☐ FASORI

Un FASORE e' un NUMERO COMPLESSO in corrispondenza BIUNIVOCA con una SINUSOIDE:

DOMINIO DEL TEMPO ⟺ DOMINIO DEI FASORI

SINUSOIDE — FASORE

(definizione in ampiezza)

$$x(t) = X_M \cos(\omega t + \varphi)$$

FORMA POLARE — FORMA ESPONENZIALE

$$\bar{X} = X_M \angle\varphi = X_M e^{j\varphi} \qquad \text{(AMP)}$$

(AMPIEZZA = MODULO
FASE = ANGOLO)

(definizione in valore efficace o rms)

$$x(t) = \overbrace{\sqrt{2}\, X_{eff}}^{X_M} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\bar{X} = X_{eff} \angle\varphi = X_{eff}\, e^{j\varphi} \qquad \text{(RMS)}$$

(VAL. EFF = MODULO
FASE = ANGOLO)

- x tensione (v) o corrente (i)
- IL fasore non contiene ω
- La differenza fra le definizioni di fasore e' solo nel modulo (ampiezza o valore rms), ovvero solo un fattore costante $\sqrt{2}$
- Bisogna saper gestire entrambe le definizioni. E' importante sapere quale si sta usando.

Formula di passaggio da FASORE a SINUSOIDE in termini matematici:

con definizione in ampiezza : $x(t) = \mathrm{Re}\left\{\bar{X}\, e^{j\omega t}\right\}$

" " " rms : $x(t) = \sqrt{2}\, \mathrm{Re}\left\{\bar{X}\, e^{j\omega t}\right\}$

Dimostrazione:

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{\bar{\mathbf{X}}\, e^{j\omega t}\right\} \overset{\text{SOSTITUISCO FASORE}}{=} \mathrm{Re}\left\{X_M\, e^{j\varphi}\, e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{X_M\, e^{j(\omega t+\varphi)}\right\} =$$

$$\underset{\substack{\text{EULERO} \\ \text{(PASSAGGIO IN FORMA CARTESIANA)}}}{=} \mathrm{Re}\left\{X_M \cos(\omega t+\varphi) + j X_M \sin(\omega t+\varphi)\right\} = X_M \cos(\omega t+\varphi)$$

