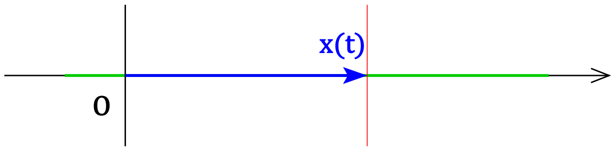
FISICA – MECCANICA

Introduzione allo studio della Fisica

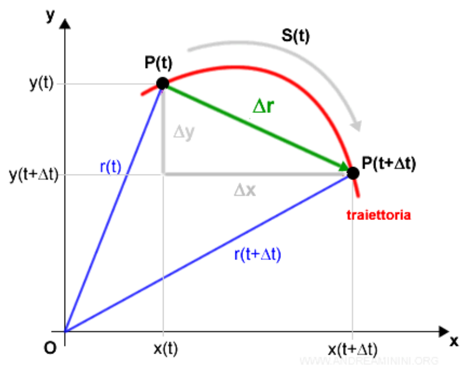
- **Il metodo sperimentale**
  - La fisica si fonda sul metodo sperimentale, il quale si compone di quattro fasi:
    - 1) Osservazione;
    - 2) Esperimenti semplificati;
    - 3) Formulazione di una teoria;
    - 4) Verifica sperimentale della teoria.
- **Grandezze fisiche**
  - Una grandezza fisica è la proprietà di un fenomeno, corpo o sostanza, che può essere espressa quantitativamente mediante un numero e un riferimento (ossia può essere misurata).
    - Le grandezze fisiche si definiscono "operativamente" (es. la lunghezza è quella grandezza che si misura col metro).
  - Ogni misura, anche implicitamente, è caratterizzata da due numeri: la misura stessa e l'errore.
    - La misura nasce prendendo in considerazione due elementi:
      - La classe di grandezza (lunghezza, massa…);
      - L'unità di misura U (metro, chilo grammo…).
    - Dato $G \in classe$ la misura x è pari a $x = \frac{G}{U}$.
  - Le grandezze possono essere dirette oppure indirette (grandezze esprimibili mediante operazioni matematiche sulle grandezze dirette).
  - Le grandezze possono essere espresse mediante scalari (numeri) oppure mediante vettori (caratterizzati da: direzione, verso e modulo).
    - VEDI IL CAPITOLO SUL CALCOLO VETTORIALE
- **Leggi fisiche**
  - Una legge fisica è una relazione quantitativa tra grandezze fisiche.
  - Una legge fisica è valida fintanto che riesce a prevedere i risultati sperimentali.
  - Principio di omogeneità: le equazioni che traducono leggi fisiche devono essere scritte in modo da risultare indipendenti dalle unità di misura.
    - Deve essere preservata la "dimensione" (combinazione, mediante opportuni esponenti, delle classi di grandezza).

Cinematica del punto materiale

- **Introduzione alla Cinematica**
  - Con meccanica si intende lo studio del moto di un corpo; in particolar modo, la meccanica si occupa delle cause e delle caratteristiche di tale moto.
    - Cinematica: Descrive le caratteristiche del moto ma non le sue cause.
    - Dinamica: Studia le cause del moto ma non le sue caratteristiche.
      - Statica: Caso particolare della dinamica (studio di un moto di velocità nulla) che si occupa di stabilire quando i corpi "stanno fermi".
  - La meccanica studia i moti dei corpi approssimati come punti materiali.
    - Punto materiale: oggetto di dimensioni piccole, rispetto agli altri corpi presenti nel problema e alle distanze che percorre, la cui struttura interna non gioca alcun ruolo.
- **Cinematica del punto materiale**
  - Lo studio del moto del punto materiale avviene collocandolo in un sistema di riferimento.
    - Sistema di riferimento spaziale: concettualmente qualunque di sistema di riferimento, purché fermo, è ammissibile; ciò permette di scegliere il sistema di riferimento in funzione del problema studiato. Nel sistema di riferimento spaziale deve esistere un sistema di coordinate (cartesiano, polare o cilindrico) che permette di esprimere univocamente la posizione del punto.
    - Sistema di riferimento temporale: riferimento temporale definito a partire da un t_0 scelto.
  - Legge oraria: rappresentazione parametrica della curva del moto. Funzione matematica che associa, in funzione del tempo, la posizione del punto materiale nel sistema di riferimento.
    - $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$
    - È possibile scrivere vettorialmente la legge oraria mediante l'introduzione del "vettore posizione": vettore che collega l'origine del sistema di riferimento con la posizione del punto materiale (sempre in funzione del tempo).
      - $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$
  - Il luogo geometrico dei punti che il punto materiale occupa durante il suo moto è chiamato "traiettoria".
    - $f(x, y, z) = 0$
    - Sapendo che il punto materiale si muove sulla traiettoria posso utilizzarla per esprimere la "rappresentazione intrinseca" della legge oraria: posizionando un'origine sulla traiettoria esprimo la posizione del punto materiale P sulla "ascissa curvilinea".
- **Moti rettilinei**
  - Moto di un punto materiale su una traiettoria rettilinea.

    - 

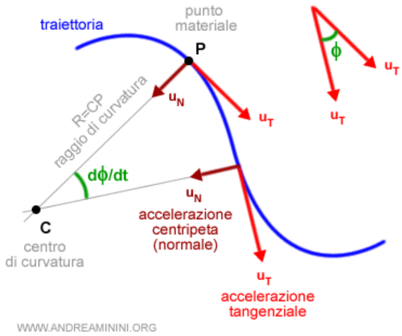
        - Velocità media: $v_m(t) = \frac{\Delta x(t)}{\Delta t}$.
        - Velocità scalare istantanea: $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt} = x(t)'$.
            - Inverso: $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$.
        - Accelerazione media: $a_m(t) = \frac{\Delta v(t)}{\Delta t}$.
        - Accelerazione scalare istantanea: $a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = x''(t)$.
            - Inverso: $v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$.
    - *Moto rettilineo uniforme*
        - La velocità $v(t) = k$ rimane costante lungo tutto il moto.
            - $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt = x_0 + v_0 \int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v_0(t - t_0)$
    - *Moto rettilineo uniformemente accelerato*
        - L'accelerazione $a(t) = k$ rimane costante lungo tutto il moto.
            - $\mathrm{v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt = v_0 + a_0 \int_{t_0}^{t} dt = v_0 + a_0(t - t_0)}$
            - $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 + a_0(t - t_0)dt = x_0 + v_0 \int_{t_0}^{t} dt + a_0 \int_{t_0}^{t} tdt - a_0 t_0 \int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0(t^2 - t_0^2) - a_0 t_0(t - t_0)$
            - $x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2$
        - I corpi cadono, a meno dell'attrito dell'aria, di moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione $a = g = 9{,}81 ms^2$.

- **Moti curvilinei**
    - *Moto su una traiettoria curva*
        - 

        - Velocità vettoriale media: $\vec{v_m}(t) = \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}$.
        - Velocità vettoriale istantanea: $\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{r}'(t)$.
            - Inverso: $\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt$.
        - Accelerazione vettoriale media: $\vec{a_m}(t) = \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t}$.

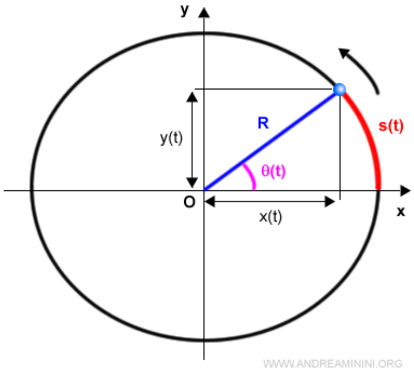
- Accelerazione vettoriale istantanea: $\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \vec{r}''(t)$.
  - Inverso: $\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt$.
- Siccome $\Delta\vec{r}(t)$ è un vettore tangente alla traiettoria posso, introducendo il versore tangente $\vec{u_T}$: $\Delta\vec{r}(t) = \Delta s \cdot \vec{u_T}$.

○ *Accelerazione tangenziale e normale*

- 

- $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(v(t)\vec{u_T})}{dt} = \frac{dv(t)}{dt}\vec{u_T} + \frac{d\vec{u_T}}{dt}v(t) = a(t)\vec{u_T} + \frac{d\vec{u_T}}{dt}v(t)$
  - L'accelerazione è quindi composta da due componenti: l'accelerazione tangenziale (varia il modulo dell'accelerazione) e l'accelerazione normale (varia la direzione dell'accelerazione).
- Il "raggio di curvatura" esprime il raggio della "circonferenza oscuratrice" ossia quella circonferenza che meglio approssima la traiettoria in una determinata sezione della curva.
  - I moti rettilinei possono essere visti come moti curvilinei con $R \to \infty$.
  - I moti circolari hanno $R = k$ costante.
- Considerando la derivata $\frac{d\vec{u_T}}{dt}$, risulta più conveniente esprimere la dipendenza di $\vec{u_t}$ non tanto dal tempo quanto dall'effettiva traiettoria è infatti noto che $\vec{u_t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$. Moltiplicando e dividendo un differenziale: $\frac{d\vec{u_T}}{dt} = \frac{d\vec{u_T}}{dt}\frac{ds}{ds} = \frac{d\vec{u_T}}{ds}\frac{ds}{dt} = s'\frac{d\vec{u_T}}{ds}$. Dalla definizione di angolo: $\frac{d\vec{u_T}}{ds} = \frac{d\vec{u_T}}{ds}\frac{d\phi}{d\phi} = \frac{d\vec{u_T}}{d\phi}\frac{ds}{d\phi} = \frac{d\vec{u_T}}{d\phi}\frac{1}{R} = \frac{1}{R}\vec{u_n}$. Riassumendo: $\frac{d\vec{u_T}}{dt} = s'\frac{d\vec{u_T}}{ds}, \frac{d\vec{u_T}}{ds} = \frac{1}{R}\vec{u_n}$ quindi, $\frac{d\vec{u_T}}{dt} = s'\frac{1}{R}\vec{u_n} = v(t)\frac{1}{R}\vec{u_n}$.
  - In conclusione, è possibile definire l'accelerazione normale come:
    - $\vec{a_n}(t) = \frac{d\vec{u_T}}{dt}v(t) = v(t)\frac{1}{R}\vec{u_n}v(t) = \frac{v^2(t)}{R}\vec{u_n}$
  - Invece l'accelerazione tangenziale è semplicemente:
    - $\vec{a_t}(t) = a(t)\vec{u_T}$

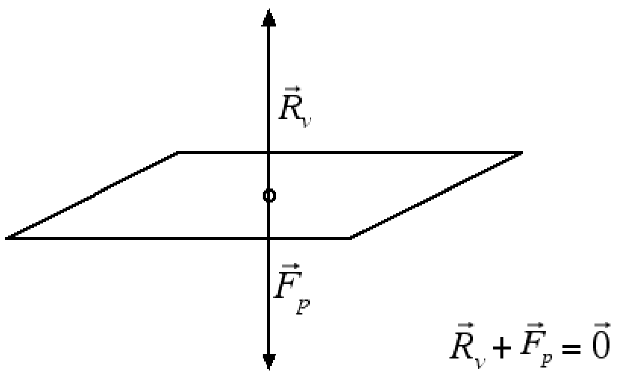
○ *Moto circolare*



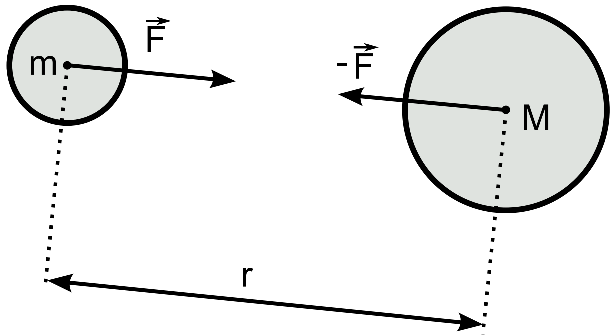
- Angolo al centro: $\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$.
- Velocità angolare: $\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{d\left(\frac{s(t)}{R}\right)}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{R}v(t)$.
  - *Moto circolare uniforme*: moto circolare di velocità angolare costante, il punto materiale percorre archi uguali in tempi uguali.
- Accelerazione angolare: $\xi(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{R}a$.
  - *Moto circolare uniformemente accelerato*: moto circolare in cui l'accelerazione tangenziale è costante in modulo.
- Periodo: tempo impiegato dal corpo a percorrere la circonferenza.
  - $T(t) = \frac{2\pi R}{v(t)} = \frac{2\pi}{\omega(t)}$
- Frequenza: numero di giri percorsi nell'unità di tempo.
  - $f(t) = \frac{1}{T(t)}$

Principi della Dinamica del punto materiale e forze

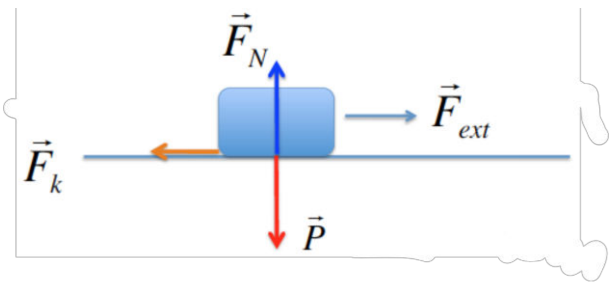
- **Introduzione alla Dinamica**
  - La variazione dello stato di moto di un oggetto nasce dall'interazione tra quel corpo e l'ambiente.
  - *Primo principio della Dinamica*
    - "Un corpo in quiete rimane fermo se la somma delle forze che agiscono su di esso è nulla o nel caso in cui non agisca alcuna forza. Se il corpo è in movimento, continuerà a muoversi di moto rettilineo uniforme."
    - Esistono sistemi di riferimento detti inerziali in cui un corpo non è soggetto a interazioni permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.
  - *Secondo principio della Dinamica*
    - "La forza che agisce su un corpo è direttamente proporzionale alla massa del corpo e all'accelerazione, e ha stessa direzione e verso. Quindi, l'accelerazione è proporzionale alla forza e inversamente proporzionale alla massa."
    - La grandezza che mette in relazione le interazioni corpo-ambiente è la "massa inerziale" ed è una proprietà intrinseca dei corpi stessi.
    - Si definisce "quantità di moto" di un punto materiale di massa m e velocità v la grandezza: $\vec{P} = m\vec{v}$.
    - Si definisce, progressivamente, "forza" la variazione di quantità di moto: $\vec{F} = \frac{d(\vec{P})}{dt}$.
      - La forza e la quantità di moto sono legate tra loro dall'operatore derivata quindi esiste un principio di conservazione della quantità di moto: Se $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \vec{k}$ costante (attenzione, la relazione è vettoriale).
    - Se il corpo interagisce con l'ambiente la velocità del corpo varia; compare quindi un'accelerazione.
      - $\mathrm{\vec{F}} = \frac{\mathrm{d(\vec{P})}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d(m\vec{v})}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{m}\frac{\mathrm{d(\vec{v})}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{m\vec{a}}$
  - *Terzo principio della Dinamica*
    - "Per ogni forza che un corpo A esercita su un altro corpo B, ne esiste un'altra uguale, in modulo e direzione, e contraria in verso, che B esercita su A."
    - Se un corpo A esercita una forza su un corpo B allora anche B applicherà una forza su A di pari modulo, direzione ma verso opposto.
    - Tutte le forze esistono quindi "in coppia".
  - *Note sulle forze*
    - La forza non è solamente un vettore ma è un vettore applicato.
    - Principio di sovrapposizione degli effetti: ogni forza agisce in maniera indipendente dalle altre (è possibile individuare una "risultante delle forze").
- **Tipologie di forze**
  - *Reazioni vincolari*

- 

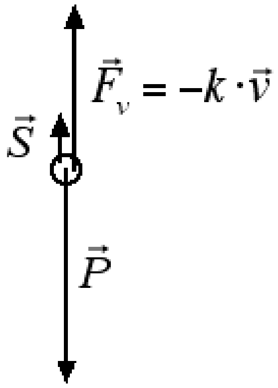
- Il piano, vincolato, applica una "reazione vincolare" (per il terzo principio della dinamica) in risposta alla forza peso. La reazione vincolare è sempre ortogonale al piano.

