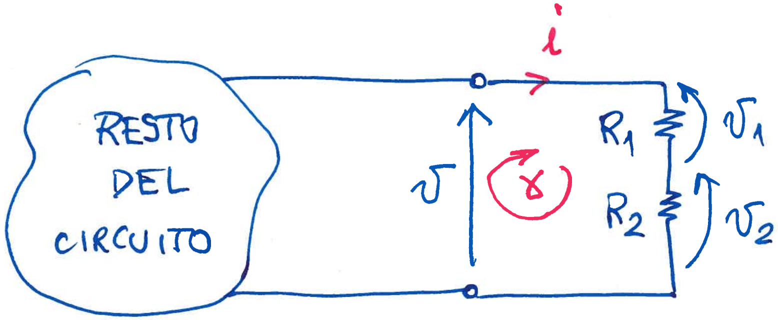
# PARTITORE DI TENSIONE




**Ipotesi:**
- HO DEI RESISTORI IN SERIE
- CONOSCO $v$ (tensione ai due poli della serie)

**Problema:** CALCOLARE $v_1, v_2$ (tensioni ripartite su $R_1$ e $R_2$)

$v_1 = R_1 i$ ; $v_2 = R_2 i$ (stessa $i$ perchè serie)

KVL $\gamma$: $\quad v - v_1 - v_2 = 0 \rightarrow v = v_1 + v_2 = R_1 i + R_2 i = (R_1 + R_2)\, i$

$$\rightarrow \quad i = \frac{v}{R_1 + R_2}$$

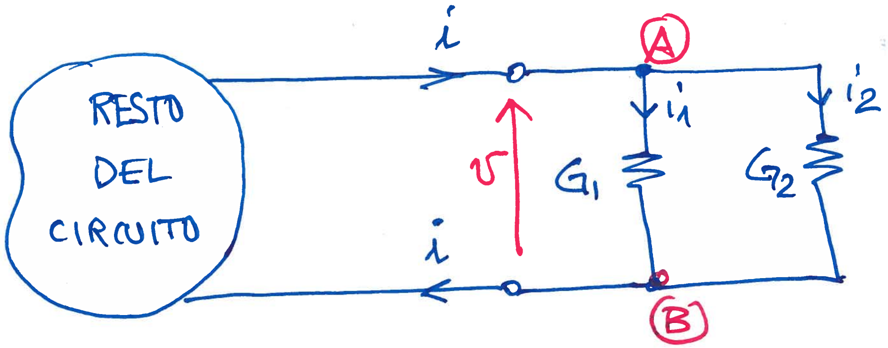
quindi

$$\boxed{v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\, v} \qquad \boxed{v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\, v}$$

IN GENERALE PER N RESISTORI IN SERIE:

$$\boxed{v_h = v \cdot \frac{R_h}{\sum_{k=1}^{N} R_k}}$$

# PARTITORE DI CORRENTE




Ipotesi:
- HO DEI RESISTORI IN PARALLELO
- CONOSCO $i$

Problema: CALCOLARE $i_1, i_2$

$i_1 = G_1 v$ ; $i_2 = G_2 v$ (stessa $v$ perché parallelo)

KCL (A) oppure (B) : $i - i_1 - i_2 = 0$ $\quad i = i_1 + i_2 = (G_1 + G_2) v$

$$\rightarrow v = \frac{i}{G_1 + G_2}$$

quindi

$$\boxed{i_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} i} \qquad \boxed{i_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} i}$$

IN GENERALE PER N RESISTORI IN PARALLELO:

$$\boxed{i_h = i \cdot \frac{G_h}{\sum_{k=1}^{N} G_k}}$$

# CASO PARTICOLARE N=2 ESPRESSO CON RESISTENZE

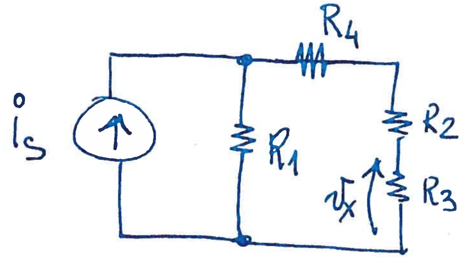
$$\boxed{i_1} = i \frac{G_1}{G_1+G_2} = i \frac{1/R_1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = i \frac{\frac{1}{\cancel{R_1}}}{\frac{R_2+R_1}{\cancel{R_1} R_2}} = \boxed{i \frac{R_2}{R_1+R_2}}$$

allo stesso modo: $\boxed{i_2 = i \frac{R_1}{R_1+R_2}}$

N.B.