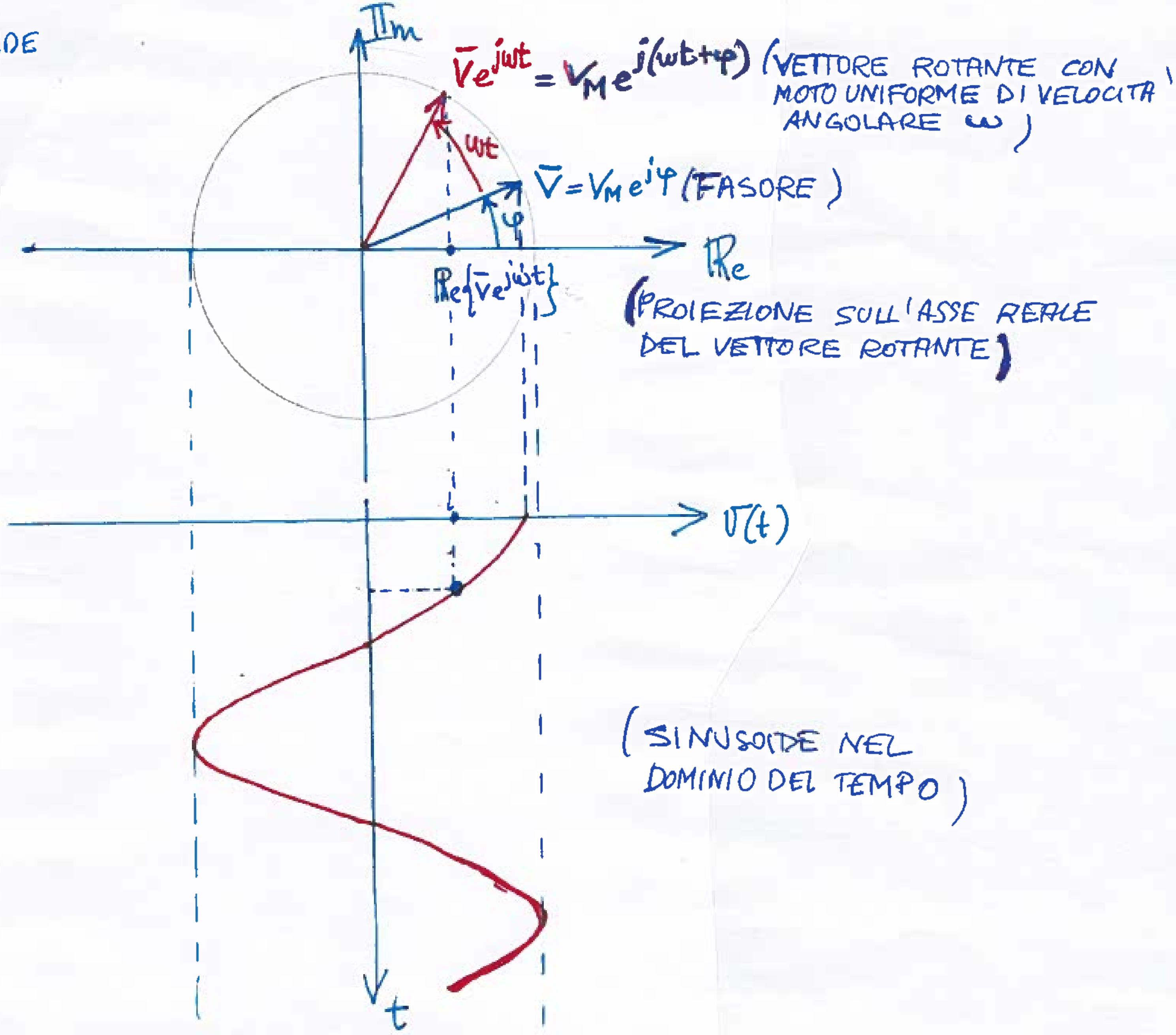
Come volevasi dimostrare

(analogamente nella definizione rms)

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA NEL PIANO COMPLESSO

$v(t) = V_M \cos(\omega t + \varphi)$ SINUSOIDE

$\bar{V} = V_M e^{j\varphi}$ FASORE



☐ PROPRIETA' DEI FASORI

(a) LINEARITA' (conservazione delle equazioni lineari algebriche)

Dati $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ fasori associati alle sinusoidi $x_1(t)$, $x_2(t)$

TROVARE IL FASORE associato alla sinusoide $y(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \alpha \cdot \overbrace{\mathrm{Re}\left\{\bar{X}_1 e^{j\omega t}\right\}}^{x_1(t)} + \beta \overbrace{\mathrm{Re}\left\{\bar{X}_2 e^{j\omega t}\right\}}^{x_2(t)}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\alpha \bar{X}_1 e^{j\omega t}\right\} + \mathrm{Re}\left\{\beta \bar{X}_2 e^{j\omega t}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\underbrace{(\alpha \bar{X}_1 + \beta \bar{X}_2)}_{\bar{Y}} e^{j\omega t}\right\}$$

dominio del tempo

$y(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\bar{Y} = \alpha \bar{X}_1 + \beta \bar{X}_2}$ dominio dei fasori

‖ La stessa equazione (combinazione lineare) e' valida per sinusoidi nel dominio del tempo e per fasori nel dominio dei fasori

(b) TRASFORMAZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI IN EQUAZIONI ALGEBRICHE

Dato $\overline{X}$ fasore associato alla sinusoide $x(t)$

TROVARE IL FASORE associato alla sinusoide $y(t) = k\dfrac{dx(t)}{dt}$ $\quad k \in \mathbb{R}$

$$y(t) = k\frac{d}{dt}\overbrace{\mathrm{Re}\{\overline{X}e^{j\omega t}\}}^{x(t)} = \mathrm{Re}\left\{k\overline{X}\frac{d}{dt}e^{j\omega t}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\underbrace{j\omega k\overline{X}}_{\overline{Y}}\,e^{j\omega t}\right\}$$

dominio del tempo

$$y(t) = k\frac{dx(t)}{dt} \Longrightarrow \boxed{\overline{Y} = j\omega k\overline{X}}$$

dominio dei fasori

|| La derivata $\dfrac{d}{dt}$ nel dominio del tempo diviene una moltiplicazione per $j\omega$ nel dominio dei fasori

|| Con le proprietà (a) e (b) dei fasori possiamo trasformare il problema differenziale dei circuiti dinamici in regime sinusoidale in un problema algebrico

