{R} = 0\,A$$



$$i_L(\infty) = \frac{V_s}{R/2} = 4\,A$$

4) costante di tempo



$$R_{ab} = R /\!/ R /\!/ R = \frac{R}{3} = \frac{5}{3}\,\Omega$$

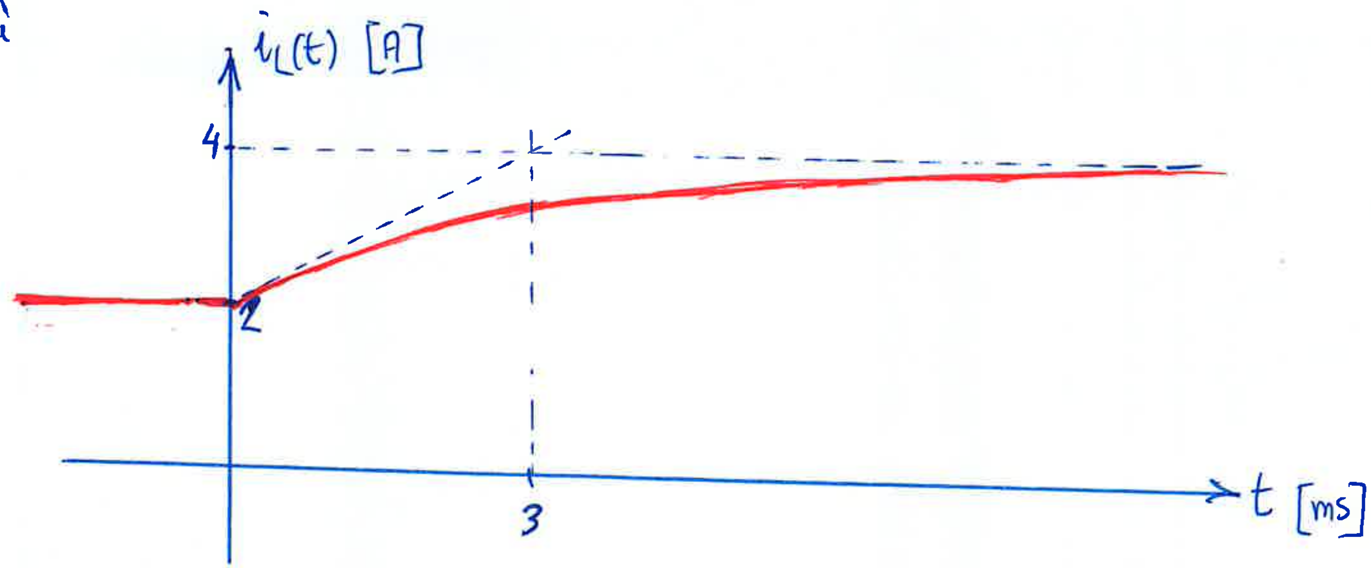
$$\tau = \frac{L}{R_{ab}} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{5/3} = 3\,ms$$