- cambia la regola al numeratore !
- vale solo per $N=2$ !

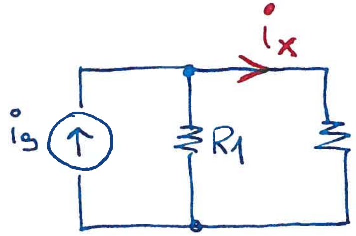
# Esempio di applicazione dei partitori di $v$ e di $i$




$i_s = 10\,A$
$R_1 = 9\,\Omega$
$R_2 = 3\,\Omega$
$R_3 = 2\,\Omega$
$R_4 = 4\,\Omega$

Determinare la tensione $v_x$ nel circuito in figura.

1° modo (sfruttando il partitore di corrente)




$R_{234} = R_2 + R_3 + R_4 = 9\,\Omega$

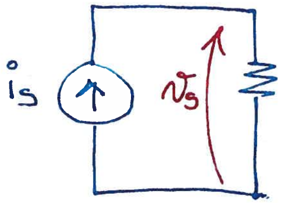
(Ho sostituito la serie di $R_2, R_3, R_4$ con la resistenza equivalente $R_{234}$)

Definisco $i_x$ nel circuito

Partitore di corrente: $$i_x = i_s \frac{R_1}{R_1 + R_{234}} = 10 \cdot \frac{9}{9+9} = 5\,A$$

Osservando il circuito originario, posso scrivere che: $v_x = R_3 i_x = 2 \cdot 5 = 10\,V$

## 2° modo (sfruttando il partitore di tensione)



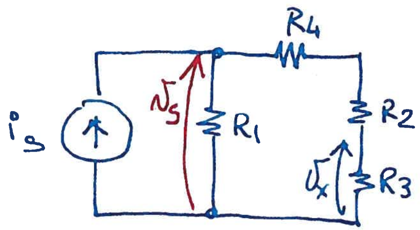

$$R_{1234} = R_1 // R_{234} = \frac{R_1 \cdot R_{234}}{R_1 + R_{234}} = \frac{9 \cdot 9}{18} = \frac{9}{2}\ \Omega$$

(Ho sostituito, nel circuito originario, le resistenze $R_1, R_2, R_3, R_4$ con la resistenza equivalente $R_{1234}$)

Definisco $v_s$ nel circuito

$$v_s = i_s \cdot R_{1234} = 10 \cdot \frac{9}{2} = 45\ V$$

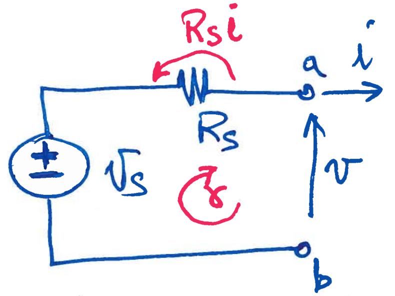
Nel circuito originario, si ha:




Partitore di tensione:

$$v_x = v_s \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_2 + R_4} = 45 \cdot \frac{2}{2+3+4} = \cancel{45}^{\,5}\,\frac{2}{\cancel{9}} = 10\ V$$

## ☐ GENERATORE NON-IDEALE (O GEN. REALE) DI TENSIONE

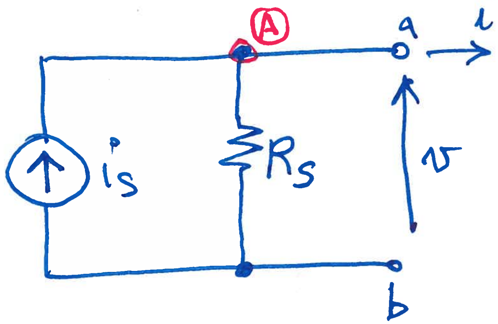



Troviamo la relazione costitutiva (conv. dei generatori)

KVL $\gamma$: $\quad v_s - R_s i - v = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v = v_s - R_s i}$$

## ☐ GENERATORE NON-IDEALE (O GEN. REALE) DI CORRENTE




Troviamo la relazione costitutiva (conv. dei generatori)

KCL Ⓐ: $\quad i_s - \dfrac{v}{R_s} - i = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{i = i_s - \frac{v}{R_s}}$$

## ☐ GRAFICI DELLE CARATTERISTICHE

Sono rette !