☐ LEGGI DI KIRCHHOFF NEL DOMINIO DEI FASORI

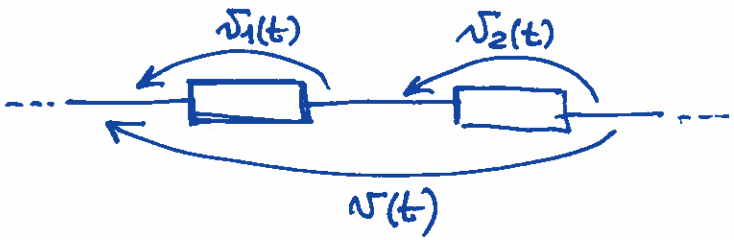
dominio del tempo $\xRightarrow[\text{[Proprietà (a)]}]{\text{LINEARITÀ}}$ dominio dei fasori

KCL $\quad \sum_{k=1}^{N} i_k(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{N} \bar{I}_k = 0}$

KVL $\quad \sum_{k=1}^{N} v_k(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\sum_{k=1}^{N} \bar{V}_k = 0}$

Le KCL e KVL sono scritte nel solito modo ma anziché funzioni sinusoidali del tempo ci sono fasori ovvero NUMERI COMPLESSI.
Le somme algebriche vanno fatte in accordo con l'algebra dei numeri complessi

Esempio



$v_1(t) = 5\cos(100t)\ ,\mathrm{V}$

$v_2(t) = 2\cos(100t + 45°)\ ,\mathrm{V}$

Trovare $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$

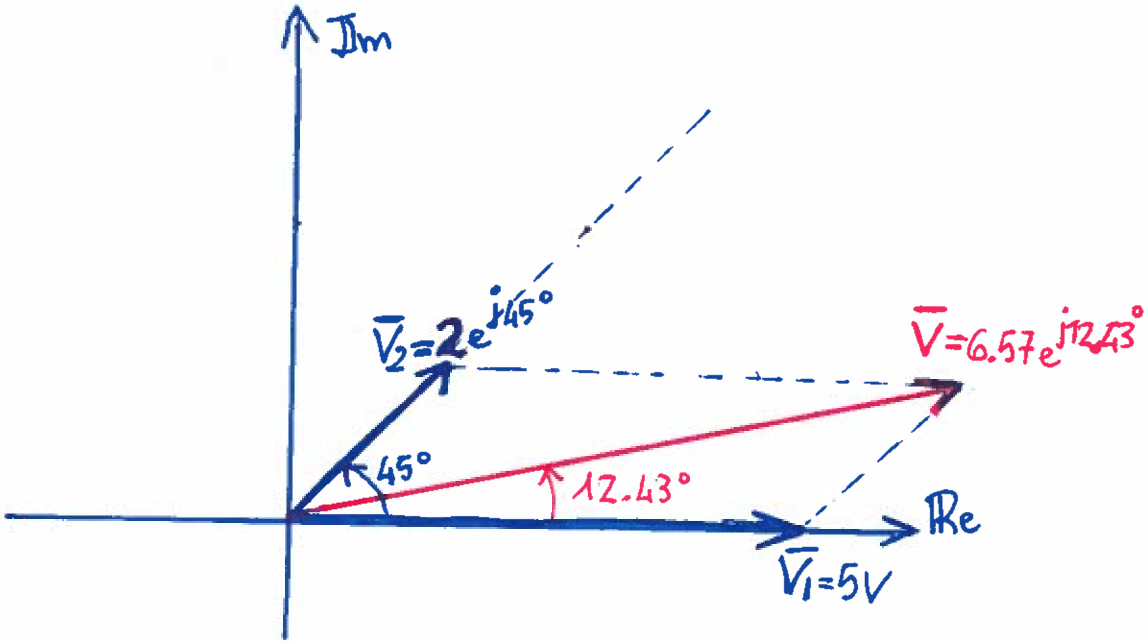
Definisco i fasori in ampiezza:

$$v_1(t) \xrightarrow{\text{(trasformazione)}} \bar{V}_1 = 5e^{j0°} = 5\ \mathrm{V}$$

$$v_2(t) \longrightarrow \bar{V}_2 = 2e^{j45°} = 2\underbrace{\cos(45°)}_{\sqrt{2}/2} + j2\underbrace{\sin(45°)}_{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2}(1+j)\ \mathrm{V}$$

KVL: $\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 = 5 + \sqrt{2} + j\sqrt{2} = 6.414 + j\,1.414 = \sqrt{6.414^2 + 1.414^2}\, e^{j\,\mathrm{arctg}\frac{1.414}{6.414}} = 6.57\, e^{j12.43°}\ \mathrm{V}$

$\bar{V} \longrightarrow \boxed{v(t) = 6.57\cos(100t + 12.43°)\ ,\mathrm{V}}$ (antitrasformazione)



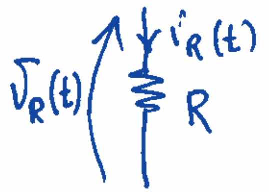
La somma di numeri complessi è una SOMMA VETTORIALE! Vedi disegno (regola del parallelogramma)

L'algebra dei numeri complessi rende facile e automatico eseguire queste somme vettoriali.

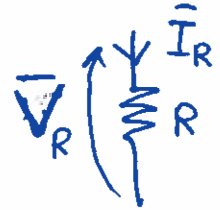
☐ RELAZIONI COSTITUTIVE (ADINAMICHE)

- **RESISTORE**

dominio t $\xrightarrow[\text{[proprietà (a)]}]{\text{LINEARITÀ}}$ dominio fasori



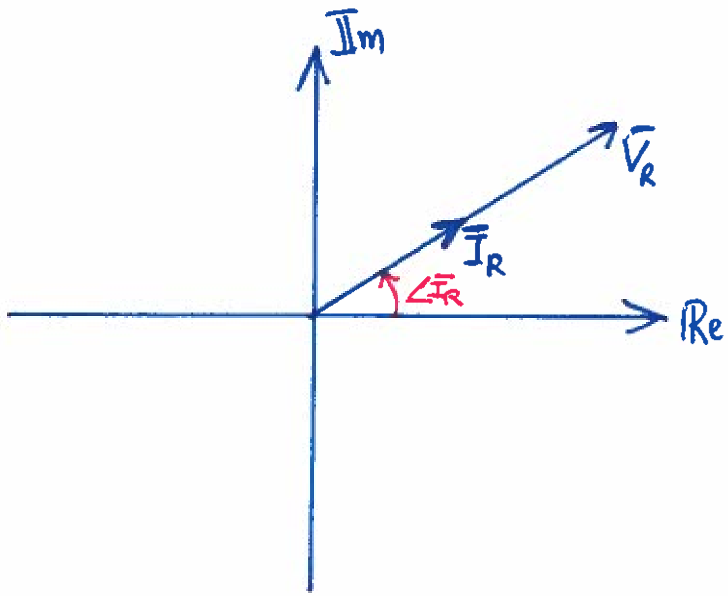
$$v_R(t) = R\, i_R(t)$$



$$\boxed{\bar{V}_R = R\, \bar{I}_R}$$

$$|\bar{V}_R| = |R\bar{I}_R| = |R|\,|\bar{I}_R| \qquad \text{nei moduli}$$

$$\angle\bar{V}_R = \angle R\bar{I}_R = \underbrace{\cancel{\angle R}}_{0} + \angle\bar{I}_R = \angle\bar{I}_R \qquad \text{nelle fasi}$$



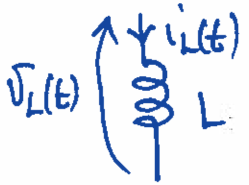
I FASORI $\bar{V}_R$ e $\bar{I}_R$ SONO "IN FASE"

