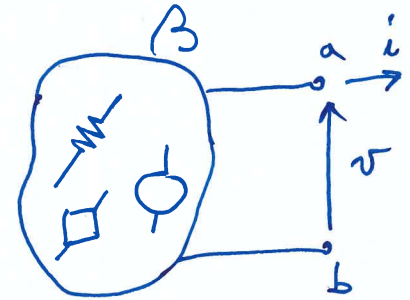


# □ TEOREMA DI NORTON

(7)

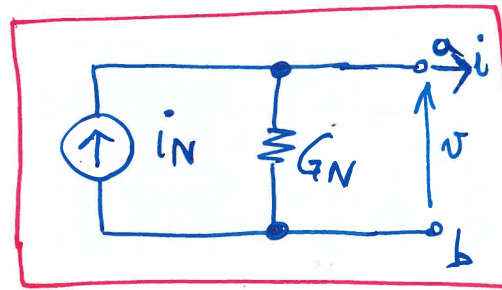
- IPOTESI :
- BIPOLO LINEARE ADINAMICO  $\beta$
  - IL BIPOLO È COMANDABILE IN TENSIONE  
(ovvero  $\exists$  g.t.c.  $i = g(v)$   
relazione costitutiva con comando in tensione)



TESI : LA RELAZIONE COSTITUTIVA DEL BIPOLO È LA RETTA

$$\tilde{i} = i'_N - G_N v \quad i'_N, G_N \in \mathbb{R}$$

E QUINDI IL BIPOLO  $\beta$  È ESTERNAMENTE EQUIVALENTE  
AL GENERATORE NON-IDEALE DI CORRENTE



"CIRCUITO EQUIVALENTE  
DI NORTON"

( N.B. Se  $G_N = 0 S \rightarrow$  generatore ideale di corrente  
Se  $i'_N = 0 A \rightarrow$  resistore  
Sono possibilità particolari )

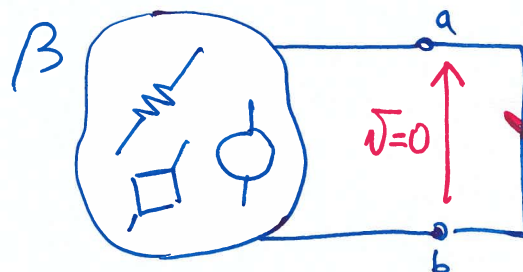
DOVE I PARAMETRI HANNO IL SEGUENTE SIGNIFICATO:

⑧

- $i_N = i_{sc}$

(sc: "short circuit")

$i_{sc}$  CORRENTE DI CORTOCIRCUITO DI  $\beta$  AI MORSETTI a b

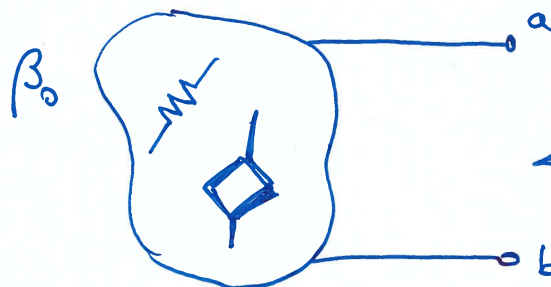
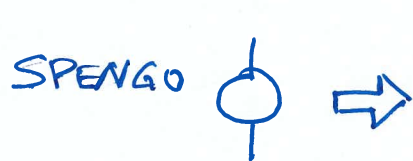


CON TENSIONE NULLA (perché ab sono CORTOCIRCUITATI)  
CORRENTE DI CORTOCIRCUITO

(attenzione:  $i_{sc}$  fluisce da a verso b esternamente, ed è uguale al generatore  $i_N$  da b verso a internamente)