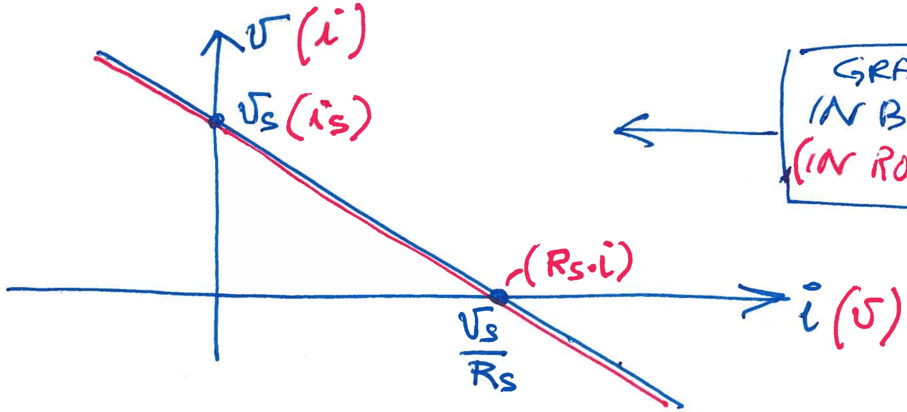
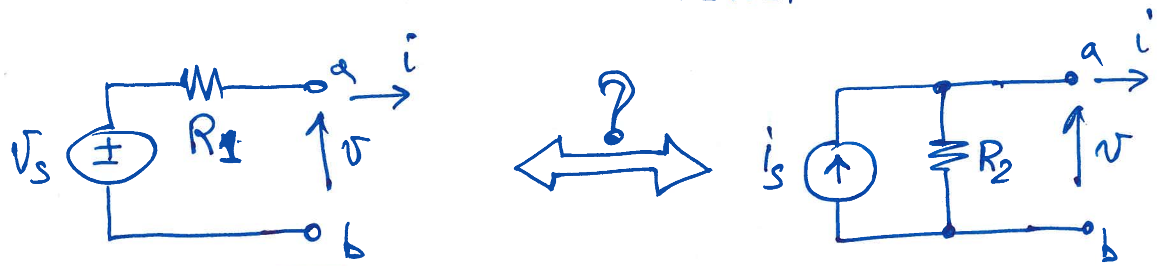



GRAFICO:
IN BLU: di tensione
(IN ROSSO): di corrente

## ☐ EQUIVALENZA FRA SORGENTI NON IDEALI




#1 $\boxed{v = v_s - R_1 i}$

$$i = i_s - \frac{v}{R_2}$$

$$\Downarrow$$

$$R_2 i = R_2 i_s - v$$

$$\Downarrow$$

#2 $\boxed{v = R_2 i_s - R_2 i}$

Le due relazioni costitutive sono uguali, ovvero c'è EQUIVALENZA ESTERNA se

(confronta #1 con #2)

$$\boxed{\begin{array}{l} R_1 = R_2 = R_s \\ v_s = R_s i_s \end{array}}$$

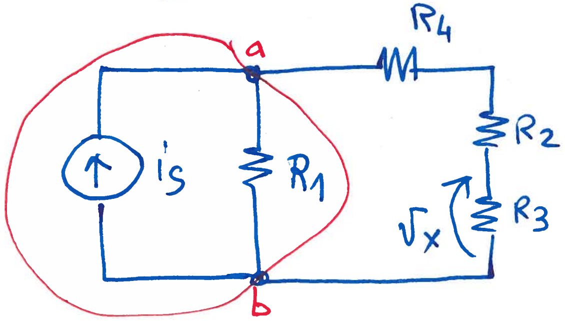
(UGUALE RESISTENZA INTERNA)

(RELAZIONE FRA LE SORGENTI IDEALI INTERNE)

"TRASFORMAZIONE DEI GENERATORI"

N.B. La trasformazione dei generatori non è possibile se $R_1 = 0\,\Omega$ (gen. ideale di tensione) oppure $R_2 \to \infty\,\Omega$ (gen. ideale di corrente) !

