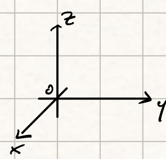
CINEMATICA DEL PUNTO MATERIALE

↳ oggetto di dimensione trascurabile
solo moto di traslazione (non su se stesso)

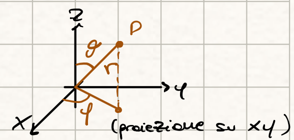
Come misurare un moto?

- sistema di riferimento :
  - SISTEMA CARTESIANO
    ↳ coordinate
    posizione del punto materiale
    istante per istante

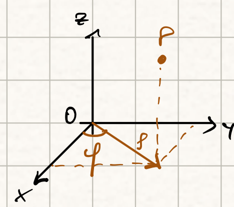


$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

  - COORDINATE SFERICHE / POLARI : 1 distanza (r), 2 angoli (ϑ, φ)



  - COORDINATE CILINDRICHE / SEMI-POLARI



z (quota)
ρ (rho)
φ

↳ il concetto di QUIETE / MOTO dipende dal sistema di riferimento scelto

SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI (no forze esterne)

- LEGGE ORARIA DEL MOTO quando si conosce la posizione (le 3 coordinate) dell'oggetto istante per istante
  → conoscendo la legge conosco il moto

  ↓ posso ricostruire
- TRAIETTORIA

→ MOTO
in base alla traiettoria (aspetto geometr.)

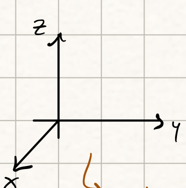
1- RETTILINEO se traiettoria è rettilinea
2- CIRCOLARE se traiettoria è circolare
3- ELLITTICO se traiettoria è ellisse
4- PARABOLICO se traiettoria è parabola
5- CURVILINEO se traiettoria q/s (generale)

→ per una descrizione completa del moto :
- aspetto geometrico - TRAIETTORIA
- LEGGE ORARIA ↪ evoluzione temporale del moto

⇓

per descrivere la legge oraria (2 modi)
1- 3 coordinate spaziali ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$)
2- traiettoria + legge oraria $\underbrace{s(t)}_{=}$
tratto di traiettoria percorso a partire da $t = 0$

Legge oraria :



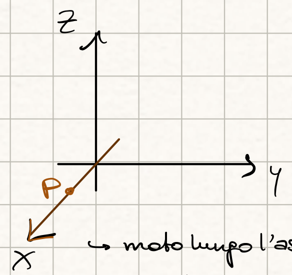
↳ sistema di rifer. ⇒ arbitrario

1- $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$

2- $\begin{cases} \text{traiettoria } f(x,y,z) \\ s(t) \end{cases}$

! Avere le 3 coordinate ⇒ tracciare la traiettoria
$\cancel{\Leftarrow}$

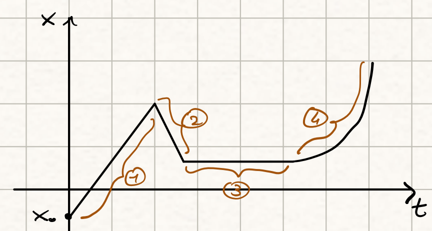
MOTO RETTILINEO



↳ moto lungo l'asse x a partire da $t=0$

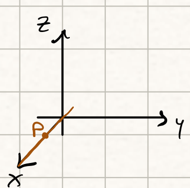
$$\begin{cases} x(t) \\ y(t)=0 \\ z(t)=0 \end{cases}$$

⇒ si può rappresentare il moto in un DIAGRAMMA ORARIO



① Il punto si muove in direzione positiva
② Il punto si muove in direzione negativa
③ Il punto è fermo
④ Il punto riparte in modo accelerato (forze coinvolte)

- VELOCITÀ MEDIA = rapidità di variazione della posizione nel tempo



se a $t=t_1$ P in $x=x_1$
$t=t_2$ P in $x=x_2$

$\Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1$; $\Delta t = t_2 - t_1$

DEF $\boxed{v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}}$ → andamento complessivo del punto

- VELOCITÀ ISTANTANEA : $\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}}$ è la derivata della posizione rispetto al tempo

! si può risalire alla posizione conoscendo la velocità e le condizioni iniziali :

