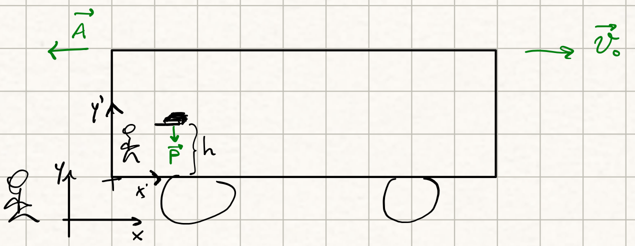
Sistemi di riferimento non inerziali

1) 

$v_0 = 100\ km/h$
$A = 2{,}8\ m/s^2$
$h = 40\ m$

(x,y) INERZIALE
(x',y') NON INERZIALE

trasformazioni: $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} + \underline{\underline{\vec{\omega}\times\vec{r}}}$

vel. del libro rispetto xy

velocità di x'y' rispetto xy

vel. del libro rispetto x'y'

dovuta alla rotazione del sistema non in. (x'y')

$\vec{F} = m\vec{a}$ inerziale

$\vec{F} = m\vec{a}'$ non inerziale

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} + \underline{\vec{\alpha}\times\vec{R}'} + \underline{\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{R}'} + \underline{2\vec{\omega}\times\vec{v}'}$

acc. in xy; acc. in x'y'; acc. di x'y'

dovuto alla rotaz. di x'y'

legata alla f. centrifuga

dovuto alla forza di Coriolis

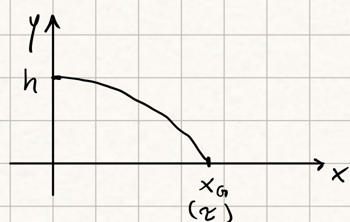
- sistema xy:

FORZA REALE $\vec{P} = -mg\,\vec{u}_y$; $\vec{a} = \vec{g} = -g\,\vec{u}_y$

$\vec{v}_{0,x} = v_0\,\vec{u}_x$ (velocità del treno)

$$\begin{cases} x(t) = \overset{0}{x_0} + v_{0x}t & \text{moto rettilineo uniforme} \\ y(t) = y_0 + \underset{0}{v_{0y}}t - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2 & \text{moto uniform. accelerato} \end{cases}$$

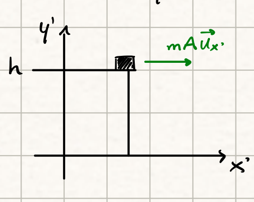
$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{v_{0x}} \\ y(x) = h - \dfrac{1}{2}\dfrac{g}{v_{0x}^2}x^2 \end{cases}$$ traiettoria



$\tau \Rightarrow y(\tau) = 0 \quad \Rightarrow x_G = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}\,v_0 \quad ; \quad \tau = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

$= \underline{\underline{7{,}94\ m}}$

- sistema $x'y'$:



$\vec{A} = -A\,\vec{u}_{x'}$

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A} + \cancel{\overset{0}{\vec{\alpha}}\times\vec{R}'} + \cancel{\overset{0}{\vec{\omega}}\times\vec{\omega}\times\vec{R}'} + \cancel{2\overset{0}{\vec{\omega}}\times\vec{v}'}$

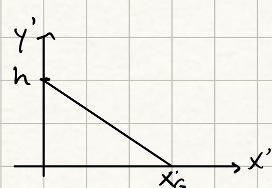
$\Rightarrow \vec{a}' = \underset{-g\vec{u}_{y'}}{\vec{a}} - \vec{A} = -g\vec{u}_{y'} + A\vec{u}_{x'} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}' = m\vec{a}' = \underbrace{-mg\,\vec{u}_{y'}}_{\vec{P}\ (\text{reale})} + \underbrace{mA\vec{u}_{x'}}_{\text{apparente}}$

$$\begin{cases} x'(t) = \overset{0}{x'_0} + \overset{0}{v_{0x'}}t + \frac{1}{2}At^2 = \frac{1}{2}At^2 & \text{moto unif. accel.} \\ y'(t) = y'_0 + v_{0y'}t - \frac{1}{2}gt^2 = h - \frac{1}{2}gt^2 & \text{moto unif. accel.} \end{cases}$$

0 (osservata da dentro il treno)

$$\begin{cases} t^2 = \dfrac{2x'}{A} \\ y'(x') = h - \dfrac{g}{A}x' \end{cases}$$