- $G_N = G_{ab}$

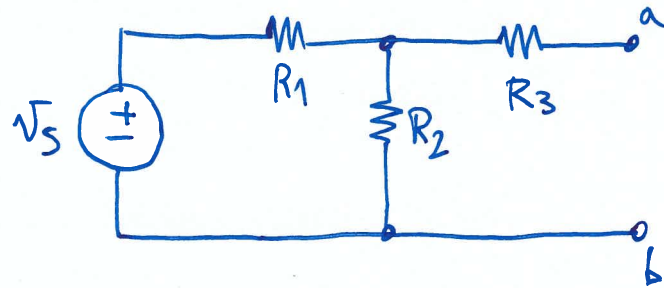
$G_{ab}$  CONDUTTANZA EQUIVALENTE DEL BIPOL  $\beta_0$  OTTENUTO SPENENDO LE SORGENTI INDIPENDENTI



$G_{ab}$  CONDUTTANZA EQUIVALENTE AI MORSETTI a b di  $\beta_0$

N.B. Per fini pratici, è data licenza di calcolo (a indicare) la  $R_{ab} = \frac{1}{G_{ab}}$   
ovvero  $R_N = \frac{1}{G_N}$  nel circuito equivalente

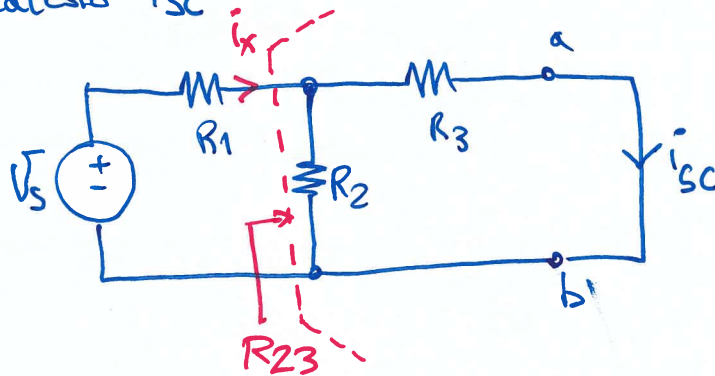
- La dimostrazione è analoga a quella del teorema di Thevenin considerando il comando in tensione anziché il comando in corrente, e si lascia per esercizio.
- Vediamo invece un esempio:



$$\begin{aligned} V_S &= 11V \\ R_1 &= 5\Omega \\ R_2 &= 10\Omega \\ R_3 &= 15\Omega \end{aligned}$$

Determinare il circuito equivalente di Norton del bipolo di morsetti a b

I) Calcolo  $i_{sc}$

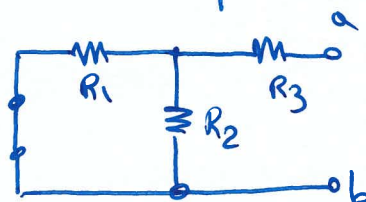


$$R_{23} = R_2 // R_3 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 15}{25} = 6\Omega$$

$$i_x = \frac{V_S}{R_1 + R_{23}} = \frac{11}{5 + 6} = 1A$$

Partitore corrente:  $i_{sc} = i_x \frac{R_2}{R_2 + R_3} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}A$

II) Calcolo  $R_{ab}$  di  $\beta_0$



$$R_{ab} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{5 \cdot 10}{15} + 15 = \frac{55}{3}\Omega$$

Circuito Equir. di Norton



$$\begin{aligned} i_N &= i_{sc} = \frac{2}{5}A \\ R_N &= R_{ab} = \frac{55}{3}\Omega \end{aligned}$$

## □ RELAZIONE FRA GLI EQUIVALENTI THEV. & NORT.

9

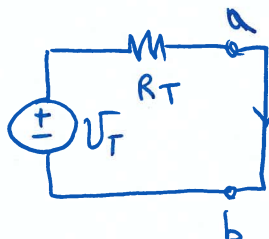
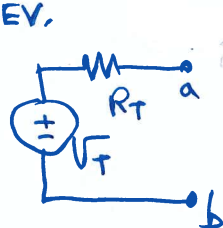
- Se sono circuiti equivalenti dello stesso bipolo  $\beta$  allora soddisfanno la trasformazione dei generatori

$$\begin{aligned} R_T &= R_N \\ V_T &= R_N i_N \\ i_N &= V_T / R_T \end{aligned}$$

(Si può passare dall'uno all'altro)

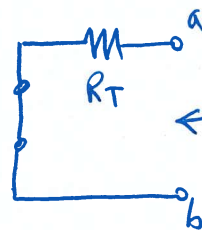
Verifica:

THEV.



$$i_N = \frac{V_T}{R_T}$$

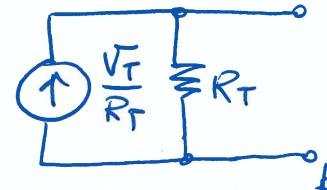
;



$$R_{ab} = R_T$$




NORTON



(Fare per esercizio il passaggio contrario).

