ciro.pentangelo@polimi.it | pasquale.barbato@polimi.it

GRANDEZZE : - unità di misura

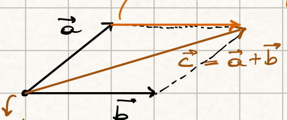
- scalari es. temperatura (°C / F / K), massa
- VETTORIALI es. spostamento, velocità, ...
  - → modulo
  - → direzione
  - → verso

- vettori con modulo, direz, verso uguali sono equivalenti, ma in alcuni casi anche il punto di applicazione è importante. (es per il momento torcente)
  ↳ vettore applicato

- VETTORE NULLO $\vec{0}$: modulo = 0
- VERSORE $\vec{u}$: modulo = 1
- UGUAGLIANZA : $\vec{a} = \vec{b}$ se hanno uguali M, D, V
- PARALLELISMO : $\vec{a} \parallel \vec{b}$ se stessa direzione
- OPPOSTO : $\vec{a} = -\vec{b}$ se stesso M e D, ma V opposto
  ↳ somma di vett. opposti è il vettore nullo

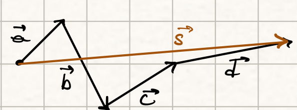
→ **SOMMA** : regola del parallelogramma

oppure porre il p. di appl. di un vettore nell'estremo libero dell'altro

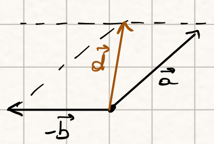


Proprietà :

1- commutativo : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2- associativo : $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
3- el. neutro : $\vec{a} + 0 = \vec{a}$
4- opposto : $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$
5- $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{s}$



6- $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



→ **PRODOTTO PER UNO SCALARE** : $\vec{v}' = \alpha \vec{v}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- $|\vec{v}'| = |\alpha| \, |\vec{v}|$
- stessa direz. : $\vec{v}' \parallel \vec{v}$
- verso dipendente dal segno di α
  - $\alpha > 0$: stesso verso di $\vec{v}$
  - $\alpha < 0$: verso opposto a $\vec{v}$

Proprietà :

1- associativa : $\alpha(\beta \vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$
2- distributiva
  - → rispetto somma di scalari : $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$
  - → rispetto somma di vettori : $\alpha(\vec{v} + \vec{u}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{u}$

3- legge dell'annullamento : $\alpha\vec{v} = 0 \iff \alpha = 0 \vee \vec{v} = 0$
4- el. neutro : $1\vec{v} = \vec{v}$

→ DIVISIONE : $\frac{\vec{v}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\vec{v}$

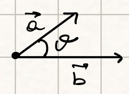
• $\forall$ vettore ha un **VERSORE ASSOCIATO** : $\vec{v} \rightarrow \vec{u}_v$ con $|\vec{u}_v| = 1$

$= \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

stessa direzione

stesso verso

→ **PRODOTTO SCALARE** : $c = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$



proprietà:

1- commutativo : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

2- distributivo rispetto la somma : $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

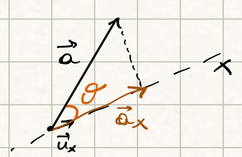
3- associativo rispetto la moltiplicazione per scalare : $\alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b}$

4- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| = 0 \vee |\vec{b}| = 0 \vee \vec{a} \perp \vec{b}$ (legge dell'annullamento)

↳ condizione di perpendicolarità

- θ acuto → $c > 0$
- θ ottuso → $c < 0$

→ **PROIEZIONE** :

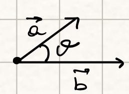


$a_x = \vec{a} \cdot \vec{u}_x$

$\vec{a}_x = a_x \vec{u}_x = |\vec{a}|\cos\theta \, \vec{u}_x$

! $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

→ **PRODOTTO VETTORIALE** : $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

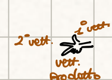


• modulo : $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\theta$

• direzione $\perp$ piano individuato da $\vec{a}$, $\vec{b}$

• verso : regola della mano destra

↳ entrante / uscente



Proprietà:

1- anticommutativa : $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

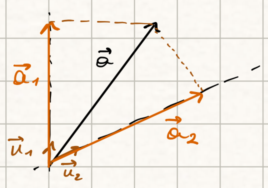
2- distributiva rispetto somma di vett. : $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

3- associativa rispetto moltiplicazione per scalare : $\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b}$

4- legge dell'annullamento : $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| = 0 \vee |\vec{b}| = 0 \vee \vec{a} \parallel \vec{b}$

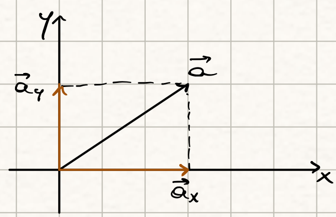
↳ condizione di parallelismo

→ SCOMPOSIZIONE di un vettore



$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$

- se $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$:



$\vec{a} = \underline{\underline{\vec{a}_x}} + \underline{\underline{\vec{a}_y}} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y$

componenti cartesiane

vale anche nello spazio tridimensionale

nel sistema cartesiano :

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

- $\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x = 1 \quad ; \quad \vec{u}_x \cdot \vec{u}_y = 0$

  $\vec{u}_x \times \vec{u}_x = 0 \quad ; \quad \vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z \quad ; \quad \vec{u}_y \times \vec{u}_x = -\vec{u}_z$

- $\vec{u}_v = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \begin{pmatrix} \frac{v_x}{|\vec{v}|} \\ \frac{v_y}{|\vec{v}|} \\ \frac{v_z}{|\vec{v}|} \end{pmatrix} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

⇒ SOMMA : $\vec{a} + \vec{b} = a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z + b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z = (a_x + b_x)\vec{u}_x + (a_y + b_y)\vec{u}_y + (a_z + b_z)\vec{u}_z$

⇒ PRODOTTO SCALARE : $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z) \cdot (b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z) = a_x b_x \vec{u}_x + a_y b_y \vec{u}_y + a_z b_z \vec{u}_z$

gli unici componenti che non si annullano sono quelli con stesso versore

⇒ PRODOTTO VETTORIALE : $\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{u}_x + a_y \vec{u}_y + a_z \vec{u}_z) \times (b_x \vec{u}_x + b_y \vec{u}_y + b_z \vec{u}_z)$

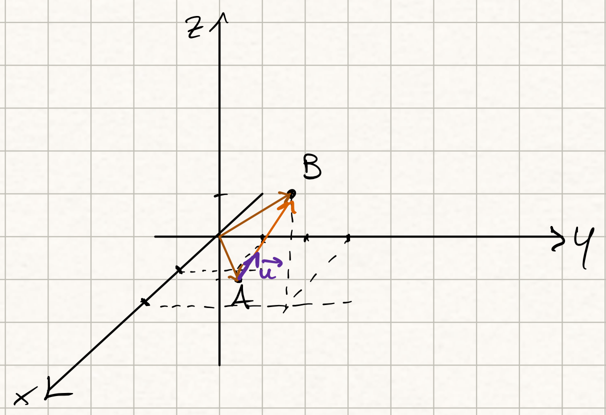
gli unici componenti che non si annullano sono quelli con versori diversi

$$= \det \begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{u}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{u}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{u}_z$$

ESERCIZI :

1) $A(1,1,-1)$ $B(2,3,1)$? $\vec{u}$ (versore congiungente A, B)



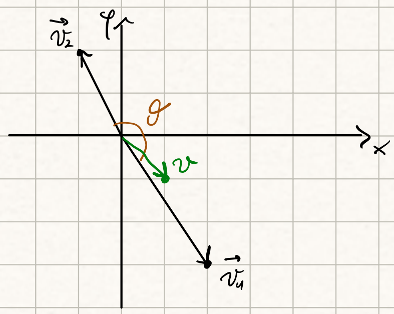
$$\vec{v} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_B - x_A)\vec{u}_x + (y_B - y_A)\vec{u}_y + (z_B - z_A)\vec{u}_z = \vec{u}_x + 2\vec{u}_y + 2\vec{u}_z$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{3}\vec{u}_x + \frac{2}{3}\vec{u}_y + \frac{2}{3}\vec{u}_z$$

2) $\vec{v}_1 = 2\vec{u}_x - 3\vec{u}_y$
$\vec{v}_2 = -\vec{u}_x + 2\vec{u}_y$

? a) θ
b) $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$
c) $\vec{c} = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$
d) $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$
e) $\vec{w} = \vec{u}_x - 2\vec{u}_y$
? componente di w rispetto v (proiez.)



$$c = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = |\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2| \cos\theta = v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y}$$

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{5}$$

a) $\theta = \arccos\left(\frac{v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y}}{|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|}\right) = 172{,}9^\circ$ *

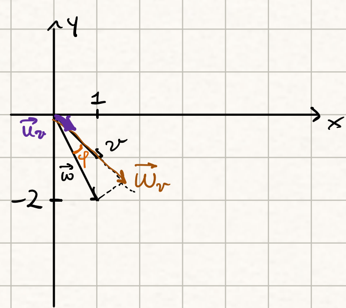
c) $= -2 - 6 = -8$

b) $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (v_{1x} + v_{2x})\vec{u}_x + (v_{1y} + v_{2y})\vec{u}_y = \vec{u}_x - \vec{u}_y$

d) $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \det\begin{pmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ v_{1x} & v_{1y} & v_{1z} \\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z} \end{pmatrix} = (v_{1x}v_{2y} - v_{1y}v_{2x})\,\vec{u}_z = 1\vec{u}_z$