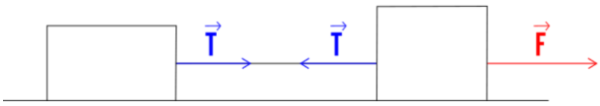
- *Forze gravitazionali*
  - 

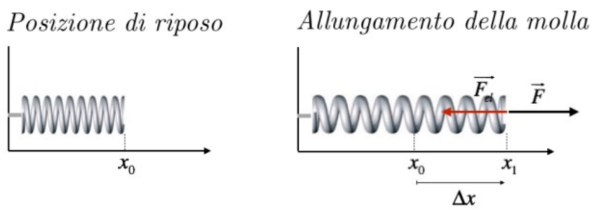
  - Due corpi, dotati di massa, si attraggono.
  - $\vec{F_g} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u_T}$
    - γ: "Costante di gravitazione universale" pari a $6{,}67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{Kg \cdot s}$.
    - m_1, m_2: Massa dei due corpi.
    - r: Distanza che separa i due corpi.
    - $\vec{u_r}$: Versore di direzione pari alla retta che congiunge i due corpi. Il segno – esplicita l'attrattività della forza.
  - È possibile ricavare la costante g partendo da γ conoscendo raggio e massa della terra (che si considera tutta concentrata in un solo punto).

- *Forze d'attrito*
  - Esistono tre tipi di forze d'attrito:
    - *Attrito radente (riguarda le superfici).*
      - 

      - La forza di attrito è una forza che cerca sempre di opporsi al moto.
      - Forza di attrito statico (riguarda i corpi "fermi"): $\mathrm{F_{A_s}} = \mathrm{\mu_s N}$.

        - μ_s: Coefficiente di attrito statico, dipende dalle superfici.
    - Forza di attrito dinamico (riguarda i corpi in moto): $\vec{F_{A_d}} = -\mu_d N \vec{u_v}$.
        - μ_d: Coefficiente di attrito dinamico, dipende dalle superfici.
  - *Attrito volvente (riguarda i corpi in rotolamento).*
  - *Attrito viscoso (riguarda i corpi che si muovono in un fluido viscoso).*
    - 

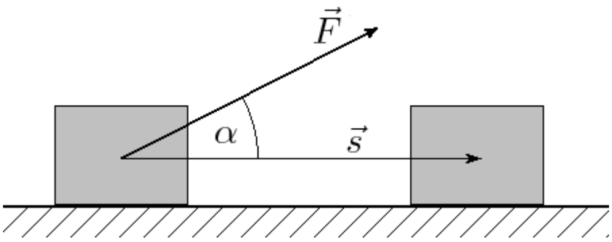
    - $\vec{F_{A_v}} = -k\vec{v}$
    - La forza di attrito non è costante ma è in funzione della velocità (e di conseguenza del tempo).
    - La forza di attrito viscoso aumenta con l'aumentare della velocità. Dato un corpo in caduta libera in un fluido viscoso esiste una velocità limite del mezzo: velocità a cui il corpo in caduta si stabilizza, il contributo dell'accelerazione e quello della forza d'attrito si bilanciano e il corpo cade con velocità costante.
- *Tensione delle funi*
  - 

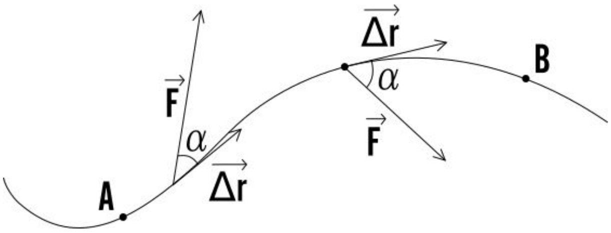
  - Fune ideale: fune di massa trascurabile, inestensibile.
  - La tensione della fune, in modulo, è la stessa su entrambi gli estremi della fune.
    - Il terzo principio della dinamica agisce su ogni infinitesimo tratto della fune "trasportando" la forza.
- *Forze elastiche*
  - 

  - Si definiscono "molle ideali" tutte quelle molle che rispettano la legge di Hooke. Tali molle sono caratterizzate da due costanti:
    - k: Coefficiente elastico proprio della molla.
    - x_0: Lunghezza della molla a riposo.
  - $\vec{F_{el}} = -k(x - x_0)\vec{u_x}$

        - Il segno meno indica che la forza elastica si oppone alla forza che ne causa la compressione o l'allungamento.
    - Il moto di una molla, vincolata su un asse, a cui è attaccato un corpo, spostato inizialmente da x_0, è un moto armonico (migliore descrizione del moto armonico in seguito).
- **Moti oscillatori**
  - L'equazione del moto armonico mette in relazione una grandezza con la sua derivata seconda.
    - $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
  - Soluzione dell'equazione differenziale omogenea
    - $x = A sin(\omega t + \varphi)$
    - $\dot{x} = A\omega\, cos(\omega t + \varphi)$
    - $\ddot{x} = -A\omega^2\, sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$
  - Nei moti armonici l'energia meccanica complessiva si preserva ma le componenti cinetica e potenziale si alternano con regime sinusoidale a meno di un dato sfasamento φ.
  - La perdita di energia dovuta a eventuali attriti porta a un moto detto "moto armonico smorzato".
  - Se il sistema viene forzato a muoversi di moto armonico (applico una forza di $F = F_0(\sin\omega t + \varphi)$) allora il corpo ha una pulsazione ω_0 (detta "frequenza di risonanza") tale che l'ampiezza (A) del moto è massima.
- **Momento angolare e momento di una forza**
  - Si definisce "momento angolare", di un corpo di massa m con velocità $\vec{v}$, rispetto al polo O, la grandezza: $\vec{L_O} = \vec{r_O} \times m\vec{v}$.
    - Dato un momento angolare, calcolato rispetto a un polo O, è possibile, eventualmente, ridefinire la grandezza in funzione di un altro polo O': $\vec{L'_O} = \vec{L_O} + \overline{OO'} \times m\vec{v}$.
  - Si definisce "momento di una forza" $\vec{F}$ rispetto al polo O, la grandezza: $\vec{M_O} = \vec{r_O} \times \vec{F}$.
    - Dato un momento di una forza, calcolato rispetto a un polo O, è possibile, eventualmente, ridefinire la grandezza in funzione di un altro polo O': $\vec{M'_O} = \vec{M_O} + \overline{OO'} \times \vec{F}$.
    - La somma dei momenti di n forze è equivalente al momento della risultante delle forze (rispetto sempre un polo comune).
  - Il momento angolare e quello delle forze sono strettamente correlati: sono uno la derivata dell'altro. In virtù di questa relazione è possibile definire un principio di conservazione.
    - $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$
      - Per semplicità nella dimostrazione è stato supposto che $O = (0,0)$ e quindi che $\vec{r_O} = \vec{r}$.

Lavoro ed energia

- **Il lavoro**
    - 

    - Data una forza $\vec{F}$, il cui punto di applicazione si muove di $\vec{s}$, il lavoro infinitesimo compiuto dalla forza è: $dL = \vec{F} \cdot d\vec{s}$. Unità di misura: Joule ($1J = Nm$, scalare).
        - Tipologie di lavoro:
            - Se $\alpha < \frac{\pi}{2}$: lavoro motore (lavoro positivo).
            - Se $\alpha > \frac{\pi}{2}$: lavoro resistente (lavoro negativo).
            - Se $\alpha = \frac{\pi}{2}$: lavoro nullo.
    - Nel sistema $\vec{u_t} - \vec{u_n}$: Scompongo $\vec{F} = F_t\vec{u_t} + F_n\vec{u_n}$ e $d\vec{s} = ds\vec{u_t}$ quindi $dL = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F_t\vec{u_t} + F_n\vec{u_n}) \cdot ds\vec{u_t} = F_t d_s$.
        - Solamente la componente tangente della forza compie lavoro.
    - 

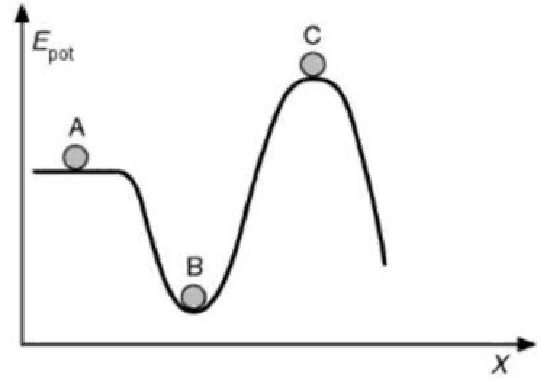
    - Volendo calcolare non più il lavoro infinitesimo ma il lavoro finito lungo una curva γ: $L_{AB}^{\gamma} = \int_{A_\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A_\gamma}^{B} (F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}) \cdot (d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}) = \int_{A_\gamma}^{B} F_x d_x + F_y d_y + F_z d_z$.
        - Il lavoro dipende anche da γ e non solo dalla distanza AB.
    - Il lavoro compiuto da più forze, applicate a uno stesso punto materiale, lungo una stessa curva γ, è la somma dei lavori delle singole forze.
    - Si definisce "potenza": $W = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Unità di misura: Watt ($1W = \frac{J}{s}$, scalare).
        - Problema inverso: $L_{AB}^{\gamma} = \int_{t_a}^{t_b} W dt$.
- **L'energia**
    - L'energia è la grandezza fisica che misura la capacità di un corpo o di un sistema fisico di compiere lavoro, a prescindere dal fatto che tale lavoro sia o possa essere effettivamente svolto.
    - *Energia cinetica*
        - Si definisce "energia cinetica" la grandezza: $E_c = \frac{1}{2}mv^2$.

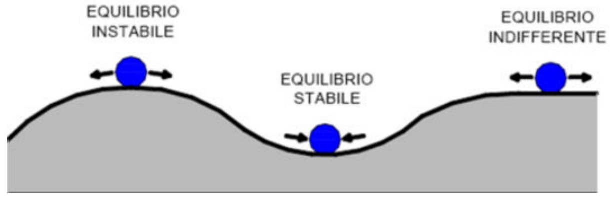
    - Teorema dell'energia cinetica (o teorema delle forze libere): il lavoro compiuto da tutte le forze che agiscono su un punto è pari alla variazione di energia cinetica.
        - Dalla definizione di lavoro: $\mathrm{dL} = \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} = (\mathrm{F_t}\vec{\mathrm{u_t}} + \mathrm{F_n}\vec{\mathrm{u_n}}) \cdot (\mathrm{ds}\vec{\mathrm{u_t}}) = \mathrm{F_t ds} = \mathrm{mads} = \mathrm{m}\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}\mathrm{ds} = \mathrm{mvdv}$. Mediante integrazione: $L_{AB}^{\gamma} = \int_{A_\gamma}^{B} dL = \int_{A_\gamma}^{B} mv\mathrm{dv} = \frac{1}{2}m\mathrm{v_b^2} - \frac{1}{2}mv_a^2$
- *Energia potenziale*
    - Si definiscono "forze conservative" tutte quelle forze il cui lavoro non dipende dal cammino. $\int_{A_{\gamma_1}}^{B} \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} = \int_{A_{\gamma_2}}^{B} \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} \;\; \forall \gamma_1, \gamma_2$.
    - Il lavoro svolto da una forza conservativa lungo una qualunque circonferenza chiusa è nullo. $\oint \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} = 0$ (circuitazione).
    - Se $\vec{\mathrm{F}}$ è conservativa esiste una funzione di stato $\mathrm{E_p(x, y, z)}$ tale che $\mathrm{L_{AB}} = -(\mathrm{E_p^B} - \mathrm{E_p^A})$ ne definisce l'"energia potenziale".
        - L'energia cinetica non è conservativa, infatti, non esiste una funzione di stato che assegni univocamente a ogni punto un potenziale (posso arrivare nei punti A e B con qualunque velocità).
    - *Energia potenziale delle forze centrali a simmetria sferica*
        - Si definisce "forza centrale a simmetria sferica" una forza che, data l'esistenza di un punto O "origine", ha un modulo che è funzione della distanza tra il generico punto P e O e ha direzione pari alla retta che congiunge il punto P con O. $\vec{\mathrm{F}} = \rho(\mathrm{r})\vec{\mathrm{u_r}}$.
        - Calcolando il lavoro di tale forza tra i punti A, B lungo una curva γ: $L_{AB}^{\gamma} = \int_{A_\gamma}^{B} \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} = \int_{A_\gamma}^{B} \rho(\mathrm{r})\vec{\mathrm{u_r}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} = \int_{A_\gamma}^{B} \rho(\dot{\mathrm{r}})\mathrm{d}\dot{\mathrm{r}}$.
        - *Energia potenziale gravitazionale*
            - La forza gravitazionale è una forza centrale a simmetria sferica quindi (la curva viene rinominata ϑ per evitare sovrapposizioni con la costante di gravitazione universale, la distanza tra i corpi viene rinominata R′ per evitare confusione con il raggio vettore): $L_{AB}^{\vartheta} = \int_{A_\vartheta}^{B} -\gamma\frac{\mathrm{m_1 m_2}}{\mathrm{R'}^2}\mathrm{dR'} = -\gamma \mathrm{m_1 m_2}\left(-\frac{1}{\mathrm{R'_B}} + \frac{1}{\mathrm{R'_A}}\right)$.
            - L'energia potenziale (che è sempre negativa) è: $\mathrm{E_p} = -\gamma\frac{\mathrm{m_1 m_2}}{\mathrm{R'}} + \mathrm{c}$ con c costante scelta a seconda del sistema di riferimento.
                - Per convenzione si assume che: $\mathrm{E_p(r \to \infty)} = 0$ quindi $\mathrm{c} = 0$.
        - *Energia potenziale gravitazionale (sulla Terra)*
            - Calcolo il lavoro compiuto da un grave, in caduta lungo una curva γ, tra i punti A e B: $L_{AB}^{\gamma} = \int_{A_\gamma}^{B} \vec{\mathrm{P}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} = \int_{A_\gamma}^{B} (-\mathrm{mg}\vec{\mathrm{u_s}}) \cdot \left(\mathrm{d_x}\vec{\mathrm{\imath}} + \mathrm{d_y}\vec{\jmath} + d_z\vec{k}\right) = \int_{A_\gamma}^{B} -\mathrm{mgd_y} = -\mathrm{mg(y_b - y_a)}$.

        - L'energia utilizzata dalla forza peso non dipende da γ ma solamente dalla distanza AB.
        - $E_p = mgh + c$ con c costante scelta a seconda del sistema di riferimento.
    - *Energia potenziale elastica*
        - Calcolo il lavoro compiuto da una molla nel suo moto: $L_{AB}^{\gamma} = \int_{A_\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{A_\gamma}^{B} -kxu_{\vec{x}} \cdot d\vec{r} = \int_{A_\gamma}^{B} -kxd_x = \frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2$.
        - L'energia utilizzata dalla forza elastica non dipende da γ ma solamente dalla distanza AB.
        - $E_p = \frac{1}{2}kx^2 + c$ con c costante scelta a seconda del sistema di riferimento.
- *Energia della forza d'attrito*
    - Attrito statico: agisce solamente quando il corpo è fermo; non essendoci nessuno spostamento la forza non può compiere alcun lavoro.
    - Attrito dinamico: Dato $\vec{F_A} = -\mu_D N u_{\vec{v}}$ allora $L_{AB}^{\gamma} = \int_{A_\gamma}^{B} \vec{F_A} \cdot d\vec{r} = \int_{A_\gamma}^{B} -\mu_D N u_{\vec{t}} \cdot ds u_{\vec{t}} = -\mu_D N \int_{A_\gamma}^{B} ds$. La forza d'attrito dinamico dipende, anche, dalla traiettoria.
        - La forza d'attrito dinamico non è una forza conservativa.
    - Attrito viscoso: Dato $\vec{F_{A_v}} = -k\vec{v}$ è immediato come $L_{AB}^{\gamma} = \int_{A_\gamma}^{B} \vec{F_{A_v}} \cdot d\vec{r} = \int_{A_\gamma}^{B} -kvu_{\vec{t}} \cdot ds u_{\vec{t}} = -k\int_{A_\gamma}^{B} vds$ dipenda anche dalla traiettoria.
        - La forza di attrito viscoso non è una forza conservativa.