P a t in x
$t+dx$ in $x+dx$

$dx = v(t)\,dt$

$$\Delta x = \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt}$$

- Unità di misura SI : $[v] = m/s$

→ MOTO UNIFORME : v costante

$$\boxed{x(t) = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v(t-t_0)}$$

↳ dipendenza lineare dal tempo

- se $v>0$: direzione positiva
- se $v<0$: direzione negativa

$v_m = \dfrac{1}{t-t_0}\displaystyle\int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$ ⇒ se moto uniforme (v cost) : $v_m = \dfrac{1}{t-t_0}\, v(t-t_0) = v$

veloc. media = veloc. istantanea

• **ACCELERAZIONE** = rapidità di variazione della velocità nel tempo

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad ; \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

accelerаz. media — accelerаz. istantanea

è derivata prima della velocità rispetto al tempo
e derivata seconda della posizione rispetto al tempo

- Unità di misura SI : $[a] = [L][T]^{-2} \rightarrow m/s^2$

- se $a = 0 \Rightarrow v = cost \rightarrow$ MOTO UNIFORME
- se $a > 0 \Rightarrow v$ aumenta nel tempo
- se $a < 0 \Rightarrow v$ diminuisce nel tempo

! il segno dell'accelerazione non dipende dalla direzione del moto

! si può risalire alla posizione e alla velocità conoscendo l'andamento dell'accelerazione e le condizioni iniziali

$$a(t) : \quad a = \frac{dv}{dt} \quad \Rightarrow dv = a\,dt \quad \Rightarrow \Delta v = \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt \quad \Rightarrow v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

- se $a = cost$: MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO
(es. acceler. gravitazionale)

$\Rightarrow v(t) = v_0 + a(t - t_0)$
se $t_0 = 0$: $v(t) = v_0 + at$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = \int_{t_0}^{t} v_0\,dt + \int_{t_0}^{t} a(t - t_0)\,dt$$

se $t_0 = 0$: $x(t) = x_0 + v_0 t + a\int_0^t t\,dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

andamento parabolico

- l'accelerazione è in funzione quadratica del tempo

quando è costante l'accelerazione ? → il corpo si trova in un CAMPO DI FORZE
non inerte
- gravitazionale
- magnetico
- elettrostatico

? MAPPATURA DELLO SPAZIO

$v(t) = v[x(t)]$
$a(t) = a[x(t)]$ } funzioni di funzione
$x(t)$

} tutti in funzione del tempo

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} v[x(t)] = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$$

sapendo che $\frac{dv}{dt} = a$, $\frac{dx}{dt} = v$: $\quad a = v\frac{dv}{dx}$

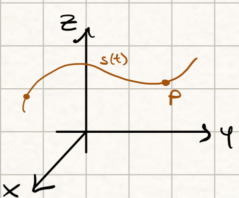
$$\Rightarrow a(x)\,dx = v\,dv$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

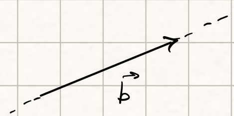
conoscendo l'accelerazione in funzione della posizione si può ricavare la variazione di velocità :

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a(x)\,dx \quad \rightarrow \text{ se } a = \text{cost} : \quad v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Se la traiettoria del moto è curvilinea usare grandezze scalari è limitante

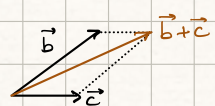


⇒ VETTORI

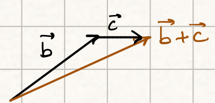


- modulo : $|\vec{b}| = b$
- direzione
- verso

- SOMMA

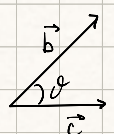


oppure



↳ DIFFERENZA : cambio verso al secondo vettore (! ordine conta)

- PRODOTTO SCALARE :



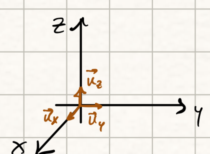
$$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}|\cdot\underbrace{|\vec{c}|\cos\theta}_{\text{proiezione di } \vec{b} \text{ su } \vec{c}}$$

! se $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\vec{b} \perp \vec{c} \Leftrightarrow |\vec{b}\cdot\vec{c}| = 0$