$|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2| = |\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2| \sin\theta \simeq 0{,}997 \xrightarrow{} 1$ $\vec{u}_z$

si dovrebbe sostituire qui l'espressione * per avere il risultato esatto $\rightarrow 1$

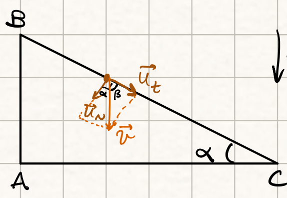


e) $\vec{w}_v = w_v \cdot \vec{u}_v = (\vec{w} \cdot \vec{u}_v)\,\vec{u}_v$

$$w_v = |\vec{w}| \cos\varphi = \vec{w} \cdot \vec{u}_v = \vec{w} \cdot \left(\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right) = \frac{1}{|\vec{v}|}(\vec{w} \cdot \vec{v}) =$$

$$= \frac{1}{|\vec{v}|}\left(v_x w_x + v_y w_y\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

2)



$\downarrow \vec{v}$

$|\vec{v}| = 10$

$\alpha = 30°$

$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

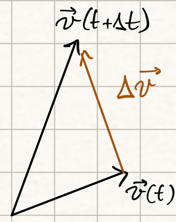
$\vec{v} = v_t \vec{u}_t + v_N \vec{u}_N$

? componenti di $\vec{v}$ rispetto $\vec{u}_t$, $\vec{u}_N$

$v_t = \vec{v} \cdot \vec{u}_t = |\vec{v}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 10 \, \frac{1}{2} = 5$

$v_N = \vec{v} \cdot \vec{u}_N = |\vec{v}| \cos\alpha = 10 \, \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

Derivata di un vettore :



$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}$$

↳ derivata di un vettore ⇒ vettore

$\neq \frac{d|\vec{v}|}{dt}$

$\neq$ direz, verso di $\vec{v}$

1· LINEARITÀ : $\frac{d(\vec{v}+\vec{w})}{dt} = \frac{d(\vec{v})}{dt} + \frac{d(\vec{w})}{dt}$

2· $\frac{d(\alpha\vec{v})}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\vec{v} + \alpha\frac{d\vec{v}}{dt}$ — α: scalare

3· $\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{w})}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{w}}{dt}$

4· $\frac{d(\vec{v}\times\vec{w})}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}\times\vec{w} + \vec{v}\times\frac{d\vec{w}}{dt}$

! anticommutativo

5· $\frac{d(\vec{v}(s(t)))}{dt} = \frac{d\vec{v}}{ds}\frac{ds(t)}{dt}$ — $s(t)$: funz. scalare dipendente dal tempo

DIFFERENZIALE :

$$d\vec{v} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}\cdot dt$$

$$\vec{v} = |\vec{v}|\cdot\vec{u}_v$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(|\vec{v}|\vec{u}_v) = \frac{d|\vec{v}|}{dt}\vec{u}_v + \underbrace{|\vec{v}|\frac{d\vec{u}_v}{dt}}_{\text{dipende dalla variaz. della direzione}}$$

due componenti

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

funz. scalari che variano nel tempo

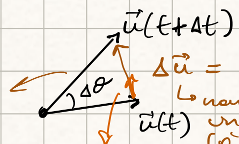
$$\rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\left(v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z\right) =$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\vec{u}_x + \cancel{v_x\frac{d\vec{u}_x}{dt}} + \cdots\cdots$$

$=0$ perché non varia nel tempo (costante)

derivata di un versore :

$$|\vec{u}| = 1$$



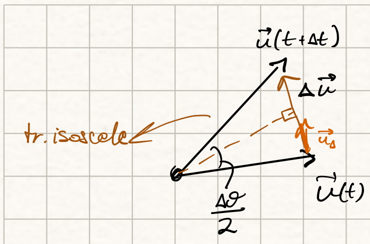
tr. isoscele

$\Delta\vec{u} = \vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t) = |\Delta\vec{u}|\cdot\vec{u}_\Delta$

↳ non è un versore (è un vettore)