- **Teorema di conservazione dell'energia meccanica**
    - Si definisce "energia meccanica", calcolata in un generico punto x, la somma tra l'energia cinetica e l'energia potenziale.
        - $E_m^x = E_c^x + E_p^x$
    - Il lavoro totale, calcolato su una curva γ tra i punti A e B, compiuto da tutte le forze non conservative è pari alla variazione di energia meccanica.
        - $L_{AB}^{\gamma} = E_m^B - E_m^A$
    - Alternativamente si può affermare che l'energia totale di un sistema isolato è un'invariante del tempo.
- **Dall'energia potenziale alle forze (conservative)**
    - Considero un corpo, inizialmente fermo, vincolato a muoversi lungo un asse; il corpo si sposta da $P(x, y, z)$ a $P(x + dx, y, z)$.
        - Calcolo il lavoro compiuto dalla forza: $dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx = -[E_p(x + dx, y, z) - E_p(x, y, z)]$.
            - Mediante un sistema a derivate parziali:
                - $F_x = -\frac{[E_p(x+dx,y,z) - E_p(x,y,z)]}{dx} = -\frac{\partial E_p}{dx}$

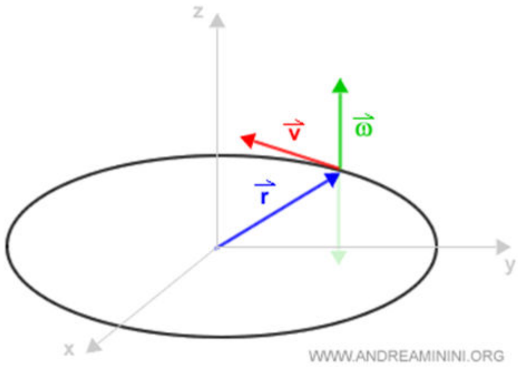
- $F_y = -\frac{[E_p(x+dx,y,z)-E_p(x,y,z)]}{dy} = -\frac{\partial E_p}{dy}$
- $F_z = -\frac{[E_p(x+dx,y,z)-E_p(x,y,z)]}{dy} = -\frac{\partial E_p}{dz}$

  - Il corpo è fermo qualora $F_x = 0$ ($v_0 = 0$, per costruzione); posso ricondurre questa condizione a $-\frac{\partial E_p}{dx} = 0$.
    - Tracciando il grafico dell'energia potenziale in funzione della posizione:
      - 

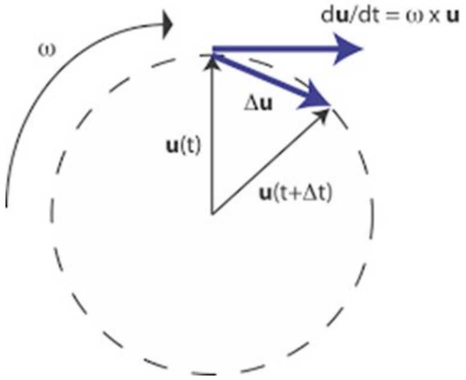
      - 

- La dimostrazione è generalizzabile mediante l'introduzione dell'operatore gradiente $\nabla: R \to R^3$ che associa a uno scalare un vettore, nello spazio tridimensionale, mediante il calcolo delle derivate parziali per ciascuna componente.
  - $\vec{F} = -\nabla E_p$

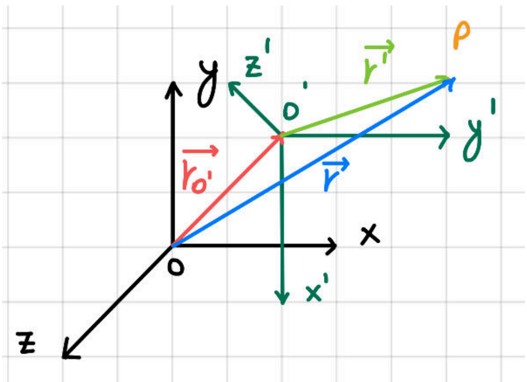
Cinematica e Dinamica nei sistemi di riferimento non inerziali

- **Sistemi di Riferimento non Inerziali**
  - Un sistema di riferimento non è inerziale se viene meno il primo principio della dinamica.
  - Considerando il comportamento di un sistema di riferimento non inerziale, da un sistema inerziale, è possibile ricondurlo, scomponendolo istante per istante, nella somma di rotazioni e traslazioni.
  - Risulta quindi utile dare natura vettoriale alle grandezze introdotte precedentemente per il caso specifico del moto circolare.
    - *Introduzione ai fondamenti matematici*
      - *Dalla velocità angolare scalare alla velocità angolare vettoriale*
        - 

        - Direzione: data dalla regola della mano destra.
        - Modulo: $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$.
        - Verso: ortogonale al vettore posizione $\vec{r}$ e alla velocità tangenziale $\vec{v}$.
        - Che relazione c'è tra la velocità angolare e la velocità? $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.
      - *Dalla accelerazione angolare scalare all'accelerazione angolare vettoriale*
        - Per definizione stessa di accelerazione angolare: $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$.
        - Che relazione c'è tra l'accelerazione angolare e l'accelerazione?
          - $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$
            - $\vec{\alpha} \times \vec{r}$ è la componente tangente dell'accelerazione.
            - $\vec{\omega} \times \vec{v}$ è la componente normale dell'accelerazione (infatti $\vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ che è proprio l'equazione dell'accelerazione normale).
      - *Formula di Poisson*
        - Dato un generico versore $\hat{u}$ esiste sempre un dato vettore $\vec{\omega}$ tale che $\frac{d\hat{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{u}$. Ciò permette di dimostrare in maniera formale che la derivata di un versore è ortogonale al versore stesso.
        - *Dimostrazione*
          - $\hat{u} \times \hat{u} = 1$ per definizione di versore.

        - $\frac{d(\hat{u}\times\hat{u})}{dt} = \frac{d}{dt}1 = 0$
        - $\frac{d(\hat{u}\times\hat{u})}{dt} = \frac{d(\hat{u})}{dt} \times \hat{u} + \hat{u} \times \frac{d(\hat{u})}{dt} = 0$
        - $2\frac{d(\hat{u})}{dt} \times \hat{u} = 0$
        - Ma ciò è possibile solamente se $\frac{d(\hat{u})}{dt}$ e $\hat{u}$ sono ortogonali.
        - 

        - $|\Delta\hat{u}| = |\hat{u}|\Delta\theta$
        - $\left|\frac{d(\hat{u})}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\hat{u}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\hat{u}|\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$
        - Trattati i moduli da sopra passo alla definizione vettoriale.

- **La Cinematica nei sistemi di riferimento non inerziali**
    - Due osservatori, uno in un sistema di riferimento inerziale e uno in un sistema di riferimento non inerziale, intendono studiare la posizione del punto materiale P.
    - 

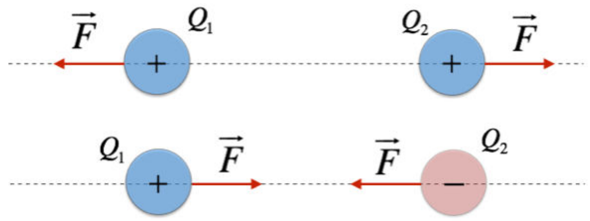
    - Sistema mobile S'; sistema inerziale S.
    - *Relazioni tra le grandezze*
        - $\vec{r} = \vec{r_{O'}} + \vec{r'}$
        - $\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v_{O'}} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$
            - La componente $\vec{v_{O'}} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$ è detta "velocità di trascinamento" ed esprime lo spostamento del sistema mobile visto nel sistema fisso.
            - Dimostrazione algebrica
                - Dato $\vec{r} = \vec{r_{O'}} + \vec{r'}$.
                - $\vec{v} = \frac{d(\vec{r})}{dt} = \frac{d(\overline{r_{O'}})}{dt} + \frac{d(\vec{r})}{dt} = \vec{v_{O'}} + \frac{d(r'_x\hat{\imath}+r'_y\hat{\jmath}+r'_z\hat{k})}{dt}$
                - $\frac{d(r'_x\hat{\imath}+r'_y\hat{\jmath}+r'_z\hat{k})}{dt} = \frac{d(r'_x)}{dt}\hat{\imath} + \frac{d(\hat{\imath})}{dt}r'_x + \frac{d(r'_y)}{dt}\hat{\jmath} + \frac{d(\hat{\jmath})}{dt}r'_y + \frac{d(r'_z)}{dt}\hat{k} + \frac{d(\hat{k})}{dt}r'_z$

- $\frac{d(r'_x)}{dt}\hat{\imath} + \frac{d(r'_y)}{dt}\hat{\jmath} + \frac{d(r'_z)}{dt}\hat{k} = \overrightarrow{v'}$
- $\frac{d(\hat{\imath})}{dt}r'_x + \frac{d(\hat{\jmath})}{dt}r'_y + \frac{d(\hat{k})}{dt}r'_z = r'_x(\vec{\omega} \times \hat{\imath}) + r'_y(\vec{\omega} \times \hat{\jmath}) + r'_z(\vec{\omega} \times \hat{k}) = \vec{\omega} \times (r'_x\hat{\imath} + r'_y\hat{\jmath} + r'_z\hat{k}) = \vec{\omega} \times \vec{r'}$
- $\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v_{O'}} + \vec{\omega} \times \vec{r'}$

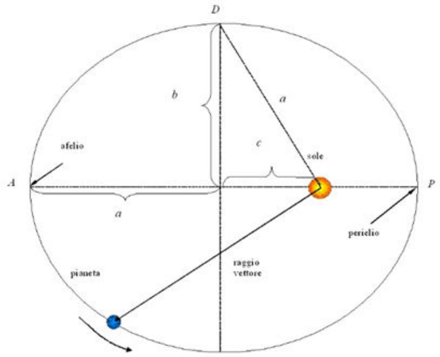
    - $\vec{a} = \vec{a'} + \vec{a'_O} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v'}$
        - $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'})$ Accelerazione centrifuga.
        - $\vec{a'_O} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'})$ Accelerazione di trascinamento.
        - $2\vec{\omega} \times \vec{v'}$ Accelerazione di Coriolis.

- *Casi particolari*
    - Due sistemi di riferimento che traslano ma non ruotano (i rispettivi versori rimangono sempre paralleli) $\vec{\omega} = 0$.
    - Il sistema di riferimento mobile ruota ma non trasla $\vec{v_{O'}} = 0$.
- Nei sistemi non inerziali non vale il primo principio della dinamica, tuttavia, è possibile ricondursi a: $F = m(\vec{a'} + \vec{a'_O} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) + 2\vec{\omega} \times \vec{v'})$.
    - Le forze di Coriolis e di trascinamento sono “forze apparenti”.

Interazioni elementari fra masse e fra cariche elettriche

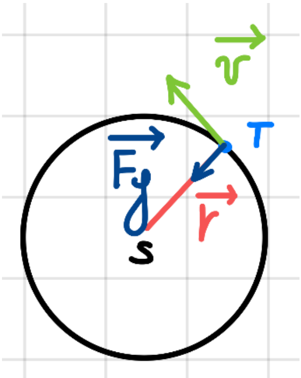
- **Forze di Natura Elettromagnetica**
  - *La forza elettrica*
    - In tutti i sistemi fisici, isolati, si ha la conservazione della "quantità di carica". In generale, la carica elettrica è quantizzata e polarizzata.
      - Le unità fondanti della carica elettrica sono il protone e l'elettrone:
        - $p = +1{,}6 \cdot 10^{-19} C$
        - $e^{-} = -1{,}6 \cdot 10^{-19} C$
    - Due punti materiali, dotati di carica elettrica, possono attrarsi (se hanno carica opposta) oppure respingersi (se hanno carica ugualmente polarizzata); la forza elettrica è descritta dalla "Legge di Coulomb".
    - 

    - $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u_r}$
      - ϵ_0: Costante dielettrica del vuoto, $\epsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$.
      - q_1, q_2: Carica dei corpi (con il loro segno).
      - r^2: Distanza tra i corpi.
      - $\vec{u_r}$: Versore con direzione la retta che unisce i due corpi.
    - La forza elettrica è una forza a simmetria centrale, dunque, è conservativa ed è possibile introdurvi la relativa energia potenziale.
  - *La forza di Lorentz*
    - Un corpo, dotato di carica, in moto in un campo magnetico risente di una forza detta "Forza di Lorentz": $\vec{F_L} = q\vec{v} \times \vec{B}$.
      - La forza di Lorentz è sempre ortogonale allo spostamento, quindi, non può compiere lavoro e, di conseguenza, non può cambiare il modulo della velocità.
- **La gravitazione**
  - *Leggi di Keplero*

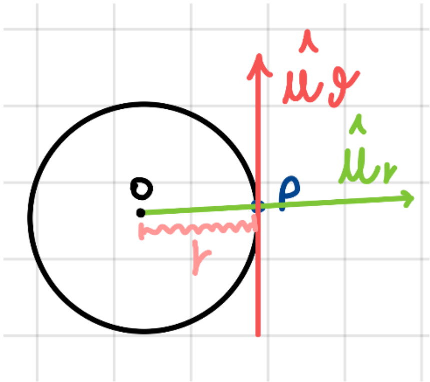


- *Prima legge di Keplero*
  - “La Terra compie un’orbita ellittica attorno al Sole di cui il Sole è uno dei due fuochi.”
- *Seconda legge di Keplero*
  - “Il raggio vettore che unisce, virtualmente, Sole e Terra spazia aree uguali in tempi uguali”
  - La velocità areolare è costante.
  - $dA = \frac{1}{2}r(rd\theta) = \frac{1}{2}r^2 d\theta$
  - $\frac{dA}{dt} = cost = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega$
- *Terza legge di Keplero*
  - “I quadrati dei tempi che i pianeti impiegano a percorrere le loro orbite sono proporzionali al cubo del semiasse maggiore.”
  - $\frac{T^2}{a^3} = k$
    - T: tempo di rotazione attorno al sole.
    - a: lunghezza dell’semiasse maggiore dell’ellisse.
    - k: costante.
      - (Se studio il moto di corpi celesti non attorno al sole, es: moto della luna e della terra, dovrò variare la costante k ma la relazione è sempre valida).