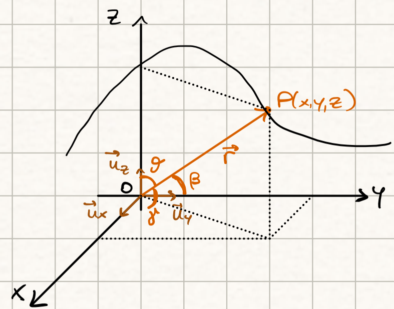
- PRODOTTO VETTORIALE : $\vec{b} \times \vec{c}$
  - modulo : $|\vec{b}\times\vec{c}| = |\vec{b}||\vec{c}|\sin\theta$
  - direzione $\perp$ piano individuato da $\vec{b}, \vec{c}$
  - verso : regola della mano destra

! se $\theta = 0$: $\vec{b} \parallel \vec{c} \Leftrightarrow |\vec{b}\times\vec{c}| = 0$

- VERSORE : modulo 1
  ↳ indica una direzione e un verso



MOTO NELLO SPAZIO :



$\vec{OP}$ vettore posizione

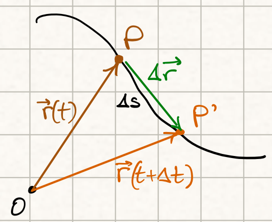
$$= \vec{r} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$x = r\cos\gamma$$
$$y = r\cos\beta \qquad\qquad \cos^2\gamma + \cos^2\beta + \cos^2\vartheta = 1$$
$$z = r\cos\vartheta$$

! L'uso dei vettori permette di scrivere equazioni invarianti, non dipendenti dal sistema di riferimento

- **VELOCITÀ VETTORIALE** : $\vec{v}$



$|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$ se traiettoria non rettilinea

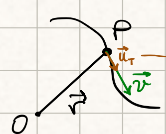
→ bisogna analizzare istante per istante

→ associandolo al sistema cartesiano: $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

⇒ per $\Delta t\to 0$: $\Delta r \sim \Delta s$ ⇒ $\vec{v}$ tangente alla traiettoria

$$\vec{v} = v\,\vec{u}_T$$

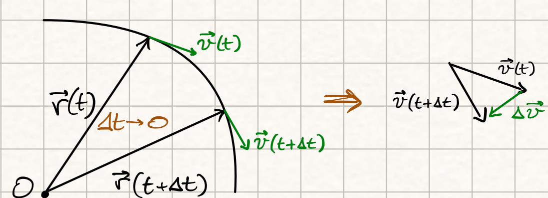


→ versore tangente alla traiettoria

- posizione : $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t}\vec{v}(t)\,dt$

- **ACCELERAZIONE VETTORIALE** : $\vec{a}$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



SCOMPOSIZIONE LUNGO LA TANGENTE E LA NORMALE (2 componenti spaziali)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{con } \vec{v} = v(t)\vec{u}_T$$

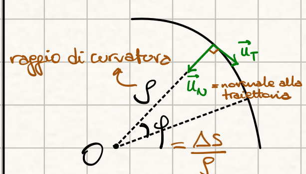
$$= \frac{d}{dt}(v(t)\,\vec{u}_T) = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

$$= \underline{\frac{dv}{dt}\vec{u}_T} + \underline{\frac{v^2}{\rho}\vec{u}_N}$$

componente tangente
→ variazione velocità lineare scalare (modulo) $[m/s^2]$

componente normale
↳ curvatura del moto

per $\Delta t\to 0$ i versori tangenti dei due punti → //
→ $\Delta\vec{v}$ diventa ⊥ versori



$$\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \vec{u}_N\frac{d\varphi}{dt} = \vec{u}_N\frac{d\varphi}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$= \vec{u}_N\left(\frac{1}{\rho}\right)v$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

ACCELERAZIONE TANGENZIALE

ACCELERAZIONE NORMALE (centripeta)

→ verso il centro della curvatura

→ − raggio di curvatura ⇒ + a_N (curva più stretta)

! L'accelerazione è scomponibile in componente tangente e normale, ma la velocità è solo tangenziale: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_T$ $\quad \vec{v} \parallel \vec{u}_T$ (tangente alla traiettoria)

- MOTO CURVILINEO: $\vec{a}_T, \vec{a}_N \neq 0$
  - ↳ se è UNIFORME ($|\vec{v}|$ cost.): $\vec{a}_T = 0$
- MOTO RETTILINEO VARIO ($|\vec{v}|$ non costante, direzione $\vec{v}$ costante): $\vec{a}_N = 0$
  - ↳ se invece MOTO RETTILINEO UNIFORME: $\vec{a} = 0$ ($\vec{a}_T = 0$ e $\vec{a}_N = 0$)

