Appunti - Analisi I

Indice

Capitolo 1

Insiemi numerici

1.1 Richiami d'insiemistica

Gli insiemi rappresentano una "nozione primitiva": essi sono una "collezione" / "classe" / "famiglia" di "elementi" ("oggetti") tali che, assunto $A = \{a, b, c, d\}$, allora $a \in A$ (a appartiene ad A) oppure $e \notin A$ (e non appartiene ad A).

Il numero di oggetti di A si dice "cardinalità": $|A| = \#A$.

Dati due insiemi, A e B, $A = B$ se e solo se A e B hanno gli stessi elementi: $(\forall a \in A\ a \in B) \wedge (\forall b \in B\ b \in A)$.

Insiemi speciali:

- L'insieme vuoto: $\emptyset$ ($\emptyset \subseteq A$ per ogni insieme A).
- L'insieme universo U.

1.1.1 Relazioni d'inclusione

Dati due insiemi, A e B, A è contenuto in B ($A \subseteq B$) se $\forall a \in A \implies a \in B$.

La relazione d'inclusione $\subseteq$ è una "relazione d'ordine"; valgono quindi le seguenti proprietà:

- Riflessiva: $A \subseteq A$.
- Transitiva: se $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$.
- Antisimmetrica: se $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B$.

Inclusione stretta, $A \subset B$, equivale a dire che: $(\forall a \in A \implies a \in B) \wedge (\exists b \in B : b \notin A)$.

1.1.2 Operazioni con gli insiemi

Dati A, B insiemi, sono definite le seguenti operazioni:

- Unione: $A \cup B = \{x \in U \,|\, x \in A \vee x \in B\}$.
- Intersezione: $A \cap B = \{x \in U \,|\, x \in A \wedge x \in B\}$.
- Complementare: $\overline{A} = A^C = \{x \in U \,|\, x \notin A\}$.
- Differenza: $A \backslash B = \{x \in U \,|\, x \in A \wedge x \notin B\}$.
- Prodotto cartesiano: $A \times B = \{(x, y) \,|\, x \in A \wedge y \in B\}$.

1.2 Sommatoria

$$\sum_{i\in I}^{n} a_i$$

- I: insieme finito di "indici"; $i \in I$: "indice".
- a_i: numero reale che cambia al variare dell'indice.
- n: cardinalità di I.

Esempio:

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 14$$

1.2.1 Proprietà delle sommatorie

- Traslazione e riflessione dell'indice:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{n-i+1} = \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-i}$$

- Prodotto di una sommatoria per una costante:

$$c \cdot \left(\sum_{i\in I}^{n} a_i\right) = \sum_{i\in I}^{n} (c \cdot a_i)$$

- Somma di sommatorie con stessi indici:

$$\sum_{i\in I}^{n} a_i + \sum_{i\in I}^{n} b_i = \sum_{i\in I}^{n} (a_i + b_i)$$

- Sommatoria con termini costanti:

$$\sum_{i=1}^{n} c = c \cdot n$$

- Sommatorie "annidate":

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}\right) = a_{0,0} + a_{0,1} + ... + a_{0,n} + a_{1,0} + a_{2,0} + ... + a_{1,n} + ... + a_{n,n}$$

- Scomposizione di sommatoria:

$$\sum_{i=1}^{n+m} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{n+m} a_i$$

1.2.2 Progressioni geometriche

Una progressione geometrica è una successione numerica (vedi definizione formale in seguito) in cui il rapporto fra ogni termine, a meno del primo, e il suo precedente è costante:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

q si dice "ragione della progressione".

1.2.2.1 Somma degli n termini di una progressione geometrica

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

con $q \neq 1$

1.2.3 Binomio di Newton

Il binomio di Newton consente di calcolare qualunque potenza intera (positiva) di un binomio. Esso è definito come:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Dove il coefficiente binomiale è equivalente alla forma:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

I coefficienti binomiali si possono ricavare anche mediante il triangolo di Tartaglia:

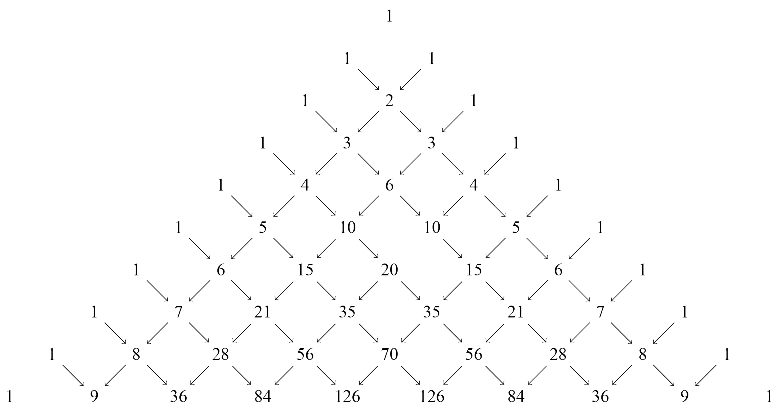

Figura 1.1: Triangolo di Tartaglia.

1.3 Produttoria

$$\prod_{i \in I}^{n} a_i$$

La "Produttoria", è il corrispettivo della sommatoria per la moltiplicazione. I rappresenta la famiglia, finita, di indici tale che $i \in I$.

La produttoria non è un operatore lineare, infatti:

- $\prod_{i \in I}^{n} (a_i + b_i) \neq \prod_{i \in I}^{n} a_i + \prod_{i \in I}^{n} b_i$.
- $\prod_{i \in I}^{n} k a_i \neq k \prod_{i \in I}^{n} a_i$.

Tuttavia:

- $\prod_{i \in I}^{n} k a_i = k^n \prod_{i \in I}^{n} a_i$.

1.4 Numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

I numeri naturali sono un concetto primitivo e sono interpretabili come una progressione geometrica di ragione 1.

L'elemento "1" è detto "elemento fondante": grazie a tale numero e all'operatore somma si possono ottenere tutti gli altri numeri.

Le operazioni interne ai numeri naturali sono la somma $+$ ed il prodotto $\cdot$ per le quali valgono le seguenti proprietà:

- Proprietà commutativa: $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}\ n_1 + \cdot\ n_2 = n_2 + \cdot\ n_1$.
- Proprietà associativa: $\forall n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}\ (n_1 + \cdot\ n_2) + \cdot\ n_3 = n_1 + \cdot\ (n_2 + \cdot\ n_3)$.
- Proprietà distributiva: $\forall n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}\ n_1 \cdot (n_2 + n_3) = n_1 n_2 + n_1 n_3$.

Osservazione: ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ ha in $\mathbb{N}$ il suo successore (il primo numero maggiore di n).

1.4.1 Principio di induzione

Sia S sottoinsieme dei numeri naturali tale che:

- $0 \in S$.
- $\forall n \in S \rightarrow n + 1 \in S$.

Allora S non è un sottoinsieme ma coincide con $\mathbb{N}$.

Assunto tale postulato è possibile definire il "principio di induzione": una modalità dimostrativa per predicati che coinvolgono i numeri naturali.

Sia $P(n)$ un predicato dipendente da $n \in \mathbb{N}$ dotato delle seguenti caratteristiche:

- $P(0)$ *vero*;
- $P(n)$ *vero* ("Ipotesi induttiva");
- Allora anche $P(n + 1)$ *vero*.

Se $P(n)$ è valida in tutto $\mathbb{N}$ si parla di "induzione forte" altrimenti, se è valido solamente in un sottoinsieme ristretto dei numeri naturali, si parla di "induzione debole".

1.4.2 Principio del minimo intero

Il principio del minimo intero, anche detto "principio del buon ordinamento", afferma che: "ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ha minimo"; con "minimo" si intende quell'elemento che è minore di tutti gli altri.

Da questo principio è possibile dedurre che $\mathbb{N}$ è un insieme "ben ordinato".

Il principio del buon ordinamento è strettamente collegato al principio d'induzione: è possibile infatti dimostrarlo se e solo se si assume il principio di induzione come valido.

1.5 Numeri interi, relativi, razionali, e reali

1.6 Dai numeri naturali $\mathbb{N}$ ai numeri interi relativi $\mathbb{Z}$

Nell'insieme delle coppie ordinate $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, composte da elementi appartenenti ad $\mathbb{N}$: (m, n), definisco una relazione $\sim$ tale che: $(m, n) \sim (a, b)$ sse $m + b = n + a$.

$\sim$ è una relazione di equivalenza in quanto:

- $\sim$ è riflessiva:
  - $(m, n) \sim (m, n) \longleftrightarrow m + n = n + m$.
- $\sim$ è simmetrica:
  - $(m, n) \sim (a, b) \longleftrightarrow m + b = n + a$;
  - $(a, b) \sim (m, n) \longleftrightarrow a + n = m + b$.
- $\sim$ è transitiva:
  - $(m, n) \sim (a, b) \longleftrightarrow m + b = n + a$;
  - $(a, b) \sim (p, q) \longleftrightarrow a + q = b + p$;
  - $(m, n) \sim (p, q) \longleftrightarrow m + q = n + p$.

La coppia (m, n), e tutte le relative equivalenti, definiscono il risultato della differenza $m - n$.

Definisco $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \backslash \sim$ l'insieme delle classi di equivalenza di $\sim$ con le seguenti operazioni ben definite:

- $(m, n)_\sim + (h, k)_\sim = (m + h, n + k)_\sim$ somma algebrica;
- $(m, n)_\sim \cdot (h, k)_\sim = (mh + nk, hn + mk)_\sim$ prodotto.

In $\mathbb{Z}$ la somma algebrica e il prodotto sono operazioni interne.

1.6.1 Dai numeri interi relativi $\mathbb{Z}$ ai numeri razionali $\mathbb{Q}$

Nell'insieme delle coppie ordinate $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})$, composte da elementi di $\mathbb{Z}$ non nulli: (m, n), definisco la relazione $\approx$ tale che: $(m, n) \approx (a, b)$ sse $mb = na$.

$\approx$ è una relazione di equivalenza. La coppia (m, n), e relative equivalenti, rappresentano il risultato del quoziente m/n.

Definisco $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})) \backslash \approx$ l'insieme delle classi di equivalenza di $\approx$ con somma e prodotto ben definite. Somma e prodotto inoltre sono operazioni interne a $\mathbb{Q}$.

In definitiva $\mathbb{Q}$ è l'estensione di $\mathbb{Z}$ ottenuta mediante l'aggiunta di tutti quei numeri $z \in \mathbb{Z}$ che sono esprimibili come rapporto tra due numeri interi m/n.

A ogni numero razionale $q \in \mathbb{Q}$ è associata una rappresentazione decimale che può essere limitata 0.1 o illimitata periodica 9.9999...

Ne risulta quindi che $\mathbb{Q}$ non è "ben ordinato" (qualsiasi sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{Q}$ potrebbe infatti non avere minimo) ma è "totalmente ordinato": dati due numeri razionali è sempre possibile operare tra loro un confronto.

La relazione d'ordine $\leq$, gode delle seguenti proprietà:

- Riflessiva: $m \leq m$.
- Antisimmetrica: $m \leq n \wedge n \leq m \rightarrow m = n$.
- Transitiva: $a \leq b \wedge b \leq c \rightarrow a \leq c$.

$\leq$ è compatibile con le operazioni di somma e prodotto:

- $\forall a, b, c$ se $a \leq b \rightarrow a + c \leq b + c$.
- $\forall a, b, c > 0$ se $a \leq b \rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$.

1.6.2 Dai numeri razionali $\mathbb{Q}$ ai numeri reali $\mathbb{R}$

È possibile estendere $\mathbb{Q}$ definendo "numero reale" un qualunque allineamento decimale sia limitato, sia illimitato periodico ma anche illimitato non periodico (π, e, $\sqrt{2}$, ...).

Su $\mathbb{R}$ sono definite due operazioni:

- Somma:
  - $\forall a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a + b \in \mathbb{R}$.
  - Gode della proprietà: commutativa, associativa.
  - Elemento neutro: 0.
  - Elemento inverso: $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists -a \in \mathbb{R} \rightarrow a + (-a) = 0$.
- Prodotto:
  - $\forall a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}$.
  - Gode della proprietà: commutativa, associativa.
  - Elemento neutro: 1.
  - Elemento inverso: $\forall a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}\ \exists\ a^{-1} \mid a^{-1} \cdot a = 1$.
- Vale la proprietà distributiva di somma rispetto al prodotto.

Anche su $\mathbb{R}$ vale la relazione d'ordine $\leq$ dotata delle caratteristiche comparabili a $\mathbb{Q}$. $\mathbb{R}$ è un campo totalmente ordinato.

1.6.2.1 Dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$

La dimostrazione si svolge per assurdo negando la tesi: assumo $\sqrt{2} \notin \mathbb{R}$ ma $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Esiste allora $\exists a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ tale che $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

Posso scegliere a, b in modo tale che i due numeri non abbiano fattori comuni $(a, b) = 1$.

Ne consegue che: $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2} \rightarrow 2b^2 = a^2$.

a^2 è un numero pari quindi anche a è un numero pari: $\exists k \in \mathbb{N} :\ a = 2k$.

$2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2 \rightarrow b^2 = 2k^2$.

Anche b^2, e quindi b, è un numero pari.

La situazione per cui $(a, b) = 1$ ma contemporaneamente a pari e b pari è assurda.

1.6.3 Assioma di completezza

L'elemento discriminante tra $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ è la "completezza".

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tali che $A, B \neq \emptyset$ e $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \mathbb{R}$ e tali che $a < b \ \forall a \in A, \forall b \in B$. Allora esiste un unico $s \in \mathbb{R}$ tale che:

- $a \leq s \leq b$.
- $a \leq s < b$.
- $a < s \leq b$.

s prende il nome di "elemento separatore".

Osservazione: l'assioma di completezza non vale in $\mathbb{Q}$.

Dimostrazione:

- $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$.
- $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \geq 2\}$.
- $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$.
- Esiste un unico valore s tale che: $\forall a \in A$, $\forall b \in B$, $a < b$.
- Tale valore è $s = \sqrt{2}$ ma $s \notin \mathbb{Q}$.

$\mathbb{R}$, a differenza di $\mathbb{Q}$, è quindi un campo ordinato completo.

1.6.4 Numerabilità

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ sono tutti insiemi infiniti; com'è possibile confrontare la loro numerosità?

Definizione: un insieme X si dice infinito quando esiste un suo sottoinsieme proprio X_0 che ha la stessa cardinalità (ossia esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di $x \in X$ e $x_0 \in X_0$).

Definizione: un insieme E si dice numerabile se ha la stessa cardinalità di N; esiste quindi $f : \mathbb{N} \to E$ biunivoca.

Osservazione: $\mathbb{Z}$ è numerabile.

1.6.4.1 Numerabilità di $\mathbb{Q}$

Dimostro che l'insieme dei numeri razionali positivi è numerabile.

Esprimo ogni numero di $\mathbb{Q}^+$ mediante frazione del tipo $\frac{n}{m}$, n, m numeri interi positivi. Le frazioni si possono disporre secondo una tabella triangolare infinita:

$\frac{n}{m}$, con $n + m =$ ...				
2	$\frac{1}{1}$			
3	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$		
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{2}{2}$	
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
...	...			

Tutte le frazioni che rappresentano numeri razionali positivi compaiono in tabella almeno una volta; è quindi possibile mettere in corrispondenza biunivoca $\mathbb{N}$ con $\mathbb{Q}^+$ percorrendo la tabella riga dopo riga (ognuna di lunghezza infinita) saltando eventualmente un elemento quando è uguale a uno già incontrato. Esemplificando:

$\mathbb{N}$:	1	2	3	4	5	...
$\mathbb{Q}^+$:	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{1}$	...

Questo dimostra che $\mathbb{Q}^+$ è numerabile. Analogamente allora anche $\mathbb{Q}$ è numerabile: associando a ogni $n \in \mathbb{N}$ un numero $q \in \mathbb{Q}$ posso stabilire, alternando tra numeri positivi e negativi, che $q = -q^+$ dove $q^+ \in \mathbb{Q}^+$.

1.6.4.2 Non numerabilità di $\mathbb{R}$

Osservazione: la cardinalità di $\mathbb{R}$ è detta "potenza del continuo".

Mostro che $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ non è numerabile. Si può mostrare che ogni intervallo $I \subset \mathbb{R}$ (con I non ridotto a un singolo numero) ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$; conseguentemente $\mathbb{R}$ non è numerabile.

Dimostro per assurdo assumendo che $[0, 1]$ si numerabile e dispongo i suoi numeri in un elenco completo $[0, 1] = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Ogni numero della successione $r_1, r_2, r_3, ...$ sarà costruito nella forma $r_i = 0, a_1a_2a_3...$ dove ogni a_i è una delle 10 cifre decimali $(0, 1, 2, ..., 9)$. Se le cifre sono tutte 0 si avrà che $r_i = 0$ mentre se sono tutte 9 si avrà che $r_i = 0, 999... \approx 1$.

Definisco ora il numero decimale:

$$r = 0, b_1b_2b_3...$$

dove le cifre b_i sono definite in funzione di a_i: se a_i è una cifra $0, 1, 2, 3, 4$ allora $b_i = 5$ altrimenti se è una cifra $5, 6, 7, 8, 9$ allora $b_i = 4$.

Con questa metodologia costruttiva risulta sempre che $b_i \neq a_i$. Il numero r, composto solamente da cifre 4 o 5, è appartenente all'intervallo $[0, 1]$ ma non trova corrispondenza in nessuna x_n dell'elenco originario.

Ne consegue che $\mathbb{R}$ non è numerabile.

1.7 Insiemi numerici limitati

Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$ si definiscono "intervallo": (a, b); $[a, b]$; $[a, b)$; $(a, b]$; $(-\infty, a)$; $(-\infty, a]$; $(a, +\infty)$; $[a, +\infty)$.