□ Esempio di applicazione (ancora l'esercizio di prima sul partitore)

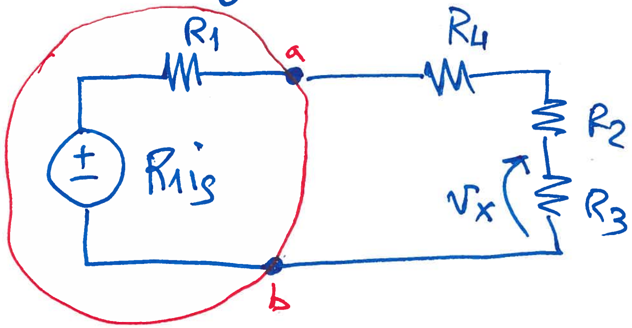



$i_S = 10$ A
$R_1 = 9\ \Omega$
$R_2 = 3\ \Omega$
$R_3 = 2\ \Omega$
$R_4 = 4\ \Omega$

Determinare la tensione $v_x$ nel circuito in Figura

INDIVIDUO IL BIPOLO GEN. NON-ID. DI CORRENTE

Trasformazione del generatore:

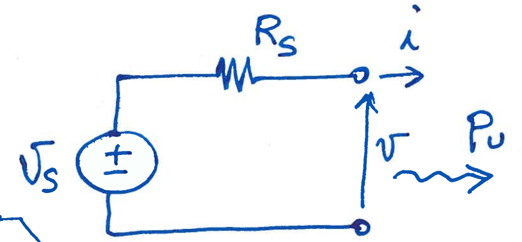



Partitore di tensione:

$$v_x = R_1 i_S \frac{R_3}{R_1 + R_4 + R_2 + R_3} = 90 \frac{2}{18} = 10\,V$$

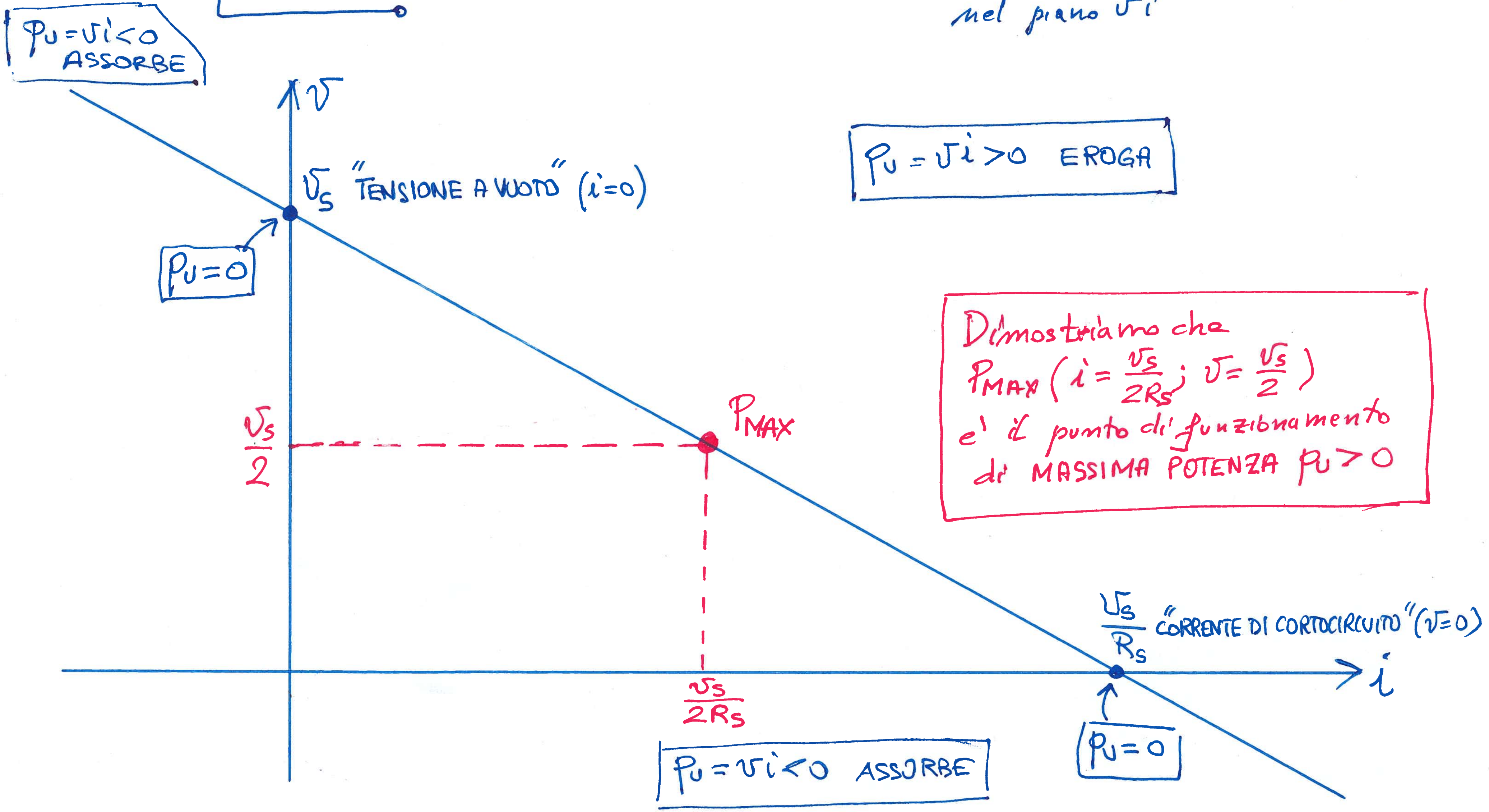
N.B. Quando si applica questa tecnica, ricordare che si tratta di una equivalenza ESTERNA. All'INTERNO del bipolo trasformato le grandezze elettriche sono diverse da quelle del bipolo di partenza (per esempio la corrente che fluisce in $R_1$).