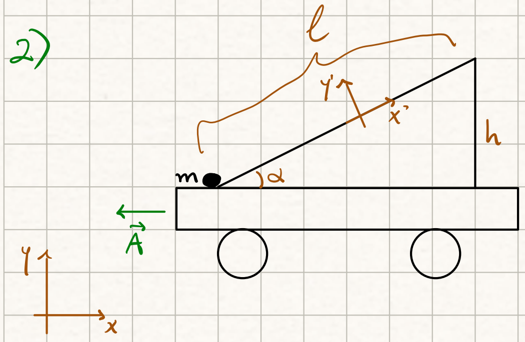
traiettoria



$y'(x'_G) = 0 \Rightarrow x'_G = \dfrac{hA}{g} = 0{,}11\ m$

$\tau = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ (uguale a prima)

2)

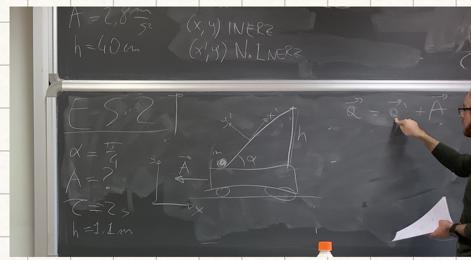


$\alpha = \frac{\pi}{4}$

$\tau = 2s$

$h = 1,1m$

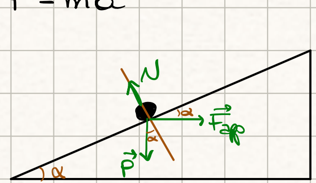
?A | pallina arriva all'altezza h



$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$ $(\vec{\omega} = 0,\ \vec{\alpha} = 0)$ $\Rightarrow \vec{a}' = \vec{a} - \vec{A}$

$\vec{F} = m\vec{a}' = \vec{F}_{reali} \underbrace{- m\vec{A}}_{\vec{F}_{app}}$

$\vec{F} = m\vec{a}$



$\vec{A} = -A\,\vec{u}_x$

$|\vec{F}_{app}| = mA$

$$\begin{cases} x': & F_{app}\cos\alpha - mg\sin\alpha = m a_{x'} \\ y': & N - mg\cos\alpha - F_{app}\sin\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow a_{x'} = A\cos\alpha - g\sin\alpha$$

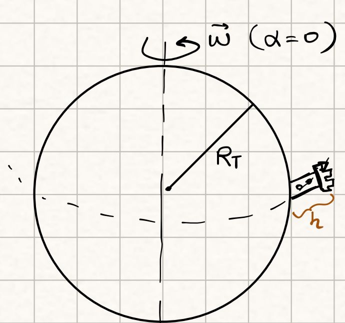
(uniform. accelerato)

$$\Rightarrow x'(t) = \overset{0}{\overset{\parallel}{x'_0}} + \overset{0}{\overset{\parallel}{v_{0x'}}}\,t + \frac{1}{2}a_{x'}t^2 = \frac{1}{2}a_{x'}t^2$$

condizione: $x'(\tau) = \ell$ $\Rightarrow \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}(A\cos\alpha - g\sin\alpha)\tau^2$

$$\Rightarrow A = \frac{2h}{\tau^2 \sin\alpha\cos\alpha} + g\tan\alpha = 10,81\ m/s^2$$

4) forza di Coriolis



$\omega = \frac{2\pi}{24h}$

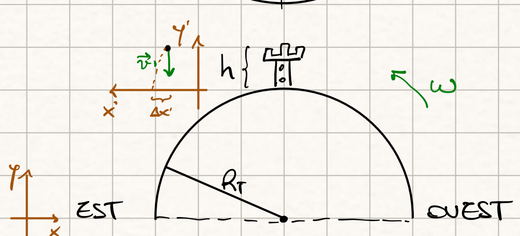
$h = 100\ m$

$R_T = 6,37 \cdot 10^6\ m$

$$\vec{a} = \vec{a}' + \underset{\overset{\parallel}{0}}{\vec{A}} + \underset{\overset{\parallel}{0}}{\vec{\alpha}} \times \vec{R}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{R}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$\vec{A} = 0$ $(O \equiv O')$ moto solo rotatorio

$$\Rightarrow \vec{a}' = \vec{a} - \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{R}' - 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$



$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_{centrifuga} + \vec{F}_{coriolis}$

