RISPOSTA IN FREQUENZA

Siccome $\overline{X}_{out} = \overline{H}(j\omega)\,\overline{X}_{in}$

$|\overline{X}_{out}| = |\overline{H}(j\omega)| \cdot |\overline{X}_{in}|$ nei moduli

$\angle \overline{X}_{out} = \angle \overline{H}(j\omega) + \angle \overline{X}_{in}$ nelle fasi

$|\overline{H}(j\omega)|$ RISPOSTA IN AMPIEZZA caratterizza come si riscala l'ampiezza dell'ingresso per dare l'ampiezza dell'uscita

$\angle \overline{H}(j\omega)$ RISPOSTA IN FASE caratterizza la differenza di fase fra uscita e ingresso

L'insieme di RISPOSTA IN AMPIEZZA e RISPOSTA IN FASE costituisce la RISPOSTA IN FREQUENZA del circuito

COME TROVARE FUNZIONI DI RETE

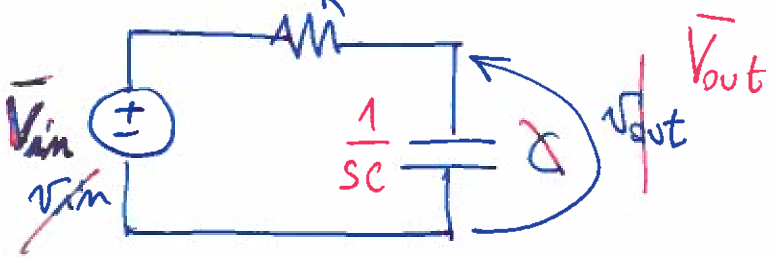
- Definire per comodità $s = j\omega$
- Sostituire L con $j\omega L = \boxed{sL}$

  C con $\dfrac{1}{j\omega C} = \boxed{\dfrac{1}{sC}}$

(passaggio nel dominio della frequenza)

- Calcolare $\bar{X}_{out}/\bar{X}_{in}$ risolvendo il circuito simbolico nel dominio della frequenza

Esempio:



$$\bar{H}(s) = \frac{\bar{V}_{out}}{\bar{V}_{in}} \overset{\text{Partitore}}{=} \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{RCs + 1}$$

$$\boxed{\bar{H}(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1}}$$

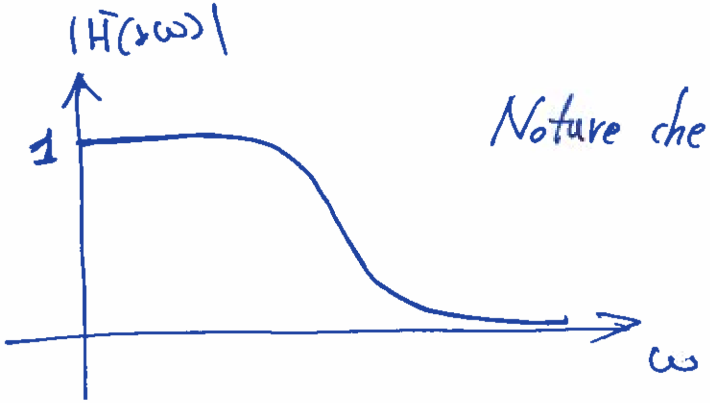
Se devo trovare la risposta in ampiezza

$$|\bar{H}(j\omega)| = \left|\frac{1}{j\omega RC+1}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$$

Se devo trovare la risposta in fase

$$\angle \bar{H}(j\omega) = \angle \frac{1}{j\omega RC+1} = \overset{0^\circ}{\cancel{\angle 1}} - \angle j\omega RC+1 = -\operatorname{arctg}\frac{\omega RC}{1} = -\operatorname{arctg}\omega RC$$

- Cenno ai grafici:



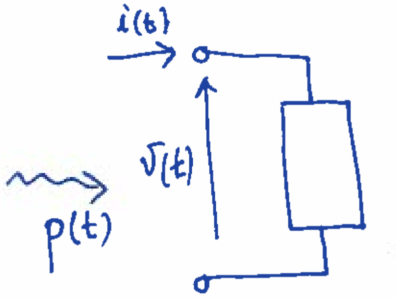
Notare che $|\bar{H}(j0)| = 1$

$|\bar{H}(j\infty)| = 0$

È un circuito che realizza un "FILTRO PASSA BASSO"

il nostro corso non si addentra ulteriormente in questi aspetti che saranno affrontati in altri insegnamenti (Fondamenti di automatica)

POTENZA IN REGIME SINUSOIDALE



Sia
$$v(t) = \sqrt{2}\,V \cos(\omega t + \varphi_V)$$
$$i(t) = \sqrt{2}\,I \cos(\omega t + \varphi_I)$$

N.B.: V e I sono i valori efficaci (r.m.s.) di tensione e corrente

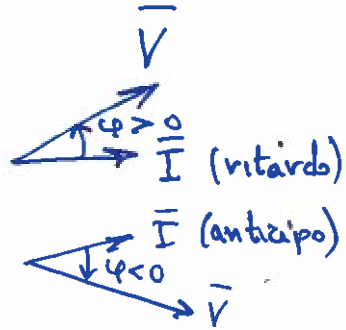
Potenza istantanea entrante:
$$\boxed{p(t) = v(t)\,i(t) = 2VI \cos(\omega t + \varphi_V)\cos(\omega t + \varphi_I)}$$

Riscriviamola attraverso alcune elaborazioni matematiche:

- formula di Werner $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$

$$\Longrightarrow \quad p(t) = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}VI\left[\cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I) + \cos(\varphi_V - \varphi_I)\right]$$

- Definiamo $\boxed{\varphi = \varphi_V - \varphi_I}$ Angolo di sfasamento della tensione rispetto alla corrente



$$\Longrightarrow \quad p(t) = VI\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \varphi_V + \varphi_I + \varphi_I - \varphi_I)\right]$$

aggiungo e tolgo φ_I

$$\Rightarrow \quad p(t) = VI\left[\cos\varphi + \cos\left(2\omega t + 2\varphi_I + \varphi\right)\right]$$

Formula $\quad \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$\Rightarrow \quad p(t) = VI\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t + 2\varphi_I)\cos\varphi - \sin(2\omega t + 2\varphi_I)\sin\varphi\right]$$

- Definiamo

$\boxed{P = VI\cos\varphi}$ POTENZA ATTIVA [W] "WATT"

$\boxed{Q = VI\sin\varphi}$ POTENZA REATTIVA [VAR] "VOLT-AMPERE REATTIVI"

$\Rightarrow$ Decomposizione di $p(t)$:

$$\boxed{p(t) = P\left[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_I)\right] - Q\sin(2\omega t + 2\varphi_I)}$$

Osservazioni:

- $p(t)$ OSCILLA CON FREQUENZA DOPPIA (2ω) RISPETTO A TENSIONE E CORRENTE (PERIODO METÀ $T/2$)
- OSCILLA ATTORNO AL VALORE P
- PER DESCRIVERE L'OSCILLAZIONE CI SERVONO DUE AMPIEZZE P, Q

$$p(t) = \underbrace{P\left[1+\cos(2\omega t + 2\varphi_I)\right]} - Q\,\underbrace{\sin(2\omega t + 2\varphi_I)}$$

OSCILLAZIONE UNIDIREZIONALE

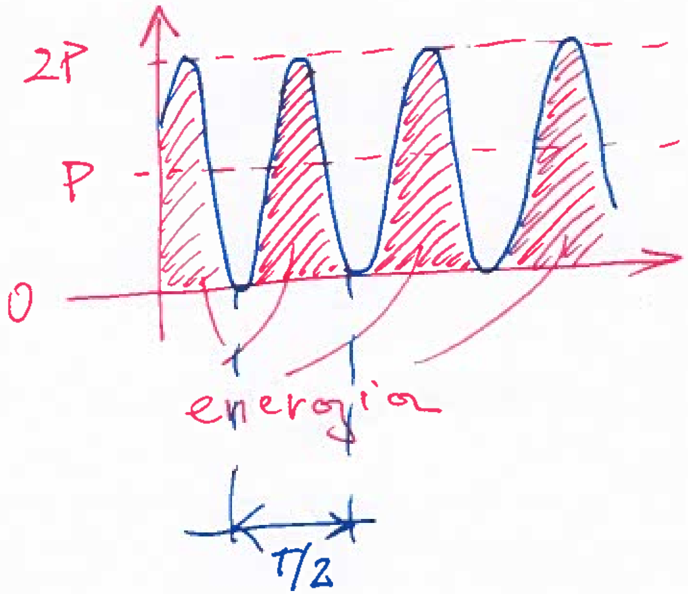
(≥ 0)