- *Newton e le leggi di Keplero*
  - Newton capì che le leggi di Keplero erano dimostrabili supponendo che la forza gravitazionale fosse la forza reggente il moto dei pianeti. Come dimostrò Newton che questa stessa forza aveva effetti così diversi qui sulla Terra e nello spazio? Sfortunatamente per lo scienziato, alla sua epoca non erano noti molti dei parametri necessari per un corretto calcolo della forza gravitazionale quali γ stesso o la massa della terra.
    - Studio il moto della Luna attorno alla Terra; se la velocità areolare è costante il moto non può che essere, approssimativamente, circolare uniforme.
      - $\hat{u}_n: \frac{\gamma m_T m_L}{r_{TL}^2} = m_L \omega_L^2 r_{TL}$
      - $\gamma m_T = \omega_L^2 r_{TL}^3$

        - $\omega_L = \frac{2\pi}{T_L}$
        - $\gamma m_T = \frac{4\pi^2}{T_L^2} R_{TL}^3$
      - Considero ora un corpo in caduta sulla Terra, l'unica forza che agisce sulla componente verticale è, presumibilmente la forza gravitazionale.
        - $\hat{u}_n: F = \frac{\gamma m_T m}{(R_T+h)^2}$
        - Nelle situazioni ordinarie sulla Terra si ha che $m \ll m_T$ e che $h \ll r_T$ quindi:
        - $F = \frac{\gamma m_T}{R_T^2} m$
        - Verifico che $\frac{\gamma m_T}{R_T^2}$ è g
        - $\frac{\gamma m_T}{R_T^2} = \frac{4\pi^2}{T_L^2} \frac{R_{TL}^3}{R_T^2} \approx 9{,}81 \frac{m}{s^2}$
        - Newton infatti conosceva questi parametri.
      - N.B. Con i medesimi calcoli è possibile dimostrare la terza legge di Newton.
    - Considerando sempre l'esempio della Luna, la Luna nella sua orbita sta effettivamente "cadendo" sulla terra; la sua orbita è data da una componente di velocità iniziale e dalla forza di gravità che curva il suo moto.
      - Esiste dunque una velocità per cui è possibile lanciare un corpo dalla superficie di un pianeta la fine di "metterlo in orbita".
- **Caratteristiche del moto dei corpi celesti**
  - Parto dall'analisi della forza gravitazionale stessa.
  - 

  - $\vec{F_G} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r^2} \hat{u}_r$
    - *Essendo una forza a simmetria centrale deve conservarsi il momento angolare.*
      - $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$
      - Ne consegue che il moto debba essere piano (per via della direzione di $\vec{L}$) e che il moto non può cambiare il suo verso (per via del verso di $\vec{L}$).
      - Per l'analisi del modulo è necessario spostarsi nel sistema di coordinate polari.



- $\vec{r} = r\hat{u}_r$
- $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{u}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + \frac{d\hat{u}_r}{dt}r = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + \frac{d\theta}{dt}r\hat{u}_\theta$
- $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m\left(\frac{dr}{dt}\hat{u}_r + \frac{d\theta}{dt}r\hat{u}_\theta\right) = mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_r \times \hat{u}_\theta$
- $|\vec{L}| = mr^2\frac{d\theta}{dt}$
- Quindi, in accordo con la seconda legge di Keplero, la velocità angolare è costante.

▪ *Essendo la forza gravitazionale una forza conservativa deve conservarsi l'energia meccanica.*
  - $E_M = cost$
  - $E_C + E_P = cost$
  - $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma m_1 m_2}{r} = cost$
  - L'energia potenziale gravitazionale è sempre negativa.
  - Se l'energia meccanica di un corpo celeste è negativa la sua orbita è chiusa (non può raggiungere l'infinito, dovrà, prima o poi, "tornare indietro" per far tornare il segno).
  - Se l'energia meccanica di un corpo celeste è positiva allora la sua orbita è aperta (può raggiungere l'infinito).

- **Problema dei due corpi**
  - Il problema dei due corpi punta a studiare il comportamento di, appunto, due corpi soggetti unicamente alle forze di interazione dei due corpi stessi.
  - Qui l'analisi viene fatta considerando il sistema Terra-Sole.
    - Considero l'energia meccanica della Terra.
      - $E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma Mm}{r}$
      - Dalla definizione di velocità in coordinate polari.
      - $\vec{v} = \left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{u}_r + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_\theta$
      - $E_M = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) - \frac{\gamma Mm}{r}$
      - $E_M = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{\gamma Mm}{r}$
    - Considero il momento angolare della Terra.
      - $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$

- $\vec{L} = m(r\hat{u}_r) \times \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)\hat{u}_r + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_\theta\right]$
- $\vec{L} = mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_r \times \hat{u}_\theta$
- $|\vec{L}| = mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$

▪ Riconsidero i componenti dell'energia meccanica.

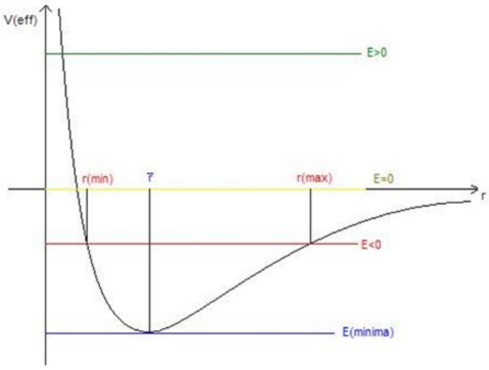
- $\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{|\vec{L}|^2}{2mr^2}$
- $E_M = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{|\vec{L}|^2}{2mr^2} - \frac{\gamma Mm}{r}$

▪ Attenzione, un termine originato dall'energia cinetica dipende solamente da r, è possibile introdurne una funzione di stato.

- $E_C^* = \frac{|\vec{L}|^2}{2mr^2}$
- $E_P = -\frac{\gamma Mm}{r}$

▪ In particolare, la somma di E_C^* e E_P è detta "energia potenziale efficace".

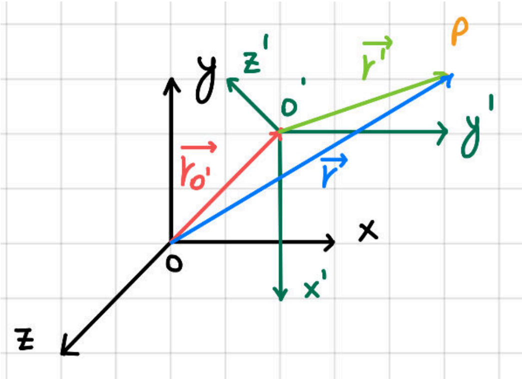
- $E_P^* = \frac{|\vec{L}|^2}{2mr^2} - \frac{\gamma Mm}{r}$

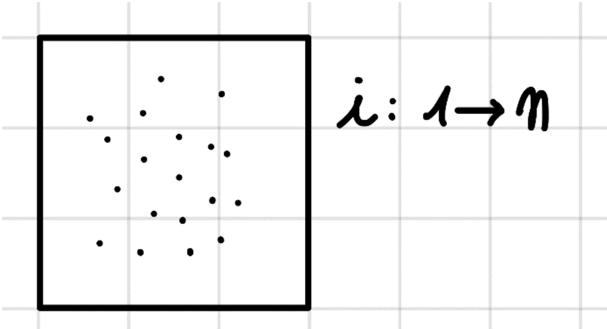


- Studiando l'andamento dell'energia potenziale efficace è possibile studiare in maniera più analitica la questione orbite aperte/chiuse.
  ▪ Nel punto di minimo della funzione la traiettoria è circolare altrimenti se $r(\min) < r < r(\max)$ l'orbita è ellittica.

- **Punti di Lagrange**
  - Orbite in cui è possibile mettere in orbita satelliti geostazionari.
    ▪ Data un'orbita e un periodo esiste solamente una sola combinazione; tuttavia, sfruttando il fatto che il satellite risente sia della forza gravitazionale della Terra sia quella del Sole, è possibile individuare altre orbite, diversa da quella occupata dalla Terra stessa, che hanno lo stesso periodo di rivoluzione della Terra attorno al Sole.

Dinamica dei sistemi di punti materiali

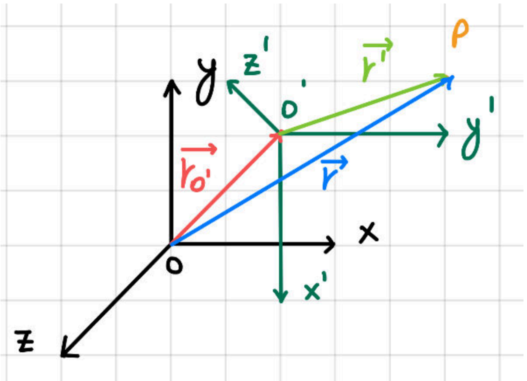
- **Introduzione ai fondamenti matematici**
  - *Momento delle forze nel caso di polo diverso dall'origine*
    - 

    - $\vec{r} = \vec{r_{O'}} + \vec{r'}$
    - $\vec{r'} = \vec{r} - \vec{r_{O'}}$
    - $\vec{L_{O'}} = m\vec{r'} \times \vec{v} = m(\vec{r} - \vec{r_{O'}}) \times \vec{v}$
    - $\frac{d\overrightarrow{L_{O'}}}{dt} = \frac{d}{dt}[(\vec{r} - \vec{r_{O'}}) \times m\vec{v}] = \frac{d(\vec{r} - \overrightarrow{r_{O'}})}{dt} \times m\vec{v} + (\vec{r} - \vec{r_{O'}}) \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} - \frac{d\overrightarrow{r_{O'}}}{dt} \times m\vec{v} + (\vec{r} + \vec{r_{O'}}) \times m\vec{a} = -\vec{v_{O'}} \times m\vec{v} + \vec{M_{O'}}$
- **Sistemi di particelle**
  - Dato un qualunque corpo non puntiforme è possibile scomporlo in n-esimi punti materiali in modo da studiare nell'infinitesimo le interazioni corpo-ambiente.
  - 

  - *Forze interne ed esterne*
    - Su ogni punto i-esimo che costituisce il corpo agiscono delle forze; la forza risultante è data da forze interne ed esterne: $\vec{F_i} = \vec{F_i^E} + \vec{F_i^I}$.
    - Deve però valere sempre il secondo principio della dinamica: $\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i^E} + \vec{F_i^I} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a_i}$.
    - Per il principio azione-reazione posso assumere $\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i^I} = 0$.
    - Posso quindi concludere che: $\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i^E} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{v_i}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{P_i}}{dt}$.
  - *Prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi*
    - $\vec{F^E} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

- La quantità di moto del sistema può variare solamente a causa delle forze esterne.

- *Centro di massa e teoremi del moto del centro di massa*
  - Dato un sistema di punti si definisce "centro di massa" il punto geometrico definito come:
    - $\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}$
      - Dove M è la massa totale del sistema.
    - $\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}(m_i \vec{r}_i) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} \vec{P}_i = \frac{\vec{P}}{M}$
    - *Primo teorema del centro di massa*
      - $\vec{P} = M\vec{v}_{CM}$
    - *Secondo teorema del centro di massa*
      - $\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(M\vec{v}_{CM})}{dt} = M\vec{a}_{CT}$

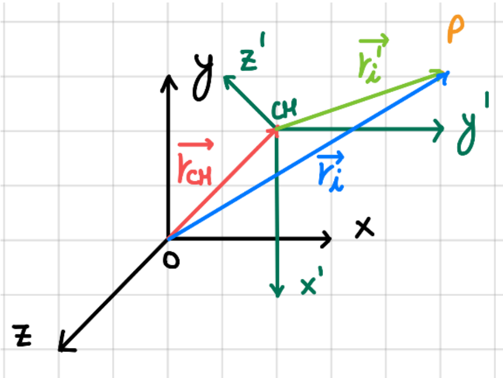
- *Calcolo del momento angolare dell'insieme dei punti rispetto ad un generico polo O*
  - 

  - Per costruzione assumo:
    - $\vec{r}_i = \vec{r}_O + \vec{r}_{iO}$
    - $\vec{r}_{iO} = \vec{r}_i - \vec{r}_O$
  - Mediante operazione di derivazione:
    - $\vec{v}_{iO} = \frac{d\vec{r}_{iO}}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_O$
  - Il momento angolare di un singolo punto i-esimo (rispetto al generico polo O):
    - $\vec{L}_{iO} = \vec{r}_{iO} \times m_i \vec{v}_i$
  - Mediante sommatoria trovo il momento angolare dell'intero sistema:
    - $\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{iO} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{iO} \times m_i \vec{v}_i$
  - Intendo calcolare la derivata del momento angolare rispetto al tempo:
    - $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{iO} \times m_i \vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}(\vec{r}_{iO} \times m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{d(\vec{r}_{iO})}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_{iO} \times \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i)\right] = \sum_{i=1}^{N}[\vec{v}_{iO} \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_{iO} \times \vec{a}_i] = \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_{iO} \times m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{iO} \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}(\vec{v}_i - \vec{v}_O) \times m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{iO} \times \left(\vec{F}_i^E + \vec{F}_i^I\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^{N} \vec{v}_O \times m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{iO} \times \vec{F}_i^E + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_{iO} \times \vec{F}_i^I$
  - Per definizione di prodotto vettoriale:
    - $\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i = 0$

- Mediante operazioni matematiche:
    - $-\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{v_O}\times m_i\vec{v_i}=\overrightarrow{v_O}\times\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v_i}=-\overrightarrow{v_O}\times M\overrightarrow{v_{CM}}$
- $\sum_{i=1}^{N}\vec{r_{iO}}\times\vec{F_i}^{I}$ è il momento della risultante delle forze esterne sull'i-esimo punto; voglio dimostrare che questo termine è nullo:
    - Scelgo due punti generici i e j le due forze si annullano per via del principio azione-reazione e con esso i loro momenti. Il calcolo è ripetibile per ogni coppia di punti.
- $\vec{M}^{E}=\sum_{i=1}^{N}\vec{r_{iO}}\times\vec{F_i}^{E}$ è detto "momento delle forze esterne".

Seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi

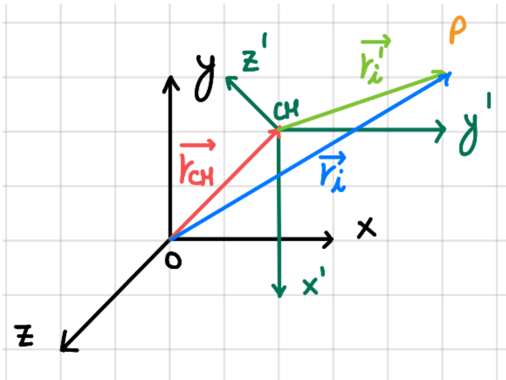
- $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}=-\vec{v_O}\times M\vec{v_{CM}}+\vec{M}^{E}$

- **Teoremi di König**
    - I teoremi di König mirano a studiare l'andamento dell'energia cinetica e del momento angolare in un sistema di riferimento qualsiasi ma soprattutto rivolgono la loro attenzione al "sistema di riferimento del centro di massa".
        - *Sistema di riferimento del centro di massa*: sistema di riferimento, usualmente non inerziale, che vede il suo centro nel centro di massa del sistema e che mantiene i propri assi sempre paralleli a quelli del sistema di riferimento inerziale. In particolar modo, il sistema del centro di massa sarà inerziale quando si muove con velocità costante ossia quando la risultante delle forze esterne è nulla.
    - *Secondo teorema di König*
        - 

        - Per costruzione:
            - $\vec{r_i}=\vec{r_{CM}}+\vec{r_i}'$
            - $\vec{v_i}=\vec{v_{CM}}+\vec{v_i}'$
        - Calcolo l'energia cinetica:
            - $E_C=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_iv_i^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(\vec{v_{CM}}+\vec{v_i}'\right)^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left(v_{CM}^2+v_i'^2+2\vec{v_{CM}}\cdot\vec{v_i'}\right)=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_iv_{CM}^2+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_iv_i'^2+\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v_{CM}}\cdot\vec{v_i'}$
                - $E_C^{CM}=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_iv_{CM}^2$ Energia cinetica del centro di massa misurata nel sistema di riferimento inerziale.
                - $E_C'=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_iv_i'^2$ Energia cinetica misurata del sistema misurata nel sistema di riferimento del centro di massa.

- $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v_{CM}} \cdot \vec{v_i'} = 0$ La velocità del centro di massa nel sistema di riferimento del centro di massa è zero per definizione.