# TRASFERIMENTO DI POTENZA (DA UN GEN. NON-IDEALE DI TENSIONE)



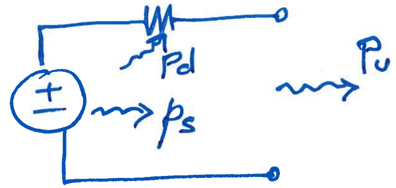

$v = v_s - R_s i$

La relazione costitutiva e' una retta decrescente (assumiamo $R_s > 0$ passivo) nel piano $v\,i$




Dimostriamo che $P_{MAX}\left(i = \frac{v_s}{2R_s};\ v = \frac{v_s}{2}\right)$ e' il punto di funzionamento di MASSIMA POTENZA $p_u > 0$

## Dimostrazione: (teorema del massimo trasferimento di potenza)




$$p_u = v i = (v_s - R_s i)\, i = v_s i - R_s i^2 = p_s - p_d$$

( $p_s = v_s i$ potenza erogata dalla sorgente ideale interna
$p_d = R_s i^2$ potenza assorbita dalla resistenza interna )

Cerco il massimo di $p_u$:

$$\frac{dp_u}{di} = 0 \rightarrow v_s - 2R_s i = 0 \rightarrow \boxed{i = \frac{v_s}{2R_s}} \rightarrow \boxed{v = v_s - R_s \frac{v_s}{2R_s} = \frac{v_s}{2}}$$

quindi $P_{MAX}\left(i = \frac{v_s}{2R_s} ; v = \frac{v_s}{2}\right)$ è il punto di MASSIMA POTENZA EROGATA fra tutti i punti della relazione costitutiva

e la massima potenza è

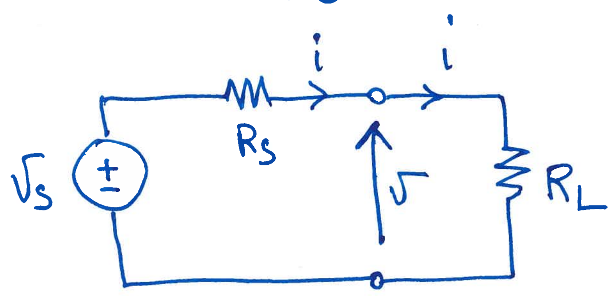
$$\boxed{p_{MAX} = \frac{v_s}{2} \cdot \frac{v_s}{2R_s} = \frac{v_s^2}{4R_s}}$$

"POTENZA DISPONIBILE"

• Corollario: un generatore di tensione ideale ($R_s = 0\,\Omega$) ha potenza disponibile INFINITA cioè illimitata.

# ☐ PUNTO DI LAVORO CON RESISTORE DI CARICO

L : "LOAD" ("CARICO")



