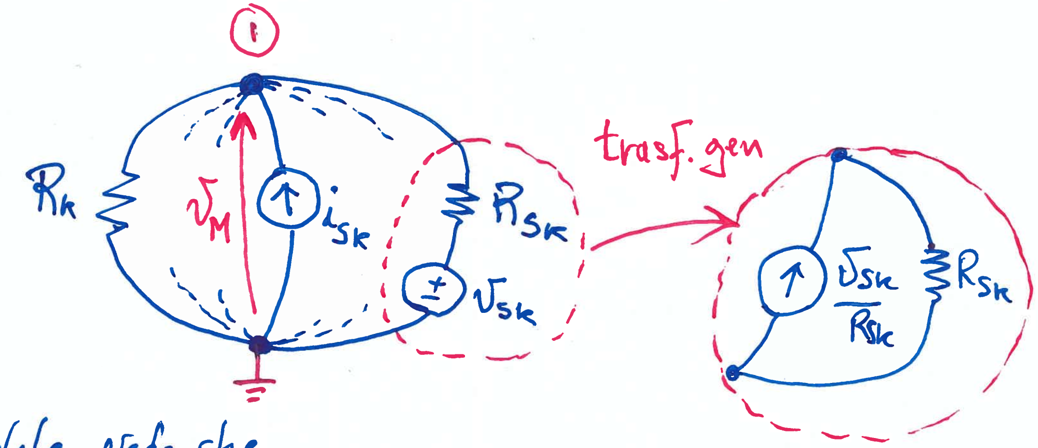
LA "FORMULA DI MILLMAN"

- Risolve un circuito binodale con resistori, gen. corrente, gen. non-id. di tensione
- Trova la tensione fra i due nodi (tensione di Millman) v_M

tanti R_k
tanti i_{sk}
tanti (v_{sk}, R_{sk})
connessi fra due nodi:



Se applico l'analisi nodale vedo che
v_M e' la tensione nodale del nodo 1 quindi

$$\underbrace{\left(\sum_k G_k + \sum_k G_{sk}\right)}_{\text{Somma delle conduttanze connesse al nodo 1}} v_M = \sum_k \pm i_{sk} + \sum_k \pm \frac{v_{sk}}{R_{sk}}$$

+ se entranti in 1
− viceversa

+ se entranti in 1
− viceversa

dove

$$G_k = \frac{1}{R_k} \quad ; \quad G_{sk} = \frac{1}{R_{sk}}$$

Abis

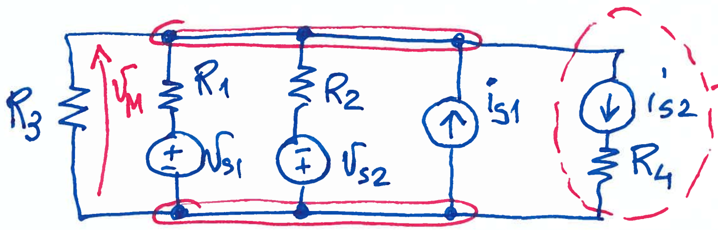
quindi:

$$\boxed{v_M = \frac{\sum_k \pm i_{sk} + \sum_k \pm \frac{v_{sk}}{R_{sk}}}{\sum_k \frac{1}{R_k} + \sum_k \frac{1}{R_{sk}}}}$$

FORMULA DI MILLMAN

Esempio:

$v_{s1} = 30\,V$ $R_1 = 6\,\Omega$
$v_{s2} = 24\,V$ $R_2 = 12\,\Omega$
$i_{s1} = 2\,A$ $R_3 = 3\,\Omega$
$i_{s2} = 2\,A$



per rientrare nello "schema" va visto come esternamente equivalente a

$$v_M = \frac{\frac{v_{s1}}{R_1} - \frac{v_{s2}}{R_2} + i_{s1} - i_{s2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{30}{6} - \frac{24}{12} + 2 - 2}{\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{2+1+4}{12}} = \frac{36}{7} = 5.14\,V$$

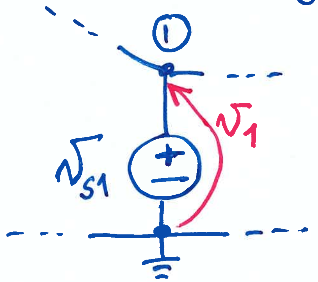
Con la conoscenza di v_M si può agevolmente trovare qualunque altra grandezza nel circuito.