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ definisco intorno di x_0 di raggio δ, l'insieme dei $x \in \mathbb{R}$ che distano da x_0 per meno di δ: $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Tra questi, sia E un insieme numerico $E \subseteq \mathbb{R}$:

- E si dice limitato se esistono $m, M \in \mathbb{R}$ tali che $m \leq x \leq M \ \forall x \in E$.
- E si dice superiormente limitato se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq M \ \forall x \in E$.
- E si dice inferiormente limitato se esiste $m \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq m \ \forall x \in E$.

1.7.1 Massimo, minimo, maggiorante, minorante

Sia E un insieme numerico $E \subseteq \mathbb{R}$.

- $M \in \mathbb{R}$ si dice massimo per E se $M \in E$ e $M \geq x \; \forall x \in E$.
- $m \in \mathbb{R}$ si dice minimo per E se $m \in E$ e $M \leq x \; \forall x \in E$.

Osservazione: anche se E è limitato non è detto che abbia minimo o massimo.

- $a \in \mathbb{R}$ è maggiorante per E se $\forall x \in E \; x \leq a$.
- $b \in \mathbb{R}$ è minorante per E se $\forall x \in E \; x \geq b$.

Non è comunque necessario che a, b debbano appartenere ad E.

1.7.2 Estremo superiore e inferiore

Sia E un insieme numerico $E \subseteq \mathbb{R}$.

- Si dice "estremo superiore" di E ($sup(E)$) il minimo dell'insieme dei maggioranti di E.
- Si dice "estremo inferiore" di E ($inf(E)$) il massimo dell'insieme dei minoranti di E.

1.7.2.1 ! Teorema di esistenza degli estremi superiori e/o inferiori

Ogni sottoinsieme E di $\mathbb{R}$, non vuoto, è limitato superiormente (o inferiormente) e ammette estremo superiore (o inferiore).

Sia $E \subseteq R$, $E \neq \emptyset$, un insieme limitato superiormente. Definisco $M \neq \emptyset$ l'insieme dei maggioranti.

Pongo $N = \mathbb{R} \backslash M$ e osservo che:

- $N \neq \emptyset$.
- $N \cup M = \mathbb{R}$.
- $N \cap M = \emptyset$.

Sia $y \in N$: y non è un maggiorante di E.

- $\forall y \in N$ esiste $e \in E$ con $y < e$.
- $\forall x \in M$ x è maggiorante di E $x > e$.

Ne consegue che: $y < e < x$. M e N soddisfano le ipotesi dell'assioma di completezza: esiste quindi un solo $s \in R$ tale che: $(y < s \leq x)$ e $(y \leq s < x)$ $\forall y \in N \; \forall x \in M$.

Noto che $s \in M$ quindi s è il minimo di M ovvero $sup(e)$. Infatti se $s \in N$ allora esisterebbe $d \in E$ con $d > s$ (e non è un maggiorante).

Posso quindi costruire: $\frac{s+d}{2}$ tale che $s < \frac{s+d}{2} < d$. Ma $\frac{s+d}{2}$ non è un maggiorante (in quanto maggiore di s) contro l'unicità dell'elemento separatore: $s \notin N$.

1.8 Numeri complessi

In $\mathbb{R}$ esistono delle equazioni polinomiali che non hanno soluzione (ex. $x^2 + 1 = 0$).

È quindi necessario estendere l'insieme dei numeri reali in modo che un'equazione polinomiale di grado n abbia esattamente n soluzioni (contate le molteplicità).

Sia $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Definisco le seguenti operazioni $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}$:

- Somma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
- Prodotto: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Osservazioni:

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
  - $(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$, $(0, 0)$ è l'elemento neutro per la somma.
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
  - $(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b)$, $(1, 0)$ è l'elemento neutro per il prodotto.
- La somma e il prodotto sono commutativi e associativi.
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ esiste $(-a, -b)$, elemento inverso per la somma, tale che: $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$.
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ esiste $(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$, elemento inverso per il prodotto, tale che $(a, b) \cdot (\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}) = (1, 0)$.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, unitamente alle operazioni sopra descritte, forma il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

1.8.1 L'unità immaginaria

$\mathbb{C}$ estende $\mathbb{R}$ ne consegue che tutti i numeri nella forma $(a, 0)$ sono appartenenti ai numeri reali.

- $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$.
- $(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0)$.

Il numero nella forma $(0, 1)$ è invece un numero tale che:

- $(0, 1) + (0, 1) = (0, 2)$.
- $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$.

Il numero $(0, 1)$, comunemente detto anche "unità immaginaria" e indicato con i, è quindi tale che $i^2 = -1$.

Ogni numero complesso si può quindi scrivere come:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + bi$$

Questa forma è detta "forma algebrica" ed è costituita da:

- $a = Re(z)$, parte reale.
- $b = Im(z)$, parte immaginaria.
- i, unità immaginaria.

Anche le operazioni possono essere riscritte come:

- Somma: $(a + c) + i(b + d)$.
- Prodotto: $(ac - db) + i(ad + cb)$.

Nota: $\mathbb{C}$ non è un campo ordinato dunque non è possibile stabilire relazioni d'ordine $\leq$.

1.8.2 Il piano complesso

Dato un numero complesso z è possibile rappresentarlo nel piano complesso di Gauss.

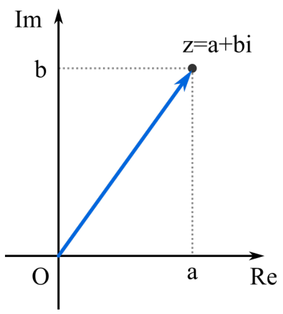

Figura 1.2: Rappresentazione di z nel piano di Gauss.

Nel piano di gauss è possibile interpretare la somma tra due numeri complessi come la somma tra due vettori.

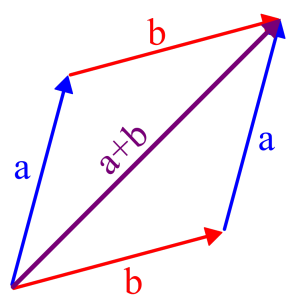

Figura 1.3: Somma, nel piano complesso, di z e w.

Considerando l'angolo θ compreso tra il l'asse dei numeri reali e il "vettore" z, di modulo ρ, è possibile scrivere z in forma trigonometrica.

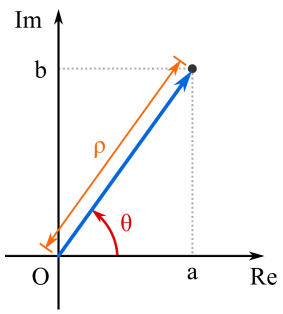

Figura 1.4: Rappresentazione trigonometrica di z.

Osservazione: l'angolo θ non è univocamente definito, è necessario infatti considerare gli angoli associati.

Esiste una relazione tra la forma algebrica e quella trigonometrica, in particolare:

$$\begin{cases} a &= \rho \cos\theta \\ b &= \rho \sin\theta \end{cases}$$

Dove, per teorema di Pitagora:

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

Osservazione:

$$\frac{b}{a} = \tan\theta$$

Definizione: Dato il numero complesso $z = a + bi \in \mathbb{C}$ definisco il coniugato il numero $\overline{z} = a - bi$.

Nel piano di Gauss il numero coniugato $\overline{z}$ è una riflessione di z rispetto all'asse reale; $Arg(\overline{z}) = 2\pi - Arg(z)$.

Proprietà:

- $|z| = |\overline{z}|$
- $z + \overline{z} = a + bi + a - bi = 2a$
- $z - \overline{z} = a + bi - a + bi = 2bi$
- $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$
- $\frac{z}{\overline{z}} = \frac{a+bi}{a-bi} \cdot \frac{a+bi}{a+bi} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + i\frac{2ab}{a^2+b^2}$

1.8.3 ! Diseguaglianza triangolare

$$|z + w| \leq |z| + |w| \; \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Dimostrazione:

- Assumo $z = a + bi$ e $w = c + di$
- Per definizione: $|z + w| \geq 0$ e $|z| + |w| \geq 0$
- Provo che: $(|z + w|)^2 \leq (|z| + |w|)^2$
  - Sviluppo il primo termine:
  - $|z + w|^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2 =$
  - $= a^2 + c^2 + 2ac + b^2 + d^2 + 2bd =$
  - $= (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + 2(ac + bd) =$
  - $= |z|^2 + |w|^2 + 2(ac + bd)$

- Sviluppo il secondo termine:
- $(|z|+|w|)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|$
- Confronto i due termini:
- $|z|^2 + |w|^2 + 2(ac+bd) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w|$
- $ac + bd \leq |z||w|$
- Se $ac + bd \geq 0$ posso procedere all'elevamento a potenza
- $(ac+bd)^2 \leq |z|^2|w|^2$
- $(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$
- $a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \geq 0$
- $(ad-bc)^2 \geq 0 \; \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1.8.4 Forma esponenziale

$$z = a + ib = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$$

1.8.5 ! Formula di De Moivre

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

In termini geometrici il vettore z nel piano di Gauss subisce una contrazione/dilatazione del modulo e una rotazione di un angolo θ per n volte.

La dimostrazione si ricava, considerando un generico numero complesso z scritto in forma esponenziale, mediante applicazione delle proprietà delle potenze.

1.8.6 Radici n-esime complesse

Dato un numero complesso w, di definisce radice n-esima complessa di w un numero $z \in \mathbb{C}$ tale che $z^n = w$.

Teorema: sia $w \in \mathbb{C}$ $w \neq 0$ $w = r(\cos\phi + i \sin\phi)$ e n numero intero $n \geq 1$, esistono esattamente n radici n-esime di w $(z_0, ..., z_{n-1})$ determinate nella forma:

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right)$$

dove: $k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n-1$.

Per accertarsi della bontà del teorema è sufficiente applicarla a una generica radice n-esima ottenuta mediante la formula di De Moivre.

Osservazione: le radici n-esime si dispongono, nel piano di Gauss, in modo regolare su una circonferenza di centro $O(0,0)$ e raggio $\sqrt[n]{n}$.

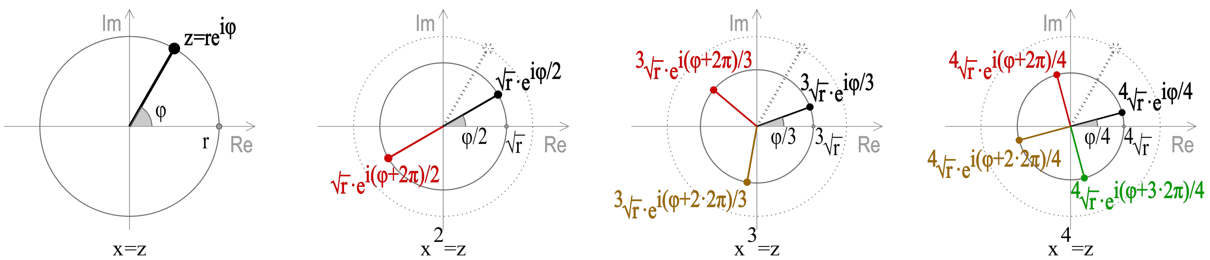

Figura 1.5: Rappresentazione nel piano complesso delle radici n-esime di z.

1.8.7 Teorema fondamentale dell'algebra

Un'equazione polinomiale di grado n $(n \geq 1)$ a coefficienti complessi:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z^1 + a_0 z^0 = 0$$

Ha esattamente n radici complesse contate con le loro molteplicità.

Capitolo 2

Successioni numeriche

2.1 Successioni numeriche reali

Una successione numerica è una legge che associa a ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ un unico numero reale.

$$a_n : n \in \mathbb{N} \to a_n \in \mathbb{R}$$

2.1.1 Successioni positive e negative

La successione a_n si dice:

- "Positiva" se $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- "Non negativa" se $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- "Negativa" se $a_n < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- "Non positiva" se $a_n \leq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- "Definitivamente positiva" se $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 \implies a_n > 0$.
- "Definitivamente negativa" se $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0 \implies a_n < 0$.

2.1.2 Successioni limitate

La successione a_n si dice:

- "Limitata superiormente" se $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} \ a_n \leq M$.
- "Limitata inferiormente" se $\exists m \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N} \ a_n \geq m$.

2.1.3 Successioni monotone

La successione a_n si dice:

- "Monotona crescente" se $\forall n \in \mathbb{N} \ a_{n+1} \geq a_n$.
- "Monotona decrescente" se $\forall n \in \mathbb{N} \ a_{n+1} \leq a_n$.
- "Monotona strettamente crescente" se $\forall n \in \mathbb{N} \ a_{n+1} > a_n$.
- "Monotona strettamente decrescente" se $\forall n \in \mathbb{N} \ a_{n+1} < a_n$.

2.1.4 Successioni convergenti

Una successione si dice “convergente” se esiste un numero $l \in \mathbb{R}$ (finito) tale che:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq n_0 \; |a_n - l| < \epsilon$$

In altre parole:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

2.1.5 Successioni divergenti

Una successione si dice “divergente” se:

- Divergenza a $+\infty$: $\forall M > 0 \; \exists \overline{n} \in \mathbb{N} : \; a_n > M$.
- Divergenza a $-\infty$: $\forall m > 0 \; \exists \overline{n} \in \mathbb{N} : \; a_n < -m$.

Nota bene: esistono anche successioni irregolari o indeterminate che non sono né divergenti né convergenti.

2.1.6 ! Teorema di unicità del limite

Sia a_n una successione convergente a $l \in \mathbb{R}$. Allora tale limite l è unico.

Dimostrazione: La dimostrazione si svolge per assurdo. Suppongo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ e $\lim_{n \to +\infty} a_n = m$ con $l \neq m$.

Per definizione di limite:

- $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq n_0 \; |a_n - l| < \epsilon$.
- $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_1 \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq n_1 \; |a_n - m| < \epsilon$.

Poiché $l \neq m$ posso calcolare $|l - m|$. $|l - m| = |l - a_n + a_n - m| = |(l - a_n) + (a_n - m)|$. Per diseguaglianza triangolare: $|(l - a_n) + (a_n - m)| \leq |l - a_n| + |a_n - m|$.

Posso dedurne quindi che $|l - m| < 2\epsilon$. Ma si raggiunge quindi un assurdo: per definizione questa proprietà deve valere $\forall \epsilon > 0$ ma ciò è irrealistico infatti: $|l - m| = 0$. Ne consegue che $l = m$.

2.1.7 ! Teorema: Una successione convergente è limitata

Dimostrazione: Suppongo che $\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$.

Allora $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq n_0 \; |a_n - l| < \epsilon$.

Scelgo $\epsilon = 1$ ne consegue che $|a_n - l| < 1$.

Per diseguaglianza triangolare: $|a_n| = |a_n + l - l| \leq |a_n - l| + |l| \leq 1 + |l| \; \forall n \geq n_0$.

Ovvero: $|a_n| \leq 1 + |l| \; \forall n \geq n_0$ quindi a_n è limitata definitivamente.

Considero l'insieme finito di elementi: $\{|a_0|; |a_1|; ...; |a_{n_0 - 1}|; |a_{n_0}|\}$ e scelgo M tale che $M = max(\{|a_0|; |a_1|; ...; |a_{n_0 - 1}|; |a_{n_0}|\})$.

Ne consegue che: $a_n \leq M \; \forall n \in \mathbb{N}$.

a_n è quindi una successione limitata.

2.1.8 ! Teorema di esistenza del limite per successioni monotone

Data una successione a_n monotona crescente; a_n ammette limite $l = sup(\{a_n\})$ e tale limite è finito se a_n è limitata superiormente (convergenza a l) altrimenti è infinito se a_n è illimitata (divergenza a $+\infty$). Un analogo teorema esiste anche per le funzioni monotone decrescenti.

Dimostrazione: Sia a_n una successione crescente $\forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} \geq a_n$ e superiormente limitata $\exists M \in \mathbb{R} :\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq M$.

$\{a_n\}$ è un insieme di numeri reali e quindi ammette estremo superiore $sup(\{a_n\})$ in virtù del fatto che a_n è limitata superiormente. Intendo dimostrare che $sup(\{a_n\})$ è finito.

Per definizione di estremo superiore: $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq sup(\{a_n\}) \implies a_n - sup(\{a_n\}) \leq 0$.

Tuttavia $\forall \epsilon > 0\ sup(\{a_n\})$ non deve essere maggiorante: deve quindi esistere un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che: $a_{n_0} > sup(\{a_n\}) - \epsilon$.

a_n è successione monotona crescente quindi: $a_{n_0} < a_{n_0+1} < a_{n_0+2} < ... \implies a_n > a_{n_0} > sup(\{a_n\}) - \epsilon\ \forall n \geq n_0$.

Conosco quindi che:

- $a_n - sup(\{a_n\}) \leq 0$;
- $a_n > sup(\{a_n\}) - \epsilon$.

Ovvero: $sup(\{a_n\}) - \epsilon < a_n < sup(\{a_n\}) < sup(\{a_n\}) + \epsilon$.

Riscrivo che: $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_0$ si ha che $-\epsilon < a_n < \epsilon$. In altre parole: $|a_n - sup(\{a_n\})| < \epsilon$.

In conclusione: $\lim_{n\to+\infty} a_n = sup(\{a_n\})$ la successione a_n converge a $sup(\{a_n\})$.

Osservazione: non basta che una successione sia limitata affinché sia convergente.

2.1.9 ! Teorema del confronto per le successioni

Siano a_n, b_n e c_n successioni tali che: $\lim_{n\to\infty} a_n = l = \lim_{n\to\infty} c_n$.

Se esiste $\overline{n} \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq \overline{n}\ a_n \leq b_n \leq c_n$, allora $\lim_{n\to\infty} b_n = l$.