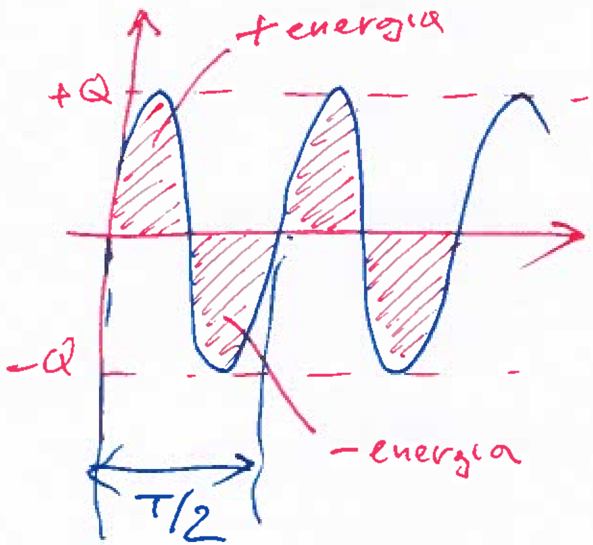
CHE TRASPORTA ENERGIA, CON VALORE MEDIO DI POTENZA PARI ALLA POTENZA ATTIVA P

OSCILLAZIONE BIDIREZIONALE

$(\gtreqless 0)$

CON VALORE MEDIO NULLO E AMPIEZZA PARI ALLA POTENZA REATTIVA Q





scambi di energia NULLI IN UN PERIODO!

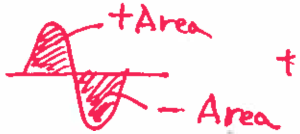
☐ SIGNIFICATO DELLA POTENZA ATTIVA P

Se calcolo il valore medio di $p(t)$ nel periodo $T/2$

$$\text{VALORE MEDIO} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} p(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} P\,dt + \cancel{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} P\cos(2\omega t + 2\varphi_I)\,dt}_{=0} - \cancel{\frac{2}{T}\int_0^{T/2} Q\sin(2\omega t + 2\varphi_I)\,dt}_{=0} =$$

$$= \frac{2}{T} P \frac{T}{2} = P$$

IL VALORE MEDIO DI UN COS E DI UN SIN E' NULLO!



$+\text{Area} - \text{Area} = 0$

LA POTENZA ATTIVA È IL VALORE MEDIO DELLA POTENZA ISTANTANEA

(Viene anche detta potenza media, spec. in Ing. dell'informazione / telecomunicazioni)

☐ ENERGIA ENTRANTE NELL'INTERVALLO $[0, \tilde{T}]$

$$W_e(0,\tilde{T}) = \int_0^{\tilde{T}} p(t)\,dt = N \cdot \underbrace{\int_0^{T/2} p(t)\,dt}_{\text{Vedi sopra il valore medio}} = N \cdot P \frac{T}{2} = P\tilde{T}$$

Sia $\tilde{T} = N\frac{T}{2}$

oppure [kWh] = [kW][h] = 3.6 MJ

In generale, anche se $\tilde{T}$ non è un multiplo del periodo, ma $\boxed{\tilde{T} \gg \frac{T}{2}} \longrightarrow \boxed{W_e(0,\tilde{T}) \approx P\tilde{T}}$ [J]

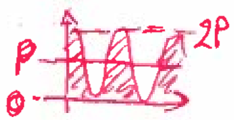
(l'errore che si compie è una frazione di periodo)

Quindi la potenza attiva (potenza media) e' responsabile del trasferimento energetico.