☐ RELAZIONI COSTITUTIVE DINAMICHE

■ INDUTTORE

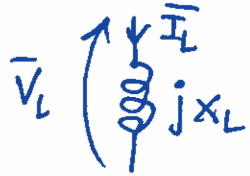
DERIVAZIONE [proprietà (b)] $\Longrightarrow$

dominio t



$$v_L(t) = L\,\frac{di_L(t)}{dt}$$

dominio dei fasori

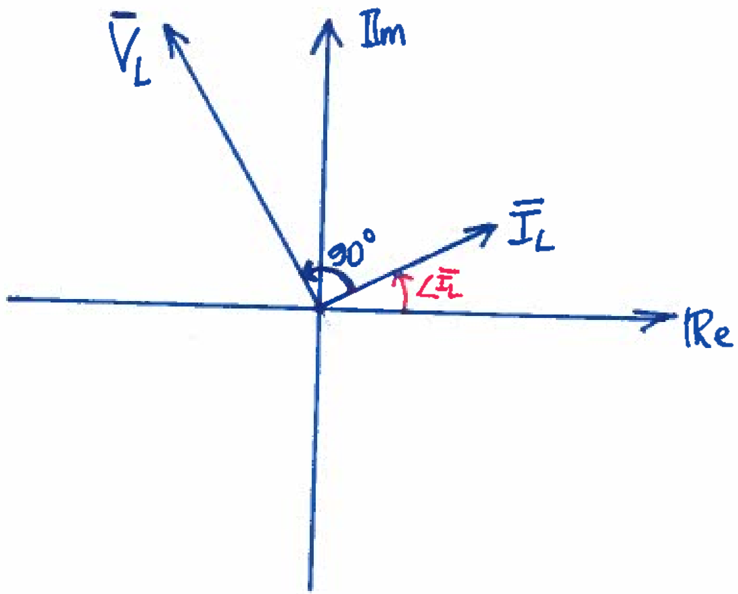


$$\bar{V}_L = j\omega L\,\bar{I}_L = jX_L\,\bar{I}_L$$

$\boxed{X_L = \omega L > 0}$ $[\Omega]$ REATTANZA INDUTTIVA

$|\bar{V}_L| = |jX_L\bar{I}_L| = |jX_L|\,|\bar{I}_L| = X_L\,|\bar{I}_L|$ nei moduli

$\angle\bar{V}_L = \angle jX_L\bar{I}_L = \angle jX_L + \angle\bar{I}_L = 90° + \angle\bar{I}_L$ nelle fasi



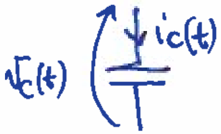
I FASORI $\bar{V}_L$ e $\bar{I}_L$ SONO "IN QUADRATURA"

LA CORRENTE È "IN RITARDO DI 90°" RISPETTO ALLA TENSIONE

CONDENSATORE

[proprietà (b)] $\Longrightarrow$

dominio t



$$i_c(t) = C\,\frac{dv_c(t)}{dt}$$

dominio dei fasori

$$\bar{I}_c = j\omega C\,\bar{V}_c$$

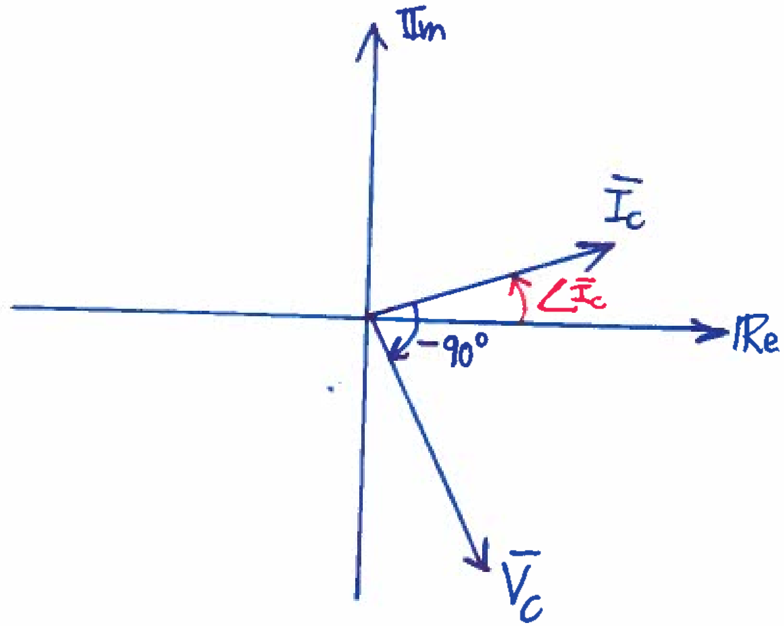
$$\bar{V}_c = \frac{1}{j\omega C}\,\bar{I}_c = -j\,\frac{1}{\omega C}\,\bar{I}_c = jX_c\,\bar{I}_c$$