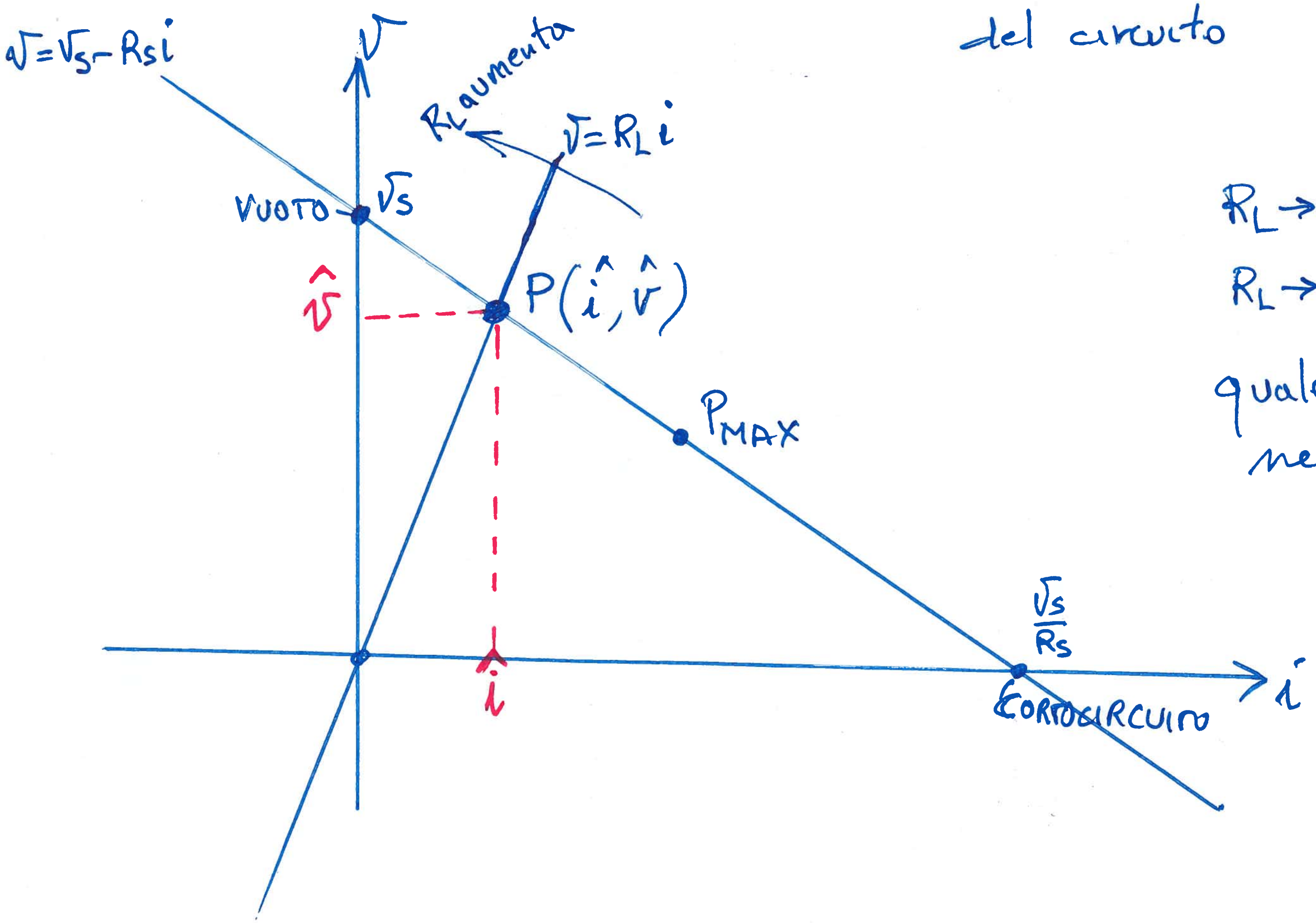

$v = V_S - R_S i$ $\qquad$ $v = R_L i$

Dall'intersezione fra le relazioni costitutive

$v = V_S - R_S i$ (sorgente)

$v = R_L i$ (carico resistivo)