- Si osservi inoltre che

$$R_T = R_N = \frac{V_T}{i_N} = \frac{V_{oc}}{i_{sc}}$$

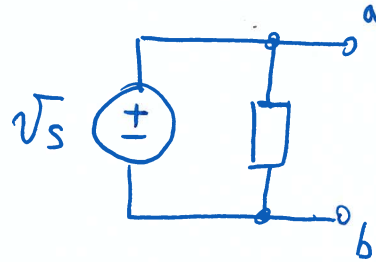
Si può determinare la resistenza equivalente come rapporto di tensione a vuoto e corrente di cortocircuito, ovvero mediante determinazioni esterne non invasive (non richiedono accesso interno al bipolo). Ci deve però essere in  $\beta$  almeno un  in modo tale che  $V_{oc} \neq 0$ ;  $i_{sc} \neq 0$ .



# □ CASI PARTICOLARI MOLTO IMPORTANTI

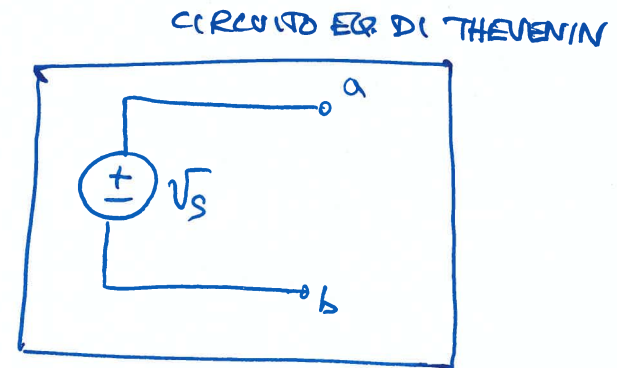
10

- GEN. IDEALE DI TENSIONE // QUALUNQUE BIPOLO



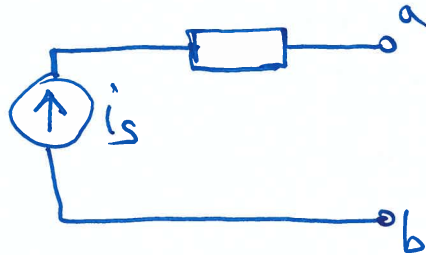
⇒  
APPLICO  
THEVENIN

$$V_{oc} = V_s$$
$$R_{ab} = 0 \Omega$$



⚡ circuito equivalente di Norton (bipolo non comandabile in tensione)

- GEN. IDEALE DI CORRENTE SERIE QUALUNQUE BIPOLO



⇒  
APPLICO  
NORTON

$$i_{sc} = i_s$$
$$G_N = 0 S$$
$$(R_N \rightarrow \infty \Omega)$$



⚡ circuito equivalente di Thevenin (bipolo non comandabile in corrente)

(N.B.



RAPPRESENTA QUALUNQUE BIPOLO LINEARE ADINAMICO  
COMPOSTO DA



)

# □ CIRCUITI CONTENENTI GENERATORI DIPENDENTI (GEN. PILOTATI)

①

Le tre REGOLE D'ORO :