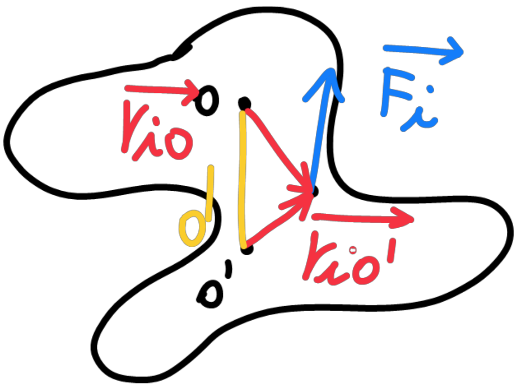
- Il secondo teorema di König afferma che l'energia cinetica di un sistema di punti materiali è la somma dell'energia cinetica del centro di massa, misurata nel sistema di riferimento inerziale, e dell'energia cinetica del sistema misurata nel sistema di riferimento del centro di massa.
  - $E_C = E_C^{CM} + E_C'$

- *Primo teorema di König*
  - 

  - Per costruzione:
    - $\vec{r_i} = \vec{r_{CM}} + \vec{r_i}'$
    - $\vec{v_i} = \vec{v_{CM}} + \vec{v_i}'$
  - Calcolo il momento angolare:
    - $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i} \times m_i \vec{v_i} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r_{CM}} + \vec{r_i}') \times m_i (\vec{v_{CM}} + \vec{v_i}') =$
    $\sum_{i=1}^{N} \vec{r_{CM}} \times m\vec{v_{CM}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r_{CM}} \times m\vec{v_i}' + \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i}' \times m\vec{v_{CM}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i}' \times m\vec{v_i'}$
      - $\vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r_i}' \times m\vec{v_i'}$ Momento angolare misurato nel sistema del centro di massa.
      - $\vec{L_{CM}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r_{CM}} \times m\vec{v_{CM}}$ Momento angolare del centro di massa misurato nel sistema inerziale
      - $\sum_{i=1}^{N} \vec{r_{CM}} \times m\vec{v_i}' = 0$ L'origine del sistema del centro di massa è ferma, se vista nel sistema non inerziale.
      - $\sum_{i=1}^{N} \vec{r_i}' \times m\vec{v_{CM}} = 0$ Analogo a sopra.
  - Il primo teorema di König afferma che il momento angolare di un sistema di punti materiali è la somma del momento angolare del centro di massa, misurata nel sistema di riferimento inerziale, e del momento angolare misurato nel sistema di riferimento del centro di massa.
    - $\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L_{CM}}$

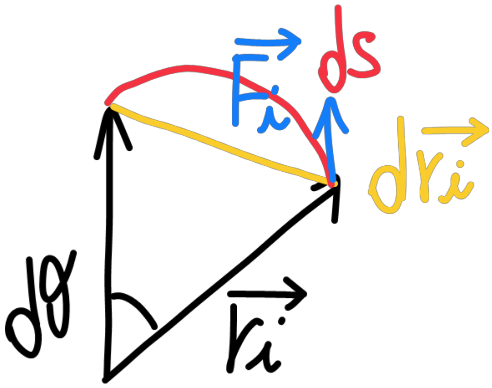
Elementi di Dinamica del corpo rigido

- **Definizione di corpo rigido**
  - Un sistema di punti materiali è conservativo se tutte le forze, interne o esterne, che compiono lavoro, sono conservative. Nel caso più generale, non è detto che un sistema di punti materiali sia conservativo.
  - *Corpo rigido*: sistema di punti materiali in cui la distanza mutua tra due punti qualsiasi rimane sempre costante. In un corpo rigido tutte le forze interne non compiono lavoro (non c'è spostamento…) quindi un corpo rigido è conservativo se sono conservative le forze, che compiono lavoro, esterne.
- **Il corpo rigido e le leggi cardinali della meccanica**
  - I corpi rigidi obbediscono alle due leggi cardinali della meccanica:
    - $\vec{F_{tot}^{est}} = \frac{d}{dt}\vec{P_{tot}}$;
    - $\vec{M_{tot}^{est}} = \frac{d}{dt}\vec{L_{tot}}$.
  - Come conseguenza di ciò il corpo rigido ha solo 6 gradi di libertà: 3 riconducibili alla traslazione del corpo rigido e 3 riconducibili alla rotazione del corpo rigido.
  - Potendo subire rototraslazioni, la velocità del corpo rigido è, istante per istante, uguale alla velocità di trascinamento: $\vec{v} = \vec{v_O'} + \vec{\omega} \times \vec{r_i}$ dove il primo termine è legato alla traslazione e il secondo alla rotazione.
    - Siccome per un corpo rigido il centro di massa non può cambiare posso considerare $\vec{r_i} = \vec{r_{CM}}$.
    - Per eseguire gli esercizi di statica del corpo rigido è necessario imporre nulle sia le condizioni per la traslazione sia le condizioni per la rotazione.
    - Se il corpo rigido è in quiete la scelta del polo su cui effettuare i calcoli è irrilevante; ergo si sceglie un polo adatto alla soluzione del problema che permette di "semplificare" il maggior numero possibile di forze.
  - Il corpo rigido possiede un'inerzia non solo di traslazione ma anche di rotazione; tale "momento d'inerzia" è calcolabile come: $I_Z = \int r_i^2 dm$ integrale che può essere semplificato usando una densità appropriata.
    - L'energia cinetica del corpo rigido in rotazione è: $E_C = \frac{1}{2}\omega^2 I_Z$.
- **Condizioni statiche e non-statiche**
  - *Condizioni statiche*
    - Nel caso si verifichino le condizioni di staticità del corpo rigido la scelta del polo è ininfluente.

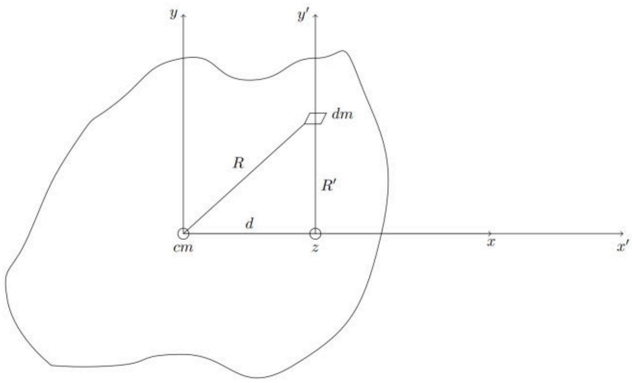


    -
    - $\vec{r_{io}} = \vec{d} + \vec{r_{io}}$

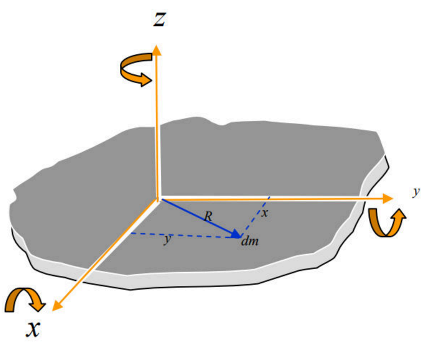
- $\overrightarrow{M_o^{(e)}} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{r_{io}} \times \overrightarrow{F_i^{(e)}}$
- $\overrightarrow{M_o^{(e)}} - \overrightarrow{M_o^{(e)}} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{r_{io}} \times \overrightarrow{F_i^{(e)}} - \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{r_{io}} \times \overrightarrow{F_i^{(e)}} = \vec{d} \times \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i^{(e)}}$
- L'ultimo termine, siccome siamo in condizioni di equilibrio, si annulla; ne consegue che il momento non dipende dal polo.

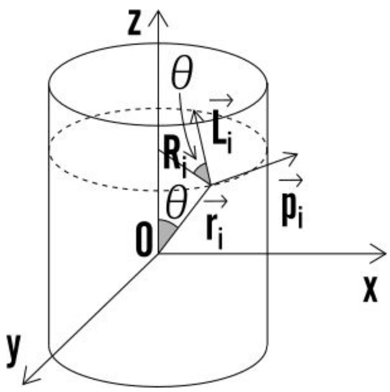
- *Condizioni non-statiche*
  - 

  - Se un corpo rigido ruota e la sua velocità angolare varia significa che è stato compiuto un lavoro sul corpo; l'esistenza di un'accelerazione angolare implica inoltre che esiste un momento delle forze non nullo.
  - $dL_i = \overrightarrow{F_i^{(e)}} \cdot d\vec{r_i}$
  - $dL = \sum_{i=1}^{N} dL_i = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i^{(e)}} \cdot d\vec{r_i} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_i^{(e)}} \cdot ds_i \overrightarrow{u_T} = \sum_{i=1}^{N} F_{i_T}^{(e)} r_i d\theta = \sum_{i=1}^{N} = M_z^{(e)} d\theta$

- **Teorema di Huygens-Steiner**
  - Il momento d'inerzia rispetto ad un asse a, parallelo ad un altro c passante per il centro di massa, si ottiene sommando al momento di inerzia iniziale rispetto a c il prodotto tra la massa del corpo stesso e il quadrato della distanza tra gli assi c ed a.
    - $I_z = I_{CM} + md^2$
  - *Dimostrazione del teorema*
    - 

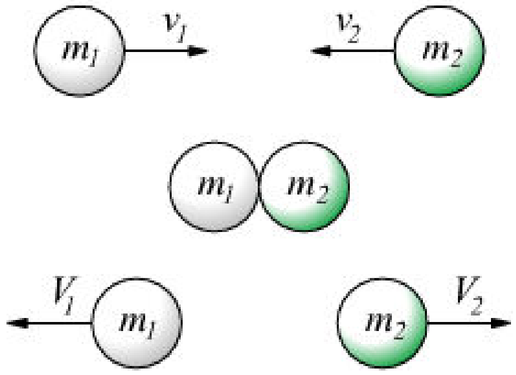
    - Si consideri un sistema di rifermento cartesiano xy con l'origine nel centro di massa e un altro sistema di riferimento traslato di una certa quantità lungo l'asse x tale che: $y = y'$ e $x = x' - d$.
    - Si consideri un elemento infinitesimo dm il cui momento d'inerzia, rispetto al centro d massa è $dI = R^2 dm$. Mediante integrazione, e conoscendo che $R^2 = x^2 + y^2$ per il teorema di Pitagora, $I_{CM} = \int (x^2 + y^2) dm$.
    - Analogamente, il momento d'inerzia rispetto al nuovo sistema di rifermento sarà, considerando $R'^2 = x'^2 + y'^2$, $I_z = \int (x'^2 + y'^2) dm = \int ((x + d)^2 + y^2) dm = \int (x^2 + d^2 + 2xd + y^2) dm$.

        - Mediante le proprietà degli integrali: $I_Z = \int (x^2 + d^2 + 2xd + y^2)dm = \int (x^2 + y^2)dm + d^2 \int dm + 2d \int xdm$.
            - $I_{CM} = \int (x^2 + y^2)dm$
            - $d^2 \int dm = md^2$
            - $2d \int xdm = 0$; l'ascissa del centro di massa, nel sistema del centro di massa, è sempre 0.
    - Il teorema di Huygens-Steiner permette anche di dimostrare il secondo teorema di König.
- **Teorema dell'asse perpendicolare**
    - Nel caso di corpi piani, la somma dei momenti d'inerzia calcolati rispetto a due assi, perpendicolari fra di loro e appartenenti al piano del corpo, è uguale al momento di inerzia calcolato rispetto ad un asse perpendicolare passante per il punto di intersezione dei due assi.
    - $I_X + I_Y = I_Z$
    - *Dimostrazione del teorema*
        - 

        - $I_X = \sum_{i=1}^{N} m_i y_i^2$
        - $I_Y = \sum_{i=1}^{N} m_i x_i^2$
        - $I_Z = \sum_{i=1}^{N} m_i z_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i (x_i + y_i)^2$
- **Momento angolare di un corpo rigido in rotazione**
    - 

    - Considero un cilindro che ruota attorno al proprio asse di simmetria e prendo un punto P sulla sua superficie. Scelgo un sistema di riferimento tridimensionale in cui l'asse z coincide con l'asse di rotazione. L'origine O sarà il polo su cui verrà calcolato il momento angolare.
    - Considero il momento angolare del punto P.
    - $\vec{L_i} = \vec{r_i} \times \vec{p_i}$
    - $L_i = r_i p_i \sin(\alpha)$
        - α è l'angolo tra i vettori $\vec{r_i}$ e $\vec{p_i}$; i due vettori, tuttavia, sono perpendicolari tra di loro.
    - $L_i = r_i p_i$
    - $L_i = r_i m_i v_i$

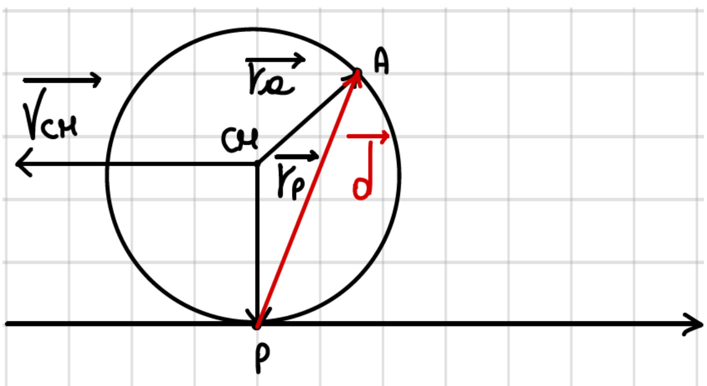
        - La quantità di moto è il prodotto tra massa e velocità.
    - $L_i = r_i m_i R_i \omega$
        - Il punto P sta ruotando su una circonferenza.
    - Il momento angolare è un vettore perpendicolare al piano individuato da $\vec{r_i}$ e $\vec{p_i}$; tale vettore ha una componente radiale (lungo la direzione di R) e una componente assiale (lungo l'asse di rotazione z).
    - $L_{i_z} = r_i m_i R_i \omega \sin(\theta) = m_i R_i^2 \omega$
        - Il prodotto $r_i \sin(\theta)$ è R_i.
    - $L_{i_z} = I_{i_z} \omega$
        - Per definizione di momento d'inerzia.
    - $L_z = I_z \omega$
        - Mediante integrazione su tutti gli N punti P che costituiscono il cilindro.
    - Se il corpo presenta una simmetria assiale l'intero momento angolare del corpo è calcolabile con la forma di cui sopra; ciò è dovuto al fatto che la componente radiale del generico punto P verrà controbilanciato da quella di un altro punto P' che risulta diametralmente opposto a P.
        - Per sostituzione nella seconda equazione cardinale della dinamica: $\vec{M_{tot}^{est}} = \frac{d}{dt} I_z \vec{\omega} = I_z \vec{\alpha}$. α è l'accelerazione angolare.
    - Nel caso generale di corpi rigidi privi di un asse di simmetria assiale, la relazione per il momento angolare assale sarà valida come equazione vettoriale $\vec{L_z} = I\vec{\omega}$ ma tale grandezza non rappresenta il momento angolare totale.
- **Definizione di densità**
    - Non è sempre possibile trattare corpi estesi come sistemi di punti materiali posso tuttavia scomporlo in tanti elementi infinitesimi di volume dV e massa dm; considerando nuovamente il centro di massa:
        - $\vec{r_{CM}} = \frac{\int r dm}{\int dm}$
        - È tuttavia difficile integrare sulla massa.
    - Si definisce "densità" il rapporto:
        - $\rho = \frac{dm}{dV}$
        - $\vec{r_{CM}} = \frac{\int r\rho dV}{\int \rho dV}$
        - Se ρ è costante si dice che il corpo è omogeneo. $\vec{r_{CM}} = \frac{\int r dV}{\int dV} = \frac{\int r dV}{V}$.
    - Esistono altri tipi di densità:
        - $\rho = \frac{dm}{dV}$ Densità volumica.
        - $\sigma = \frac{dm}{dS}$ Densità superficiale.
        - $\lambda = \frac{dm}{dl}$ Densità lineare.