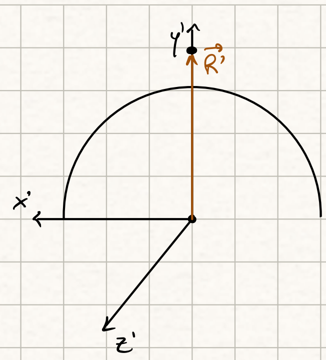
$\vec{\omega} = \omega\,\vec{u}_{z'}$

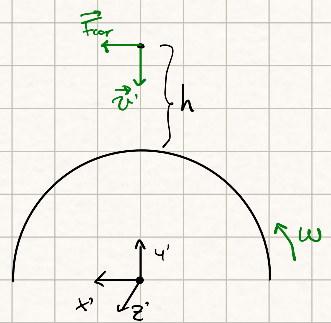
↳ esce dal piano del foglio

$\vec{F}_{centrif} = -m\ \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{R}'$

$\vec{\omega} \times \vec{R}' = \omega R' \vec{u}_{x'} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} \times (\omega R' \vec{u}_{x'}) = -\omega^2 R' \vec{u}_{y'}$

$\Rightarrow \quad \vec{F}_{cf} = m \omega^2 R' \vec{u}_{y'}$





$\vec{F}_{coriolis} = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}'$ → $\vec{F}_{cor}$ cambia con $\vec{v}'$

$\vec{v}' = v_{x'} \vec{u}_{x'} + v_{y'} \vec{u}_{y'}$

$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$

$$\Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{v}' = \begin{vmatrix} \vec{u}_{x'} & \vec{u}_{y'} & \vec{u}_{z'} \\ \cancel{\omega_{x'}} & \cancel{\omega_{y'}} & \omega_{z'} \\ v_{x'} & v_{y'} & \cancel{v_{z'}} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{cor} = -2m\,\omega \vec{u}_{z'} \times (v_{x'} \vec{u}_{x'} + v_{y'} \vec{u}_{y'}) = 2m\omega v_{x'} \vec{u}_{y'} - 2m\omega v_{y'} \vec{u}_{x'}$$

(conferma della direz. della $\vec{F}_{cor}$ rispetto $\vec{v}'$)

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_{cor} = -m\underbrace{g}_{= 9{,}81\ m/s^2\ (cost)\ \text{se in prossimità della Terra}} \vec{u}_{y'} + m\omega^2 R' \vec{u}_{y'} + 2m\omega v_{x'} \vec{u}_{y'} - 2m\omega v_{y'} \vec{u}_{x'}$$

$$\begin{array}{l} x' \\ y' \end{array} \begin{cases} \cancel{m} a_{x'} = -2\cancel{m}\omega v_{y'} \\ \cancel{m} a_{y'} = -\cancel{m}g + \cancel{m}\omega^2 R' + 2\cancel{m}\omega v_{x'} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow a_{y'} = -g\left(1 - \frac{\omega^2 R'}{g} - 2\frac{\omega}{g} v_{x'}\right)$$

dipende dal tempo

per capire il moto :

approssimazioni

1) $R' = R_T + h = 6{,}37 \cdot 10^6 + 100 \simeq 6{,}37 \cdot 10^6\,m$ → R_T approssimabile al R_T

2) $\frac{\omega^2 R_T}{g} = 3{,}43 \cdot 10^{-3} = 0{,}00343 \ll 1 \Rightarrow$ trascurabile

(ipotesi) 3) $\frac{2\omega}{g} v_{x'} \ll 1$ → trascurabile

↳ perchè ~~non~~ conosciamo $v_{x'}$

⇓

alla fine verificare !!

$$\rightarrow \begin{cases} a_{x'} = -2\omega v_{y'} \\ a_{y'} = -g \end{cases}$$

→ moto dipendente da $v_{y'}$

rettilineo uniform. accelerato

$v_{y'}(t) = \cancel{v_{0y'}} - gt \quad \Rightarrow \quad a_{x'} = 2\omega g t$

$$v_{x'}(t) = \int_0^t a_{x'}\, d\tau = \omega g t^2 + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{v_{0x'}}}$$

$$\Rightarrow \quad x'(t) = \int_0^t v_{x'}(\tau)\, d\tau = \frac{1}{3}\omega g t^3 + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{x'_0}}$$

$$y' = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\tau \quad \Rightarrow \quad y'(\tau) = 0 \quad : \quad \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

(tocca il suolo
(t. di volo)

$$\Rightarrow \quad x'(\tau) = \Delta x' = \frac{2}{3} h \omega \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2{,}2 \text{ cm}$$

scostamento della verticale

direzione verso **est** (asse x')

! Verifica dell'ipotesi (3)

$$\frac{2\omega}{g} v_{x'} \ll 1$$

max per $t = \tau$ $\quad \Rightarrow \quad \frac{2\omega}{g} v_{x'_{max}} = \frac{4\omega^2 h}{g} = 2{,}16 \cdot 10^{-7} \ll 1$

Ipotesi verificata

soluzione valida