$\vec{u}_\Delta$

↳ versore di $\Delta\vec{u}$



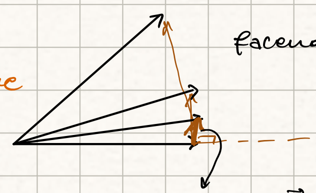
$$|\Delta\vec{u}| = 2\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$$

$$\Delta t \to 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

$$\Rightarrow |\Delta\vec{u}| \approx 2\,\frac{\Delta\theta}{2} = \Delta\theta$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{|\Delta\vec{u}|\,\vec{u}_\Delta}{\Delta t}\right) = \overbrace{\left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{u}|}{\Delta t}\right]}^{\frac{d\theta}{dt}}\underbrace{\left[\lim_{\Delta t\to 0}\vec{u}_\Delta\right]}_{?\text{ direzione}}$$

facendo diminuire $\Delta\theta$



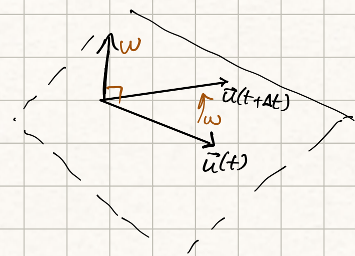
$$\vec{u}_N = \lim_{\Delta t\to 0}\vec{u}_\Delta \qquad \perp \vec{u}(t)$$

angolo 90°

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\cdot\vec{u}_N = \omega\,\vec{u}_N = \vec{\omega}\times\vec{u}$$

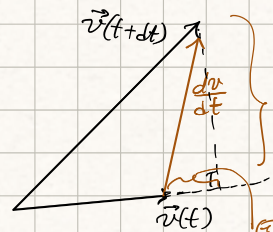
ω = velocità angolare

- modulo $\frac{d\theta}{dt}$
- direz. $\perp$
- verso : regola mano dx



componenti

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \overset{1}{\frac{d|\vec{v}|}{dt}\,\vec{u}_v} + \overset{2}{|\vec{v}|\,\frac{d\vec{u}_v}{dt}}$$

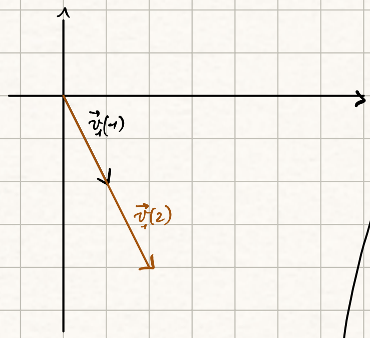


② $\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_\perp$ → variazione direz. del vettore

$$= |\vec{v}|\left(\vec{\omega}\times\vec{u}_v\right) = \vec{\omega}\times\left(|\vec{v}|\,\vec{u}_v\right)$$

$$= \vec{\omega}\times\vec{v}$$

① $\left.\frac{d\vec{v}}{dt}\right|_{\parallel}$ → variazione modulo del vettore es 1 Derivare rispetto t : a) $\vec{v}_1 = t\,\vec{u}_x - 2t\,\vec{u}_y$



$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{dv_1}{dt}\,\vec{u}_v + \cancel{\vec{\omega} \times \vec{v}_1}$$

↳ il vettore non ruota nel tempo $\frac{d\theta}{dt} = 0$ (non c'è variaz. di direz.)

tempo ≥ 0 $\left(\cancel{-\sqrt{5}t}\right)$

$$v_1 = |\vec{v}_1| = \sqrt{t^2 + 4t^2} = \sqrt{5}\,t$$

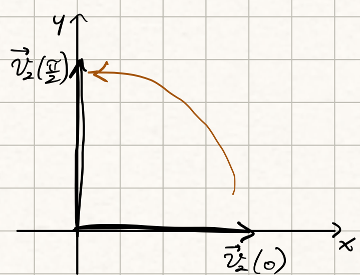
$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{u}_x - \frac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{u}_y$$

→ ha componenti non dipendenti dal tempo

$$= \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{u}_x - \frac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{u}_y\right) = \vec{u}_x - 2\vec{u}_y$$

cioè $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_{1x}}{dt}\,\vec{u}_x + \frac{dv_{1y}}{dt}\,\vec{u}_y = \vec{u}_x - 2\vec{u}_y$

b) $\vec{v}_2 = 2\cos t\,\vec{u}_x + 2\sin t\,\vec{u}_y$



$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -2\sin t\,\vec{u}_x + 2\cos t\,\vec{u}_y$$

c) $$I = \int_0^a \left[\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right] dt = \int_0^a \left[t\,\vec{u}_x + 2t\,\vec{u}_y\right] - \left[2\cos t\,\vec{u}_x + 2\sin t\,\vec{u}_y\right] dt =$$

$$= \int_0^a \left[(t - 2\cos t)\,\vec{u}_x - (2\sin t + 2t)\,\vec{u}_y\right] dt$$

$$= \int_0^a \left[(t - 2\cos t)\,\vec{u}_x\right] dt - \int_0^a \left[(2\sin t + 2t)\,\vec{u}_y\right] dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} - 2\sin t\right]_0^a \vec{u}_x + \left[2\cos t - t^2\right]_0^a \vec{u}_y = \left(\frac{a^2}{2} - 2\sin a\right)\vec{u}_x + \left[2\cos a - 2 - a^2\right]\vec{u}_y$$