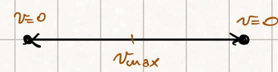
PROBLEMA INVERSO:

Conoscendo $\vec{a}(t)$ e $\vec{v}$ a $t = t_0$ ($\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$) → ? $\vec{v}(t)$

→ Integrazione: $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt$

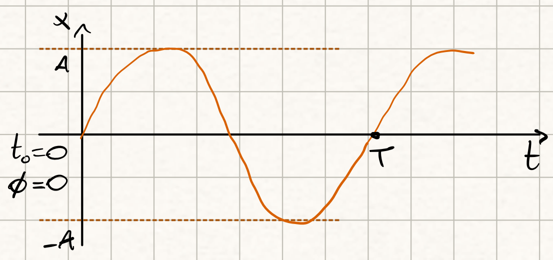
MOTO ARMONICO SEMPLICE

lungo un asse rettilineo



Legge oraria: $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$ ("fi") A, ω, ϕ costanti

A = ampiezza del moto
$(\omega t + \phi)$ = fase del moto ω = pulsazione del moto $[rad/s]$
ϕ = fase iniziale $[rad]$



non dipende dall'ampiezza

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ tempo impiegato per completare un'oscillazione (PERIODO)

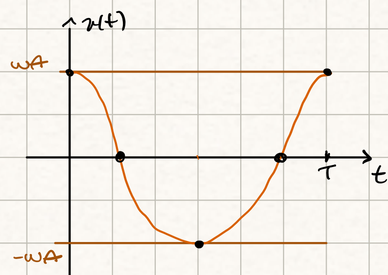
$\omega = \frac{2\pi}{T}$ moto lento se ω piccola (T grande)

$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ frequenza (n. di oscillazioni in un sec.) $[s^{-1}] = [Hz]$

- velocità dipendente dall'ampiezza e pulsazione:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \omega \cdot A\cos(\omega t + \phi)$$

→ sfasata rispetto la posizione di $\frac{\pi}{2}$:



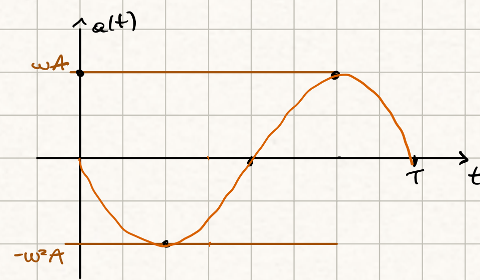
parte con velocità max

- accelerazione:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi)$$

$$= -\omega^2 x(t)$$

↳ condiz. necess. e suffic. perché il moto sia un moto armonico semplice: $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ eq. caratteristica



velocità:
dipendenza dalla posizione:

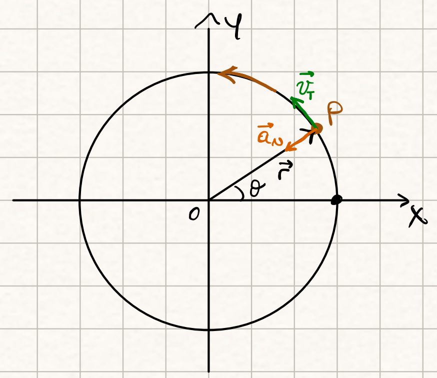
$$\begin{cases} \int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 \\ a(x) = -\omega^2 x \end{cases} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} -\omega^2 x\,dx = -\omega^2\int_{x_0}^{x} x\,dt = \frac{1}{2}\omega^2\left(x_0^2 - x^2\right)$$

$$\rightarrow v^2(x) = v_0^2 + \omega^2\left(x_0^2 - x^2\right)$$

se $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = \omega A$: $v^2(x) = \omega^2\left(A^2 - x^2\right)$