otteniamo la soluzione $P(\hat{i}, \hat{v})$ "Punto di lavoro" del circuito




$R_L \to \infty\,\Omega$ VUOTO

$R_L \to 0\,\Omega$ CORTOCIRCUITO

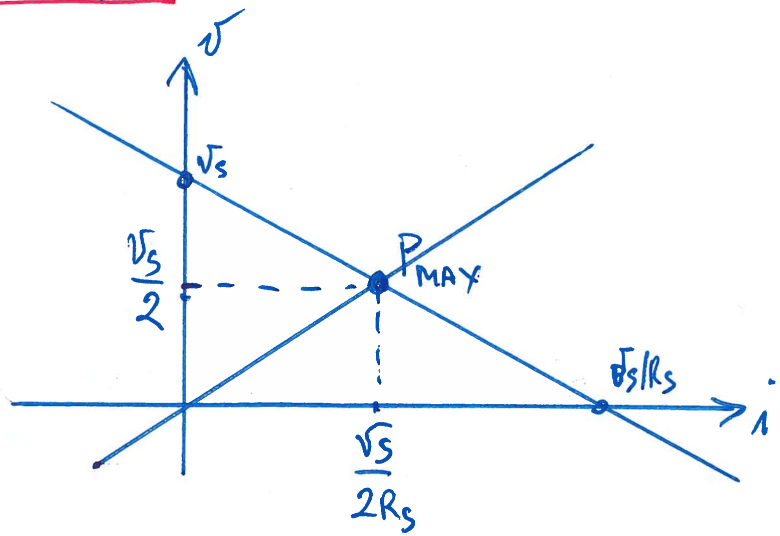
quale $R_L$ porta l'intersezione nel punto $P_{MAX}$ ?

Il resistore di carico che consente di ottenere $P_{MAX}$ punto di massima potenze e' quindi

$$P_{MAX}\left(\hat{i}=\frac{v_S}{2R_S}\,;\ \hat{v}=\frac{v_S}{2}\right) \longrightarrow R_L=\frac{\frac{\cancel{v_S}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{v_S}}{\cancel{2}R_S}}=R_S$$

## TEOREMA DEL MASSIMO TRASFERIMENTO DI POTENZA CON RESISTORE DI CARICO

Il resistore di carico $R_L$ che assorbe la potenza disponibile della sorgente e' $\boxed{R_L=R_S}$

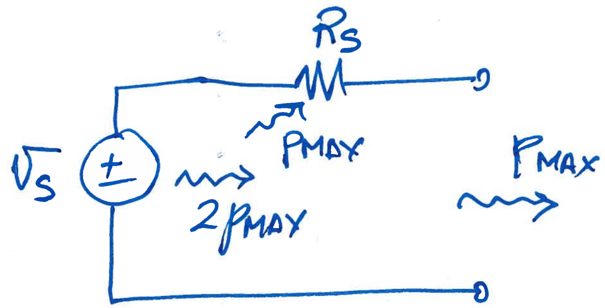


- Nota: il rendimento nel punto di massima potenza e' solo il 50%

$$p_U = p_S - p_d \quad \text{dove} \quad p_U = p_{MAX} = \frac{v_S^2}{4R_S}$$

$$p_S = v_S \hat{i} = v_S \frac{v_S}{2R_S} = \frac{v_S^2}{2R_S} = 2\,p_{MAX}$$

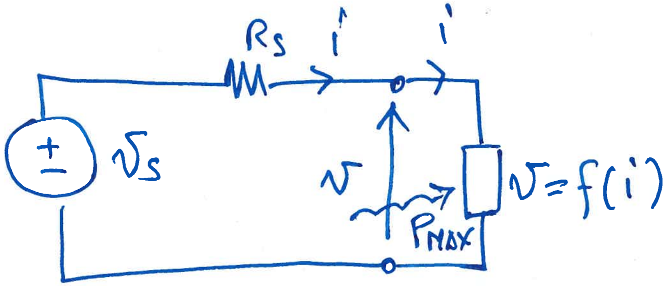
$$p_d = R_S \hat{i}^2 = R_S \left(\frac{v_S}{2R_S}\right)^2 = \frac{v_S^2}{4R_S} = p_{MAX}$$




la sorgente ideale genera il doppio di $p_{MAX}$.
Una potenza $p_{MAX}$ viene dissipata internamente della resistenza

$$\eta = \frac{p_U}{p_S} = \frac{p_{MAX}}{2p_{MAX}} = 0.5$$

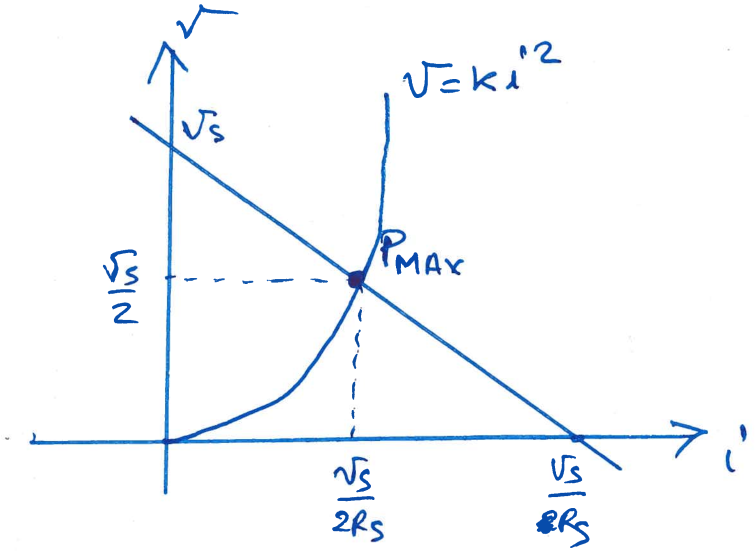
CON ALTRO CARICO (ANCHE NON LINEARE) SI PUÒ ESTENDERE