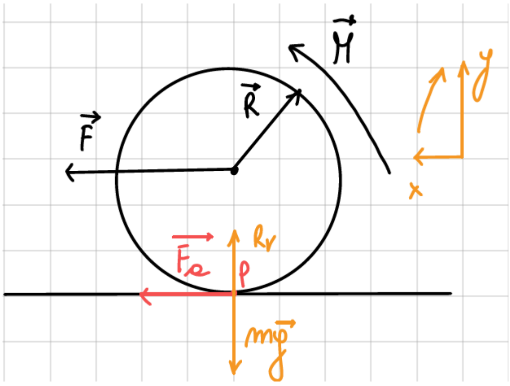
- **Urti**
  - Si definisce evento impulsivo, o "urto", un'interazione che coinvolge due o più corpi mediante forze di tipo impulsivo.
    - Una forza si dice impulsiva se è di elevata intensità ma di durata molto breve (rispetto alle alte grandezze coinvolte nel problema).
- **Impulso di una forza**
  - Definizione di impulso: $\vec{I_{t_2,t_1}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$
  - Teorema dell'impulso: l'impulso di una forza equivale alla variazione di quantità di moto.
    - $\vec{I_{t_2,t_1}} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} m\vec{a} dt = \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} m d\vec{v} = m(\vec{v_2} - \vec{v_1}) = \vec{P_2} - \vec{P_1}$
- **Studio degli urti**
  - Siano date due masse m_1 e m_2, che urtano con delle velocità iniziali rispettivamente v_1 e v_2, dopo l'urto riprenderanno il moto con velocità V_1 e V_2.
  - Considero i due corpi m_1 e m_2 come un sistema isolato, la forza impulsiva non potrà che essere una forza interna.
  - 

  - Considerazioni sulle forze esterne:
    - Se $F^{\vec{E}} = 0$ allora $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$ quindi $\vec{P}$ è costante.
      - $\mathrm{m_1 \vec{v_1}} + m_2\vec{v_2} = m_1\vec{V_1} + m_2\vec{V_2}$
        - Equazione vettoriale, una equazione 6 incognite (3 per vettore).
    - Se $F^{\vec{E}} \neq 0$ allora è necessario valutare se queste possano essere trascurabili o meno.
  - Considerazioni energetiche sugli urti:
    - $\Delta E_C = L^I + L^E = L_C^I + L_{NC}^I + L_C^E + L_{NC}^E$
      - L_C^I: lavoro forze conservative interne. $L_C^I = 0$ in quanto dipende dalla somma di funzioni di stato: nell'istante in cui le due masse si incontrano non c'è alcuno spostamento.
      - L_{NC}^I: lavoro forze non conservative interne.
      - L_C^E: lavoro forze conservative esterne. $L_C^E = 0$ per ipotesi del problema.
      - L_{NC}^E: lavoro forze non conservative esterne. $L_{NC}^E = 0$ per ipotesi del problema.
    - Urto elastico: si conserva l'energia cinetica.

- Urto anelastico: non si conserva l'energia cinetica.
  - Urto completamente anelastico: urto in cui si ha la massima perdita di energia.

- **Urti monodimensionali**
  - Considerando gli urti monodimensionali, le considerazioni sulle forze esterne e quelle energetiche forniscono un numero di equazioni tali da poter fornire un sistema lineare non impossibile.
  - Caso 1: urto elastico senza forze esterne.
    - $\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 \end{cases}$
    - $v_1 - v_2 = V_2 - V_1 = -(V_1 - V_2)$
      - La velocità relativa delle due masse è invariata tuttavia varia il verso.
    - $V_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2) v_1}{m_1 + m_2}$
    - $V_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1) v_2}{m_1 + m_2}$
    - Caso 1.1: $m_1 = m_2$
      - $V_1 = v_2$
      - $V_2 = v_1$
    - Caso 1.2: $v_2 = 0$
      - $V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_2$
      - $V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$
      - Caso 1.2.2: $m_1 \gg m_2$ e $v_2 = 0$
        - $V_1 = v_2$
        - $V_2 = 2v_1$
      - Caso 1.2.3: $m_2 \gg m_1$ e $v_2 = 0$
        - $V_1 = -v_1$
          - Rimbalza!
        - $V_2 = 0$

- **Rotolamento**
  - Considero un corpo che rotola senza strisciare, voglio trovare la velocità di un generico punto sulla superficie:
    - 

        - $\vec{V_A} = \vec{V_{CM}} + \vec{\omega} \times \vec{r_A}$
        - $\vec{V_P} = \vec{V_{CM}} + \vec{\omega} \times \vec{r_P}$
        - Se $\vec{V_P} = 0$ si parla di rotazione pura: c'è un solo punto di contatto con il terreno che quindi può essere considerato istantaneamente fermo.
        - $\begin{cases} \vec{V_A} = \vec{V_{CM}} + \vec{\omega} \times \vec{r_A} \\ \vec{V_{CM}} = -\vec{\omega} \times \vec{r_P} \end{cases}$
        - $\vec{V_A} = -\vec{\omega} \times \vec{r_P} + \vec{\omega} \times \vec{r_A} = -\vec{\omega}(\vec{r_P} - \vec{r_A}) = -\vec{\omega} \times \vec{d}$
        - È possibile, inoltre, verificare come la velocità del centro di massa:
            - $|\vec{V_{CM}}| = |-\vec{\omega} \times \vec{r_P}| = \omega r_P = \frac{d\theta}{dt} r_P = \frac{dS}{dt}$
    - *Nel caso dei corpi che rotolano il momento necessario è dato dalla forza d'attrito statico (il punto di contatto è istantaneamente fermo)!*
    - Considero ora un altro corpo che rotola senza striare, tale corpo è trainato da una forza trainante e messo in rotazione da un motore.
        - 

        - $\begin{cases} \vec{F^{est}} = ma_{CM} \\ \vec{M^{est}} = I\alpha \end{cases}$
        - $\begin{cases} F + F_a = ma_{CM} \\ F_a R - m = I\alpha \end{cases}$
        - $\begin{cases} a_{CM} = \frac{F+F_a}{m} \\ F_a R - M = \frac{I a_{CM}}{R} \end{cases}$
        - $\alpha = -\frac{a_{CM}}{R}$
        - $F_a R - M = -\frac{I}{R} \frac{F+F_a}{m}$
        - $F_a = \frac{mMR - IF}{mR^2 + I}$
        - $a_{CM} = \frac{F+F_a}{m} = \frac{FR^2 + MR}{I + MR^2}$
        - Rifacendo lo stesso problema nel caso di corpo senza motore ma comunque trainato da una forza:
            - $F_a = -\frac{FI}{I+mR^2}$
            - Il segno negativo della forza d'attrito sta a indicare che si oppone alla forza F per dare origine al momento.
            - $a_{CM} = \frac{FR^2}{I+mR^2}$

- Rifacendo lo stesso problema nel caso di corpo non trainato da nessuna forza ma messo in rotazione da un motore:
  - È necessario imporre che: $F_a = \frac{mMR}{mR^2+I} > 0$ in modo che la forza d'attrito sia sufficiente a dare il necessario "grip" al motore.
  - $a_{CM} = \frac{MR}{mR^2+I}$

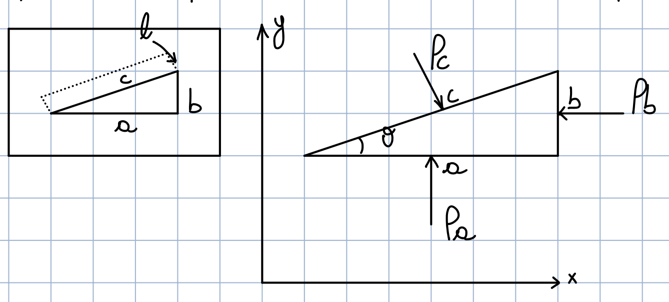
- Se la forza d'attrito non compie lavoro cosa dissipa l'energia cinetica del corpo? La risposta è la reazione vincolare!
- Nei casi ideali la reazione vincolare non esercita un momento: forma, considerando il singolo punto di contatto, rispetto a un asse passante per il centro di massa, un angolo nullo; tuttavia, nei casi reali il corpo ha una superfice di contatto (e non un punto solo) e quindi può avere un angolo tale da esercitare un momento non nullo (momento di attrito volvente) che ferma il corpo.

Meccanica dei fluidi

- Con "fluido" si intendono sia i liquidi sia i gas.
  - Liquido ideale: - non si oppone agli "sforzi di taglio".
  - Gas ideale: - rarefatto;
    - privo di interazioni molecolari;
    - tutti gli urti tra le particelle sono elastici.
- Densità volumetrica del fluido: $\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$
- Pressione: PRESSIONE MEDIA $\rightarrow P = \frac{F_n}{A}$ $\rightarrow$ FORZA NORMALE ALLA SUPERFICIE; $\rightarrow$ SUPERFICIE

  PRESSIONE $\rightarrow P = \lim_{A \to 0} \frac{F_n}{A}$

  - L'unità di misura pressione è il Pascal (N/m).
  - La pressione è quella grandezza che si misura con il manometro.
  - Idrostatica
    - Dato un fluido considero al suo interno un solido ideale (considero e tratto quindi una porzione di fluido come se fosse un solido), un prisma retto.



$S_a = al \qquad S_b = bl \qquad S_c = cl$

$$\begin{cases} P_c S_c \sin(\theta) \quad P_b S_b = 0 \\ P_a S_a \quad P_c S_c \cos(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_b S_b = P_c S_c \sin(\theta) \\ P_a S_a = P_c S_c \cos(\theta) \end{cases}$$

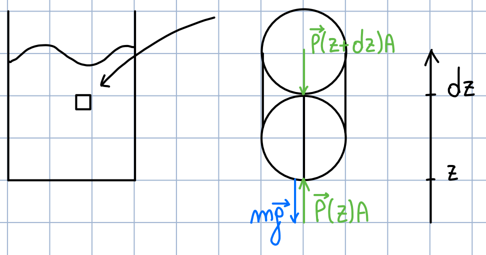
$$\begin{cases} \frac{P_b}{P_c} = \frac{Sc}{Sb} \sin(\theta) \\ \frac{P_a}{P_c} = \frac{Sc}{S_a} \cos(\theta) \end{cases}$$

$$\frac{P_b}{P_c} = \frac{cl}{bl}\sin(\theta) = \frac{b}{b} = 1$$

$$P_b = P_c$$

Si puó ripetere il procedimento e dimostrare che: $P_a = P_c = P_b$; la pressione é una quantitá isotropa.

Cosa succede in presenza di forze esterne?



$$mg + P(z)A \quad P(z+dz)A = 0$$

$$-\rho Agdz + P(z)A - P(z+dz)A = 0$$

mediante lo sviluppo in serie di Taylor

$$P(z+dz) \approx P(z) + \frac{dP}{dt}dz$$

$$-\rho Agdz + P(z)A - \left(P(z) - \frac{dP}{dt}dz\right)A = 0$$

$$-\rho Agdz + \frac{dP}{dt}dzA = 0$$

$\frac{dP}{dz} = -\rho g$ equazione della statica dei fluidi

Nei casi reali non si lavora con l'operatore derivata ma con l'operatore gradiente; l'equazione della statica dei fluidi, nel caso piú generale di forze diverse dalla forza peso, diventa $\nabla P = \rho\vec{H}$. Se le forze che agiscono sono conservative posso esprimere la risultante come funzione dell'energia potenziale $\nabla P = -\rho\nabla\phi$ ne consegue che tutti i punti alla stessa pressione sono equipotenziali.

Cosa succede in caso di densitá costante?

$$dP = \quad \rho gdz$$

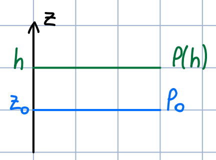
$$\int_{P_1}^{P_2} dP = \int_{z_1}^{z_2} -\rho gdz$$

$P_2 - P_1 = -\rho g\left(z_2 - z_1\right)$ → Questa formulazione é anche nota come "Legge di Stevino"

- Principio di Pascal: "Se in qualche punto del fluido viene aumentata la pressione questo aumento si propaga linearmente in tutti i punti del fluido"
- Considero un gas, cosa succede se l'unica grandezza costante é la temperatura?

$P(z) = ?$

$\rho(z) = ?$



$T = costante$ quindi considerando $PV = nRT$, $PV = costante$;

$\rho = \frac{m}{V}$

$V = \frac{m}{\rho}$

per sostituzione nelle formule precedenti $\frac{P}{\rho} = costante$ da cui posso concludere che :

$\frac{P}{\rho} = \frac{P_0}{\rho_0}$

$\rho = \frac{\rho_0}{P_0} P$

$\frac{dP}{dz} = \rho g$ equazione fondamentale dell'idrostatica

$\frac{dP}{dz} = \frac{\rho_0}{P_0} P g$

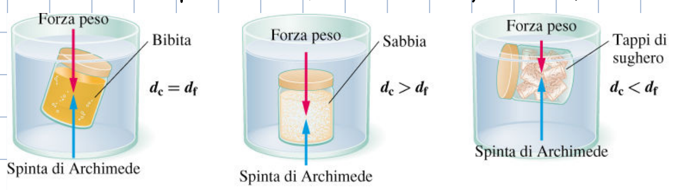
$\int_{P_0}^{P} \frac{1}{P} dP = \int_0^h \left(\frac{\rho_0 g}{P_0}\right) dz$

$\ln(P) \quad \ln(P_0) = \left(\frac{\rho_0 g}{P_0}\right) h$

$P = P_0 e^{\frac{\rho_0}{P_0} gh}$

$\rho = \rho_0 e^{\frac{\rho_0}{P_0} gh}$

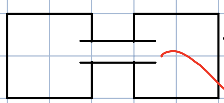
- Legge di Archimede: "Un corpo immerso in un fluido subisce una spinta dal basso verso l'alto pari al peso del liquido spostato"



a Corpo sospeso nel fluido
b Corpo a fondo nel fluido
c Corpo che galleggia nel fluido

Termodinamica

- La termodinamica studia la variazione delle grandezze termodinamiche (pressione, temperatura e volume) nei sistemi.
  - Tipologie di sistemi:
    - sistemi aperti: scambiano massa ed energia con l'ambiente;
    - sistemi chiusi: scambiano solamente energia con l'ambiente;
    - sistemi isolati: non scambiano nulla con lo esterno.
  - Tipologie di grandezze:
    - grandezze intensive: definite localmente nel sistema (temperatura, pressione...);
    - grandezze estensive: definite in maniera universale (massa, lunghezza...)
  - I sistemi termodinamici vengono studiati come in "stato di equilibrio" uno stato in cui esiste una funzione di stato che ben approssima il comportamento del sistema.
    - Le trasformazioni termodinamiche vengono viste come una successione di infinitesimi stati di equilibrio.
  - Due sistemi termodinamici scambiano calore fino al raggiungimento di una temperatura di equilibrio.



→ Parete adiabatica: isolante.

Via termica: consente il passaggio di calore.

  - Temperatura: la temperatura é quella grandezza che si misura con il termometro.
    - Il termometro é uno strumento tale che una sua proprietá varia in maniera lineare in risposta alla variazione di temperatura.

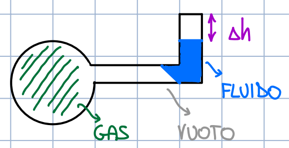
- Il termometro è calibrato, solitamente, rispetto alla scala Celsius.
  - Scala Celsius:
    - scala centigrada
    - 0°C : temperatura di fusione del ghiaccio/punto triplo dell'acqua
      ↳ - Condizioni di temperatura e pressione tale che i 3 stati dell'acqua esistono simultaneamente
    - 100°C: temperatura di ebollizione dell'acqua
  - Scala Kelvin:
    - scala centigrada
    - 0°K : temperatura assoluta (minima temperatura possibile)

KELVIN

- $T = t + 273,16k$

CELSIUS

- Lo zero assoluto è collegato alla temperatura assoluta termodinamica.