Dimostrazione:

- $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 |a_n - l| < \epsilon$
- $\forall \epsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 |c_n - l| < \epsilon$

Quindi:

- $\forall n \geq max\{n_0, n_1\}\ l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$
- $\forall n \geq max\{n_0, n_1\}\ l - \epsilon < c_n < l + \epsilon$

D'altra parte $\forall n \geq \overline{n}\ a_n \leq b_n \leq c_n$, quindi: $\forall n \geq max\{n_0, n_1, \overline{n}\}$ si ha che $l - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \epsilon$.

Ovvero: $\forall \epsilon > 0\ \exists \tilde{n} = max\{n_0, n_1, \overline{n}\} :\ \forall n \geq \tilde{n}\ l - \epsilon < b_n < l + \epsilon$ cioè $|b_n - l| < \epsilon \implies \lim_{n\to\infty} b_n = l$.

2.1.10 ! Teorema di permanenza del segno

Sia a_n una successione convergente a $l \in \mathbb{R}$. Se a_n è positiva allora $l \geq 0$.

Dimostrazione: Sia premesso che:

- $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$;
- a_n successione convergente a $l \in \mathbb{R}$.

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ allora per definizione: $\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; \forall n \geq n_0 \; |a_n - l| < \epsilon$.

$-\epsilon < a_n - l < \epsilon \implies l - \epsilon < a_N < l + \epsilon$ ma sappiamo che $a_n \geq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ ma ne consegue allora che $0 \leq a_n \leq l + \epsilon$.

Finalmente possiamo affermare che $l + \epsilon > 0 \; \forall \epsilon > 0$ e quindi che $l > 0$.

Osservazione: se a_n converge a l e $a_n \leq 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ allora $l \leq 0$.

2.1.11 Confrontare due successioni

Siano a_n e b_n due successioni infinite. Allora il limite $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n}$ può essere:

- 0 se a_n è di ordine inferiore rispetto a b_n
- ∞ se a_n è di ordine superiore rispetto a b_n
- $l \neq 0$ se a_n e b_n hanno lo stesso ordine.
- l non esiste se a_n e b_n non sono confrontabili.

Siano a_n e b_n due successioni infinitesime. Allora il limite $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n}$ può essere:

- 0 se a_n è di ordine superiore rispetto a b_n
- ∞ se a_n è di ordine inferiore rispetto a b_n
- $l \neq 0$ se a_n e b_n hanno lo stesso ordine.
- l non esiste se a_n e b_n non sono confrontabili.

Ricorda:

- Una successione si dice “infinita” se $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.
- Una successione si dice “infinitesima” se $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

2.1.11.1 Successioni asintotiche

Se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ allora a_n e b_n si dicono asintotiche.

La relazione di “asintotico” è una relazione di equivalenza. Sono dunque verificate le proprietà:

- Riflessiva: $a_n \sim a_n$.
- Simmetrica: $a_n \sim b_n \implies b_n \sim a_n$.
- Transitiva: $a_n \sim b_n \wedge b_n \sim c_n \implies a_n \sim c_n$.

Osservazione: se $a_n \sim b_n$ allora:

- $a_n \cdot c_n \sim b_n \cdot c_n$.
- $\frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{c_n}$.

Inoltre se $a_n \sim a'_n$, $b_n \sim b'_n$ e $c_n \sim c'_n$ allora:

- $\frac{a_n \cdot b_n}{c_n} \sim \frac{a'_n \cdot b'_n}{c'_n}$.

Attenzione: non vale l'analogo per le forme algebriche ed esponenziali.

2.1.12 Criterio del rapporto

Sia a_n una successione positiva; se esiste $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n+1}{a_n}$ allora:

- se $l < 1$ la successione converge a 0.
- se $l > 1$ la successione converge a $+\infty$.
- se $l = 1$ non si può stabilire il carattere di a_n.

2.2 Algebra dei limiti

2.2.1 Regole e proprietà per successioni convergenti

Siano a_n e b_n due successioni convergenti tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = m$.

Allora:

- $\lim_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = l \pm m$.
- $\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = l \cdot m$.
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n}$ con $b_n \neq 0$ e $m \neq 0$.
- $\lim_{n\to+\infty}(a_n)^{b_n} = l^m$ con $a_n \geq 0$ e $l \geq 0$.

2.2.2 Regole e proprietà per successioni convergenti e divergenti

Siano a_n e b_n due successioni tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = l$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

Allora:

- $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.
- $\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = \begin{cases} +\infty \; se \; l > 0 \\ -\infty \; se \; l < 0 \end{cases}$.
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ se $a_n \neq 0$ e $l \neq 0$.
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} +\infty \; se \; l > 0 \\ -\infty \; se \; l < 0 \end{cases}$.
- $\lim_{n\to+\infty}(a_n)^{b_n} = \begin{cases} +\infty \; se \; a_n > 1 \; e \; l > 1 \\ 0 \; se \; 0 < a_n < 1 \; e \; 0 < l < 1 \end{cases}$.

2.2.3 Regole e proprietà per successioni divergenti

Siano a_n e b_n due successioni divergenti tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$.

Allora:

- $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.
- $\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$.

2.2.4 Forme d'indeterminazione

Alcune operazioni tra limiti possono produrre, in certi casi, situazioni d'indeterminazione: $[\infty - \infty]$, $[\frac{\infty}{\infty}]$, $[0 \cdot \infty]$, $\left[\frac{0}{0}\right]$, $[1^\infty]$.

La risoluzione delle forme d'indeterminazione consiste, ove possibile, nel ricondursi mediante passaggi algebrici a situazioni note.

2.2.5 Gerarchia degli infiniti

Teorema:

- $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0 \ \forall\alpha > 0, \forall a > 1$.
- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0 \ \forall\alpha > 0, \forall a > 1$.
- $\lim n \to +\infty \frac{a^n}{n!} = 0 \ \forall a > 1$.
- $\lim n \to +\infty \frac{n!}{n^n} = 0$.

2.2.6 Limiti notevoli

2.2.6.1 Limiti notevoli con funzioni trigonometriche

$\lim_{n\to 0} \frac{\sin n}{n} = 1$	$\lim_{n\to 0} \frac{\arcsin n}{n} = 1$
$\lim_{n\to 0} \frac{\tan n}{n} = 1$	$\lim_{n\to 0} \frac{\arctan n}{n} = 1$
$\lim_{n\to 0} \frac{1-\cos n}{n} = 0$	$\lim_{n\to 0} \frac{1-\cos n}{n^2} = \frac{1}{2}$
$\lim_{n\to 0} \frac{\arccos n^2}{1-n} = 2$	$\lim_{n\to 0} \frac{\sin mn}{\sin nn} = \frac{m}{n}$

2.2.6.2 Limiti notevoli con esponenziali e logaritmi

$\lim_{n\to\pm\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$	$\lim_{n\to 0} (1 + kn)^{\frac{1}{n}} = e^k$
$\lim_{n\to 0} \frac{\ln(1+n)}{n} = 1$	$\lim_{n\to 0} \frac{\log_a(1+n)}{n} = \log_a e$
$\lim_{n\to 0} \frac{e^n-1}{n} = 1$	$\lim_{n\to 0} \frac{a^n-1}{n} = \ln a$
$\lim_{n\to 0} \frac{(1+n)^k-1}{n} = k$	

Capitolo 3

Serie numeriche

3.1 Serie numeriche reali

Con "serie numerica" si intende la sommatoria dei termini di una successione numerica: data la successione $\{a_n\}$, la serie associata è $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Con "somma parziale" si intende la sommatoria dei k termini di una successione numerica: data $\{a_n\}$ successione numerica, la somma parziale è definita come $S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$. È quindi possibile ricondurre la serie associata ad $\{a_n\}$ al limite: $\lim_{n\to+\infty} S_k$.

3.1.1 Carattere di una serie

Data una successione $\{a_n\}$ e costruita S_k la successione delle somme parziali $S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$; si dice che la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è:

- Convergente: se esiste ed è finito $\lim_{n\to+\infty} S_k = l$; l si dice "somma della serie".
- Divergente: se $\lim_{n\to+\infty} S_k = \pm\infty$.
- Irregolare: se il limite $\lim_{n\to+\infty} S_k = \nexists$.

3.1.2 Esempi notevoli

- Sia $a_n = n$;
  - $S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n = \frac{k(k+1)}{2}$.
  - La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge a $+\infty$.
- "Serie geometrica": Sia $a_n = q^n$;
  - $S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$.
  - La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge a $\frac{1}{1-q}$ se $|q| < 1$;
  - La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge a $+\infty$ se $q \geq 1$;
  - La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è irregolare se $q \leq -1$.
  - Il carattere della serie dipende dal comportamento, al limite, del termine q^{k+1}.
- "Serie di Mengoli": Sia $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$;
  - La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge a 1 è infatti possibile riscrivere $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
  - Parte dei termini si annullano reciprocamente; la serie si dice dunque telescopica (vedi sotto).

- "Serie armonica generalizzata": Sia $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$;
  - Se $\alpha \leq 1$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge;
  - Se $\alpha > 1$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.
  - Se $\alpha = 1$ la serie prende il nome di "serie armonica".

3.1.3 Serie telescopiche

Una serie è telescopica se il suo termine generale a_n è nella forma $a_n = b_n - b_{n+1}$ dove b_n è anch'essa una successione di numeri in $\mathbb{R}$. Il carattere di b_{n+1} determina quello della serie associata ad a_n.

3.1.4 ! Condizione necessaria per la convergenza di una serie

Data una successione a_n; affinché la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converga è necessario che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dimostrazione: Sia dato che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = l$ allora devo dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Costruisco $S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ e noto che: $S_{k+1} = a_{k+1} + \sum_{n=0}^{k} a_n(S_k)$; ne consegue che: $a_{k+1} = S_{k+1} - S_k$ ma quindi $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Allora: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - S_{n-1} = l - l = 0$.

Attenzione: il teorema esprime una condizione necessaria ma non sufficiente a garantire la convergenza di una serie.

3.1.5 Serie a termini positivi

Data la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ essa si dice a termini positivi se $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ o più in generale se $a_n \geq 0\ \forall n \geq n_0$.

Osservazione: Una serie a termini positivi non è mai irregolare

3.1.5.1 ! Criterio del confronto

Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie numeriche a termini positivi tali che $a_n \leq b_n\ \forall n \geq n_0$. Allora:

- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge;
- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge.

Dimostrazione: Considero le somme parziali $S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ e $T_k = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$; poiché $a_n \leq b_n\ \forall n \geq n_0$ allora si ha che $k \geq n_1\ S_k \leq T_k$.

- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge allora $\lim_{k\to+\infty} T_k = t$ quindi per il teorema del confronto fra successioni $\lim_{k\to+\infty} S_k \leq \lim_{k\to+\infty} T_k = t$. $S_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ è a termini positivi quindi $\lim_{k\to+\infty} S_k \leq t$ ma allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.
- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge allora $\lim_{k\to+\infty} S_k = +\infty$ quindi per il teorema del confronto fra successioni $\lim_{k\to+\infty} T_k \geq \lim_{k\to+\infty} S_k = +\infty$. $T_k = \sum_{n=0}^{k} b_n$ è a termini positivi quindi $\lim_{k\to+\infty} T_k \geq +\infty$ ma allora $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge.

3.1.5.2 ! Criterio del confronto asintotico

Siano $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie numeriche a termini positivi tali che $a_n \sim b_n$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$; allora due serie hanno lo stesso carattere.

Dimostrazione: Dato che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ allora $\forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0\ |\frac{a_n}{b_n} - 1| < \epsilon$; per definizione di modulo: $1 - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < 1 + \epsilon$. Siccome $b_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ allora $(1-\epsilon)(b_n) < a_n < (1+\epsilon)(b_n)$.

Per il criterio del confronto:

- Se $(1-\epsilon)(b_n) < a_n$:
  - Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge allora $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge;
  - Se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.
- Se $a_n < (1+\epsilon)(b_n)$:
  - Se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge;
  - Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge allora $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge.

3.1.5.3 ! Criterio della radice e del rapporto

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi. Considero $b = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ oppure $b = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Allora:

- Se $b > 1$ la serie diverge;
- Se $b < 1$ la serie converge;
- Se $b = 1$ non si può dedurre nulla sul carattere della serie.

Dimostrazione: Criterio della radice:

- Se $b > 1$ il termine generale a_n non tende a 0; la condizione necessaria per la convergenza di una serie non è soddisfatta e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.
- Se $b < 1$ esiste $q \in \mathbb{R} : b < q < 1$, per definizione di limite $\forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 |\sqrt[n]{a_n} - b| < \epsilon$; in particolare quindi $\sqrt[n]{a_n} < b + \epsilon < q + \epsilon$ ma ciò significa che $a_n < (q+\epsilon)^n$. Siccome ϵ è "piccolo a piacere" suppongo che $q + \epsilon < 1$; per il criterio del confronto deduco che $a_n < (q+\epsilon)^n = b_n$. Siccome $\sum_{n=0}^{+\infty}(q+\epsilon)^n$ è una serie geometrica di ragione $q + \epsilon < 1$ essa converge dimostrando anche la convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Dimostrazione: Criterio del rapporto:

- Se $b > 1$ il termine generale a_n non tende a 0; la condizione necessaria per la convergenza di una serie non è soddisfatta e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.
- Se $b < 1$ esiste $q \in \mathbb{R} : b < q < 1$, per definizione di limite $\forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 |\frac{a_{n+1}}{a_n} - b| < \epsilon$; in particolare quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} < b + \epsilon < q + \epsilon$ ne posso dedurre che $\forall n \geq n_0$: $a_n < (q+\epsilon)^{n-n_0} a_{n_0}$. Siccome ϵ è "piccolo a piacere" suppongo che $q + \epsilon < 1$; per il criterio del confronto deduco che $a_n < (q+\epsilon)^{n-n_0} a_{n_0}$. Siccome $\sum_{n=0}^{+\infty}(q+\epsilon)^{n-n_0} a_{n_0}$ è una serie geometrica di ragione $q + \epsilon < 1$ essa converge dimostrando anche la convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3.1.5.4 Criterio di sostituzione o condensazione

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi tale che a_n sia non crescente $a_n \geq a_{n+1}$. Allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se converge $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_2^n$.

3.1.6 Serie a termini non positivi

3.1.6.1 Serie a termini negativi

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ una serie a termini negativi ($b_n \leq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$) allora posso considerare la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ costruita come $a_n = -b_n$ e operare le stesse considerazioni fatte in precedenza sulle serie a termini positivi prestando particolare attenzione al segno invertito.

3.1.6.2 Serie a termini di segno alterno

Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice a segni alterni se è riconducibile alla forma: $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n b_n$ (con b_n successione a termini positivi).

3.1.6.2.1 Criterio di Leibniz Data una serie a segno alterno, questa converge se valgono le seguenti condizioni:

- $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$;
- b_n successione monotona decrescente.

3.1.6.3 Serie a termini di segno variabile

3.1.6.3.1 ! Criterio di convergenza assoluta Data una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ a segno variabile, definisco la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ (a termini positivi). La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice che "converge assolutamente" se converge la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

Teorema: Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie che converge assolutamente; allora tale serie converge anche semplicemente e vale la diseguaglianza: $|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

Dimostrazione: Sia a_n una successione numerica a segno non costante allora può essere riscritta come: $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ ma ciò vuol dire che la serie associata $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + |a_n| - \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se converge anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + |a_n|$. Si osserva che $a_n + |a_n| \geq 0$ e che $a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$.

Per il criterio del confronto: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + |a_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 2|a_n|$. Siccome $\sum_{n=0}^{+\infty} 2|a_n|$ converge per ipotesi, allora anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n + |a_n|$ converge; ciò significa in definitiva che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

Ne consegue che la convergenza assoluta implica quella semplice.

Capitolo 4

Funzioni

4.1 Caratteristiche generali

Una funzione è formalmente definita come una terna di elementi (A, B, f) tale che:

- A, B: insiemi generici.
- f: legge che associa a ogni elemento $a \in A$ uno e un solo elemento $b \in B$.

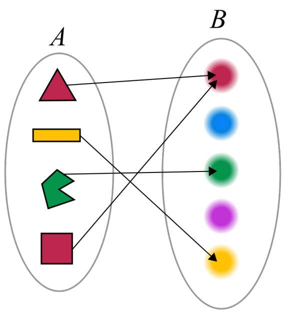

Figura 4.1: Interpretazione grafica di una funzione.

Data quindi la funzione $f : A \to B$, A prende il nome di "dominio" di f mentre B è detto "codominio". $b \in B$ è si dice "immagine" di $a \in A$ (che, a sua volta, è "controimmagine" di $b \in B$) attraverso la funzione f.

L'insieme delle immagini di f: $Im(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$ è sempre un sottoinsieme del dominio $Im(f) \subseteq B$.

L'insieme delle coppie ordinate (x, y), derivanti dal prodotto cartesiano $A \times B$, è definito "grafico" di f; formalmente: $\Gamma(f) = \{(x, y) \in A \times B \mid x \in A \wedge y = f(x)\}$.

4.1.1 Funzioni reali di variabili reali

Principale soggetto dello studio dell'analisi funzionale sono le funzioni reali di variali reali $f : A \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Il "dominio naturale" $(\mathbb{D}_f)$ di una funzione è l'insieme dei valori reali tali che la funzione f abbia significato.

Data una funzione $f : A \to B$, se f è funzione reale di variabile reale $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, allora $Im(f) \subseteq B$ è anche sottoinsieme di $\mathbb{R}$: $Im(f) \subseteq B \subseteq R$.

4.1.2 Funzioni limitate

Una funzione $f : A \to B$ si dice "limitata" se è limitato l'insieme $Im(f)$ ovvero se $\exists M \in \mathbb{R}$ e $\exists m \in \mathbb{R}$ tali che: $\forall x \in A : m \leq f(x) \leq M$.

Una funzione $f : A \to B$ si dice "superiormente limitata" se è superiormente limitato l'insieme $Im(f)$ ovvero se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che: $f(x) \leq M\ \forall x \in A$.