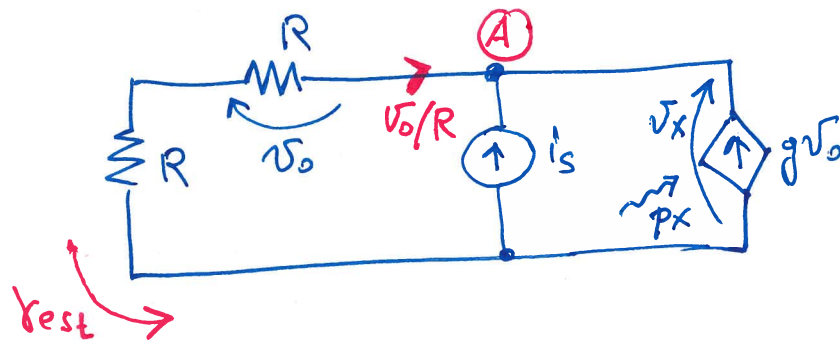
#1) Le grandezze PILOTANTI sono INCOGNITE del problema circuitale.  
Dare priorità alla loro determinazione anche prima delle ~~variabili~~<sup>incognite</sup> di effettivo interesse.

#2) Qualunque trasformazione/riduzione del circuito mediante equivalenze esterne (per es. serie, parallelo, trasf. dei generatori,...) NON DEVE FARE SPARIRE Le pilotanti dal circuito

#3) I generatori pilotati NON SI SPENGONO MAI

(non si spengono nella sovrapposizione; non si spengono quando si determinano resistenze equivalenti)

## Esempio 1



$$\begin{aligned} R &= 6 \Omega \\ i_s &= 2 \text{ A} \\ g &= 0.5 \text{ S} \end{aligned}$$

Determinare  $v_x$  e  $p_x$

- Trovo la pilotante  $v_o$

$$\text{KCL (A): } \frac{v_o}{R} + i_s + g v_o = 0 \rightarrow v_o \left( \frac{1}{R} + g \right) = -i_s$$

$$\rightarrow v_o = \frac{-i_s R}{1 + g R} = \frac{-2 \cdot 6}{1 + 0.5 \cdot 6} = -3 \text{ V}$$

- Trovo le incognite richieste

$$\text{KVL } v_{\text{test}}: v_o + R \frac{v_o}{R} + v_x = 0 \rightarrow \boxed{v_x = 2 v_o = +6 \text{ V}}$$

$$(\text{pot. entrante, conv. dei generatori}): \boxed{p_x} = -v_x (g v_o) = -6 \left( -\frac{3}{2} \right) = \boxed{9 \text{ W}}$$

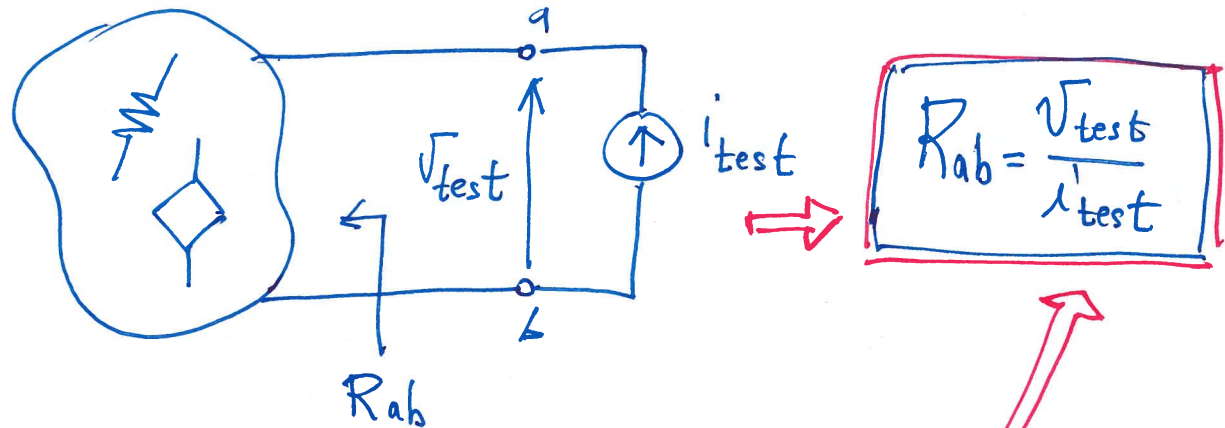
il gen. pilotato ~~assorbe~~ <sup>assorbe</sup> 9 W