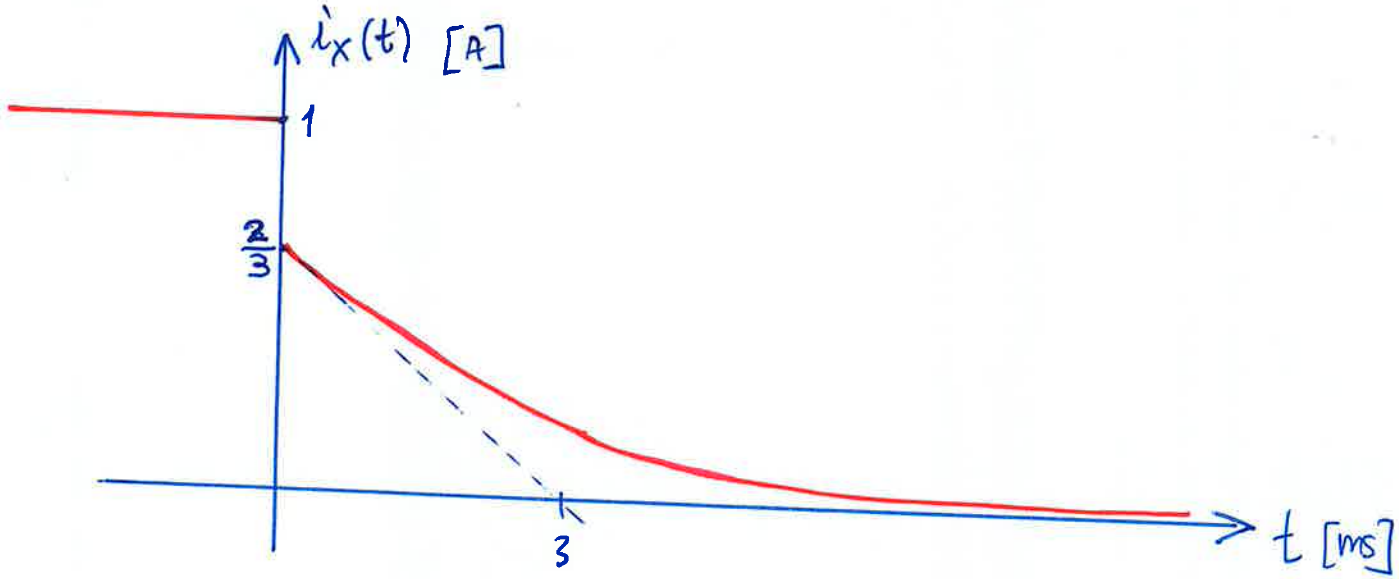
5) soluzioni

$$i_L(t) = \left[i_L(0^+) - i_L(\infty) \right] e^{-t/\tau} + i_L(\infty) = \left[2-4 \right] e^{-\frac{t}{3}\cdot 10^3} + 4 = 4 - 2e^{-\frac{t}{3}\cdot 10^3}, \; A \quad \text{per } t \geq 0$$

$$i_x(t) = \left[i_x(0^+) - i_x(\infty) \right] e^{-t/\tau} + i_x(\infty) = \frac{2}{3} e^{-\frac{t}{3} 10^3}, \; A \quad \text{per } t > 0$$

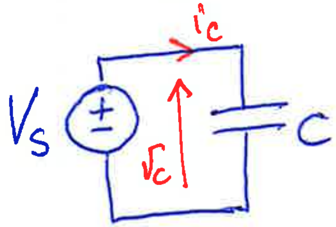
6) grafici





☐ CASI PARTICOLARI (SEMPLICI MA... DA CONSIDERARE ATTENTAMENTE)

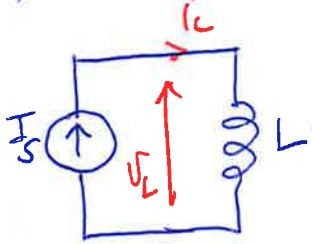
■ $R=0$ con ⊣⊢ (modello di Thevenin e' gen. id. di tensione)



$$v_c = V_S \qquad i_c = C\frac{dv_c}{dt} = 0\,A \qquad (\text{BANALE!})$$

COSTANTE

■ $G=0$ $(R\to\infty)$ con ⌇⌇⌇ (modello di Norton e' gen. id. di corrente)

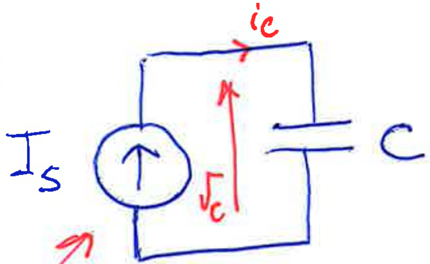


$$i_L = I_S \qquad v_L = L\frac{di_L}{dt} = 0\,V \qquad (\text{BANALE!})$$

COSTANTE

■ CASI "NON RC- RL" perche' ∄ eq. di Thevenin e Norton della parte adinamica del circuito