☐ SCRITTURA DEL SISTEMA: STRATAGEMMI PER INCLUDERE —(+|)— (NON TRASFORMABILI)

CASO #2

Presenza di GEN. TENSIONE CONNESSI AL NODO DI RIFERIMENTO (singolarmente o tramite altri gen. tensione)

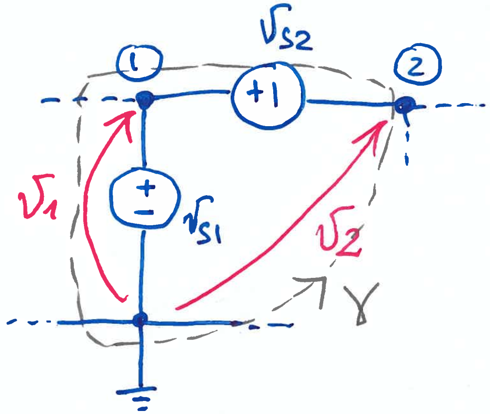
- UNO SOLO:



$\boxed{v_1 = v_{S1}}$ e' una tensione nodale NOTA

⇒ $\boxed{\text{NON SCRIVERE KCL (1) !}}$

- UN GRUPPO:



∃ un percorso per esprimere tutte le tensioni nodali dei nodi dei generatori come somma algebrica dei generatori (KVL):

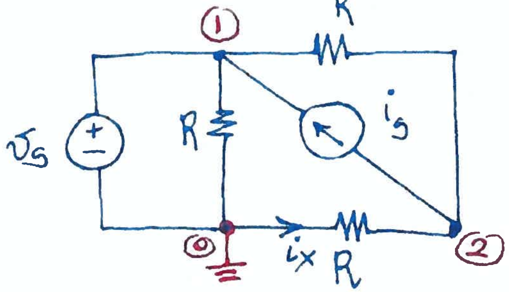
$\boxed{v_1 = v_{S1}}$ NOTA

KVL γ: $\boxed{v_2 = v_{S1} - v_{S2}}$ NOTA

⇒ $\boxed{\text{NON SCRIVERE KCL (1) e KCL (2) !}}$

(NB In sostanza e' una semplificazione più che un problema. Ogni —(+|)— rimuove una incognita e una equazione dal sistema.)

Esempio del caso 2



$v_S = 10\text{ V}$

$i_S = 2\text{ A}$

$R = 5\ \Omega$

Risolvere il circuito con il metodo dell'analisi nodale. Determinare i_X.

1) SCEGLIAMO COME RIFERIMENTO IL NODO ⓪ SU v_S, NUMERIAMO I NODI ① E ②

2) LA TENSIONE NODALE v_1 E' NOTA: $v_1 = v_S = 10\text{ V}$

LA TENSIONE NODALE v_2 E' INCOGNITA

3) SCRITTURA DELLE EQUAZIONI (SOLO AL NODO ② !)