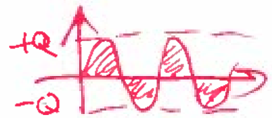
☐ SIGNIFICATO DELLA POTENZA REATTIVA Q

$$p(t) = \underbrace{P\left[1+\cos(2\omega t+2\varphi_I)\right]}_{\geq 0} - Q\,\underbrace{\sin(2\omega t+2\varphi_I)}_{\gtrless 0}$$

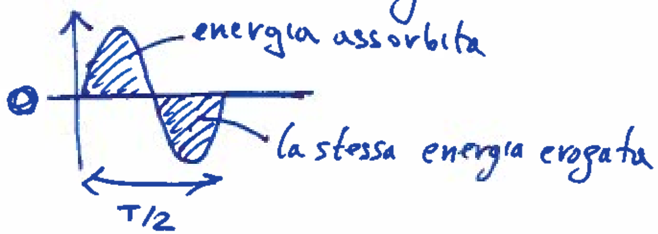
OSCILLAZIONE UNIDIREZIONALE CHE TRASPORTA ENERGIA, CON VALORE MEDIO PARI A P



OSCILLAZIONE BIDIREZIONALE CON VALORE MEDIO NULLO



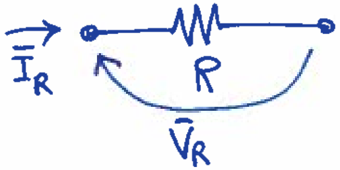
Q tiene conto di scambi energetici a valore medio nullo sul periodo



tali scambi sono presenti, per esempio, nei bipoli dinamici (CONDENSATORE e INDUTTORE) che immagazzinano energia (vedi lezione relativa). C e L si caricano e si scaricano continuamente, due volte per ogni periodo T della loro variabile di stato (v_C, i_L).

FORMULE SPECIFICHE DI P E Q

RESISTORE



$V_R = R I_R$

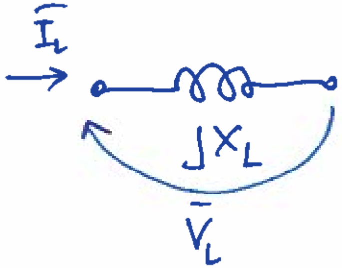
$\varphi = 0°$

corrente in fase

$$P = V_R I_R \cos 0° = V_R I_R = R I_R^2 = \frac{V_R^2}{R} \geq 0$$

$$Q = V_R I_R \sin 0° = 0$$

INDUTTORE



$V_L = X_L I_L$

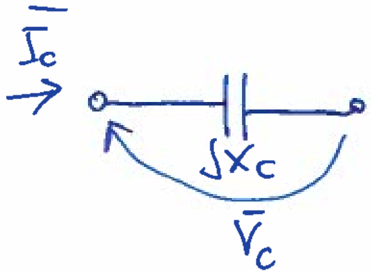
$\varphi = 90°$

corrente in quadratura (ritardo)

$$P = V_L I_L \cos 90° = 0$$

$$Q = V_L I_L \sin 90° = V_L I_L = X_L I_L^2 = \frac{V_L^2}{X_L} \geq 0$$

CONDENSATORE



$V_c = |X_c| I_c$

$\varphi = -90°$

corrente in quadratura (anticipo)

$$P = V_c I_c \cos(-90°) = 0$$

$$Q = V_c I_c \sin(-90°) = -V_c I_c = X_c I_c^2 = \frac{V_c^2}{X_c} \leq 0$$

POTENZA COMPLESSA

Definiamo il seguente numero complesso $\boxed{\bar{S} = P + jQ}$ [VA] "VOLT-AMPERE"

È utile per i calcoli nel dominio dei fasori infatti

$$\boxed{\bar{S} = \bar{V}\,\bar{I}^*}$$

$*$ = COMPLESSO CONIUGATO

Dimostrazione:

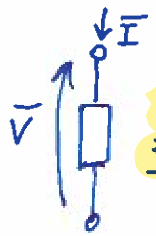
$$\bar{V} = V e^{j\varphi_V} \quad \text{(RMS)}$$
$$\bar{I} = I e^{j\varphi_I} \quad \text{(RMS)}$$

coniugazione in forma esponenziale

$$\bar{S} = V e^{j\varphi_V} I e^{-j\varphi_I} = VI e^{j(\varphi_V - \varphi_I)} = VI e^{j\varphi} = \underbrace{VI\cos\varphi}_{P} + j\,\underbrace{VI\sin\varphi}_{Q}$$

$= P + jQ$ come volevasi dimostrare

POTENZA COMPLESSA ENTRANTE IN UNA IMPEDENZA



$\bar{V} = \bar{Z}\,\bar{I}$
$\bar{I} = \bar{Y}\,\bar{V}$

$$\bar{S} = \bar{V}\bar{I}^* = \bar{Z}\,\bar{I}\,\bar{I}^* = \bar{Z}\,|\bar{I}|^2 = (R + jX)\,|\bar{I}|^2$$
$$\bar{S} = \bar{V}\bar{I}^* = \bar{V}\,(\bar{Y}\bar{V})^* = \bar{Y}^*\,\bar{V}\,\bar{V}^* = \bar{Y}^*\,|\bar{V}|^2 = (G - jB)\,|\bar{V}|^2$$

☐ POTENZA APPARENTE

Si definisce come il modulo della potenza complessa

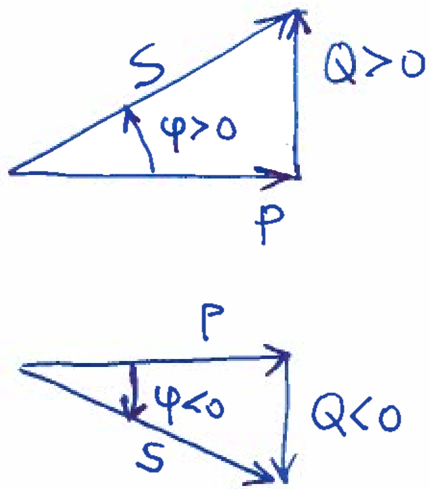
$$\boxed{S = |\bar{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

[VA] "VOLT-AMPERE"

$$\boxed{S = |\bar{V}\bar{I}^*| = |\bar{V}||\bar{I}^*| = VI}$$

prodotto dei valori efficaci di tensione e corrente.
Ecco perché "apparente"...

☐ TRIANGOLO DELLE POTENZE



E' utile per ricordare tutte le relazioni matematiche fra le potenze

$$\boxed{\begin{aligned} P &= S\cos\varphi \\ Q &= S\sin\varphi \\ \frac{Q}{P} &= \tan\varphi \end{aligned}}$$

(Leggi dei triangoli rettangoli)

$$\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$ (Pitagora)

FATTORE DI POTENZA

$\boxed{0 \leq \cos\varphi \leq 1}$ Viene detto fattore di potenza

Siccome $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$ per distinguere il segno di φ si aggiunge l'informazione

RITARDO SE $\varphi > 0$ abbreviato (RIT.)

ANTICIPO SE $\varphi < 0$ abbreviato (ANT.)

IMPEDENZA:

$90°$	INDUTTIVA	$\longrightarrow$	$\cos\varphi = 0$
	RES-IND.		(RIT.)
$\varphi = 0$	RESISTIVA	$\longrightarrow$	$\cos\varphi = 1$
	RES-CAP		(ANT.)
$-90°$	CAPACITIVA	$\longrightarrow$	$\cos\varphi = 0$

Il fattore di potenza di una impedenza e' un indice di quanto e' resistiva

Esempio:

$\cos\varphi = 0.9$ (rit.) $\rightarrow$ $\varphi = \arccos 0.9 = 25.84°$ IMPEDENZA RES.-IND.

$\cos\varphi = 0.7$ (ant.) $\rightarrow$ $\varphi = -\arccos 0.7 = -45.57°$ IMP. RES.-CAP.

☐ FORMULE CON AMPIEZZA ANZICHÉ VALORE EFFICACE: RICORDARE!!