## Esempio 2 (Resistenza Equivalente in caso di generatori pilotati)

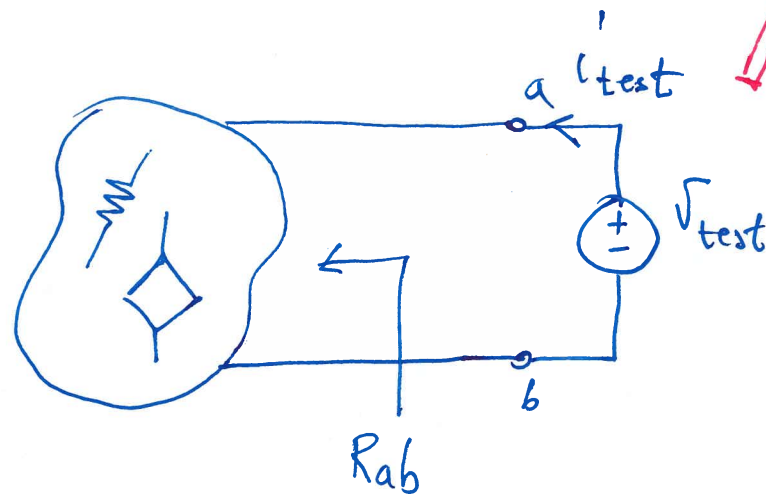
3

Come? BISOGNA UTILIZZARE LA DEFINIZIONE DI RESISTENZA EQUIVALENTE:

- Comando con un generatore di corrente arbitrario  $i_{test}$



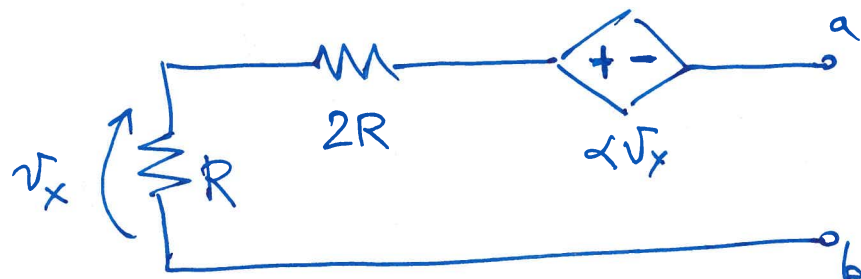
- OPPURE
- Comando con un generatore di ~~corrente~~ tensione arbitrario  $V_{test}$





2.1)

④



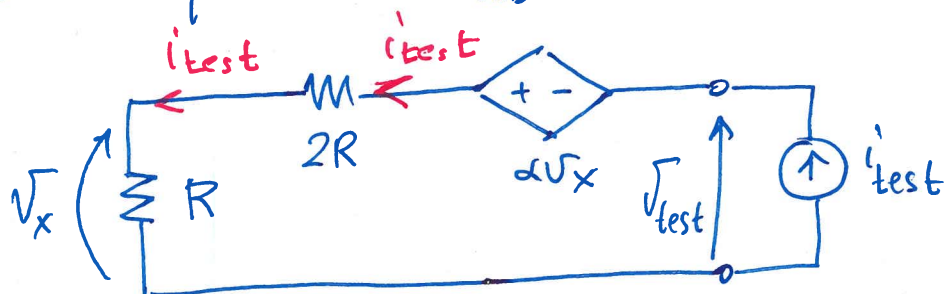
$$R = 5 \Omega$$

$$\alpha = 4$$

Determinare il circuito equivalente di Thevenin del bipolo di morsetti a b

I) tensione a vuoto  $V_{oc} = 0 V$  (non ci sono sorgenti indipendenti)