$$\text{KCL } ② : \quad i_S + \frac{v_2 - v_1}{R} + \frac{v_2}{R} = 0$$

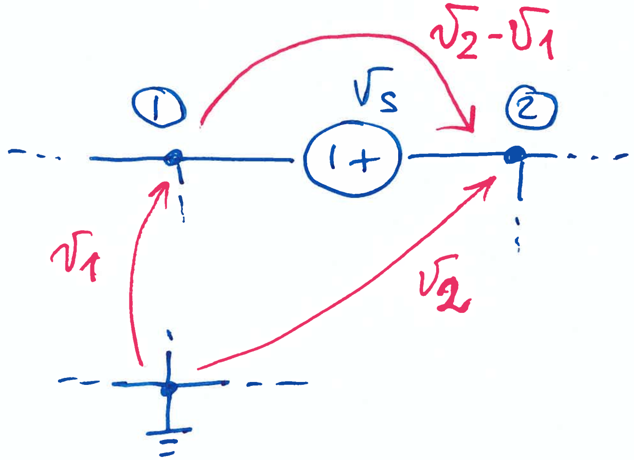
SOSTITUISCO LE TENSIONI NODALI NOTE: $i_S + \dfrac{v_2 - v_S}{R} + \dfrac{v_2}{R} = 0$

4) SOLUZIONE

$$v_2 \cdot \frac{2}{R} = \frac{v_S}{R} - i_S \Rightarrow v_2 = \frac{v_S}{2} - \frac{R i_S}{2} = 5 - 5 = 0 \qquad \boxed{v_2 = 0\text{ V}}$$

N.B. Nota v_2, si può determinare qualunque v, qualunque i del circuito! $\boxed{i_X = \frac{v_2}{R} = 0\text{ A}}$

CASO #3 Gestione di generatori — NON CONNESSI AL NODO DI RIFERIMENTO



La differenza $v_2 - v_1$ e' imposta dal generatore ideale v_S con la CONDIZIONE:

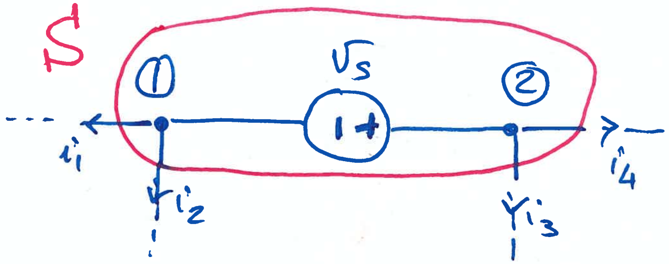
$$\boxed{v_2 - v_1 = v_S}$$

Si sceglie v_1 (oppure v_2) come incognita e l'altra tensione sara' vincolata.

Per esempio: v_1 INCOGNITA

$v_2 = v_1 + v_S$ VINCOLATA

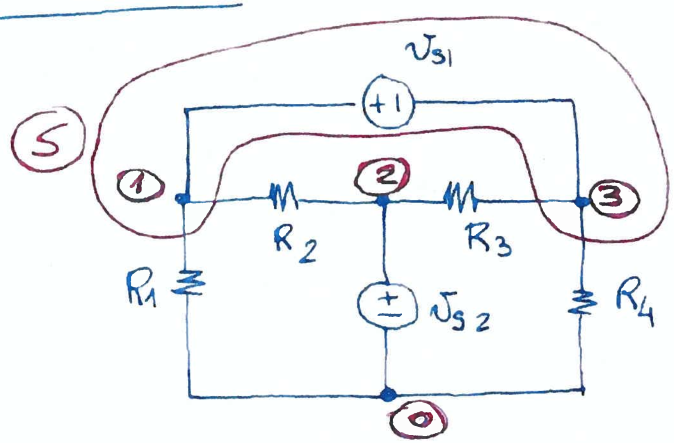
$\Rightarrow$ **SI SCRIVE LA KCL S'**



$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$$

Basta una sola KCL perche' una sola e' l'incognita. La KCL va scritta per il SUPERNODO S' che racchiude il generatore di tensione e i suoi due nodi, (così la corrente del generatore di tensione non compare nell'equazione).