↳ p. centrale

MOTO CIRCOLARE



$|\vec{r}| = cost = R$

poichè la traiettoria è circolare si può definire la legge oraria seguendo $\theta(t)$ → coordinate polari

$$\boxed{\theta(t) = \frac{s(t)}{R}}$$

$r(t) = R = cost$

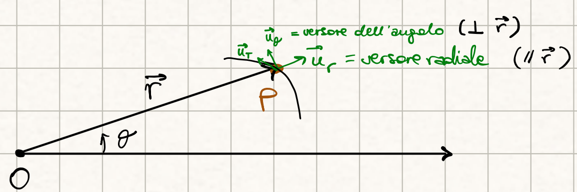
$\theta(t)$ variabile

- se uniforme: $|\vec{v}| = cost \Rightarrow \vec{a}_t = 0$
  ma $\vec{a}_N \neq 0$

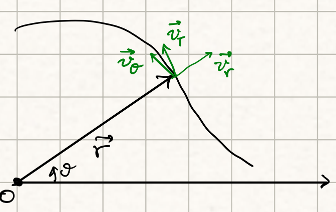
• **VELOCITÀ ANGOLARE**: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{R} \Rightarrow v = R\omega$
↳ ↳ direttamente proporzionali

⇒ se ω cost. allora v cost : MOTO CIRC. UNIFORME

rispetto coordinate polari : $\vec{r}, \theta$
(nel caso di moto curvilineo in generale) ⇒ se il moto fosse circolare $\vec{u}_\theta \equiv \vec{u}_T$



$\vec{v} = v\,\vec{u}_T$
scomponibile in $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_\theta$

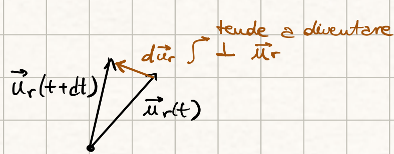


$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\vec{u}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

↳ quanto il punto si sta avvicinando o allontanando dal punto centrale
(VELOCITÀ RADIALE LINEARE)

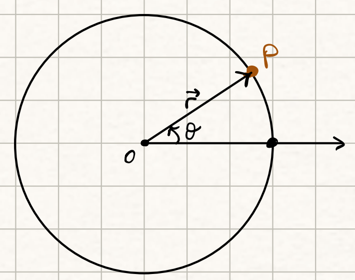
$$= \underbrace{\frac{dr}{dt}\vec{u}_r}_{\vec{v}_r} + \underbrace{r\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta}_{\vec{v}_\theta}$$

VELOCITÀ TRASVERSA → variazione della direzione



$$\Rightarrow \underset{\vec{v}_T}{\vec{v}} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

Nel caso di moto circolare:



$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = 0$$

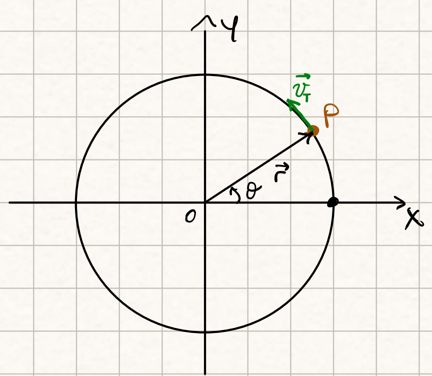
$$v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = R\omega \qquad (\vec{v}_\theta \equiv \vec{v}_T)$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME:

$$|\vec{a}_N| = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$$ (direzione $-\vec{u}_r$)

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

proiettando sul piano cartesiano:



$$\begin{cases} x = R\cos\theta = R\cos(\omega t + \theta_0) \\ y = R\sin\theta = R\sin(\omega t + \theta_0) \end{cases}$$

composizione di 2 moti rettilinei armonici semplici sfasati di $\frac{\pi}{2}$

MOTO CIRCOLARE VARIABILE: $\vec{v}(t) \neq cost$

$$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T = R\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_T$$

- ACCELERAZIONE ANGOLARE $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{a_T}{R}$

accel. ang. e acc. lineare in rapporto a meno di R

MOTO CIRCOLARE UNIFORMEMENTE ACCELERATO:

$a_T = \text{cost}$
$\alpha = \text{cost}$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \quad ; \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha \, dt$$