Tutte le formule richiedono un coefficiente $\frac{1}{2}$

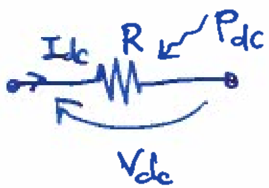
Infatti $P = VI\cos\varphi = \frac{V_M}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_M}{\sqrt{2}} \cos\varphi = \frac{1}{2} V_M I_M \cos\varphi$

ecc... $Q = \frac{1}{2} V_M I_M \sin\varphi$ $\quad \bar{S} = \frac{1}{2} \bar{V}\bar{I}^*$ se $\bar{V}$ e $\bar{I}$ definiti in AMP.

da qui la "comodità" del valore efficace, usato in molti settori in cui la potenza e' una grandezza molto rilevante (per es. distribuzione dell'energia elettrica)

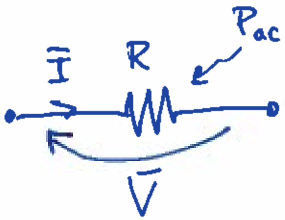
☐ SIGNIFICATO STORICO DEL VALORE EFFICACE

DC:



$P_{dc} = V_{dc} I_{dc} = R I_{dc}^2$

AC:



$P_{ac} = \frac{1}{2} V_M I_M = V_{rms} I_{rms} = R I_{rms}^2$

$\boxed{P_{dc} = P_{ac}} \longrightarrow \boxed{I_{dc} = I_{rms}}$

il valore efficace della sinusoide (ac) e' quel valore che se fosse costante (dc) dissiperebbe la stessa potenza media su un resistore

TEOREMA DI BOUCHEROT

IPOTESI: CIRCUITO NEL DOMINIO DEI FASORI, N bipoli

TESI:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} \bar{S}_k = 0}$$

La somma di tutte le potenze complesse entranti e' nulla

La potenza complessa si CONSERVA

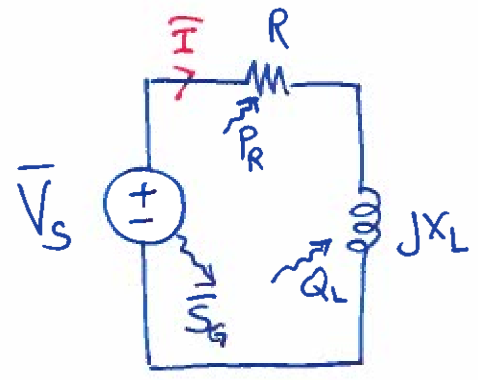
COROLLARIO:

$$\sum_{k=1}^{N} (P_k + jQ_k) = 0$$

$\xrightarrow{\mathrm{Re}}$ $\boxed{\sum_{k=1}^{N} P_k = 0}$ La potenza attiva si' conserva

$\xrightarrow{\mathrm{Im}}$ $\boxed{\sum_{k=1}^{N} Q_k = 0}$ La potenza reattiva si' conserva

Esempio



$\bar{V}_S = 10\,V$ (RMS)

$R = 10\,\Omega$

$X_L = 20\,\Omega$

Determinare

$\bar{S}_G$ (uscente)

P_R, Q_L (entranti)

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_S}{R + jX_L} = \frac{10}{10 + j20} = \frac{1}{1+j2}\left(\frac{1-j2}{1-j2}\right) = \frac{1-j2}{5}\ A$$

(conv. gen.) $\bar{S}_G = \bar{V}_S \bar{I}^* = 10\left(\frac{1+j2}{5}\right) = 2 + j4$ VA

$$\begin{cases} P_G = \mathrm{Re}\{\bar{S}_G\} = 2\,W \\ Q_G = \mathrm{Im}\{\bar{S}_G\} = 4\,VAR \end{cases}$$

$$P_R = R|\bar{I}|^2 = 10\,\frac{(1+4)}{5^2} = 2\,W$$

$$Q_L = X_L|\bar{I}|^2 = 20\,\frac{(1+4)}{5^2} = 4\,VAR$$

Verifica Boucherot: $-P_G + P_R = -2 + 2 = 0$ OK

$-Q_G + Q_L = -4 + 4 = 0$ OK