Esempio del caso 3



$v_{S1} = 6\,V$
$v_{S2} = 10\,V$
$R_1 = 6\,\Omega$
$R_2 = 2\,\Omega$
$R_3 = 2\,\Omega$
$R_4 = 3\,\Omega$

Risolvere il circuito avvalendosi del metodo dell'analisi nodale

1) SCEGLIAMO IL RIFERIMENTO AL NODO 0, NUMERIAMO I NODI 1, 2, 3
INGLOBIAMO v_{S1} IN UN SUPERNODO S CHE CONTIENE 1 E 3

2) LA TENSIONE NODALE v_2 È NOTA: $v_2 = v_{S2}$ (NO KCL SU 2)
" " " v_1 E' INCOGNITA
" " " v_3 È VINCOLATA: $v_3 = v_1 - v_{S1}$

3) SI SCRIVE KCL SU S INVECE CHE SU 1 E 3

KCL S: $\dfrac{v_1}{R_1} + \dfrac{v_1 - v_2}{R_2} + \dfrac{v_3 - v_2}{R_3} + \dfrac{v_3}{R_4} = 0$

SOSTITUISCO TENSIONI NODALI NOTE E VINCOLI: $\dfrac{v_1}{R_1} + \dfrac{v_1 - v_{S2}}{R_2} + \dfrac{v_1 - v_{S1} - v_{S2}}{R_3} + \dfrac{v_1 - v_{S1}}{R_4} = 0$

4) RISOLVO

$$v_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right) = v_{s1}\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right) + \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)v_{s2}$$

$$v_1 = \frac{v_{s1}\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}\right) + v_{s2}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}} = \frac{6\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+10\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$$

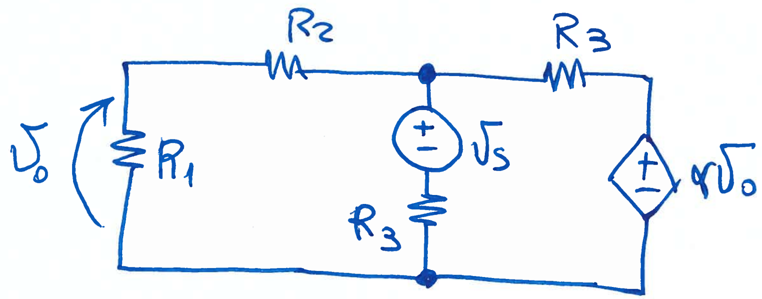
$$= \frac{5+10}{\frac{1+3+3+2}{6}} = \frac{6\cdot\cancel{15}^{\,5}}{\cancel{9}_{\,3}} = 10\ \mathrm{V}$$

N.B. Nota v_1, sono note tutte le v e le i del circuito!

ANALISI NODALE in circuiti con sorgenti dipendenti

- Si valuta il "caso" nel solito modo, non fa differenza che le sorgenti siano indipendenti o dipendenti, ma solo che siano di corrente o di tensione.
- ESPRIMERE LA/LE PILOTANTE/I in funzione delle tensioni nodali incognite