II) resistenza equivalente  $R_{ab}$



• Trovo la pilotante  
 $V_x = R i_{test}$

• Trovo  $V_{test}$

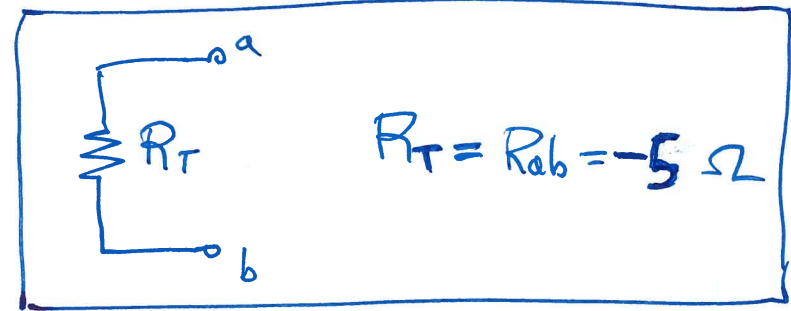
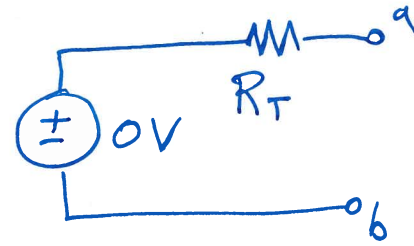
KVL:  $V_x + 2R i_{test} - \alpha V_x - V_{test} = 0$

$$V_{test} = (R + 2R - \alpha R) i_{test}$$

• Trovo  $R_{ab} = \frac{V_{test}}{i_{test}} = R(3 - \alpha) = -5 \Omega$

- Circuito equivalente di Thevenin :

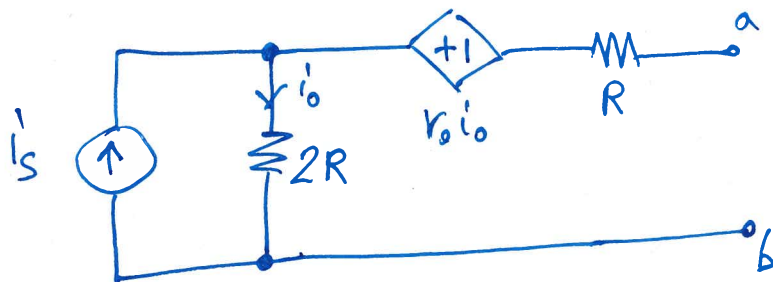
4 bis



Nota : Con generatori pilotati la resistenza equivalente PUO' risultare negativa (resistore equivalente ATTIVO).  
Infatti sono bipoli attivi.

2.2)

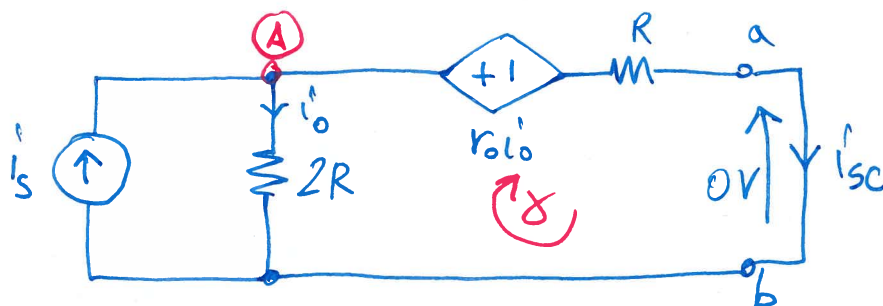
5



$$\begin{aligned} i_s &= 2A \\ R &= 2\Omega \\ v_o &= 10\Omega \end{aligned}$$

Determinare il circuito equivalente di Norton del bipolo di morsetti ab

I) Corrente di cortocircuito  $i_{sc}$



Trovo la pilotante  $i_o$   
e la corrente  $i_{sc}$

$$\text{KCL (A)}: \begin{cases} i_s - i_o - i_{sc} = 0 \end{cases}$$

$$\text{KVL } \gamma: \begin{cases} 2R i_o - v_o i_o - R i_{sc} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_{sc} = i_s - i_o \\ (2R - v_o) i_o - R i_s + R i_o = 0 \end{cases}$$