Una funzione $f : A \to B$ si dice "inferiormente limitata" se è inferiormente limitato l'insieme $Im(f)$ ovvero se $\exists m \in \mathbb{R}$ tale che: $m \leq f(x)\ \forall x \in A$.

4.1.3 Funzioni monotone

Sia la funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ allora:

- f si dice "crescente" in $I \subseteq A$ se: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_2 \geq x_1$ allora $f(x_2) \geq f(x_1)$.
- f si dice "strettamente crescente" in $I \subseteq A$ se: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_2 > x_1$ allora $f(x_2) > f(x_1)$.
- f si dice "decrescente" in $I \subseteq A$ se: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_2 \leq x_1$ allora $f(x_2) \leq f(x_1)$.
- f si dice "strettamente decrescente" in $I \subseteq A$ se: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_2 < x_1$ allora $f(x_2) < f(x_1)$.

Tutte queste funzioni sono "monotone" in I.

4.1.4 Funzioni suriettive e iniettive

Sia $f : A \to B$:

- f è "suriettiva" se $Im(f) = B$ oppure, in maniera analoga, se: $\forall b \in \mathbb{R}\ \exists x \in A \mid f(x) = b$.
  - La suriettività non è una caratteristica particolarmente stringente in quanto è possibile restringere il codominio di f in modo che coincida con la sua immagine creando quindi una nuova funzione $\overline{f}$.
- f è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ f(x_1) = f(x_2)$ se e solo se $x_1 = x_2$.
  - Per ogni elemento del codominio esiste ed è unico un elemento del dominio. $\forall y \in Im(f)\ \exists! x \in A : f(x) = y$.

Se una funzione è sia suriettiva che iniettiva allora è "biunivoca".

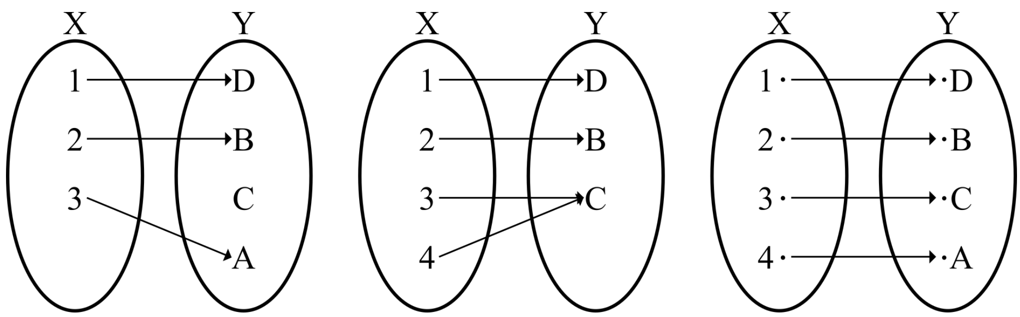

Figura 4.2: Rappresentazione di una funzione (unicamente) suriettiva, una funzione (unicamente) iniettiva e di una funzione biunivoca.

4.1.5 Funzioni inverse

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione iniettiva definisco $f^{-1} : Im(f) \to A = \mathbb{D}_f$ la sua funzione inversa che associa a ogni elemento del codominio di f la relativa controimmagine nel dominio: $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$.

Osservazione: definendo la funzione come $f^{-1} : Im(f) \to A = \mathbb{D}_f$ ho forzato la suriettività della funzione.

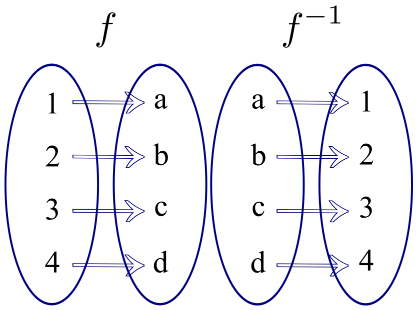

Figura 4.3: Rappresentazione di una funzione e la relativa inversa.

4.1.5.1 Proprietà delle funzioni inverse

- $\mathbb{D}_{f^{-1}} = Im(f)$.
- $\mathbb{D}_f = Im(f^{-1})$.
- $f^{-1} : Im(f) \to \mathbb{D}_f$ è biunivoca.
- Il grafico di f^{-1} si ottiene mediante simmetria di f rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Osservazione: se una funzione è monotona allora è iniettiva (e quindi è possibile costruirne l'inversa).

4.1.6 Funzioni pari e dispari

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è "funzione pari" se e solo se:

- A è dominio simmetrico rispetto all'origine;
- $\forall x \in A\ f(-x) = f(x)$.

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è "funzione dispari" se e solo se:

- A è dominio simmetrico rispetto all'origine;
- $\forall x \in A\ f(-x) = -f(x)$.

Osservazione:

- Se f è pari allora $\Gamma(f)$ è simmetrico rispetto all'asse y.
- Se f è dispari allora $\Gamma(f)$ è simmetrico rispetto all'origine.

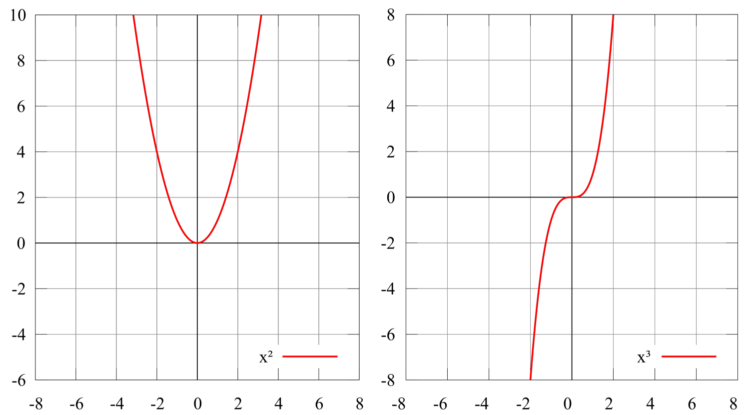

Figura 4.4: Grafico di $f(x) = x^2$, funzione pari, e di $f(x) = x^3$, funzione dispari.

4.1.7 Funzioni periodiche

Si dice che f è periodica di periodo T se: $\forall x \in \mathbb{D}_f$ esiste $x + T \in \mathbb{D}_f$ allora $f(x) = f(x + T)$.

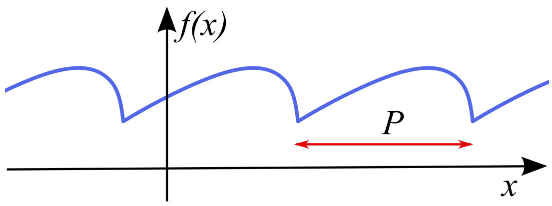

Figura 4.5: Grafico di una funzione periodica.

4.1.8 Funzioni elementari

- Funzioni potenza a esponente naturale, intero, razionale o reale.
  - $f(x) = x^a$

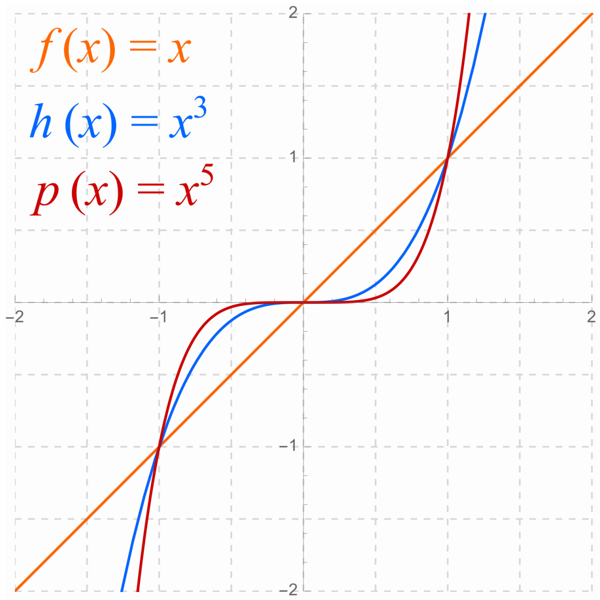

Figura 4.6: Grafici di funzioni potenza a esponente naturale.

- Funzioni esponenziali e logaritmiche.
  - $f(x) = a^x$
  - $f(x) = \log_a(x)$

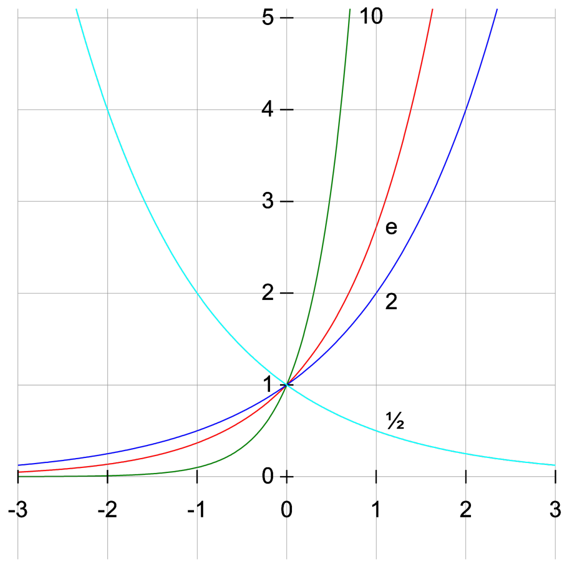

Figura 4.7: Grafici di funzioni esponenziali e logaritmiche.

- Funzioni trigonometriche.
  - $f(x) = \sin(x)$
  - $f(x) = \cos(x)$
  - $f(x) = \tan(x)$

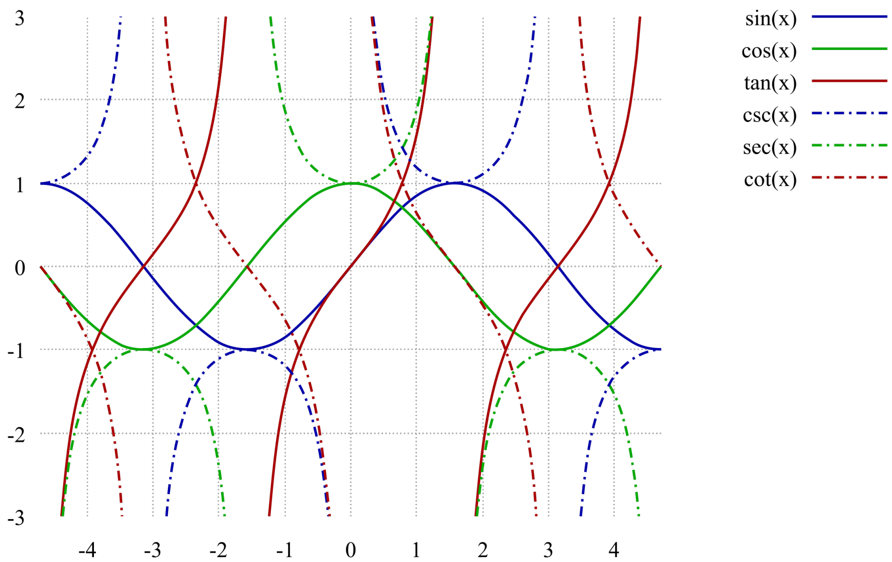

Figura 4.8: Grafici di funzioni trigonometriche.

- Funzioni trigonometriche inverse.

- $f(x) = \arcsin(x)$
- $f(x) = \arccos(x)$
- $f(x) = \arctan(x)$

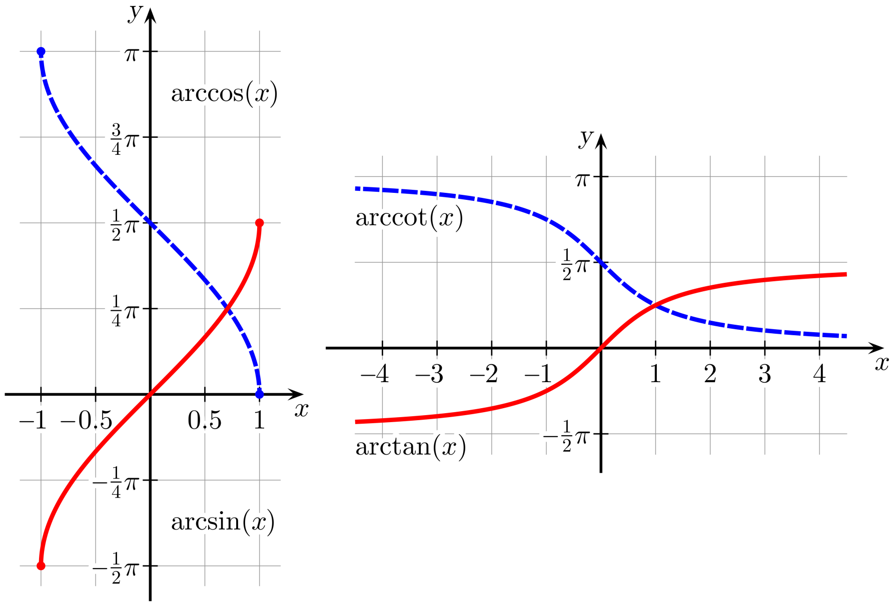

Figura 4.9: Grafici di funzioni trigonometriche inverse.

Osservazione: Le funzioni inverse $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ e $\arctan(x)$ sono quindi costruite su una restrizione del dominio di $\sin(x)$, $\cos(x)$ e $\tan(x)$.

4.2 Limiti di funzioni

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Un "punto di accumulazione", x_0, riferito al dominio A, è così definito se ogni intorno di x_0 contiene punti di A distinti, escluso lo stesso x_0; ovvero se $\forall r > 0\ ((x_0 - r; x_0 + r) \backslash \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$.

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione e sia x_0 punto di accumulazione per il dominio. Si dice che f ha limite $l \in \mathbb{R}$ per x che tende a x_0: $\lim_{x \to x_0} f = l$ se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x \in ((x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon) \backslash \{x_0\}) \cap A\ |f(x) - l| < \epsilon$.

4.2.1 ! Teorema ponte fra funzioni e successioni

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione e sia x_0 punto di accumulazione per il dominio; allora $\lim_{x \to x_0} f = l$ se e solo se per ogni successione $\{x_n\}$ di numeri reali, con $x_n \neq x_0$, convergente a x_0, si ha che $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.

Dimostrazione:

- Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \implies \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l\ \forall x_n \to x_0$.

Considero una successione x_n, non costante, convergente a x_0 tale quindi che $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$.

Scelgo $\delta = \bar{\epsilon} : \forall n \geq n_0 |x_n - x_0| < \bar{\epsilon} = \delta$; si ottiene quindi che: $-\delta < x_n - x_0 < \delta$ quindi $x_0 - \delta < x_n < x_0 + \delta$ ne consegue che $x_n \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ ossia $|f(x_n) - l| < \epsilon$.

Per definizione di limite: $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.

- Se $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l \; \forall x_n \to x_0$ allora $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

Per assurdo suppongo non valga $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ allora $\exists \epsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0$ esiste un punto $x(\delta)$ tale che $|x(\delta) - x_0| < \delta$ ma allo stesso tempo $|f(x(\delta)) - l| > \epsilon_0$.

Costruisco una successione che tende a x_0 ma per cui $f(x_n)$ non converge a l.

Pongo $x_n = x(\delta)$ con $\delta = \frac{1}{n} \; \forall \delta > 1$; poiché $|x(\delta) - x_0| < \delta$ questo implica che $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} = \delta$ ma ciò è equivalente a dire che la successione $x_n = x(\delta)$ converge a x_0.

Ne consegue che $|f(\delta(\epsilon)) - l| > \epsilon_0$ quindi $\exists \epsilon_0 \geq 0 : \forall n \geq 1 \; |f(x_n) - l| \geq \epsilon_0$ ma ciò è equivalente a dire che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq l$ che è assurdo.

4.2.2 ! Teorema di unicità del limite

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione e sia x_0 punto di accumulazione per il dominio. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$ allora $l_1 = l_2$.

Dimostrazione: Per assurdo assumo che $l_1 \neq l_2$ ma che $l_1 > l_2$. Scelgo $\epsilon = \frac{l_1 - l_2}{2} > 0$.

Considero $(l_1 - \epsilon; l_1 + \epsilon)$ e $(l_2 - \epsilon; l_2 + \epsilon)$; noto che $(l_1 - \epsilon; l_1 + \epsilon) \cap (l_2 - \epsilon; l_2 + \epsilon) = \emptyset$.

Considero i limiti:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$: $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_1 : \forall x \in ((x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_1)\backslash\{x_0\})$ ne consegue che $f(x) \in (l_1 - \epsilon; l_1 + \epsilon)$;
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$: $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta_2 : \forall x \in ((x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2)\backslash\{x_0\})$ ne consegue che $f(x) \in (l_2 - \epsilon; l_2 + \epsilon)$.

Sia ora $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ tale che $\forall x \in ((x_0 - \delta; x_0 + \delta)\backslash\{x_0\})$; $f(x) \in (l_1 - \epsilon; l_1 + \epsilon) \cap (l_2 - \epsilon; l_2 + \epsilon)$; siccome la relazione deve valere $\forall \epsilon > 0$ deve valere anche per $\epsilon = \frac{l_1 - l_2}{2}$ ma per tale valore $(l_1 - \epsilon; l_1 + \epsilon) \cap (l_2 - \epsilon; l_2 + \epsilon) = \emptyset$; assurdo.

$l_1 = l_2$ necessariamente.

4.2.3 Teorema del confronto

Siano $f, g, h : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni e sia x_0 punto di accumulazione per A. Se esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x \in ((x_0 - \delta; x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}) \cap A$ si ha che $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ed esistono e sono finiti $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$ allora anche $\lim_{x\to x_0} g(x) = l$.

4.2.4 Teorema del cambiamento di variabili

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni tali che $f(A) \subseteq f(B)$ e sia x_0 punto di accumulazione per A; se $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ (con $f(x) \neq l$ se $x \neq x_0$) e $\lim_{\gamma\to l} g(\gamma) = L$ allora $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{\gamma\to l} g(\gamma) = L$.