Esempio



$v_s = 60\,V$

$\alpha = 5$

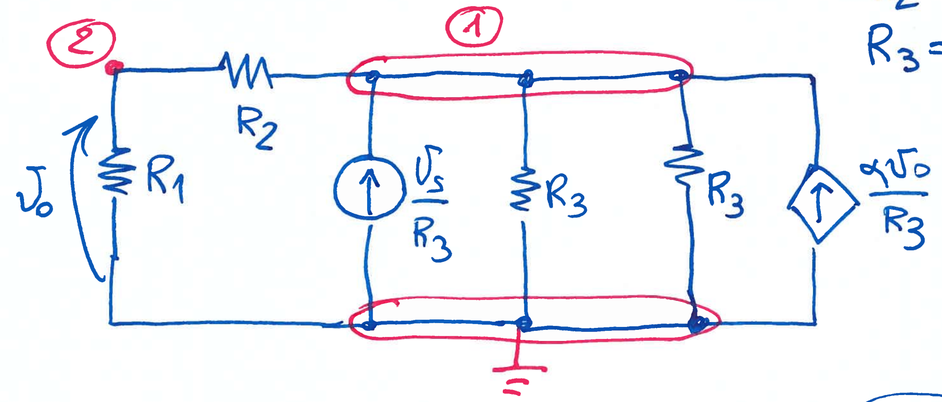
$R_1 = 4\,\Omega$

$R_2 = 6\,\Omega$

$R_3 = 20\,\Omega$

Determinare v_o

trasf. generatori



Solo gen. di corrente: CASO #1

v_1, v_2 INCOGNITE

$\boxed{v_o = v_2 \text{ ESPRESSIONE DELLA PILOTANTE (da sostituire)}}$

$$\begin{cases} \text{KCL } ① \quad -\dfrac{v_s}{R_3} - \dfrac{\alpha v_o}{R_3} + \dfrac{v_1}{R_3} + \dfrac{v_1}{R_3} + \dfrac{v_1 - v_2}{R_2} = 0 \\ \text{KCL } ② \quad \dfrac{v_2 - 0}{R_1} + \dfrac{v_2 - v_1}{R_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{v_s}{R_3} - \dfrac{\alpha v_2}{R_3} + \dfrac{2 v_1}{R_3} + \dfrac{v_1 - v_2}{R_2} = 0 \\ \dfrac{v_2}{R_1} + \dfrac{v_2 - v_1}{R_2} = 0 \end{cases}$$

Soluzione numerica

$$\begin{cases} -3 - \dfrac{v_2}{4} + \dfrac{v_1}{10} + \dfrac{v_1 - v_2}{6} = 0 \\[2ex] \dfrac{v_2}{4} + \dfrac{v_2 - v_1}{6} = 0 \end{cases} \longrightarrow v_2 \frac{5}{12} = \frac{v_1}{6} \rightarrow v_2 = \frac{2}{5} v_1$$

$$\xrightarrow{\text{Sost.}} \quad -3 \cancel{- \frac{2}{20} v_1} \cancel{+ \frac{v_1}{10}} + \frac{v_1}{6} - \frac{2}{30} v_1 = 0$$

$$v_1 \underbrace{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{15} \right)}_{\frac{3}{30}} = 3 \longrightarrow \boxed{v_1 = 30\,V} \longrightarrow \boxed{v_2 = 12\,V}$$

Grandezza da trovare

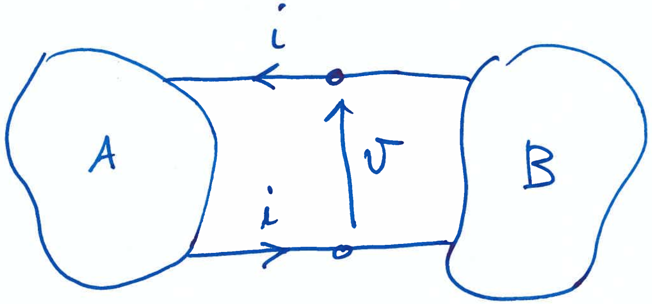
$$\boxed{v_0 = v_2 = 12\,V}$$

Note:

- potevo non trasformare i generatori non-ideali di tensione ricadendo nel caso #3 (oppure nel caso #2 con un opportuno spostamento di v_s sotto R_3)
- Non si deve mettere in serie R_1 e R_2 facendo sparire il nodo ② perché se no sparisce la pilotante dal circuito.