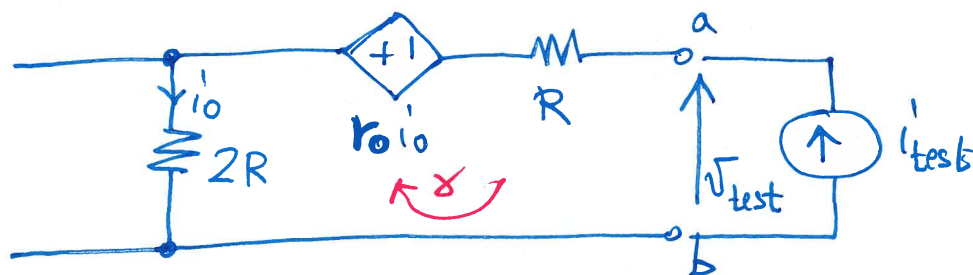
$$(3R - v_o) i_o = R i_s \quad i_o = \frac{R i_s}{3R - v_o} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2 - 10} = -1A$$

$$\boxed{i_{sc} = i_s - i_o = 2 - (-1) = 3A}$$

## II) resistenza equivalente $R_{ab}$

5bis

SPENGO  
sorgenti  
e indipendente →



• Trovo  $i_o$ stante:  $i_o' = i_{test}'$

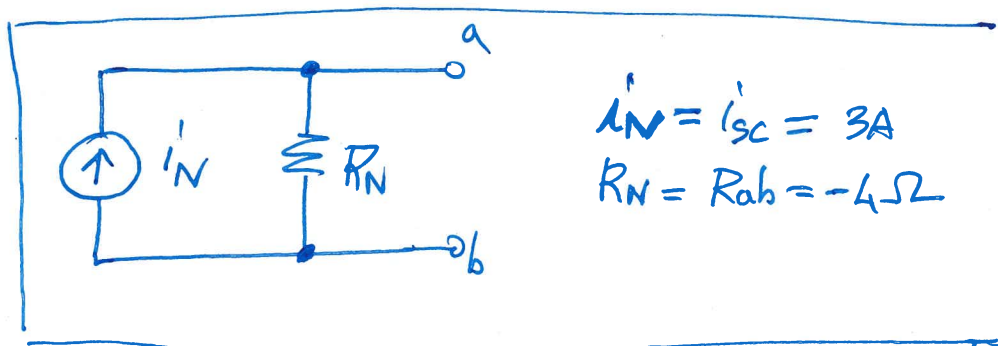
• Trovo  $V_{test}$ : KVL  $2R i_o' - r_o i_o' + R i_{test}' - V_{test} = 0$

$$V_{test} = (3R - r_o) i_{test}'$$

• Trovo  $R_{ab}$

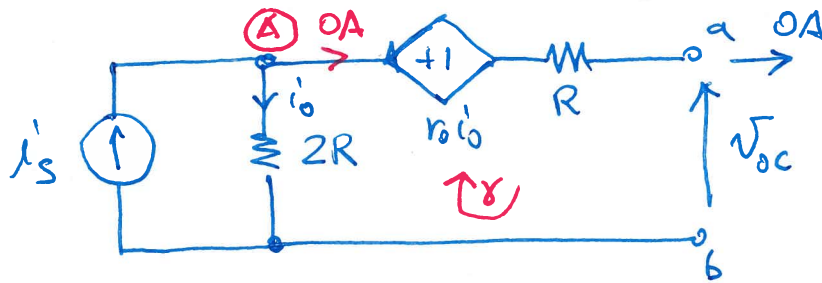
$$\boxed{R_{ab}} = \frac{V_{test}}{i_{test}'} = 3R - r_o = 6 - 10 = \boxed{-4\Omega}$$

CIRCUITO EQUIVALENTE DI NORTON:



II BIS) Alternativa per resistenza equivalente  $R_{ab}$ :  
trovo la tensione a vuoto  $V_{oc}$  (teorema di Thevenin)

5 tris



Trovo la pilotante  $i_o = i_s$  (KCL  $\Delta$ )

Trovo  $V_{oc}$ : (KVL  $\gamma$ )  $2R i_o - r_o i_o - \cancel{R \cdot 0} - V_{oc} = 0$

$$V_{oc} = (2R - r_o) i_s = (2 \cdot 2 - 10) \cdot 2 = -12V$$

Quindi (vedi Relazione fra circuiti eq. di Thevenin e Norton)

$$R_N = \frac{V_{oc}}{i_{sc}} = \frac{-12}{3} = -4 \Omega$$

da cui segue il circuito equivalente già mostrato