4.2.5 Limiti destro e sinistro

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione e sia x_0 punto di accumulazione per il dominio.

- f ha "limite sinistro", per $x \to x_0$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta; x_0) \cap A$ si ha che $|f(x) - l| < \epsilon$.
- f ha "limite destro", per $x \to x_0$, $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ se $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \cap A$ si ha che $|f(x) - l| < \epsilon$.

Teorema: Il limite $\lim_{x \to x_x} f(x) = l$ esiste se e solo se sono coincidenti i limiti destro e sinistro di $f(x)$ per $x \to x_0$.

4.2.6 Formalizzazione dei limiti

- Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione e sia x_0 punto di accumulazione per il dominio. Si dice che, per $x \to x_0$:
  - f diverge a $+\infty$ se: $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ossia $\forall M > 0\ \exists \delta = \delta(M) > 0$ tale che $\forall x \in ((x_0 - \delta; x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}) \cap A$ si ha che $f(x) > M$.
  - f diverge a $-\infty$ se: $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ ossia $\forall m > 0\ \exists \delta = \delta(m) > 0$ tale che $\forall x \in ((x_0 - \delta; x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}) \cap A$ si ha che $f(x) < -m$.
- Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione con $A \subseteq (a; +\infty) \backslash A \subseteq (-\infty; b)$. Si dice che:
  - Per $x \to +\infty$, $f(x)$ converge a l se: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ ossia $\forall \epsilon > 0\ \exists k = k(\epsilon) > 0$ tale che $\forall x > k$ si ha che $|f(x) - l| < \epsilon$.
  - Per $x \to -\infty$, $f(x)$ converge a l se: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ ossia $\forall \epsilon > 0\ \exists k = k(\epsilon) > 0$ tale che $\forall x < -k$ si ha che $|f(x) - l| < \epsilon$.
  - Per $x \to +\infty$, $f(x)$ diverge a $+\infty$ se: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ossia $\forall M > 0\ \exists k = k(M) > 0$ tale che $\forall x > k$ si ha che $f(x) > M$.
  - Per $x \to +\infty$, $f(x)$ diverge a $-\infty$ se: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ossia $\forall m > 0\ \exists k = k(m) > 0$ tale che $\forall x > k$ si ha che $f(x) < -m$.

4.3 Infiniti e infinitesimi

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione e sia x_0 punto di accumulazione per il dominio. Allora:

- f è infinitesima, per $x \to x_0$, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.
- f è infinita, per $x \to x_0$, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

4.3.1 Gerarchia degli infinitesimi

Siano f e g funzioni infinitesime per $x \to x_0$ e $g(x) \neq 0$, sempre in un intorno di x_0; allora:

- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, f è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g.
- Se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, f è un infinitesimo di ordine inferiore rispetto a g.

4.3.2 O-piccoli

Date f, g infinitesime per $x \to x_0$ se f è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a g diciamo che f è o-piccolo di g:

$$f(x) = o(g(x))$$

Proprietà degli o-piccoli:

- $c \cdot o(x^\alpha) = o(c \cdot x^\alpha) = o(x^\alpha)$ con $c \neq 0$.
- $o(x^\alpha) \pm o(x^\beta) = o(x^\omega)$ con $\omega = \min(\alpha, \beta)$ se $x \to 0$.
- $o(x^\alpha) \pm o(x^\beta) = o(x^\omega)$ con $\omega = \max(\alpha, \beta)$ se $x \to +\infty$.
- $o(x^\alpha) \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$.
- $x^\beta \cdot o(x^\alpha) = o(x^{\alpha+\beta})$.
- Se $g(x) = o(x^\alpha)$ e $f(x) = o(g(x))$ allora $f(x) = o(x^\alpha)$.

4.3.3 Confronto tra successioni infinite o infinitesime

Date f, g infinitesime (o infinite) per $x \to x_0$ con $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0; se esistono $\alpha > 0$ e $l \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)^\alpha} = l$$

Allora si dice che f è di ordine α rispetto a g infinitesimo (o infinito) campione.

Non è sempre possibile determinare l'ordine rispetto alle funzioni campione.

4.4 Funzioni asintotiche

Date f e g funzioni, f e g sono asintotiche, per $x \to x_0$, se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. $f(x) \sim_{x \to x_0} g(x)$.

4.4.1 Asintoti

Date f e g funzioni asintotiche per $x \to \pm\infty$: $f(x) \sim_{x \to \pm\infty} g(x)$.

Se considero $g(x) = x$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ posso stimare:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} \infty & \textit{sopralineare} \\ 0 & \textit{sottolineare} \\ m \neq 0 & \textit{lineare} \end{cases}$$

4.4.1.1 Asintoto obliquo

Sia $f(x) \sim_{x \to +\infty} mx$ lineare a $+\infty$; se esiste finito $q = \lim_{n \to +\infty}(f(x) - mx)$ allora diciamo che la retta $y = mx + q$ è l'asintoto obliquo.

4.4.1.2 Asintoto verticale

Se $f(x)$ è una funzione tale che $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ allora la retta $x = x_0$ è asintoto verticale.

4.4.1.3 Asintoto orizzontale

Se $f(x)$ è una funzione tale che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = l$ allora la retta $y = l$ è asintoto orizzontale.

4.5 Continuità

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione. Dato $x_0 \in A$ allora f è continua in x_0 se esiste ed è finito il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Tutte le funzioni elementari sono continue nel loro dominio.

4.5.1 Discontinuità

4.5.1.1 Discontinuità eliminabile

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ esiste finito; tuttavia, $f(x_0) \neq l$.

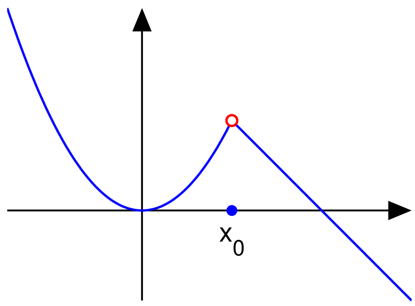

Figura 4.10: Discontinuità eliminabile.

La discontinuità può essere eliminata alterando $f(x)$ e riscrivendola come funzione a tratti.

4.5.1.2 Discontinuità di salto

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$.

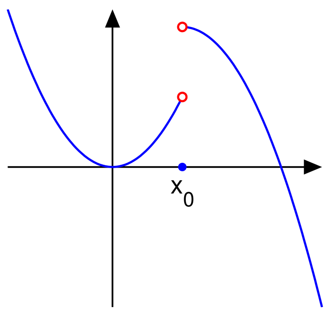

Figura 4.11: Discontinuità di salto.

4.5.1.3 Discontinuità di III specie

Il limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non esiste oppure non è finito.

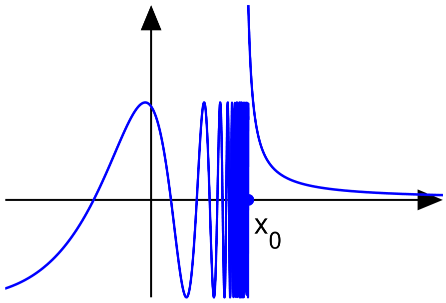

Figura 4.12: Discontinuità di III specie.

4.5.2 Teoremi sulla continuità

4.5.2.1 Teorema di continuità di somma, prodotto, quoziente di funzioni continue

Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni continue in $x_0 \in A$; allora:

- $f \pm g$, $f \cdot g$, kf (con $k \in \mathbb{R}$) sono funzioni continue in $x_0 \in A$.
- $\frac{f}{g}$ è anch'essa continua in $x_0 \in A$ se $g(x_0) \neq 0$.

4.5.2.2 ! Teorema di continuità di funzioni composte e inverse

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(A) \subseteq B$ funzioni. Se f è continua in $x_0 \in A$ e g continua in $f(x_0) \in B$, allora anche $h(x) = f \circ g$ è continua in $x_0 \in A$.

Dimostrazione: Sia a_n una successione convergente a x_0 ($\lim_{n\to+\infty} a_n = x_0$). Allora $f(a_n) = b_n$ converge a $f(x_0)$ perché f è continua; ma questa considerazione è estendibile a g: $g(b_n) = g(f(a_n)) = c_n$ successione che converge a $g(f(x_0))$ in quanto g continua.

Quindi $\forall a_n$ successioni che tendono a x_0: $\lim_{n\to+\infty} h(a_n) = h(x_0) \iff \lim_{x\to x_0} h(x) = h(x_0)$ cioè h è continua in x_0.

Corollario: Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione invertibile e continua su A; allora $f^{-1} : f(A) \to A$ funzione inversa è anch'essa continua su A.

4.6 Teoremi sulle funzioni continue

4.6.1 Teorema di permanenza del segno

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione continua in $x_0 \in A$. Allora:

- Se $f(x_0) > 0$ allora $\exists\delta > 0$ tale che $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap A$ si ha che $f(x) > 0$.
- Se $f(x_0) < 0$ allora $\exists\delta > 0$ tale che $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap A$ si ha che $f(x) < 0$.

La dimostrazione deriva dal teorema di permanenza del segno per i limiti.

4.6.2 ! Teorema degli zeri

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione continua su $[a, b] \subseteq A$ allora se $f(a) \cdot f(b) < 0$ allora f ammette almeno uno zero in $[a, b]$ ovvero esiste $c \in [a, b] : f(c) = 0$.

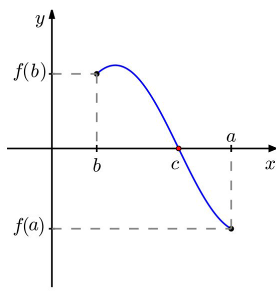

Figura 4.13: Teorema di Bolzano.

Dimostrazione: La dimostrazione si svolge per assurdo:

Poniamo $f(a) < 0 < f(b)$. Si suppone quindi che $f(x)$ sia diverso da zero per ogni x nell'intervallo. Si definisce quindi l'insieme E: $E = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$

L'insieme E non è vuoto, perché contiene a, inoltre E è superiormente limitato da b poiché $E \subset [a, b]$, dunque per l'assioma di completezza esiste $x_0 = \sup(E) \leq b$.

L'estremo superiore è caratterizzato da queste due proprietà:

- x_0 è un maggiorante di E;
- Se $y_0 < x_0$ allora y_0 non è un maggiorante di E.

Il valore $f(x_0)$ è diverso da zero, ed è quindi positivo o negativo. In entrambi i casi si giunge a un assurdo.

- Se $f(x_0) < 0$, allora per le ipotesi $x_0 < b$ e per la permanenza del segno esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni x appartenente all'intorno $(x_0, x_0 + \delta) \subseteq [a, b]$ vale $f(x) < 0$, ma ciò è assurdo perché in contrasto con la prima proprietà dell'estremo superiore.
- Se $f(x_0) > 0$, allora per le ipotesi $x_0 > a$ e sempre per la permanenza del segno, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni x appartenente all'intorno $(x_0 - \delta, x_0) \subseteq [a, b]$ vale $f(x) > 0$: ciò è in contrasto con la seconda proprietà dell'estremo superiore.

4.6.3 ! Teorema dei valori intermedi

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione continua in $[a, b] \subseteq A$; f assume tutti i valori compresi fra $f(a)$ e $f(b)$ ovvero $\forall \gamma \in [f(a), f(b)]$ esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = \gamma$.

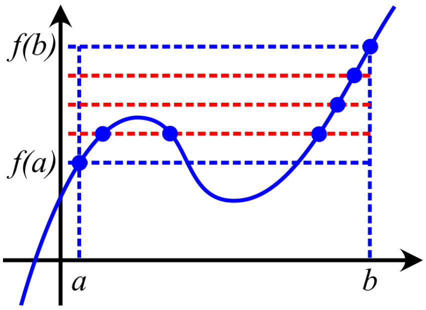

Figura 4.14: Teorema dei valori intermedi.

Dimostrazione:

- Se $f(a) = f(b)$ non c'è nulla da dimostrare: $c = a = b$.
- Se $f(a) < f(b)$ considero la funzione $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita come $g(x) = f(x) - \gamma$ con $\gamma \in (f(a), f(b))$. g è continua in $[a, b]$; trovo γ tale che $g(a) = (f(a) - \gamma) < 0$ e $g(b) = (f(b) - \gamma) > 0$. Siccome $g(a) \cdot g(b) < 0$ per il teorema degli zeri esiste $c \in (a, b)$ tale che $g(c) = 0$ ossia $f(c) - \gamma = 0 \implies f(c) = \gamma \ \forall \gamma \in (f(a), f(b))$.

4.6.3.1 Corollari e osservazioni

- Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua allora $f(I)$ è un intervallo dove f assume tutti i valori compresi tra $Inf(I)$ e $Sup(I)$.
- Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$ continua allora se f è iniettiva su I allora f è strettamente monotona su I.
  - Dimostrazione: Assumo, per assurdo, che f non sia monotona; esistono quindi $a, b, c \in I : a < b < c$ e $f(b) > f(a) > f(c)$. Restringo f all'intervallo $[b, c]$; f assume tutti i valori compresi fra $f(c)$ e $f(a)$: esiste $x_0 \in (b, c) : f(x_0) = f(a)$. Ne consegue che f non è iniettiva perché $a \neq x_0$ ma $f(a) = f(x_0)$.
- Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva in I. Detta $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ la funzione inversa di f, allora f^{-1} è continua in $f(I)$.
  - Dimostrazione: Sia f continua e iniettiva su I allora f è strettamente monotona su I. Essendo $f(I)$ un intervallo anche f^{-1} è strettamente monotona su $f(I)$. Se, per assurdo, f^{-1} non fosse continua, la discontinuità potrebbe essere di salto o eliminabile ma allora l'immagine di I mediante f non sarebbe più un intervallo mentre $f^{-1}(f(I)) = I$.

4.6.4 Teorema di Weirstrass

Sia $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Allora f ammette massimo e minimo assoluti in $[a, b]$ ovvero esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $\forall x \in [a, b]$ si ha che:

- $f(x) \geq f(x_1)$ x_1 minimo assoluto.
- $f(x) \leq f(x_2)$ x_2 massimo assoluto.

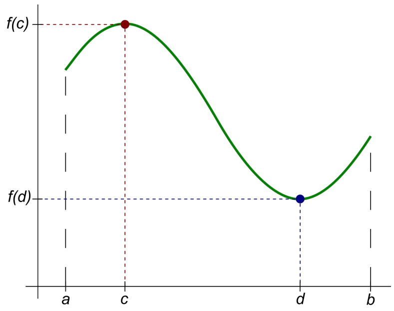

Figura 4.15: Teorema di Weirstrass.

Capitolo 5

Calcolo differenziale

5.1 Differenziabilità

5.1.1 Il problema della retta tangente

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Scelgo $x_0 \in A$ tale che $y_0 = f(x_0)$; considero il punto $P_0(x_0, y_0)$. Scelgo poi $x_1 \in A : x_1 \neq x_0$ tale che $y_1 = f(x_1)$; considero il punto $P_1(x_1, y_1)$.

Costruisco la retta passante per P_1 e P_0 la cui equazione è:

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

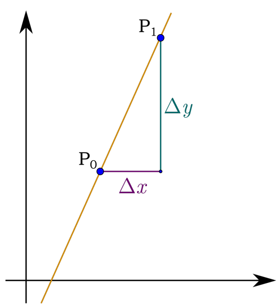

Figura 5.1: Retta passante per P_0 e P_1.

Se x_1 si avvicina a x_0, fissato, si modifica il coefficiente angolare della retta fino a che quest'ultima, che in origine era secante, diviene tangente al grafico di $f(x)$ in x_0.

Generalizzando, posso interpretare le coordinate di P_1 in funzione della loro "distanza" rispetto al riferimento x_0: $x_1 = x_0 + h$, $y_1 = f(x_0 + h)$.

5.1.1.1 Definizione: derivabilità

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione; essa si dice "derivabile" in x_0 se esiste, ed è finito, il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f^{'}(x_0)$$

5.1.1.2 Definizione: differenziabilità

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione e sia $x_0 \in A$, la funzione si dice "differenziabile" se esiste la retta tangente al grafico di $f(x)$ in x_0 ed è una buona approssimazione di $f(x_0)$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]}{x - x_0} = 0$$

5.1.2 Continuità di funzioni derivabili

5.1.2.1 ! Teorema: $f(x)$ è derivabile in x_0 se e solo se $f(x)$ è differenziabile in x_0

Dimostrazione:

- Se $f(x)$ è derivabile in x_0 allora è differenziabile (in x_0); per ipotesi esiste quindi finito il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f^{'}(x_0)$.

Costruisco la retta tangente al grafico di $f(x)$: $y = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$; tale funzione è una buona approssimazione di $f(x_0)$?

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f^{'}(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f^{'}(x_0) - f^{'}(x_0) = 0$$

La retta tangente al grafico di $f(x)$ in x_0 è una buona approssimazione di $f(x_0)$. $f(x)$ è quindi differenziabile in x_0.

- Se $f(x)$ è differenziabile in x_0 allora è derivabile (sempre in x_0). Considero la retta tangente a $f(x)$ di equazione: $y = f(x_0) + m(x - x_0)$, vale il seguente limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + m(x - x_0)]}{x - x_0} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{m(x - x_0)}{x - x_0}$$

Ne consegue che posso fissare m:

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$m = f^{'}(x_0)$$

$f(x)$ è quindi derivabile in x_0.

5.1.2.2 ! Teorema: Se $f(x)$ è differenziabile in x_0 allora la funzione è continua in tal punto

Se $f(x)$ è differenziabile in x_0 allora esiste finito il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f^{'}(x_0)$$

Voglio dimostrare che $f(x)$ è continua in x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f^{'}(x_0)(x - x_0) = 0$$

Attenzione: il teorema non è invertibile!