$$\boxed{X_c = -\frac{1}{\omega C} < 0}$$ [Ω] REATTANZA CAPACITIVA

$|\bar{V}_c| = |jX_c|\,|\bar{I}_c| = |X_c|\,|\bar{I}_c|$ nei moduli

$\angle \bar{V}_c = \angle jX_c + \angle \bar{I}_c = -90^\circ + \angle \bar{I}_c$ nelle fasi

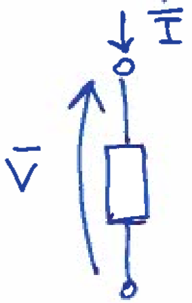
I FASORI $\bar{V}_c$ e $\bar{I}_c$ SONO "IN QUADRATURA",
LA CORRENTE È "IN ANTICIPO DI 90°" RISPETTO ALLA TENSIONE



IMPEDENZA

In generale, per un bipolo generico (eventualmente composto da resistori, induttori, condensatori, ecc...)

(conv. utilizzatori)



$$\boxed{\bar{V} = \bar{Z}\,\bar{I}}$$

RELAZIONE COSTITUTIVA NEL DOMINIO DEI FASORI

$$\boxed{\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}} \quad [\Omega]$$

È UN NUMERO COMPLESSO DETTO **IMPEDENZA**

Casi particolari:

- resistore: $\bar{Z} = R$ reale
- induttore: $\bar{Z} = jX_L$ immaginaria con $X_L > 0$
- condensatore: $\bar{Z} = jX_C$ " " $X_C < 0$

IN GENERALE SI AVRÀ

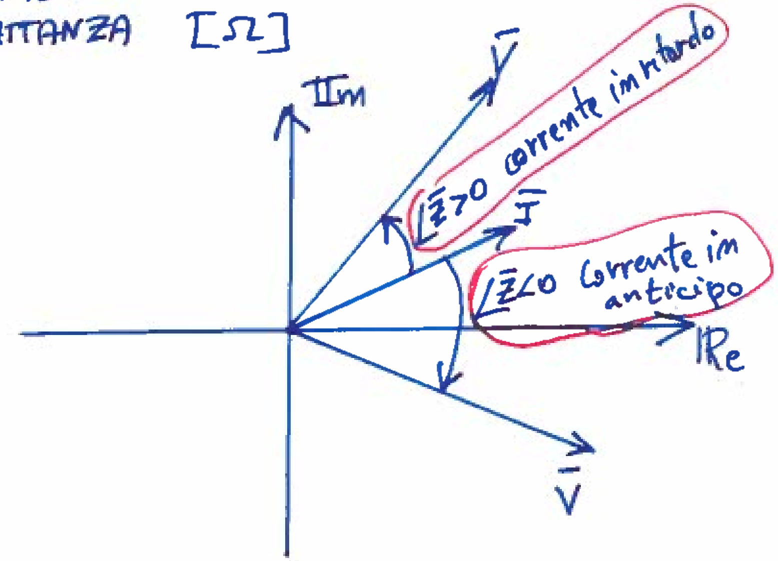
$$\boxed{\bar{Z} = R + jX}$$

R RESISTENZA $[\Omega]$

X REATTANZA $[\Omega]$

$|\bar{V}| = |\bar{Z}|\,|\bar{I}|$ nei moduli, con $\boxed{|\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}}$