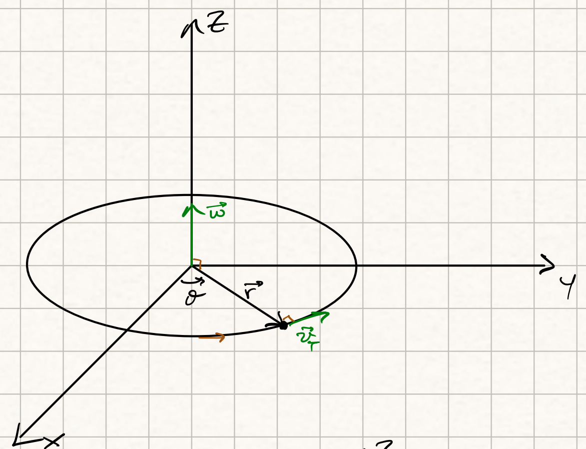
$$\omega - \omega_0 = \alpha(t - t_0) \Rightarrow \omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$$

Legge oraria per θ: $\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega \, dt = \int_{t_0}^{t} [\omega_0 + \alpha(t-t_0)] dt \Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega_0 (t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2}$$

se $t_0 = 0$: $\theta = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ ~ moto rettilineo uniformemente accelerato

passaggio a grandezze vettoriali:



- VELOCITÀ ANGOLARE VETTORIALE
  - $\omega = \frac{d\theta}{dt}$
  - direzione $\perp$ piano moto
  - verso: regola della mano destra (uscente → antiorario, entrante → orario)

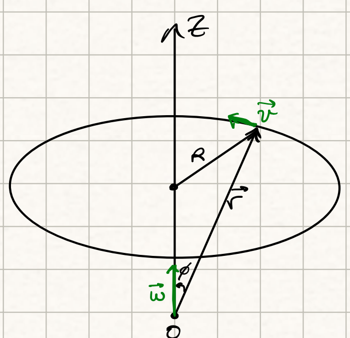
verso $\vec{\omega}$
↳ direz. moto

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ $\quad v \perp \omega \perp r$ in questo caso

tg traiett.

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \cdot r = \omega R = v$$

se sposto l'origine la relaz. non cambia



$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin\phi = \omega R = v$$

la velocità angolare ci dà l'asse di rotazione

- ACCELERAZIONE ANGOLARE VETTORIALE: $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$

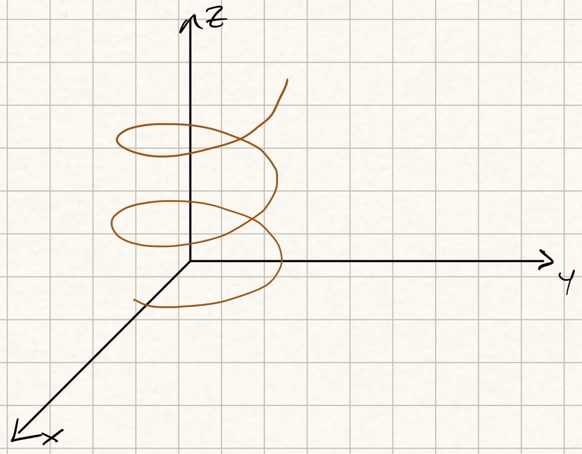
se direz. $\vec{\omega}$ cost $\Rightarrow$ $\vec{\alpha} \parallel \vec{\omega}$

- ACCELERAZIONE LINEARE VETTORIALE: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} =$

$$= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

direz. tg alla traiettoria $\Rightarrow a_T = \alpha R$ $\quad$ direz. dell'acceleraz. normale $a_N = \omega^2 R$

MOTO ELICOIDALE



$$\begin{cases} x = R\cos(\omega t) \\ y = R\sin(\omega t) \\ z = vt \qquad \text{con } v = \text{cost} \end{cases}$$

composizione di 3 moti:
armonico semplice } circolare uniforme
armonico semplice
rettilineo uniforme

- $$\begin{cases} v_x = -\omega R \sin \omega t \\ v_y = \omega R \cos \omega t \\ v_z = \text{cost} = v_{0z} \end{cases}$$

$$v = \sqrt{\underbrace{v_x^2 + v_y^2}_{\omega^2 R^2} + v_z^2} = \sqrt{\omega^2 R^2 + v_{0z}^2} = \text{cost}$$

se $\omega = \text{cost}$
(proiezione del moto su xy moto uniforme)

- $a_T = 0$; solo a_N

$$\begin{cases} a_x = -\omega^2 R \cos \omega t = -\omega^2 x \\ a_y = -\omega^2 R \sin \omega t = -\omega^2 y \\ a_z = 0 \end{cases}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \omega^2 R$$