5.1.3 Teoremi di derivazione (somma, prodotto e rapporto)

Siano $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni, sia $x_0 \in A$ con f e g derivabili in x_0; allora:

- $(f + g)(x)$ è derivabile in x_0: $(f + g)^{'}(x) = f^{'}(x) + g^{'}(x)$;
- $k \cdot f(x)$ è derivabile in x_0: $k \cdot f^{'}(x) = k \cdot f^{'}(x)$.
- $f(x) \cdot g(x)$ è derivabile in x_0: $(f \cdot g)^{'}(x) = f^{'}(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g^{'}(x)$.
- $\frac{f(x)}{g(x)}$ è derivabile in x_0: $(\frac{f}{g})^{'}(x) = \frac{f^{'}(x)g(x) - f(x)g^{'}(x)}{g(x)^2}$.

5.1.4 Derivata di funzioni composte

Siano $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni con $f(A) \subseteq B$. Sia $x_0 \in A$ tale che $f(x)$ è derivabile in x_0 e sia $y_0 \in B : y_0 = f(x_0)$ tale che $g(x)$ è derivabile in x_0. Ne risulta che $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale:

$$(g \circ f)^{'}(x) = g^{'}(x) \cdot f^{'}(x)$$

5.1.5 Derivata delle funzioni inverse

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile; se $f(x)$ è derivabile in $x_0 \in A$ e $f^{-1}(x_0) \neq 0$ allora $f^{-1}(x)$ è derivabile in $f(x_0)$ e vale la seguente relazione:

$$(f^{-1})^{'}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

5.1.6 Derivate destre e sinistre

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, scelgo $x_0 \in A$ allora:

- $f(x)$ è derivabile a destra in x_0 se esiste finito il limite $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$.
- $f(x)$ è derivabile a sinistra in x_0 se esiste finito il limite $\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$.

Osservazione: $f(x)$ è derivabile in x_0 se e solo se $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

5.1.7 Calcolo delle derivate delle funzioni elementari

$f(x) = x^\alpha \to f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$	
$f(x) = e^x \to f'(x) = e^x$	$f(x) = a^x \to f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = \ln x \to f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \log_a x \to f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \sin x \to f'(x) = \cos x$	$f(x) = \arcsin x \to f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \cos x \to f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \arccos x \to f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \tan x \to f'(x) = \frac{1}{\cos x^2}$	$f(x) = \arctan x \to f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

5.1.8 Punti di non derivabilità

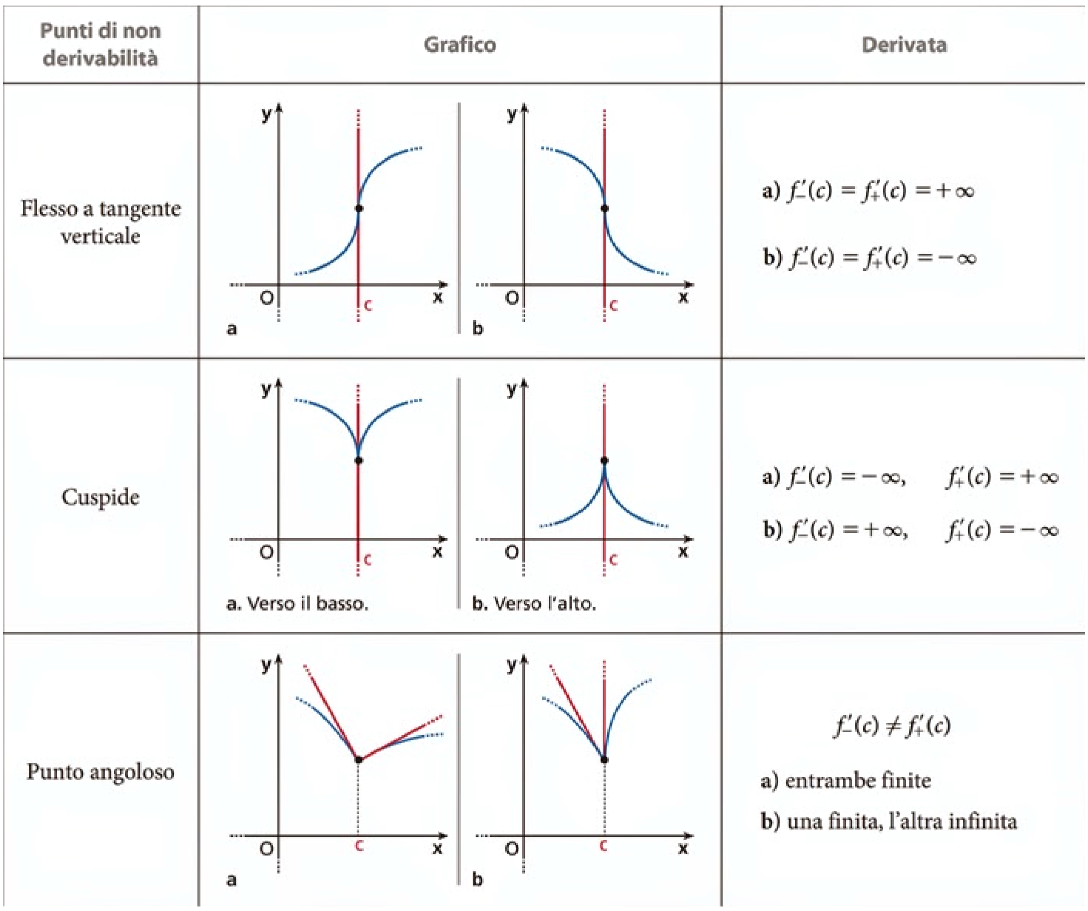

Figura 5.2: Tabella dei punti di non derivabilità.

Osservazione: Per studiare la derivabilità in un punto si calcola il limite del rapporto incrementale. (Non calcolare il limite della derivata!)

5.2 Teoremi sulle funzioni derivabili

5.2.1 ! Teorema di Fermat

Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $x_0 \in (a, b)$. Se x_0 è punto di massimo o minimo relativo per f allora: $f'(x_0) = 0$.

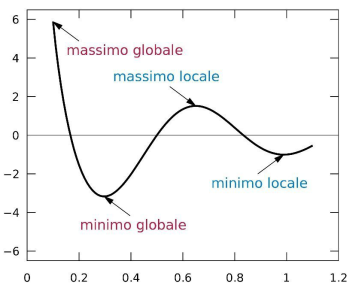

Figura 5.3: Illustrazione teorema di Fermat.

Dimostrazione: Sia $x_0 \in (a, b)$ minimo relativo per f allora esiste $\delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \cap [a, b]\ f(x) \geq f(x_0)$.

Allora il rapporto:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

può essere:

- > 0 se $x > x_0$;
- < 0 se $x < x_0$.

Per ipotesi f è derivabile in x_0 quindi esiste finito:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Considero quindi le derivate destre e sinistre ma, per il teorema di permanenza del segno:

$$\begin{cases} f'_+(x_0) \geq 0 \\ f'_-(x_0) \leq 0 \end{cases} \implies f'(x_0) = 0$$

Osservazione: Avere $f'(x_0) = 0$ non è condizione necessaria affinché x_0 sia estremante ma allo stesso tempo non è una condizione nemmeno sufficiente. (Possono esistere punti di massimo/minimo relativi anche dove la derivata prima non esiste).

5.2.2 ! Teorema di Rolle

Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b) e continua in $[a, b]$ e tale che $f(a) = f(b)$; allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f^{'}(x_0) = 0$.

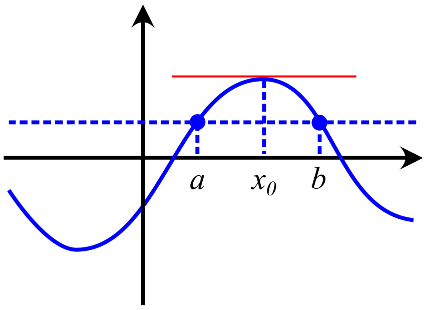

Figura 5.4: Illustrazione teorema di Rolle.

Dimostrazione: Se f è continua in $[a, b]$ allora vale il teorema di Weirstrass quindi f ammette massimi e minimi assoluti in $[a, b]$.

Siano $f(x_1) = M$ punto di massimo assoluto e $f(x_2) = m$ punto di minimo assoluto.

Se $x_1 \in (a, b)$, x_1 è un massimo per f e f è derivabile in x_1, allora per il teorema di Fermat, $f^{'}(x_1) = 0$.

Se $x_2 \in (a, b)$, x_2 è un minimo per f e f è derivabile in x_2, allora per il teorema di Fermat, $f^{'}(x_2) = 0$.

Se il massimo e il minimo sono raggiunti entrambi negli estremi si ha che $f(x_1) = f(x_2) \implies m = M$; la funzione è quindi costante e la sua derivata è nulla in tutti i punti compresi tra (a, b).

Osservazione: Non è possibile indebolire le ipotesi del teorema di Rolle.

5.2.3 ! Teorema di Lagrange

Data $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b) e continua in $[a, b]$ allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che

$$f^{'}(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

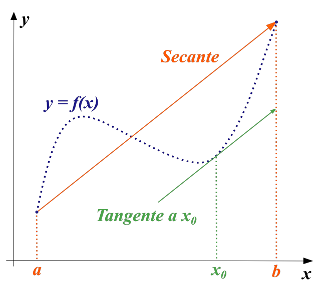

Figura 5.5: Illustrazione teorema di Lagrange.

Dimostrazione: Costruisco la retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ di equazione:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Definisco la funzione:

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

Caratteristiche:

- g è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b);
- $g(a) = g(b) = 0$.

Posso utilizzare le considerazioni del teorema di Rolle sulla funzione g ossia esiste $x_0 \in (a, b)$: $g^{'}(x_0) = 0$.

$$g^{'}(x_0) = f^{'}(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f^{'}(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

5.2.4 ! Test di monotonia

Sia $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b) allora:

- Se f è crescente in $(a, b) \longleftrightarrow f^{'}(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$;
- Se f è decrescente in $(a, b) \longleftrightarrow f^{'}(x) \leq 0 \ \forall x \in (a, b)$.

Dimostrazione: Considero i seguenti casi:

- Se f è crescente in $(a, b) \implies f^{'}(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$.

Considero il rapporto incrementale di f:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

in quanto $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$ con $h > 0$ e f crescente.

Per il teorema di permanenza del segno:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f^{'}(x_0) \geq 0$$

- Se $f^{'}(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b) \implies f$ è crescente in (a, b).

Siano $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_2 > x_1$ devo mostrare che $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Considero l'intervallo $[x_1, x_2]$; la funzione $f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ è continua in $[x_1, x_2]$ e derivabile in (x_1, x_2).

Per il teorema di Lagrange: esiste $x_0 \in (x_1, x_2)$ tale che:

$$f^{'}(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Per ipotesi $f^{'}(x) \geq 0$ siccome $x_0 \in (a, b)$

$$f^{'}(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

Siccome $x_2 > x_1$ $x_2 - x_1 > 0 \implies f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ ossia $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Analoga dimostrazione è possibile per le funzioni decrescenti.

Corollario: Sia $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione derivabile in (a, b). Allora $f^{'}(x) = 0 \longleftrightarrow f$ è costante in (a, b).

5.2.5 ! Teorema di Cauchy

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue su $[a, b]$ e derivabili su (a, b) tali che $g^{'}(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$. Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che:

$$\frac{f^{'}(x_0)}{g^{'}(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Osservazione: $g(b) \neq g(a)$, se fosse $g(b) = g(a)$, per il teorema di Rolle applicato a g dovrebbe esistere $x_0 \in (a, b) : g^{'}(x_0) = 0$ ma ciò è un assurdo.

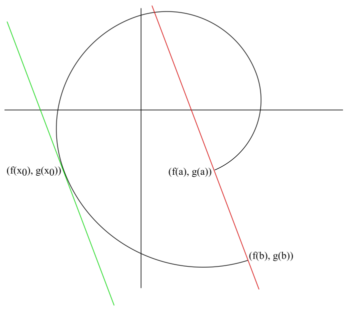

Figura 5.6: Illustrazione teorema di Cauchy.

Dimostrazione: Costruisco la funzione:

$$h(x) = [g(b) - g(a)]f(x) - [f(b) - f(a)]g(x)$$

h è continua in $[a, b]$ e differenziabile in (a, b).

$$h(a) = g(b)f(a) - f(b)g(a)$$

$$h(b) = -g(a)f(b) + f(a)g(b)$$

Ma ciò implica che $h(a) = h(b)$.

Vale il teorema di Rolle per la funzione h su $[a, b]$ e quindi esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $h^{'}(x_0) = 0$.

$$h^{'}(x_0) = [g(b) - g(a)]f^{'}(x_0) - [f(b) - f(a)]g^{'}(x_0) = 0$$

Ne consegue che:

$$\frac{f^{'}(x_0)}{g^{'}(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

5.2.6 ! Teorema di De L'Hospital

Date $f, g : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili in (a, b) (escluso al più $x_0 \in (a, b)$) è noto che:

- $g(x) \neq 0 \wedge g^{'}(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b) \backslash \{x_0\}$;
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ (oppure $\pm\infty$);
- $\lim_{x \to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = l$ esiste (l può essere anche $\pm\infty$).

Allora: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

(Il teorema vale anche se $x \to \pm\infty$ se $(a, b) = (a, +\infty)$ oppure se $(a, b) = (-\infty, b)$).

Dimostrazione: f e g possono essere prolungate per continuità in x_0 ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$ sia $\lim_{x \to x_0} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = l$ finito. Allora per definizione di limite:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}$$

$$\left| \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} - l \right| < \epsilon$$

Prendo $\overline{x} \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ e suppongo che $\overline{x} > x_0$.

Considero l'intervallo $[x_0; \overline{x}]$:

- f, g sono continue in $[x_0; \overline{x}]$;
- f, g sono derivabili in $(x_0; \overline{x})$;
- $g^{'}(x) \neq 0 \forall x \in (x_0; \overline{x})$.

Applico il teorema di Cauchy per f, g in $[x_0; \overline{x}]$: esiste $c \in (x_0; \overline{x})$ tale che:

$$\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = \frac{f(\overline{x}) - f(x_0)}{g(\overline{x}) - g(x_0)} = \frac{f(\overline{x})}{g(\overline{x})}$$

Poiché $(x_0; \overline{x}) \subset (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ si ha che:

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - l\right| < \epsilon \implies \left|\frac{f'(\overline{x})}{g'(\overline{x})} - l\right| < \epsilon$$

$\forall \epsilon > 0 \; \forall \overline{x} \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$

$$\implies \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

(A seconda delle ipotesi iniziali potrebbe essere anche che $l = \pm\infty$).

5.3 Funzioni convesse e concave

Definizione: Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; si dice che f è convessa se, considerando un qualsiasi intervallo $[x_1, x_2] \subseteq I \; \forall x_1, x_2 \in I \; x_1 < x_2$, il valore della funzione per $x \in [x_1, x_2]$ è minore o uguale del valore della funzione data dalla corda che unisce $P_1 = (x_1, f(x_1))$ e $P_2 = (x_2, f(x_2))$ per $x \in [x_1, x_2]$.

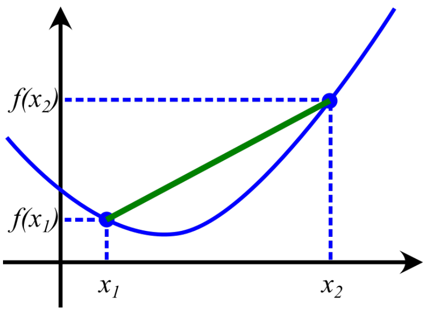

Figura 5.7: Retta passante per P_1 e P_2, f funzione convessa in $[x_1, x_2]$.

Scrivendo l'equazione della retta passante per P_1 e P_2 ottengo che:

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

nel punto $x \in [x_1, x_2]$

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Definizione: Si dice che f è convessa su I se $\forall x, x_1, x_2 \in I \; x_1 < x_2$

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Posso riscrivere l'elemento $x \in [x_1, x_2]$ come: $x = x_2 - t(x_2 - x_1)$ ossia $x = tx_1 + (1-t)x_2$.
Calcolando $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(tx_1 + (1-t)x_2 - x_1) \leq f(x_1)t + f(x_2)(1-t)$.
Definizione: f si dice convessa in I se $\forall x_1, x_2 \in I \; x_1 < x_2$ vale la seguente relazione:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \; \forall t \in [0, 1]$$

Osservazione: f strettamente convessa se la relazione ha la diseguaglianza stretta.

Definizione: Una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice concava se $\forall x_1, x_2 \in I$ $x_1 < x_2$ vale la seguente relazione:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \; \forall t \in [0, 1]$$

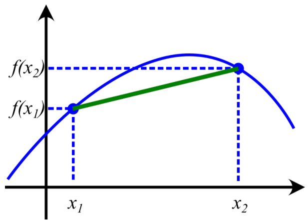

Figura 5.8: Retta passante per P_1 e P_2, f funzione concava in $[x_1, x_2]$.

5.3.1 Proprietà delle funzioni concave e convesse

- Se f è convessa in I allora $-f$ è concava in I.
- Se f è concava in I allora $-f$ è convessa in I.
- Sia f una funzione convessa definita su $[a, b] = I$ intervallo chiuso allora f è limitata in I.
- Sia f una funzione convessa definita su $[a, b] = I$ intervallo chiuso allora f è continua in ogni punto interno di I.
- Sia f una funzione convessa definita su $[a, b] = I$ intervallo chiuso allora f ammette nei punti interni a I derivata destra e sinistra.

5.3.2 Relazione fra convessità e f' crescente

5.3.2.1 ! Teorema: Sia f una funzione derivabile in $[a, b]$, condizione necessaria e sufficiente affinché f sia convessa in $[a, b]$ è che la funzione derivata sia crescente in $[a, b]$

- Se f è convessa su $[a, b] \implies f'$ è crescente su $[a, b]$

Considero i punti $P_1 = (x_1, f(x_1))$, $P_2 = (x_2, f(x_2))$ e $P_3 = (x, f(x))$ tali che $x_1 < x < x_2$.