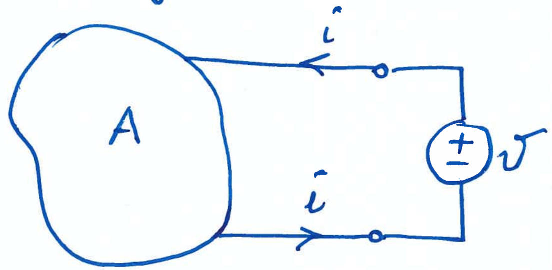
TEOREMA DI SOSTITUZIONE

- **IPOTESI** Si possa dividere un circuito in due bipoli interconnessi A, B

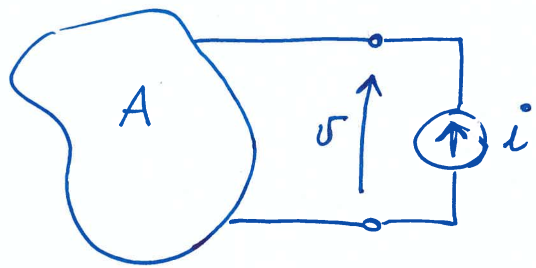


e siano v, i la tensione e corrente ai poli di interconnessione

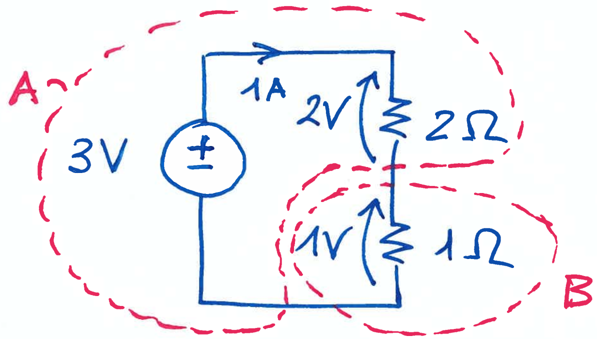
- **TESI #1** Tutte le tensioni e le correnti di A (compresa i) restano INVARIATE se B e' sostituito con un generatore indipendente di tensione ~~di~~ di valore v



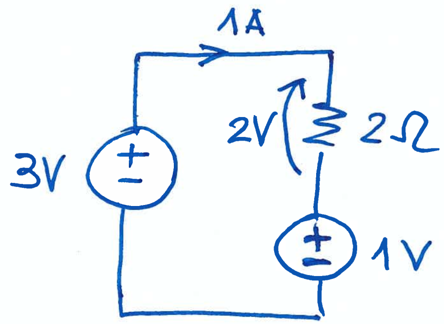
- **TESI #2** Tutte le tensioni e le correnti di A (compresa v) restano INVARIATE se B e' sostituito con un generatore indipendente di corrente di valore i



Esempio

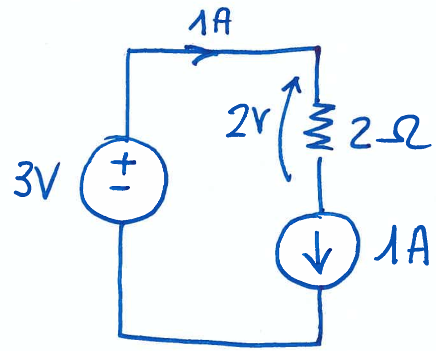


Definisco A e B come in figura



Sostituisco B con gen. di tensione 1V

Stessa soluzione in A!



Sostituisco B con gen. di corrente 1A

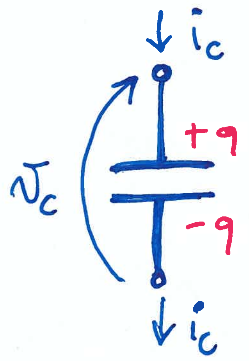
Stessa soluzione in A!

Fino ad ora abbiamo trattato CIRCUITI ADINAMICI (o circuiti resistivi) retti da equazioni algebriche. Iniziamo ora un nuovo grande capitolo che riguarda i

CIRCUITI DINAMICI

- contengono almeno un bipolo dinamico, cioè un bipolo la cui relazione costitutiva coinvolge la derivata d/dt (t tempo)
- ci sono due bipoli dinamici: CONDENSATORE e INDUTTORE
- la soluzione circuitale richiede EQUAZIONI DIFFERENZIALI

☐ CONDENSATORE



Descrive fenomeni capacitivi che implicano (*) l'immagazzinamento di carica $+q, -q$ uguale e opposta su due ~~facce~~ superfici metalliche fra cui è stabilita la tensione v_c

$$\boxed{q = C v_c}$$

$C > 0$ "CAPACITÀ"

$C = \frac{q}{v_c}$ $\quad \frac{[C]}{[V]} = [F]$ "FARAD"

Relazione costitutiva: si assuma convenzione degli utilizzatori

Se la corrente i_c fluisce allora nel tempo Δt la carica immagazzinata varia di $+\Delta q, -\Delta q$