A ■

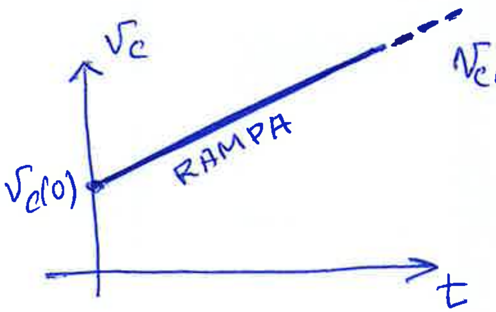


(∄ Thevenin)

$$i_c = I_S = C\frac{dv_c}{dt}$$

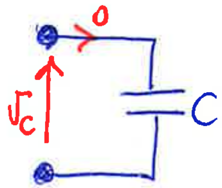
$$\Rightarrow \quad v_c(t) = v_c(0) + \frac{1}{C}\int_0^t I_S\,dt = v_c(0) + \frac{I_S}{C}t$$

RAMPA DI TENSIONE (retta)

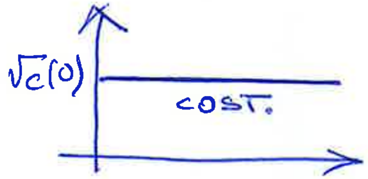


$$v_c(0) + \underbrace{\frac{I_s}{C}}_{\text{coeff. angolare della retta } [V/s]} t$$

- Se $I_s = 0$

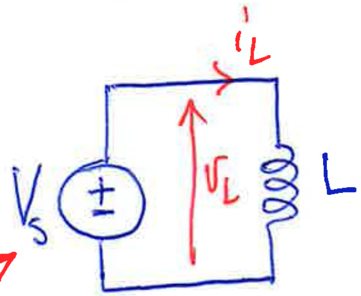


$$v_c = v_c(0)$$



Un condensatore aperto mantiene la tensione ai suoi capi COSTANTE

B



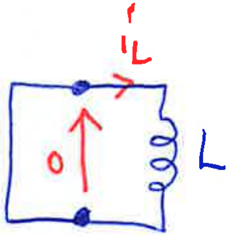
(∄ Norton)

$$v_L = V_s = L\frac{di_L}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L}\int_0^t V_s\, dt = i_L(0) + \frac{V_s}{L} t$$

RAMPA DI CORRENTE

- Se $V_s = 0$



$$i_L = i_L(0) \quad \text{COST.}$$

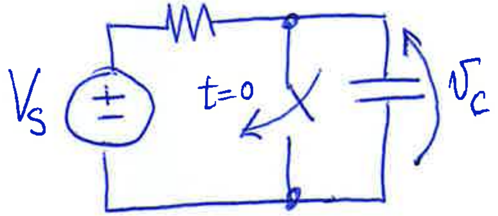
Un induttore cortocircuitato mantiene la corrente COSTANTE nell'anello

CASI IMPOSSIBILI

Non si possono analizzare VIOLAZIONI DELLA CONTINUITÀ della variabile di stato

Esempio 1)

circuito a regime in 0^-; l'interruttore si chiude in $t=0$



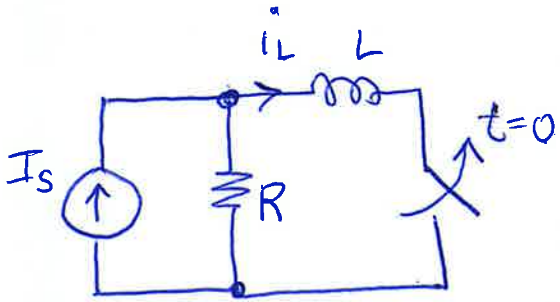
$v_C(0^-) = V_S$

$v_C(0^+) = 0$

$\boxed{v_C(0^-) \neq v_C(0^+)\ ?\ \text{IMPOSSIBILE}}$

Esempio 2)