Considero i coefficienti angolari:

- $\overline{P_1P_3} = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$;
- $\overline{P_1P_2} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$;
- $\overline{P_3P_2} = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$.

Ottengo dunque che:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \; \forall x \in (x_1, x_2)$$

Se $x \to x_1 \implies \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \to f'(x_1)$.

Se $x \to x_2 \implies \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \to f'(x_2)$.

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2)$$

Essendo $f'(x_1) \leq f'(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ ciò implica che f' è crescente.

- Se f' è crescente su $[a, b] \implies f$ è convessa su $[a, b]$

Siano $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $x_1 < x_2$ allora $\forall x \in [x_1, x_2]$ considero $[x_1, x]$ e $[x, x_2]$; per il teorema di Lagrange applicato a f ristretta nei due intervalli:

- Esiste $c \in [x_1, x] : f'(c) = \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$;
- Esiste $d \in [x, x_2] : f'(d) = \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$.

Poiché $c < d$ e f' è crescente $f'(c) < f'(d)$ ovvero:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Con $x_1 < x < x_2$. Riscrivendo la disequazione:

$$[f(x) - f(x_1)](x_2 - x) \leq [f(x_2 - f(x))](x - x_1)$$

Svolgendo i calcoli è possibile ottenere la forma:

$$f(x)(x_2 - x_1) \leq f(x_1)(x_2 - x_1) + [f(x_2) - f(x_1)](x - x_1)$$

Dividendo per $x_2 - x_1 > 0$:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Ciò implica che f è convessa in $[a, b]$.

5.3.2.2 Teorema: Sia f una funzione derivabile due volte in $[a, b]$: se f è convessa in $[a, b]$ allora f' crescente e quindi $f'' \geq 0$; se f è concava in $[a, b]$ allora f' decrescente e quindi $f'' \leq 0$

Osservazione: La correlazione tra il segno di f'' e la crescenza/decrescenza di f' è conseguenza diretta del teorema di monotonia.

5.3.2.3 Teorema: Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $(a, b) \in I$ e sia $x_0 \in (a, b)$; se f' ha un punto di massimo o minimo relativo in x_0 allora x_0 è un punto di flesso

Definizione: I punti di flesso sono punti in cui la funzione f cambia concavità.

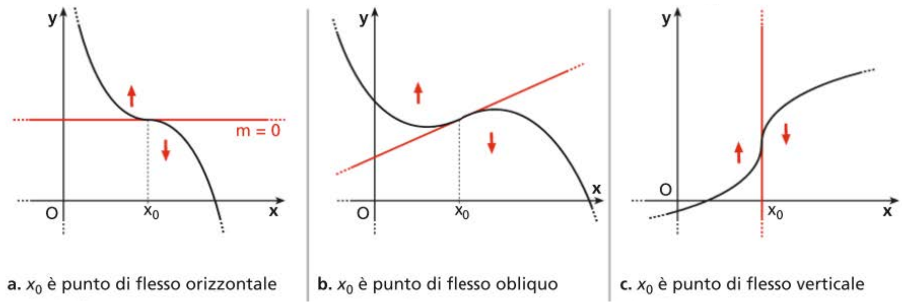

Figura 5.9: Punti di flesso.

5.3.2.4 Teorema: Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $(a, b) \in I$ due volte. Sia $x_0 \in (a, b)$ se x_0 è punto di flesso allora $f''(x_0) = 0$

Osservazione: Il teorema è una conseguenza diretta del teorema di Fermat su f'.

5.4 Polinomi di Taylor

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n-volte in $x_0 \in A$. Allora esiste unico il polinomio $T_n^{x_0}(x)$ tale che, per $x \to x_0$:

$$f(x) = T_n^{x_0}(x) + o((x - x_0)^n)$$

Dove:

$$T_n^{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + ... + \frac{1}{n!} f^n(x_0)(x - x_0)^n$$

In altri termini:

$$T_n^{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^k(x_0)(x - x_0)^k$$

Osservazione: Se centro il polinomio di Taylor in $x_0 = 0$ si ottiene il polinomio di Maclaurin.

5.4.1 ! Dimostrazione della Formula di Taylor

Considero lo sviluppo di Taylor fino al terzo grado:

$$T_3^{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} f^k(x_0)(x - x_0)^k$$

$$T_3^{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)(x - x_0)^3$$

Mostro che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_3^{x_0}(x)}{(x - x_0)^3} = 0 \implies f(x) = T_3^{x_0}(x) + o((x - x_0))^3$$

La forma d'indeterminazione $[\frac{0}{0}]$ può essere sciolta applicando il teorema di De L'Hospital (di cui la funzione soddisfa le ipotesi):

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0) - f''(x_0)(x-x_0) - \frac{1}{2}f'''(x_0)(x-x_0)^2}{3(x-x_0)^2}$$

La forma di indeterminazione $[\frac{0}{0}]$ può essere sciolta applicando il teorema di De L'Hospital (di cui la funzione soddisfa le ipotesi):

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0) - f'''(x_0)(x-x_0)}{6(x-x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{6}\left[\frac{f''(x) - f''(x_0)}{x-x_0} - f'''(x_0)\right] =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{6}\left[f'''(x_0) - f'''(x_0)\right] = 0$$

Per mostrare l'unicità considero $P_n^{x_0}(x)$ un altro polinomio di grado $\leq n$ che verifica le stesse condizioni di $T_n^{x_0}(x)$; allora:

$$Q_n(x) = P_n^{x_0}(x) - T_n^{x_0}(x)$$

È tale che, per $x \to x_0$:

$$Q_n(x) = o((x-x_0)^n) = \sum_{k=0}^{k} q_k(x-x_0)^k$$

Siccome $Q_n(x) = o((x-x_0)^n)$ allora:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sum_{k=0}^{k} q_k(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} = 0 \implies$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{q_0 + q_1(x-x_0) + ...}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{q_0}{(x-x_0)^n} + \frac{q_1}{(x-x_0)^{n-1}} + ... + q_n = 0$$

Ma ciò implica che: $q_0 = q_1 = ... = q_n = 0$ ossia $q_n(x) = 0$ in definitiva $P_n^{x_0}(x) = T_n^{x_0}(x)$.

5.4.2 ! Resto di Peano e Lagrange

La notazione $o((x-x_0)^n)$, nota come resto di Peano, stima l'errore (la differenza tra $f(x)$ e $T_n^{x_0}(x)$) valutando la rapidità con cui quest'ultimo va a zero rispetto a $(x-x_0)^n$ per $x \to x_0$.

Alternativamente al resto di Peano si introduce il resto di Lagrange.

Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione derivabile $(n+1)$ volte in (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$. Allora esiste $T_n^{x_0}(x)$ polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0 ed esiste $c \in (x_0, x)$ tale che:

$$f(x) - T_n^{x_0}(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Osservazione: c dipende da x_0, x e da n.

Spesso si cerca di stimare $|f^{n+1}(c)| \leq M \ \forall c \in (x_0, x)$:

$$|f(x) - T_n^{x_0}(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$$

Dimostrazione: Se $n = 0$ si ricade nel teorema di Lagrange. Se f è derivabile in (a, b) allora per $x_0, x \in (a, b)$ con $x \neq x_0$ esiste $c \in (x_0, x) : f(x) = f(x_0) + f^{'}(c)(x - x_0)$.

Per induzione, assumo il postulato vero per $n-1$ e lo dimostro per n: f è derivabile (n+1) volte in (a, b).

Voglio stimare

$$\frac{f(x) - T_n^{x_0}(x)}{(x - x_0)^{n+1}}$$

e mostrare che è

$$\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}$$

Per $c \in (x_0, x)$.

Applico il teorema di Cauchy alle funzioni:

$$H_n(x) = f(x) - T_n^{x_0}(x)$$

$$G_n(x) = (x - x_0)^{n+1}$$

Osservo che $H_n(x_0) = G_n(x_0) = 0$.

H_n e G_n sono derivabili $n + 1$ volte in (a, b).

Esiste $c \in (x_0, x)$ tale che:

$$\frac{H_n(x)}{G_n(x)} = \frac{H_n(x) - H_n(x_0)}{G_n(x) - G_n(x_0)}$$

Poiché $H_n(x_0) = G_n(x_0) = 0$:

$$\frac{H_n^{'}(c)}{G_n^{'}(c)} = \frac{H_{n-1}(c)}{G_{n-1}^{'}(c)} = \frac{H_{n-1}^{'}(c)}{(n+1)(c - x_0)^n}$$

Per ipotesi d'induzione:

$$\frac{H_{n-1}^{'}(c)}{(n+1)(c - x_0)^n} = \frac{(f^{'})^n(\overline{c})}{(n+1)n!} = \frac{f^{n+1}(\overline{c})}{(n+1)!}$$

Esiste $\overline{c} \in (c, x_0)$ tale che:

$$\frac{H_{n-1}^{'}(c)}{(c - x_0)^n} = \frac{(f^{'})^n(\overline{c})}{n!}$$

5.4.3 Sviluppi in serie di Maclaurin (di funzioni notevoli)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + o\left(x^{10}\right)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n + o\left(x^n\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o\left(x^n\right)$$

Capitolo 6

Integrali

6.1 Integrazione definita

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua; si dice trapezoide relativo a f in $[a, b]$, $T_f([a, b])$, la regione di piano compresa tra l'asse x, le rette verticali $x = a$, $x = b$ e il grafico di f.

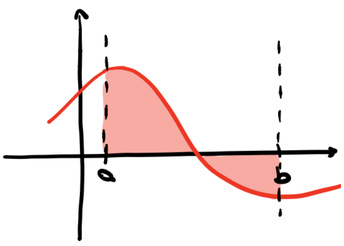

Figura 6.1: Trapezoide relativo ad f in $[a, b]$.

6.1.1 L'area del trapezoide

Si consideri il grafico di cui sotto; è possibile cercare di costruire una procedura che definisca l'area del trapezoide mediante due "criteri":

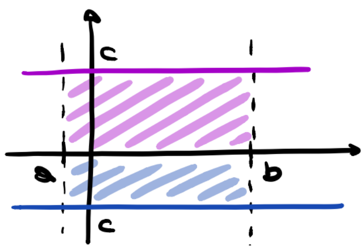

Figura 6.2: Area e misura con segno.

- Misura con segno: considero l'estensione del trapezoide ma anche la sua posizione nel piano.
  - $A' = (b - a) \cdot c$
- Area: legata solamente all'estensione del trapezoide.
  - $A = (b - a) \cdot c$ se $c > 0$;

- $A = -(b-a) \cdot c$ se $c < 0$.

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua; per il teorema di Weirstrass, f ammette $max(f) \in [a,b] = M$ e $min(f) \in [a,b] = m$ dove $m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a,b]$.

Considero $f(x) > 0$ allora $T_f([a,b])$:

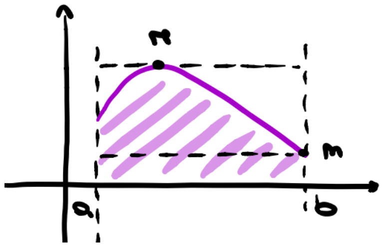

Figura 6.3: $T_f([a,b])$ con $f(x) > 0$.

Individuo il rettangolo correlato al massimo M e il rettangolo correlato al minimo m:

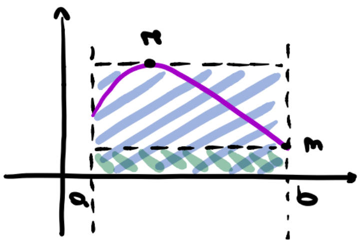

Figura 6.4: Rettangoli minimo e massimo con $f(x) > 0$.

Il rettangolo massimo ha estensione $(b-a)M$ con $M > 0$ mentre il rettangolo minimo $(b-a)m$ con $m > 0$. Vale la relazione $m(b-a) \leq T_f([a,b]) \leq M(b-a)$.

Considero $f(x) < 0$ allora $T_f([a,b])$:

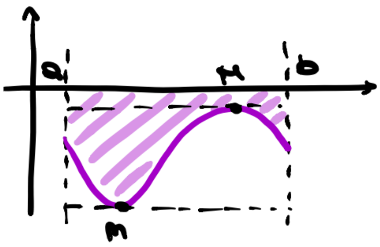

Figura 6.5: $T_f([a,b])$ con $f(x) < 0$.

Individuo il rettangolo correlato al massimo M e il rettangolo correlato al minimo m:

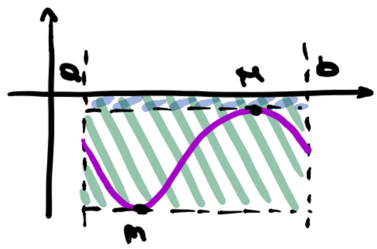

Figura 6.6: Rettangoli minimo e massimo con $f(x) < 0$.

Il rettangolo massimo ha estensione $(b-a)M$ con $M < 0$ mentre il rettangolo minimo $(b-a)m$ con $m < 0$. Vale la relazione $m(b-a) \leq T_f([a,b]) \leq M(b-a)$.

$\forall n \in \mathbb{N} : n > 2$ suddivido l'intervallo $[a,b]$ in n intervalli uguali di ampiezza $\frac{b-a}{n}$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.

Considero f ristretta all'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$: f è continua nell'intervallo perciò per il teorema di Weirstrass ha massimo assoluto M_i e minimo assoluto m_i con $M_i, m_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

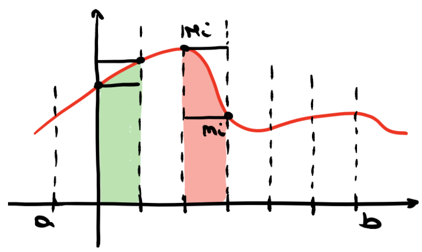

Figura 6.7: Suddivisione di $[a,b]$.

Ogni rettangolo associato al massimo ha estensione $\frac{M_i(b-a)}{n}$ mentre quello associato al minimo ha estensione $\frac{m_i(b-a)}{n}$.

Definizione: Si dice somma superiore n-esima di f relativa ad $[a,b]$:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} M_i$$

Definizione: Si dice somma inferiore n-esima di f relativa ad $[a,b]$:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} m_i$$

Osservazione: Per ogni $n \geq 2$ $s_n \leq S_n$ e tali due sommatorie forniscono approssimazioni (rispettivamente per eccesso e per difetto) della misura con segno di $T_f([a,b])$.

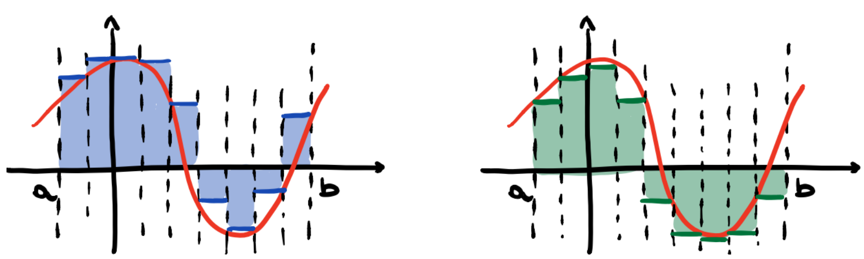

Figura 6.8: Approssimazione di $T_f[a,b]$.

Se n cresce, l'ampiezza di $\frac{b-a}{n}$ decresce e l'approssimazione diventa più precisa.

La successione s_n è crescente mentre S_n è decrescente; entrambe sono limitate sia superiormente che inferiormente.

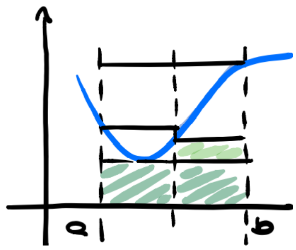

Figura 6.9: Crescenza e decrescenza di s_n e S_n.

Per il teorema di convergenza delle successioni monotone esistono $\lim_{n\to+\infty} s_n$ e $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Si può dimostrare che $Inf_{n\in\mathbb{N}}\, s_n = Sup_{n\in\mathbb{N}}\, S_n$.

Definizione: Si dice integrale definito di f in $[a, b]$ (o misura con segno)

$$\int_a^b f(x)dx = Inf_{n\in\mathbb{N}}\, s_n = Sup_{n\in\mathbb{N}}\, S_n$$

Definizione: Definiamo area del trapezoide $T_f([a, b])$ la misura con segno della funzione $|f|$ su $[a, b]$

$$A(T_f([a, b]) = \int_a^b |f(x)|dx$$

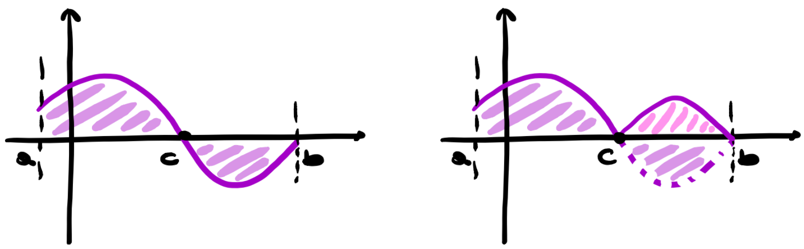

Figura 6.10: Area di $T_f[a, b]$.

Osservazione:

- Se $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$ allora $|f(x)| = f(x)$ quindi $A(T_f([a, b]) = \int_a^b f(x)dx$.
- Se $f(x) < 0\ \forall x \in [a, b]$ allora $|f(x)| = -f(x)$ quindi $A(T_f([a, b]) = -\int_a^b f(x)dx$.
- Se $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, c]$ e $f(x) < 0\ \forall x \in [c, b]$ allora $A(T_f([a, b]) = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$ per le considerazioni fatte sopra.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, divido $[a, b]$ in n intervalli con ampiezza $\frac{b-a}{n}$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.