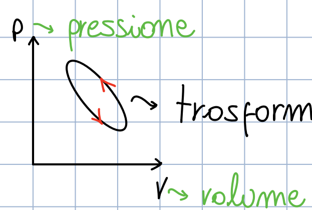
→ La temperatura del gas influenza il dislivello Δh.

$$T = \left(273,16K + \frac{P}{P_3}\right)$$

PRESSIONE DEL GAS

PRESSIONE PUNTO TRIPLO DELLA SOSTANZA

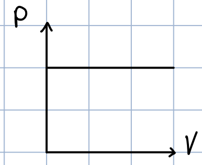
- Trasformazioni termodinamiche: le trasformazioni termodinamiche possono essere analizzate nel "piano di Clapeiron"



↝ trasformazione ciclica

- Trasformazioni in base al comportamento:
  - Trasformazioni quasi-statiche: trasformazione che avviene per variazioni infinitesime dello stato del sistema;
  - Trasformazioni non quasi-statiche : opposto ↑

- Trasformazioni in base alle grandezze del sistema:
  - Trasformazioni isobare: pressione costante

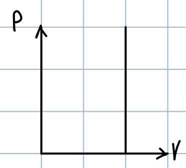


Legge di Gay-Lussac

$V = V_0(1+\alpha t)$

misurato a 0°C

  - Trasformazioni isocore: volume costante



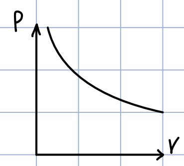
Legge di Gay-Lussac

$P = P_0(1+\beta t)$

misurata a 0°C

Per considerazioni sperimentali è noto che: $\alpha = \beta = \frac{1}{273,16K}$

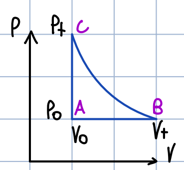
  - Trasformazioni isoterme: temperatura costante



Legge di Boyle

$PV = \text{costante}$

- Secondo la legge di Avogadro: $1\ mole = 6,022 \times 10^{23}\ molecole$; allo stesso modo, volumi uguali di gas diversi (a parità di temperatura e pressione) avranno lo stesso numero di particelle
  - Si definisce "volume molare" V_m un volume che contiene una mole di gas.
- Legge di stato dei gas ideali



AB $\quad V_t = V_0(1+\alpha t)$

$P_0 V_t = P_0 V_0 \alpha t$

BC $\quad P_0 V_T = PV$

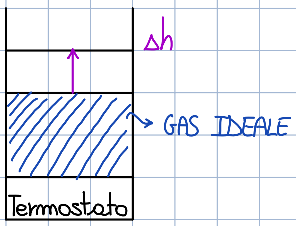
$PV = P_0 V_0 \alpha T$

$V_m = \frac{V_0}{n}$ $\qquad R = 8,31 J/molK$: costante dei gas ideali

$PV = P_o n V_m \alpha T = n\boxed{P_0 V_m \alpha T} = nRT$

  - Legge di Dalton: la pressione totale di una miscela di gas perfetti è la somma delle n-esime pressioni parziali
- Lavoro termodinamico
  - Considero un contenitore riscaldato a temperatura costante; al suo interno

si trova un gas perfetto che, espandendosi, spinge il pistone idraulico collegato al contenitore.



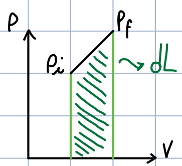
$$\Delta E_c = L = 0$$

$$dL + \overrightarrow{F_e} \cdot dh = 0$$

$$dL = \overrightarrow{F_e} \cdot dh$$

$$dL = P_e A dh = P_e dV$$

- In situazioni di quasi-staticità $P \simeq P_e \rightarrow dL = PdV$

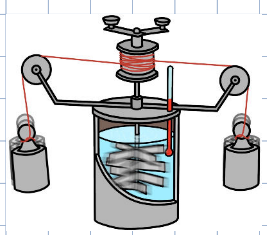


$$L = \int_{V_i}^{V_f} dL$$

- Se $L > 0$ il sistema compie lavoro sull'ambiente; (macchina termica)
- Se $L < 0$ l'ambiente compie lavoro sul sistema. (macchina frigorifera)

- Lavoro di varie trasformazioni
  - Isobara : $L = P\left(V_b - V_a\right)$
  - Isocora : $L = 0$
  - Isoterma : $L = nRT \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)$
  - Ciclica : se il verso della freccia è antiorario il lavoro è negativo, se orario il lavoro è positivo.

- Calore ed energia
- Joul fu il primo ad accorgersi dell'equivalenza lavoro-energia.



Facendo ruotare il mulinello aumenta la temperatura nel termos a causa dell'attrito viscoso tra l'acqua e gli elementi rotanti.

Mulinello di Joule

- Il lavoro compiuto da una trasformazione adiabatica non dipende dalla trasformazione adiabatica in questione ma solamente dagli stati iniziali e finali.

- Chiamo con U l'"energia interna" del gas ideale, posso quindi affermare che: $L^{AD} = \quad (U_f \quad U_i)$.

- 1° Principio della termodinamica

  ↗ calore scambiato

$\Delta U = Q \quad L$

in forma differenziale può essere riscritto come:

↗ non sono differenziali esatti

$\partial Q - \partial L = dU$

  - Nelle trasformazioni cicliche $\Delta U = 0 \to \partial Q = \partial L \to Q = L$.
  - Nelle trasformazioni isocore $\Delta U = Q$.
  - Nelle trasformazioni isobare:

$$Q_p = \Delta U + L = \Delta U + P\Delta V = (U_t \quad U_i) + p\,(V_f \quad V_i)$$

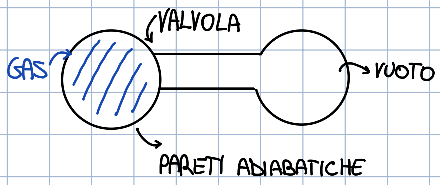
$$Q_p = (U_f + PV_f) \quad (U_i + PV_i) = H_f \quad Hi = \Delta H$$

$H = U + PV$ é detta entalpia.

- Calorimetria: studio dei passaggi di calore
  - Considerazioni sul segno del calore.
    - Calore positivo: viene assorbito dal sistema;
    - Calore negativo: viene ceduto dal sistema.
  - Deve esistere una relazione tra temperatura e quantità di calore scambiato:
    - C: capacità termica (inerzia del sistema a cambiare temperatura

      $C = \dfrac{\partial Q}{\partial T}$ quando viene somministrato calore).
    - c: calore specifico $c = \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial Q}{\partial T}$
    - c_n: calore molare $c_n = \dfrac{1}{n}\dfrac{\partial Q}{\partial T}$
  - Dati due sistemi S_1 e S_2 che si stanno scambiando calore, il calore ceduto da un sistema è uguale a quello assorbito dall'altro sistema e viceversa $Q_1 = \quad Q_2$.
  - Si possono definire inoltre:

- Capacitá termica a volume costante: $C_v = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V$.
- Capacitá termica a pressione costante: $C_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P$.
- Calore latente: $Q = m\lambda$ calore che é necessario somministrare a un corpo per farlo cambiare di fase.
- É possibile utilizzare le regole della calorimetria per verificare le proprietá dei gas perfetti: esperimento di libera espansione



A un certo punto viene aperta la valvola e il gas é libero di espandersi; si osserva che:

IL GAS SI ESPANDE NEL VUOTO

$\lim_{p\to 0} \Delta T = 0$ quindi $\Delta U = Q \quad \cancel{L} = 0$

TEMPERATURA COSTANTE

ne consegue che l'energia interna di un gas ideale dipende solamente dalla sua temperatura confermando la legge dei gas perfetti.

- Relazione di Mayer $C_P = C_V + R$

$dU = \partial Q \quad \partial d = \partial Q \quad dV$

$V = costante, \; dU = (\partial Q)_V$

$C_V = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT}$

$dU = nC_V dT$

$\partial U = \partial Q \quad \partial L$

$\partial Q = nC_V dT + PdV$

$PdV = nRdT$

PRESSIONE COSTANTE

$\partial Q = nC_V dT + nRdT = n\left(C_V + R\right)dT - \cancel{VdP}$

$\partial Q = n\left(C_V + R\right)dT$

$$C_P = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial Q}{dT}\right)_P = C_V + R$$

- Dalla relazione di Mayer posso concludere che per:
  - Gas monoatomici: $C_V = \frac{3}{2}R$
  - Gas biatomici: $C_V = \frac{5}{2}R$
  - Gas triatomici: $C_V = \frac{7}{2}R$

  e così via...

- Trasformazione adiabatica di un gas ideale

$$\partial Q = \partial L + dU = nC\ dT + PdV = nC\ dT + nRdT \quad VdP = n(C\ \ + R)\,dT \quad VdP = nC_P dT \quad VdP$$

↳ VEDI RELAZIONI PRECEDENTI

Definisco ora:

$$\frac{C_V}{C_P} = \quad \frac{PdV}{VdP} = \frac{1}{\gamma}$$

$$\frac{dP}{p} = \quad \gamma\frac{dV}{V}$$

$$\int_{P_0}^{P} \frac{dP}{P} = \quad \gamma \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{V}$$

$$\ln(P/P_0) = -\gamma \ln(V/V_0)$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{V^{\ \ \gamma}}{V_0^{\ \ \gamma}} = \frac{V_0^\gamma}{V^\gamma}$$

$$PV^\gamma = P_0^\gamma V_0^\gamma$$

Sostituendo la relazione trovata nell'equazione dei gas ideali:

$$TV^{\gamma\ \ 1} = costante$$

$$\frac{PT^\gamma}{P^\gamma} = costante$$

$$P^{1\ \ \gamma}T^\gamma = costante$$

$$P^{\frac{1\ \ \gamma}{\gamma}}\,T = costante$$

Posso quindi finalmente calcolare il lavoro della trasformazione adiabatica

$$L_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} PdV = \int_{V_A}^{V_B} kV^{-\gamma}dV = k\int_{V_A}^{V_B} V^{-\gamma}dV$$

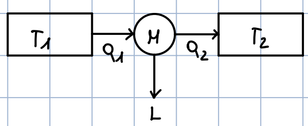
$$= \frac{1}{1\ \ \gamma}\left(kV_B^{1-\gamma}\ \ \ kV_A^{1-\gamma}\right) = \frac{1}{1\ \ \gamma}(P_BV_B\ \ \ P_AV_A) = \frac{C_V}{C_V\ \ \ C_P}(P_BV_B\ \ \ P_AV_A)$$

$$= -\frac{C_V}{R}(P_BV_B - P_AV_A) = -\frac{C_V}{R}(nRT_B - nRT_A) = nC_V(T_A - T_B)$$

- Trasformazione politropica

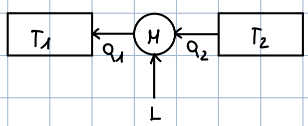
Si definisce "politropica", di un gas ideale, una trasformazione che risponde alla legge $PV^{\gamma} = costante$.

- Trasformazione reversibile: una trasformazione si dice "reversibile" se, una volta avvenuta, è possibile riportare sistema e ambiente alla situazione originaria.
  - Requisiti:
    - la trasformazione deve essere quasi-statica
    - non ci sono fenomeni dissipativi.
- Macchina termica: dispositivo che compie lavoro scambiando calore con un certo numero di termostati (minimo 2)
  - Le macchine termiche possono essere cicliche e reversibili (condizione non sempre rispettata)
  - Le macchine termiche si valutano in base al rendimento $\eta = \frac{L}{Q}$ → LAVORO FATTO → CALORE ASSORBITO



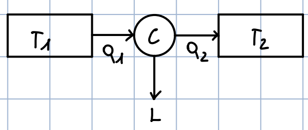
Con $T_1 > T_2$; macchina termica.

$\eta = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$ → QUANTITÁ NEGATIVA



Con $T_1 > T_2$; macchina frigorifera.

  - Macchina di Carnot: macchina ciclica e reversibile che opera con due termostati



    - Il ciclo di Carnot è costituito da:
      - 2 trasf. isotermiche;
      - 2 trasf. adiabatiche.

- 2° principio della termodinamica
  - Enunciato di Clausius

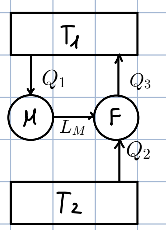
È impossibile realizzare una qualsiasi trasformazione che abbia come unico risultato il passaggio di calore da un corpo più freddo a uno più caldo

- Enunciato di Kelvin-Plank

É impossibile realizzare una qualsiasi trasformazione che abbia come risultato quello di convertire completamente in lavoro il calore prelevato da un solo termostato.

→ Spiega perché le macchine termiche necessitano di due termostati.

- Dimostrazione dell'equivalenza dei due enunciati
  - Assumo che l'enunciato di Kelvin-Plank non sia valido:



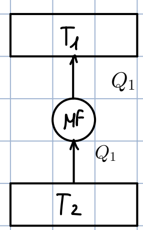
$\Delta U = 0 \rightarrow Q = L$

$M \quad L_M = Q_1$

$F \quad Q_2 \quad Q_3 = \quad L_M$

$Q_2 \quad Q_3 = \quad Q_1 \qquad Q_1 + Q_2 = Q_3$

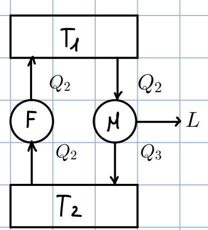
Passo quindi considerare la macchina equivalente a M e F.



$Q_1 \quad Q_3 = Q_1 \quad (Q_1 + Q_2) = \quad Q_2$ → ma ció nega l'enunciato di Clausius

sostituisco le relazioni trovate sopra

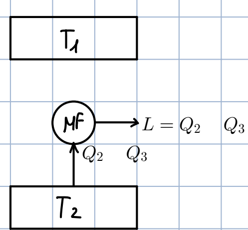
  - Assumo che l'enunciato di Clausius non sia valido



$\Delta U = 0 \rightarrow L = Q$

$L \ = Q_2 \quad Q_3$

Passo quindi considerare la macchina equivalente a M e F.



→ ma ció nega l'enunciato di Kelvin-Plank

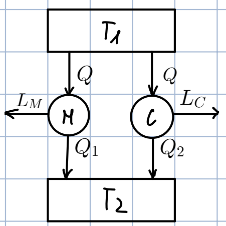
- Ho quindi dimostrato che i due enunciati sono equivalenti

. Teorema di Cornot

1) Tra tutte le mocchine termiche cicliche che operono tra due termostati a due temperature ben definite honno rendimento mossimo quelle reversibili, ossia quelle di Cornot

2) Tutte le mocchine di Cornot che lavorono tra due termostati, T_1 e T_2, honno lo stesso rendimento

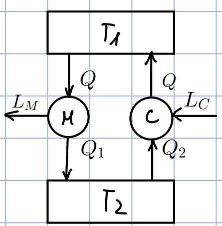
. Dimostrazione di 1)

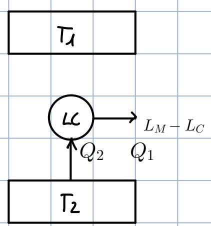


$Q = L$

$Q - Q_1 = L_M \qquad Q_1 = Q - L_M$

$Q \quad Q_2 = L_C \qquad Q_2 = Q - L_C$





$Q_2 \quad Q_1 = Q \quad L_c \quad (Q \quad L_M) = \quad L_C + L_M = L_M \quad L_C$

contro l'enunciato di Kelvin-Plonk

$$\eta_M = \frac{L_M}{Q}$$

$$L_M = \eta_M Q$$

$$\eta_C = \frac{L_C}{Q}$$

$$L_C = \eta_C Q$$

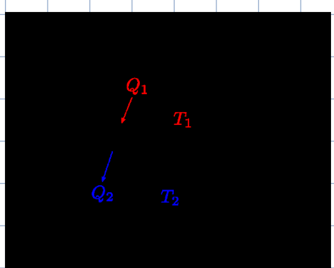
$$L_M \quad L_C \leq 0$$

$$\eta_M \leq \eta_C$$

. Dimostrazione di 2)

É noto che $\eta_M + \eta_C$; suppongo che le due mocchine siono di Cornot: $\eta_{C_1} \leq \eta_{C_2}$, ma, potendo invertire le mocchine, $\eta_{C_1} \geq \eta_{C_2}$ ne consegue che $\eta_{C_1} = \eta_{C_2}$

. Ciclo di Cornot



AB

$$L_{AB} = \int_A^B P dV = \int_A^B \frac{nRT_1}{V} dV = \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) nRT_1$$

$$Q_1 = nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

CD

$$L_{CD} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

$$Q_2 = nRT_2 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)$$

BC

$$TV^{\gamma-1} = k$$

$$T_2 V_C^{\gamma\ \ 1} = T_1 V_B^{\gamma\ \ 1}$$

DA

$$T_1 V_A^{\gamma\ \ 1} = T_2 V_D^{\gamma\ \ 1}$$

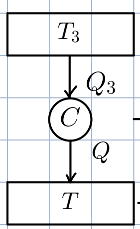
$$\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$\eta = 1 + \frac{nRT_2 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

$$\eta = 1 + \frac{T_2}{T_1} = \frac{\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}$$

$$\frac{V_D}{V_C} = \frac{V_A}{V_B} \qquad \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

- Definizione della temperatura tramite macchina di Carnot



$\rightarrow$ Temperatura al punto triplo;

$\rightarrow$ Macchina di Carnot;

$\rightarrow$ Temperatura da misurare.