circuito a regime in 0^-; l'interruttore si apre in 0



$i_L(0^-) = I_S$

$i_L(0^+) = 0$

$\boxed{i_L(0^-) \neq i_L(0^+)\ ?\ \text{IMPOSSIBILE}}$

Questi paradossi sono modelli inadeguati della realtà. Nel caso 1): non ∃ nella realtà dei cortocircuiti ideali. Nel caso 2): non ∃ nella realtà degli interruttori che si aprono in istante di durata nulla. Per potere analizzare questi casi bisogna o introdurre modelli più realistici o usare teorie matematiche più avanzate (distribuzione "Delta di Dirac") che esulano dagli scopi di questo corso.

CONDENSATORI E INDUTTORI IN SERIE E PARALLELO

$i_C = C \dfrac{dv_C}{dt}$ per analogia con (*) $i_R = G\, v_R$ STESSE FORMULE DELLE CONDUTTANZE

$v_L = L \dfrac{di_L}{dt}$ " " " $v_R = R\, i_R$ " " " RESISTENZE

(*) ricordare la derivata e' un operatore Lineare; le dimostrazioni sono analoghe a quelle del resistore.

	IN SERIE	IN PARALLELO
DUE CONDENSATORI	$C_{eq} = \dfrac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}} = \dfrac{C_1 C_2}{C_1+C_2}$	$C_{eq} = C_1 + C_2$
DUE INDUTTORI	$L_{eq} = L_1 + L_2$	$L_{eq} = \dfrac{1}{\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}} = \dfrac{L_1 L_2}{L_1+L_2}$

(Similmente nel caso siano più di due.)

☐ CIRCUITI DI ORDINE SUPERIORE AL PRIMO

Siano n_L (induttori) n_C (condensatori)

$$\boxed{n \leq n_L + n_C}$$

ordine del circuito dinamico

- NON POSSIAMO affrontare la soluzione di equazioni differenziali di ordine n in un corso del I anno (argomento di analisi matematica II)

- RESTA VERO che, se il circuito è ASINTOTICAMENTE STABILE, allora la soluzione è nella forma

$$\boxed{x(t) = x_T(t) + x_R(t)}$$

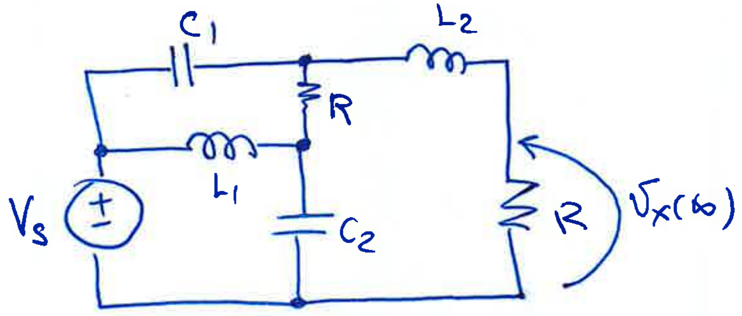
dove $x_T(t) \to 0$ per $t \to \infty$ "RISPOSTA TRANSITORIA"

e quindi $x(t) \to x_R(t)$ per $t \to \infty$ "RISPOSTA A REGIME"

- RESTA VERO che se le SORGENTI INDIPENDENTI sono COSTANTI (dc, direct current) allora anche il regime $x_R(t) =$ COSTANTE, e si può trovare circuitalmente (senza scrivere eq. diff) nel solito modo:

REGIME COSTANTE : Esempio

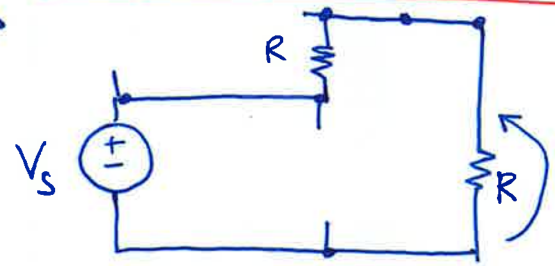
Circuito del II ordine:



Trovare $v_x(\infty)$ a regime costante

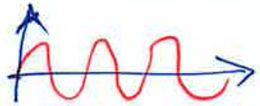
$V_S = 10V$
$R = 5\Omega$

Sostituisco  con  e  con  come già fatto nei circuiti del I ordine



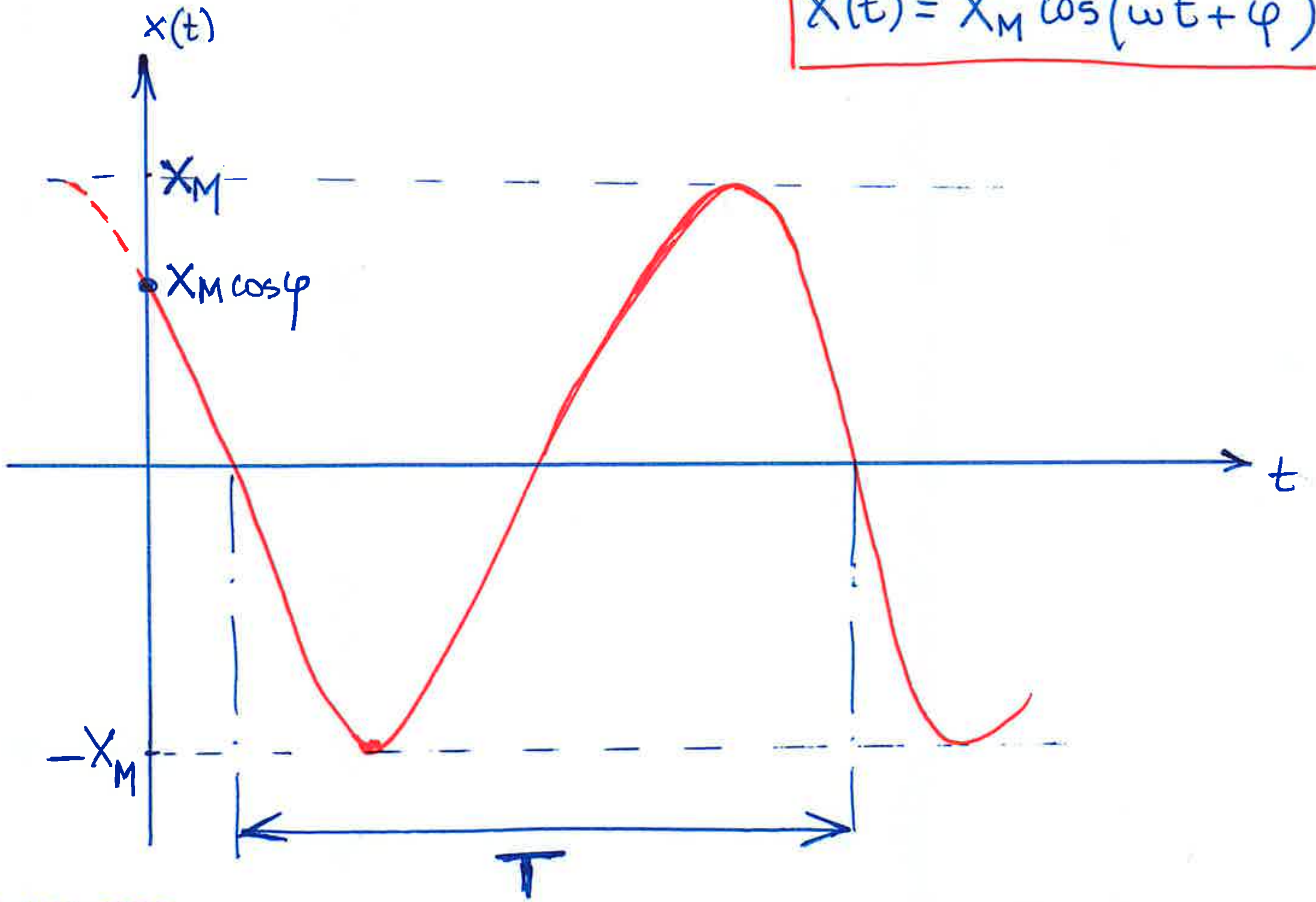
$$v_x(\infty) = V_S \cdot \frac{R}{R+R} = \frac{V_S}{2} = 5\,V$$