Siano m_k e M_k il minino e il massimo di f nell'intervallo $[x_k, x_{k+1}]$.

Su ogni intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ scelgo un punto y_k tale che $m_k \leq f(y_k) \leq M_k\ \forall 0 < k < n-1$.

Costruisco la somma di Cauchy-Riemann:

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(y_k)(x_{k+1} - x_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

Si ha quindi che: $s_n < \sigma_n < S_n$ ma siccome s_n e S_n convergono allo stesso valore anche σ_n converge a tal valore indipendentemente dalla scelta di y_k

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} f(y_k)\right]$$

6.1.2 Proprietà dell'integrale definito

- Linearità.

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b f(x)dx$$

La linearità dell'integrale è derivata dalla sua correlazione con la somma di Cauchy-Riemann definita a sua volta sull'operatore lineare limite.

- Additività rispetto all'intervallo.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \; c \in [a,b]$$

- Nullità.

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \; \forall a \in \mathbb{D}_{\mho}$$

- Monotonia.

Sia $f(x) \geq 0$ in $[a,b]$ allora $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Sia $f(x) \geq g(x)$ in $[a,b]$ allora $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

- Moduli.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Corollario dalla proprietà di monotonia.

- Altre osservazioni.

Osservazione:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Osservazione: Siano $f(x), g(x)$ funzioni continue con $f(x) \geq g(x)$ su $[a, b]$. Per monotonia: $\int_a^b = f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$. Necessito di calcolare l'area della regione compresa fra i due grafici e le rette $x = a$ e $x = b$.

- Se $f(x) \geq g(x) \geq 0$ per $x \in [a, b]$: $Area[f, g](a, b) = Area[f](a, b) - Area[g](a, b)$.
- Se $f(x) \geq 0 \geq g(x)$: $Area[f, g](a, b) = Area[f](a, b) + Area[g](a, b)$.
- Se $0 \geq f(x) \geq g(x)$: $Area[f, g](a, b) = Area[g](a, b) - Area[f](a, b)$.
- Se $f(x) \geq g(x)$ non positivi: $Area[f, g](a, b) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$.

6.1.3 ! Teorema della media integrale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$$

Tale valore prende il nome di "media integrale di f in $[a, b]$".

Dimostrazione: Se f è continua in $[a, b]$ allora, per il teorema di Weirstrass, f ammette massimo e minimo assoluti su $[a, b]$.

Siano assunti $max(f) = M$ e $min(f) = m$ $\forall x \in [a, b]$ allora $m \leq f(x) \leq M$ dunque per la proprietà di monotonia $\int_a^b mdx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b Mdx$ ossia $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$.

Per il teorema dei valori intermedi per le funzioni continue esiste in definitiva $c \in [a, b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$.

Osservazione: Esiste $c \in [a, b]$ tale che $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$.

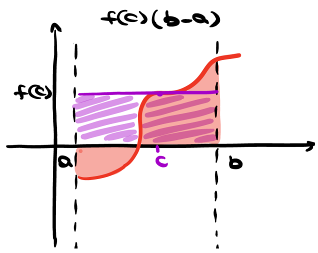

Figura 6.11: Trapezoide di base $b - a$ e altezza $f(c)$.

6.2 Integrali indefiniti

Sia $f : I \to \mathbb{R}$; si dice "primitiva" di f su I una funzione $F : I \to \mathbb{R}$ tale che:

- $F(x)$ è derivabile su $\mathbb{R}$;
- $F^{'}(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Data $f : I \to \mathbb{R}$; si dice "integrale indefinito" di f la famiglia delle primitive di f su I

$$\int f(x)dx = \{F : I \to \mathbb{R} | f(x) = F^{'}(x)\} = F(x) + c$$

Condizione valida $\forall x \in I$ e $\forall c \in \mathbb{R}$.

Tutte le funzioni elementari, essendo continue, sono anche integrabili.

L'integrale indefinito, come quello definito, è un operatore lineare in virtù della sua definizione sull'operatore lineare derivata.

6.2.1 Proprietà dell'integrale indefinito

6.2.1.1 ! Teorema: Ogni funzione f continua in un intervallo I, ammette primitiva, F, in I

Osservazione: La primitiva individuata non è una funzione unica! Ogni funzione della forma $F(x) + c$ $\forall c \in \mathbb{R}$ è una possibile primitiva di $f(x)$.

Dimostrazione:

- Dimostro che ogni funzione nella forma $F(x) + c$ è a sua volta una primitiva.

$F(x) + c$ è una funzione derivabile in I (somma di funzioni derivabili) allora:

$$\frac{d}{dx}(F(x) + c) = \frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}c = f + 0 = f$$

- Siano $F(x), G(x)$ due primitive di $f(x)$; dimostro che la loro differenza è una costante.

Definisco $H(x) = F(x) - G(x)$ funzione derivabile (somma di funzioni derivabili) allora:

$$\frac{d}{dx}H(x) = \frac{d}{dx}F(x) - \frac{d}{dx}G(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$H(x)$ è una costante: $H(x) = F(x) - G(x) = k$.

6.2.2 Strategie di calcolo

Per le funzioni più semplici è possibile utilizzare a ritroso la tabella delle derivate ("tabella degli integrali"). Per altri casi è necessario utilizzare metodi di calcolo più sofisticati.

6.2.2.1 Tabella degli integrali

$\int f(x)dx$	$F(x)$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + c$
$\frac{1}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\lvert\frac{x-a}{x+a}\rvert + c$

$\int f(x)dx$	$F(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2+a}\rvert + c$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+c$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\frac{1}{\cos x^2}$	$\tan x + c$
$\frac{1}{\sin x^2}$	$-\cot x + c$

6.2.2.2 Integrazione per parti

Siano $f(x), g(x)$ due funzioni derivabili in I, allora vale la seguente formula:

$$\int f(x)g^{'}(x)dx = f(x)g(x) - \int f^{'}g(x)dx$$

6.2.2.3 Integrazione per sostituzione

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e sia $\phi : J \to I$ derivabile tale che $\phi(t) = x$ allora vale la seguente formula:

$$\int f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt = \int f(x)dx$$

6.3 Teoremi fondamentali del calcolo integrale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua $\forall x \in [a, b]$ allora tale funzione è continua anche nell'intervallo $[a, x]$.

Definisco una funzione $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ come $f(x) \to \int_a^x f(t)dt$.

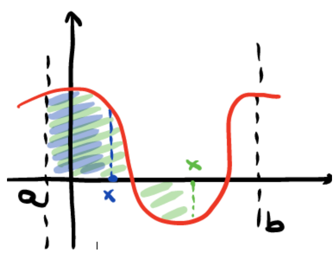

Figura 6.12: Funzione integrale.

6.3.1 ! Primo teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, definita $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ allora: $\forall x \in (a, b)$ F è derivabile ed è tale che $F^{'}(x) = f(x)$ $\forall x \in [a, b]$.

Se $x = a$ F è derivabile da sinistra; se $x = b$ F è derivabile da destra.

Dimostrazione: Per ogni $x \in (a, b)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

La funzione $f : [x, x+h] \to \mathbb{R}$ è continua, per il teorema della media integrale esiste $c \in [x, x+h]$ tale che: $\int_x^{x+h} f(t)dt = f(c) \cdot h$ e $x < c < x + h$.

Per il teorema del confronto $\lim_{h \to 0} c = x$ ne consegue che f è continua in c: $\lim_{h \to 0} f(c) = f(x)$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c) \cdot h}{h} = \lim_{h \to 0} f(c) = f(x)$$

Ne consegue che F è derivabile in x e $F^{'}(x) = f(x)$ per $x \in (a, b)$.

La dimostrazione è la medesima anche per i casi limite $x = a$ e $x = b$.

Osservazione: F è una primitiva di f su $[a, b]$.

6.3.2 ! Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Sia P una primitiva di f su $[a, b]$. Allora:

$$\int_a^b P^{'}(x) = P(b) - P(a)$$

Osservazione: Il teorema è resistente anche alle discontinuità.

Dimostrazione: Definisco $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ funzione integrale tale che $F(a) = 0$.

F è derivabile in $[a, b]$ quindi F è continua in $[a, b]$; costruisco $G(x) = P(x) - F(x)$. $G(x)$ è continua e derivabile in $[a, b]$ (differenza di funzioni continue e derivabili).

$$G^{'}(x) = \underbrace{P^{'}(x)}_{f(x) \text{ per ipotesi}} - \underbrace{F^{'}(x)}_{f(x) \text{ per conseguenza del I Teorema}} = 0 \; \forall x \in [a, b]$$

Ne consegue che $G(x)$ è costante: $G(x) = G(a) = G(b) \; \forall x \in [a, b]$.

$$F(a) = 0 \; f(b) = \int_a^b f(t)dt$$

Per definizione precedente: $P(x) = G(x) + F(x)$.

$$P(a) = G(a) + F(a) = G(a)$$

$$P(b) = G(b) + F(b) = G(a) + F(b)$$

$$P(b) - P(a) = G(a) + F(b) - G(a) =$$

$$= F(b) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b P^{'}(t)dt$$

6.4 Integrali impropri o generalizzati

Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ funzione continua con $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$ (la funzione non è quindi limitata nell'intorno di b); f si dice integrabile in senso generalizzato se esiste finito il limite:

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(t)dt$$

In tal caso si dice che l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ converge. Se il limite dovesse tendere a un infinito invece, l'integrale si dice divergente.

Osservazione: Il punto ϵ è scelto in modo da trovare una restrizione continua e limitata di f: $[a, b-\epsilon]$ dove risulta valido il teorema fondamentale del calcolo integrale.

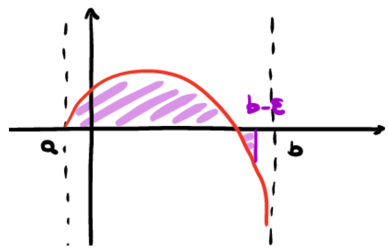

Figura 6.13: Restrizione di f in $[a, b-\epsilon]$.

In maniera simile, sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua; f si dice integrabile in senso generalizzato su $[a, +\infty)$ se esiste finito il limite:

$$\lim_{M \to +\infty} \int_a^M f(t)dt$$

In tal caso si dice che l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge; altrimenti, l'integrale si dice divergente.

Osservazione: Analogamente a prima, la definizione si basa sulla creazione di una restrizione di f: $[a, M]$ dove vale il teorema fondamentale del calcolo integrale.

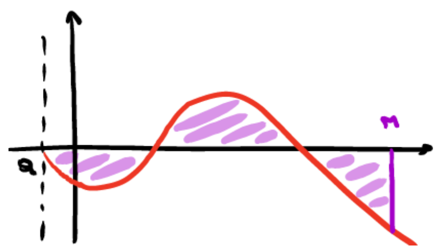

Figura 6.14: Restrizione di f in $[a, M]$.

6.4.1 Criteri d'integrabilità (per funzioni positive)

6.4.1.1 ! Criterio del confronto

- Siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ continue e tali che $\lim_{x \to b} f(x) = \lim_{x \to b} g(x) = \infty$. Siano f, g non negative e tali che $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b)$. Allora se $\int_a^b g(x)$ converge convergerà pure $\int_a^b f(x)$; se $\int_a^b g(x)$ diverge allora diverge anche $\int_a^b f(x)$.

Dimostrazione: Per ipotesi è noto che $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b)$; per la monotonia dell'integrale:

$$0 \leq \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx \leq \int_a^{b-\epsilon} g(x)dx$$

Considerando invece il limite per $\epsilon \to 0^+$:

$$0 \leq \lim_{\epsilon\to 0^+} \underbrace{\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx}_{F(b-\epsilon)-F(a)} \leq \lim_{\epsilon\to 0^+} \underbrace{\int_a^{b-\epsilon} g(x)dx}_{G(b-\epsilon)-G(a)}$$

Si osserva che $F(a) \leq G(a)$ e $F(b-\epsilon) \leq G(b-\epsilon)$; le funzioni $F(b-\epsilon)$ e $G(b-\epsilon)$ sono non decrescenti. Dunque, per il teorema del confronto fra limiti:

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

- Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue, non negative e tali che $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, +\infty)$ allora: se $\int_a^{+\infty} g(x)$ converge convergerà pure $\int_a^{+\infty} f(x)$; analogamente se $\int_a^{+\infty} g(x)$ diverge anche $\int_a^{+\infty} f(x)$ diverge.

Dimostrazione: Per ipotesi è noto che $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, +\infty)$; per la monotonia dell'integrale:

$$0 \leq \int_a^M f(x)dx \leq \int_a^M g(x)dx$$

Considerando invece il limite per $M \to +\infty$:

$$0 \leq \lim_{M\to+\infty} \underbrace{\int_a^M f(x)dx}_{F(M)-F(a)} \leq \lim_{M\to+\infty} \underbrace{\int_a^M g(x)dx}_{G(M)-G(a)}$$

Le funzioni integrali $F(M)$ e $G(M)$ sono non decrescenti, per il teorema del confronto fra limiti:

$$0 \leq \int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$$

6.4.1.2 ! Criterio del confronto asintotico

- Siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ continue e tali che $\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = \infty$. Siano f, g non negative e tali che $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. $\int_a^b f(x)$ converge se e solo se converge $\int_a^b g(x)$.

Dimostrazione: Per ipotesi è noto che: $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a,b)$ e che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to b^-$. Per definizione di limite:

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \implies \forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in (b-\delta, b)\ \left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \epsilon$$

Poiché $-\epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \epsilon$ si ha che $f(x) < (1+\epsilon)g(x)$ e $(1+\epsilon)g(x) < f(x)$ $\forall x \in (b-\delta, b)$.

Considero $g(x)(1-\epsilon) < f(x)$ $\forall x \in (b-\delta, b)$; applicando il criterio del confronto si ha che:

$$\int_{b-\delta}^{b} (1-\epsilon)g(x)dx \leq \int_{b-\delta}^{b} f(x)dx$$

Se $\int_{b-\delta}^{b} f(x)dx$ converge allora converge anche $\int_{b-\delta}^{b}(1-\epsilon)g(x)dx$.

In maniera analoga è possibile dimostrare anche che se $\int_a^b g(x)dx$ converge allora converge anche $\int_a^b f(x)dx$.

- Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue, non negative e tali che $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. $\int_a^b f(x)$ converge se e solo se converge $\int_a^b g(x)$.

Dimostrazione: Per ipotesi è noto che: $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, +\infty)$ e che $f(x) \sim g(x)$ per $x \to +\infty$. Per definizione di limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \implies \forall \epsilon > 0 \exists M > 0 : \forall x > M \left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \epsilon$$

Poiché $-\epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < \epsilon$ si ha che $f(x) < (1+\epsilon)g(x)$ e $(1+\epsilon)g(x) < f(x)$ $\forall x > M$.

Considero $g(x)(1-\epsilon) < f(x)$ $\forall x > M$; applicando il criterio del confronto si ha che:

$$\int_{M}^{+\infty} (1-\epsilon)g(x)dx \leq \int_{M}^{+\infty} f(x)dx$$

Se $\int_M^{+\infty} f(x)dx$ converge allora converge anche $\int_M^{+\infty}(1-\epsilon)g(x)dx$.

In maniera analoga è possibile dimostrare anche che se $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge allora converge anche $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

6.5 Criteri d'integrabilità (per funzioni negative)

Se $f(x)$ fosse negativa (o comunque non positiva), usando le proprietà degli integrali, posso scegliere una funzione $h(x)$ tale che:

$$\underbrace{-f(x)}_{h(x)\geq 0} \geq 0$$

Su $h(x)$ è possibile utilizzare i criteri per le funzioni positive e h condivide lo stesso "comportamento" di f.

6.6 Criteri d'integrabilità (per funzioni a segno variabile)

6.6.1 Criterio di convergenza assoluta

- Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{b^-} f(x) = \infty$. Considero la funzione $|f|$, se $\int_a^b |f(x)|dx$ allora anche $\int_a^b f(x)dx$ converge; inoltre, si ha che $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ (per diseguaglianza triangolare). Attenzione: il teorema non è invertibile!
- Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua. Considero la funzione $|f|$, se $\int_a^b |f(x)|dx$ allora anche $\int_a^b f(x)dx$ converge; inoltre, si ha che $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ (per diseguaglianza triangolare). Attenzione: il teorema non è invertibile!

6.7 Tabella degli integrali generalizzati

- Sia $\alpha > 0$

$$\int_0^\alpha \frac{1}{x^p}dx \to \begin{cases} \text{converge} & \text{se } p < 1 \\ \text{diverge} & \text{se } p \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx \to \begin{cases} \text{converge} & \text{se } p < 1 \\ \text{diverge} & \text{se } p \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx \to \begin{cases} \text{converge} & \text{se } p > 1 \\ \text{diverge} & \text{se } p \leq 1 \end{cases}$$

- Sia $0 < \alpha < 1$

$$\int_0^\alpha \frac{1}{x^a |\ln(x)|^b} \to \begin{cases} \text{converge} & \text{se} \begin{cases} a < 1 & \forall b \in \mathbb{R} \\ a = 1 & b > 1 \end{cases} \\ \text{diverge} & \text{se} \begin{cases} a > 1 & \forall b \in \mathbb{R} \\ a = 1 & b \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

- Sia $\alpha > 1$

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{1}{x^a \ln^b(x)}dx \to \begin{cases} \text{converge} & \text{se} \begin{cases} a > 1 \text{ e } b \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ a = 1 \text{ e } b > 1 \end{cases} \\ \text{diverge} & \text{se} \begin{cases} a < 1 \text{ e } b \in \mathbb{R} \\ \text{oppure} \\ a = 1 \text{ e } b \leq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\int_1^\alpha \frac{1}{\ln^p(x)}dx \to \begin{cases} \text{converge} & \text{se } p < 1 \\ \text{diverge} & \text{se } p \geq 1 \end{cases}$$