$\eta = 1 \quad \frac{T}{T_3}$ ma anche $\eta = 1 \quad \frac{Q}{Q_3}$

$T = T_3 \frac{|Q|}{|Q_3|} = 273,16k \frac{|Q|}{|Q_3|}$ Temperatura termodinamica assoluta

- Formulazione algebrica del teorema di Carnot

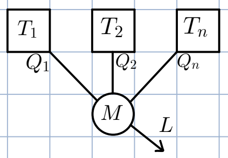
$$1 + \frac{Q_2}{Q1} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} \leq \quad \frac{T_2}{T_1}$$

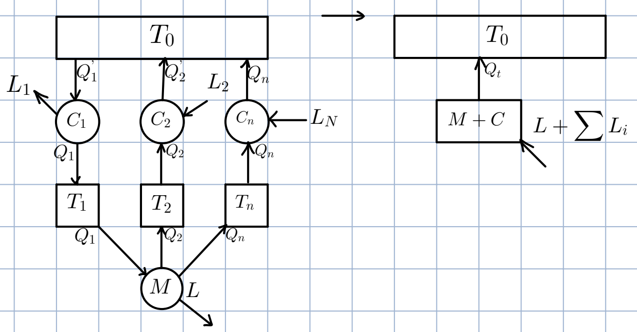
$$\frac{Q_2}{T_2} \leq \quad \frac{Q_1}{T_1}$$

$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$ o se è una macchina di Carnot

- Teorema di Clausius



$\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i} \le 0$ o se trasformazioni reversibili



$Q_T' \le 0$ per l'enunciato di Kelvin-Plank

quindi $L_T \le 0$

$$Q = \sum_{i=1}^{N} Q_i' \le 0 \longrightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \longrightarrow \frac{Q_i'}{T_0} - \frac{Q_i}{T_i} = 0 \longrightarrow Q_i' = T_0 \frac{Q_i}{Ti} \longrightarrow Q_T' = \sum_{i=1}^{N} Q_i' \le 0 \longrightarrow Q_i' = T_0 \frac{Q_i}{Ti}$$

$$\sum_{i=1}^{N} T_0 \frac{Q_i}{Ti} \le 0$$

- ció dimostra il teorema di Clausius
- 0 solo nel caso di trasformazioni reversibili in quanto devono valere contemporaneamente:

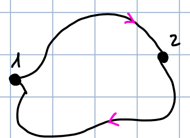
$$\sum_{i=1}^{N} T_0 \frac{Q_i}{Ti} \le 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} T_0 \frac{Q_i}{Ti} \ge 0$$

- Una trasformazione termodinamica puó essere ricondotta ad una macchina termica che opera con un numero contiguo di termostati
- Trasformazione reversibile $\int \frac{\partial Q}{T} = 0$
- Trasformazione irreversibile $\int \frac{\partial Q}{T} < 0$

$\longrightarrow$ Nella sua formulazione generale:

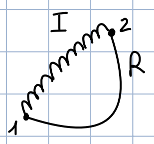
$\int \frac{\partial Q}{T} \le 0$ integrale di Clausius

- Nelle trasformazioni cicliche $\oint \frac{\partial Q}{T} = 0$ che si puó vedere meglio come



$$\int_1^2 \frac{\partial Q}{T} + \int_2^1 \frac{\partial Q}{T} = 0$$

esiste dunque una funzione di stato tale che: $dL = -dE_P$; tale funzione é l'entropia $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}$ ma tale relazione non dipende dalla ciclicitá della trasformazione ed é dunque generalizzabile. Diventa quindi possibile studiare una trasformazione non reversibile considerandone un'equivalente reversibile in modo da valutarne la variazione di entropia.



$$\int \frac{\partial Q}{T} \leq 0$$

$$\int_{1I}^{2} \frac{\partial Q}{T} + \int_{2R}^{1} \frac{\partial Q}{T} \leq 0$$

$$\Delta S \geq \int_{1I}^{2} \frac{\partial Q}{T}$$

- Considero un sistema termodinamico isolato (es. l'universo) $\partial Q = 0$

$\Delta S \geq 0$: 0 per trasformazioni reversibili;

$! = 0$ per trasformazioni irreversibili; nella realtá le trasformazioni perfettamente reversibili non esistono e dunque l'entropia aumenta sempre (Principio di accrescimento dell'entropia).

- Calcolo l'aumento di temperatura durante l'espansione libera di un gas ideale.

$\Delta S_U = \int_{IR}^{F} \frac{dQ}{T}$; considero un equivalente trasformazione isoterma:

$\cancel{dU} = \partial Q \quad \partial L$

↳ non c'é variazione di energia interna

$$\partial Q = \partial L = PdV = \frac{nRT}{V} dV$$

$$\Delta S_U = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{TV} dV = nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

- Che differenza c'é tra il lavoro della espansione libera e l'equivalente trasformazione reversibile isoterma?

$$L_R = \int_{V_i}^{V_f} PdV = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

$L_I = 0$, per definizione.

$\Delta L = L_R \quad L_I = nRT\ln\left(\frac{V_F}{V_I}\right)$ ma ciò significa che $\Delta L = T\Delta S_U$

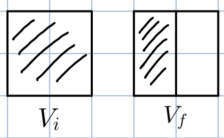
maggiore è ΔS_U minore è la capacità del sistema di compiere lavoro.

- Variazione dell' entropia per trasformazioni isotermiche

$$\Delta S = \int_A^B \frac{\partial Q}{T} = \frac{1}{T}\int_A^B dQ = \frac{Q}{T}$$

ad esempio, nel caso di transizione di fase $\Delta S_U = \frac{m\lambda}{T}$.

- Un gas ideale è chiuso in un contenitore rigido e adiabatico; suppongo idealmente che il gas si concentri in una determinata porzione del contenitore:



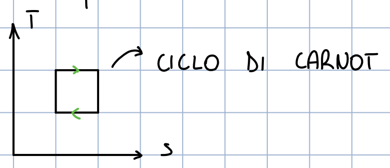
$\Delta U = \cancel{Q}^{\,0} \quad \cancel{L}^{\,0}$

Considero la trasformazione isoterma reversibile associata

$$\Delta S = \int \frac{\partial Q}{T} = \int \frac{\partial L}{T} = \int \frac{PdV}{T} = \int \frac{nRT}{VT}dV = nR\int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V}dV = nR\ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$$

ma il logaritmo non può essere calcolato: $V_i > V_f$

- In altre branche della fisica è comodo usare il piano temperatura - entropia in quanto l'area sottesa dal grafico rappresenta il calore scambiato.

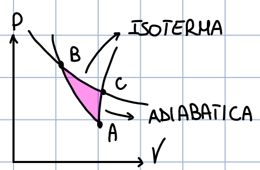


$dU = \partial Q - \partial L$

$dU = TdS - PdV$ 1° principio della termodinamica

- Considero due trasformazioni adiabatiche reversibili, mediante Kelvin-Plank voglio dimostrare che i loro grafici, nel piano di Clapeyron, non possono intersecarsi.

Dimostrazione per assurdo.

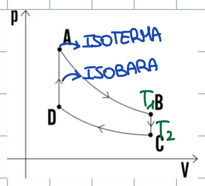


Lavoro positivo con un solo termostato?

Impossibile per l'enunciato di Kelvin-Plank.

C.V.D

Ciclo di Stirling



AB $$Q_{AB} = L_{AB} = \int_A^B P\,dV = nRT_1 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0$$

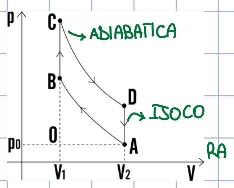
BC $$Q_{BC} = mc\ \ (T_2 \quad T_1) > 0$$

CD $$Q_{CD} = L_{CD} = \int_C^D P\,dV = nRT_2 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) < 0$$

DA $$Q_{DA} = mc\ \ (T_1 \quad T_2) < 0$$

$$\eta = \frac{L}{Q} = \frac{Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}}{Q_{AB} + Q_{BC}}$$

Ciclo Otto



$$\Delta U = Q_{BC} = nc_V(T_C - T_B) > 0$$

$$\Delta U = Q_{DA} = nc_V(T_A \quad T_D) < 0$$

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

$$T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}$$

$$T_C V_B^{\gamma-1} = T_D V_B^{\gamma-1}$$

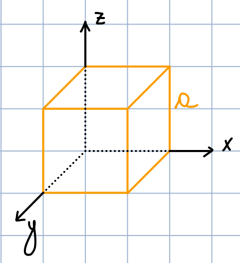
$$(T_A \quad T_D)\, V_A^{\gamma-1} = (T_B \quad T_C)\, V_B^{\gamma-1}$$

$$\frac{T_A - T_D}{T_B - T_C} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma \quad 1}$$

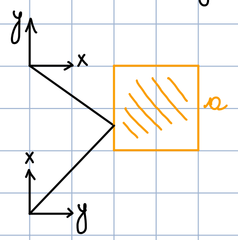
$$\eta = \frac{Q_{BC} + Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = 1 + \frac{nc_V(T_A \quad T_D)}{nc_V(T_C \quad T_B)} = 1 + \frac{T_A \quad T_D}{T_C \quad T_B} = 1 \quad \left(\frac{V_B}{V_D}\right)^{\gamma-1}$$

Teoria cinetica dei gas

- Considero un cubo pieno di un gas che risponde delle seguenti caratteristiche:
  - Molecole uguali fra loro;
  - Moto equiprobabile delle particelle ($\overrightarrow{V_{MEDIA}} = 0$)
  - Densità costante;
  - Nessuna interazione tra le molecole eccetto urti elastici;
  - La dimensione delle molecole é trascurabile (rispetto a quella del contenitore).



- Considero una faccia del cubo e calcolo la quantità di moto di particelle e parete negli urti.



$$x : v_x \rightarrow \quad v_x$$
$$y : v_y \rightarrow -v_y$$

$$\triangle P_x^{MOL} = P_x^F \quad P_i^{'} = \quad 2mv_x$$
$$\Delta P_x^{PARETE} = 2mv_x$$

- Calcolo il cammino medio di una particella (dopo quanto tempo una particella urta una parete?):

$$t = \frac{2a}{v_x}$$

che utilizzo per trovare la forza subita dalla parete:

$$F_x = \frac{dP_x}{dt} = 2mv_x \frac{v_x}{2a} = \frac{mv_x^2}{a}$$

considerando la risultante delle forze:

$$R_x = \sum_{i=1}^{N} F_x^i = \frac{m}{a} \sum_{i=1}^{N} v_{x_i}^2$$

con cui calcolo la pressione:

$$P = \frac{R_x}{S} = \frac{R_x}{a^2} = \frac{m}{a^3} \sum_{i=1}^{N} v_{x_i}^2$$

- Velocità quadratica media

$$\overline{V^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} V_i^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (V_{x_i}^2 + V_{y_i}^2 + V_{z_i}^2)$$

con cui posso ridefinire la pressione:

$$P = \frac{m}{V}\sum_{i=1}^{N} V_{x_i}^2 = \frac{mN}{V}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} V_{x_i}^2}{N}\right) = \frac{mN}{V}\overline{V_x^2}$$

$$P = \frac{mN}{V}\frac{\overline{V^2}}{3}$$ che é molto simile all'equazione di stato dei gas perfetti.

- Energia cinetica di un gas perfetto

$$E_c = U = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}mv_j^2 = \frac{N}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}mv_j^2 = N \quad E_c >= \frac{1}{2}Nm \quad V^2 >$$

velocitá quadratica media

energia cinetica media

- Che relazione c'e' tra la temperatura e la velocitá quadratica media?

$$\begin{cases} PV = \dfrac{mN}{3} \quad V^2 > \quad \dfrac{2}{3}U \\ U = \dfrac{1}{2}mN < V^2 > => mN < V^2 >= 2U \end{cases}$$

$$\begin{cases} PV = nRT \\ PV = \dfrac{2}{3}U \end{cases} \qquad U = \frac{3}{2}nRT$$

$$E_c >= \frac{U}{N} = \frac{3}{2}\frac{nRT}{N} = \frac{3}{2}\frac{N}{N_a}\frac{RT}{N} = \frac{3}{2}K_bT$$ Costante di Boltzmann

$$\begin{cases} < E_c >= \dfrac{3}{2}K_BT \\ < E_c >= \dfrac{1}{2}m < V^2 > \end{cases}$$

$$V^2 >= \frac{3K_BT}{m}$$

- Teorema di equiportizione dell'energia: Per un sistema di particelle, a una data temperatura T, in cui ognuna particella ha ml gradi di libertá; ogni particella ha $< E >= ml\left(\frac{1}{2}K_BT\right)$
  - I gradi di libertá corrispondono ai singoli modi in cui una particella puó assorbire energia.
  - I gradi di libertá di una particella sono 7:
    - 3 traslazionale;
    - 2 rotazionali;
    - 1 vibrazionale;
    - 1 temperatura (energia cinetica).

- Dimostrazione del teorema di Mayer mediante il principio di equipartizione dell'energia:

$$dU = \partial Q \quad \partial L$$

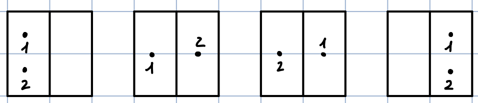
$$C_V = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V \longrightarrow C = \frac{1}{n}\left(\frac{dU}{dT}\right)$$

$$dU = nc_V dT$$

$$U = Nnl\left(\frac{1}{2}K_B T\right)$$

$$C_V = \frac{1}{N}\frac{d}{dT}(Nnl\frac{1}{2}K_B T) = \frac{1}{2n}NnlK_B = \frac{1}{2}Nnl\frac{R}{N_A} = \frac{1}{2}Rnl$$

- Entropia: Considero la seguente disposizione di particelle:



- Microstato: ogni possibile configurazione nella quale si trovano le particelle,
- Macrostato: considerando le molecole indistinguibili, aggregato di microstati.
  - Più microstati sono contenuti nel macrostato e più quest'ultimo sarà probabile.
- Considero ora N particelle:

$$n \to s_x$$

$$(N \quad n) \to dx$$

$$W_n = \frac{N!}{n!\,(N \quad n)\,!}$$ (molteplicità di un macrostato)

Collegamento con l'entropia:

$$S = K_B \ln{(W_n)}$$ (equazione di Boltzmann)

- Gas reali
  - Sviluppo del viriale

$$\frac{PV}{nRT} = 1 + aP + bP^2 + CP^3 + \dots$$

  - Equazione di Van der Waals

$$\left(P + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V \quad nb) = nRT$$

coefficienti di Van der Waals

nb: covolume, volume effettivamente occupato dalle particelle stesse;

$a\frac{n^2}{V^2}$: coefficiente legato alle interazioni intermolecolari.