REGIME SINUSOIDALE

Vogliamo sviluppare un metodo per trovare il regime quando le sorgenti indipendenti sono ALTERNATE SINUSOIDALI  (ac, alternating current) perche questo andamento temporale e' di grandissimo interesse pratico nelle applicazioni.

☐ SINUSOIDE

$$\boxed{X(t) = X_M \cos(\omega t + \varphi)}$$



X_M AMPIEZZA

T $[s]$ PERIODO

$f = \frac{1}{T}$ $[s]^{-1} = [Hz]$ "HERTZ" FREQUENZA

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ $[rad/s]$ PULSAZIONE (o FREQUENZA ANGOLARE)

$\varphi \in [0, 2\pi]$ FASE

☐ VALORE EFFICACE DI UNA SINUSOIDE o VALORE RMS ("ROOT MEAN SQUARE")

Def. $\boxed{X_{eff} = \frac{X_M}{\sqrt{2}}}$ quindi $\boxed{X_M = \sqrt{2}\, X_{eff}}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.707\right)$ $\left(\sqrt{2} \simeq 1.414\right)$

Cosa e'?:

- Il valore efficace e' la radice quadrata (root) del valore medio del quadrato (mean square) sul periodo della sinusoide:

$$\boxed{X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt}}$$

$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$ identità trigonometrica

infatti

$$X_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T X_M^2 \cos^2(\omega t)\,dt = \frac{X_M^2}{T}\int_0^T \frac{1+\cos(2\omega t)}{2}\,dt = \frac{X_M^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\,dt + \frac{X_M^2}{T}\int_0^T \cos(2\omega t)\,dt$$

$$= \frac{X_M^2}{2T}[T-0] + \frac{X_M^2}{T 2\omega}\Big[\sin(2\omega t)\Big]_0^T = \frac{X_M^2}{2} + \frac{X_M^2}{2\omega T}\Big[\underbrace{\cancel{\sin(2\tfrac{2\pi}{T}T)}}_{0} - \underbrace{\cancel{\sin(0)}}_{0}\Big] = \frac{X_M^2}{2}$$

(con $2\frac{2\pi}{T}T = 4\pi$)

- In vari contesti applicativi (es. sistemi elettrici per l'energia; circuiti a radiofrequenza per antenne di ~~trasmissione~~ telecomunicazioni) si preferisce dichiarare il valore efficace invece che l'ampiezza quando si definisce la sinusoide.

☐ TEOREMA DEL REGIME SINUSOIDALE PERMANENTE

Ipotesi
- Circuito lineare dinamico di ordine qualunque n
- Asintoticamente stabile
- Avente sorgenti indipendenti SINUSOIDALI tutte di UGUALE FREQUENZA f_0 ("isofrequenziali")

Tesi Per $t \to \infty$ tutte le tensioni e le correnti del circuito assumono un andamento temporale SINUSOIDALE di frequenza f_0 (come le sorgenti!)

- La dimostrazione e' omessa richiedendo strumenti matematici non ancora posseduti dagli studenti del I anno (equaz. differenziali lineari)

- E' possibile pero' trovare il REGIME SINUSOIDALE per via circuitale senza risolvere le equazioni differenziali mediante l' "ANALISI NEL DOMINIO DEI FASORI" (Steinmetz).
  Lo strumento matematico e' l'algebra dei numeri complessi.

|| **N.B.** Ripassare l'algebra dei numeri complessi per esempio su libro PERFETTI (2013): Par. 9.1 pag. 303-309