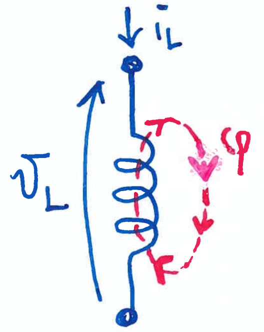
$$i_c(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(C v_c) = C \frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt}}$$

- corrente proporzionale alla velocità di variazione della tensione
- RELAZIONE COSTITUTIVA <u>LINEARE</u> <u>DIFFERENZIALE</u>

[(*) Per maggiori dettagli sulla fisica del dispositivo reale, si rimanda alla parte di elettromagnetismo che faremo alla fine del corso]

☐ INDUTTORE



Descrive fenomeni "autoinduttivi": (*)
Un avvolgimento percorso da corrente genera un flusso φ di campo magnetico concatenato

$$\boxed{\varphi = L\, i_L}$$

$L > 0$ "INDUTTANZA"

$L = \frac{\varphi}{i_L}$ [H] "HENRY"

Relazione costitutiva: si assuma convenzione degli utilizzatori

Per la Legge di Faraday (*)

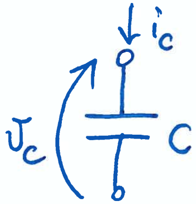
$$v_L = \frac{d\varphi}{dt} = L\,\frac{di_L}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_L(t) = L\,\frac{di_L(t)}{dt}}$$

- tensione proporzionale alla velocita' di variazione della corrente
- RELAZIONE COSTITUTIVA LINEARE DIFFERENZIALE

[(*) Per maggiori dettagli sulla fisica lo studente attenderà la parte di elettromagnetismo alla fine del corso]

RELAZIONI COSTITUTIVE

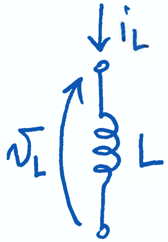


$$\boxed{i_C = C \frac{dv_C}{dt}}$$ forma differenziale

$$dv_C = \frac{1}{C} i_C \, dt \longrightarrow \int_{t_0}^{t} dv_C = v_C(t) - v_C(t_0) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i_C(t')\, dt' \qquad (t_0 \leq t)$$

da cui:

$$\boxed{v_C(t) = v_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t} i_C(t')\, dt'}$$ forma integrale



$$\boxed{v_L = L \frac{di_L}{dt}}$$ forma differenziale

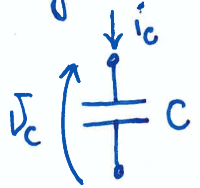
$$\boxed{i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^{t} v_L(t')\, dt'}$$ forma integrale $\quad (t_0 \leq t)$

(dimostrazione analoga)

- Notare la chiara DUALITA' formale fra condensatore e induttore
- La forma integrale mette in evidenza la proprieta' di MEMORIA: lo stato $x(t)$ dipende dalla "storia passata" di x $(x(t_0))$

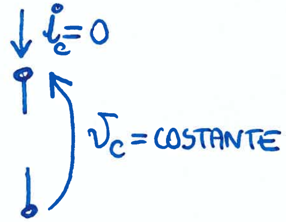
☐ CONDENSATORE: PROPRIETA'

(a) regime costante



$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

Se $\boxed{v_c = \text{COSTANTE} \longrightarrow i_c = 0}$ si comporta come un circuito aperto



(b) La tensione $v_c(t)$ e' una FUNZIONE CONTINUA del tempo

$$\boxed{\forall\, t_0 : \quad \lim_{t \to t_0^+} v_c(t) = \lim_{t \to t_0^-} v_c(t) = v_c(t_0)}$$

Scriveremo più brevemente $\boxed{v_c(t_0^+) = v_c(t_0^-) = v_c(t_0)}$

infatti la tensione e' derivata, quindi deve essere una funzione continua necessariamente
(per assurdo, se v_c fosse discontinua in t_0, allora la derivata, ovvero la corrente i_c tenderebbe a $\pm\infty$)