Esempio $v = k i^2$ resistore non lineare

Trovare k tale che il carico assorba $P_{MAX}$ potenza disponibile della sorgente

È lo stesso: bisogna imporre il punto di lavoro $P_{MAX}$




$$\frac{v_s}{2} = k\left(\frac{v_s}{2R_s}\right)^2 \rightarrow \frac{v_s}{2} = k\,\frac{v_s^2}{4R_s^2}$$

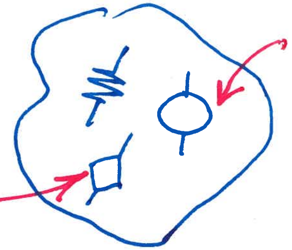
$$\rightarrow k = \frac{\cancel{4}^{\,2} R_s^2}{v_s^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\cancel{v_s}}{\cancel{2}} = \frac{2R_s^2}{v_s}$$

$$\boxed{k = \frac{2R_s^2}{v_s}}$$

# ☐ TEOREMA DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI



- IPOTESI : CIRCUITO LINEARE ADINAMICO



sorgenti indipendenti di tensione e corrente

sorgenti dipendenti di tensione e corrente

- TESI : QUALUNQUE GRANDEZZA $x$ (tensione o corrente) SI PUÒ ESPRIMERE COME COMBINAZIONE LINEARE DELLE SORGENTI INDIPENDENTI

Supponiamo ci siano

$N_V$ generatori indipendenti di tensione $v_{sk}$ $\quad k=1,\dots,N_V$

$N_A$ generatori indipendenti di corrente $i_{sj}$ $\quad j=1,\dots,N_A$

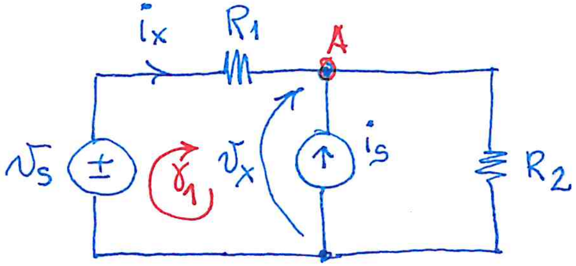
Allora

$$\boxed{x = \sum_{k=1}^{N_V} \alpha_k v_{sk} + \sum_{j=1}^{N_A} \beta_j i_{sj} \qquad \text{dove } \alpha_k, \beta_j \in \mathbb{R}}$$

Corollari

- CIRCUITO SENZA —○— ⇨ È TUTTO NULLO ! $x=0 \ \forall x$
- CIRCUITO CON UN SOLO —○— ⇨ È TUTTO PROPORZIONALE ALL'UNICA SORGENTE INDIPENDENTE

# Esempio




Determiniamo $v_x$ e $i_x$

KVL $\gamma_1$: $v_s - R_1 i_x - v_x = 0$ (1)

KCL A: $i_x + i_s - v_x/R_2 = 0$ $\Rightarrow$ $i_x = \frac{v_x}{R_2} - i_s$ (2)

sostituendo (2) $\rightarrow$ (1)

$$\Rightarrow \quad v_s - R_1 \frac{v_x}{R_2} + R_1 i_s - v_x = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) = v_s + R_1 i_s$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = \underbrace{\frac{R_2}{R_2+R_1}}_{\alpha} v_s + \underbrace{\frac{R_1 R_2}{R_2+R_1}}_{\beta} i_s}$$

$v_x$ e' combinazione lineare di $v_s$ e $i_s$!

sostituendo in (2)

$$\Rightarrow \quad \boxed{i_x} = \frac{1}{R_2+R_1} v_s + \left(\frac{R_1}{R_2+R_1} - 1\right) i_s = \boxed{\underbrace{\frac{1}{R_2+R_1}}_{\alpha} v_s - \underbrace{\frac{R_2}{R_2+R_1}}_{\beta} i_s}$$

$i_x$ e' combinazione lineare di $v_s$ e $i_s$!