$\angle\bar{V} = \angle\bar{Z} + \angle\bar{I}$ nelle fasi, con $\boxed{\angle\bar{Z} = \arctan\frac{X}{R} \ (\text{SE } R > 0)}$



CLASSIFICAZIONE DEL TIPO DI IMPEDENZA DI UN CARICO PASSIVO

Si supponga $R \geq 0$ (RESISTENZA PASSIVA)

$$\angle \bar{Z} = \mathrm{arctg}\,\frac{X}{R} \longrightarrow \boxed{-90^\circ \leq \angle \bar{Z} \leq +90^\circ}$$

Limiti del valore della fase

$\angle \bar{Z} =$

$+90^\circ$ PURAMENTE INDUTTIVA $(R=0, X>0)$

RESISTIVA-INDUTTIVA $(R>0, X>0)$

Corrente IN RITARDO

0° PURAMENTE RESISTIVA $(X=0)$ corrente IN FASE

RESISTIVA-CAPACITIVA $(R>0, X<0)$

corrente IN ANTICIPO

-90° PURAMENTE CAPACITIVA $(R=0, X<0)$

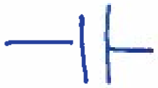
☐ AMMETTENZA

Riscriviamo le relazioni costitutive nella forma $\boxed{\bar{I} = \bar{Y}\,\bar{V}}$

$\bar{Y}$ [S] AMMETTENZA ($[\Omega^{-1}]$) SIEMENS

-  $\bar{I} = G\,\bar{V}$ G CONDUTTANZA

-  $\bar{I} = \frac{1}{j\omega L}\bar{V} = -j\frac{1}{\omega L}\bar{V} = jB_L\,\bar{V}$ $\boxed{B_L = -\frac{1}{\omega L} < 0}$ SUSCETTANZA INDUTTIVA

-  $\bar{I} = j\omega C\,\bar{V} = j\,B_C\,\bar{V}$ $\boxed{B_C = \omega C > 0}$ SUSCETTANZA CAPACITIVA

IN GENERALE SI AVRA' $\boxed{\bar{Y} = G + jB}$ G CONDUTTANZA, B SUSCETTANZA

Relazione con l'impedenza: $\boxed{\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}}$ $\boxed{|\bar{Y}| = \frac{1}{|\bar{Z}|}}$ $\boxed{\angle\bar{Y} = \angle 1^{\,0} - \angle\bar{Z} = -\angle\bar{Z}}$

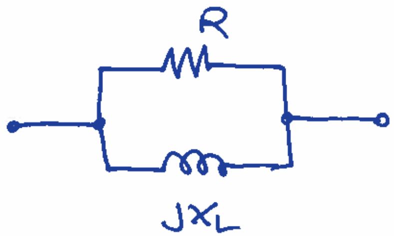
modulo reciproco — fase opposta

☐ SERIE E PARALLELO DI $\bar{Z}$ (E $\bar{Y}$): VALGONO LE FORMULE DI R (E G) PER ANALOGIA FORMALE

infatti le relazioni costitutive sono sempre equazioni lineari algebriche

Esempio Determinare l'impedenza e l'ammettenza equivalente dei bipoli (a) e (b)

(a)



(b)

$R = 6\,\Omega$
$X_L = 6\,\Omega$

(a)

$$\bar{Z} = R + jX_L = 6 + j6\ \Omega$$ (sono impedenze in serie $\longleftrightarrow$ come resistori)

$$\bar{Y} = \frac{1}{6+j6} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{1+j}\left(\frac{1-j}{1-j}\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1-j}{2} = \frac{1}{12}(1-j)\ S$$

(b)

$$\bar{Z} = \frac{R\,jX_L}{R+jX_L} = \frac{\cancel{6}\cdot j6}{\cancel{6}+j\cancel{6}}\left(\frac{1-j}{1-j}\right) = \frac{j6+6}{2} = 3 + j3\ \Omega$$ (sono impedenze in // $\leftrightarrow$ come resistori in //)

$$\bar{Y} = \frac{1}{3+j3} = \frac{1}{3(1+j)}\left(\frac{1-j}{1-j}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{1-j}{2} = \frac{1}{6}(1-j)\ S$$