CORPI RIGIDI

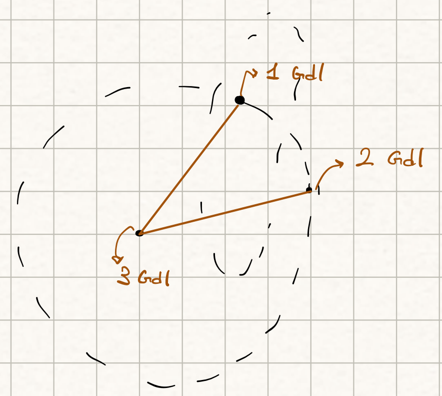
sistema di N punti → 3N gradi di libertà

n. di parametrici necessari per descrivere il moto di un sistema

? gradi di libertà
? N da cosa determinato

eq cardinali → 2 eq. vettoriali → 6 eq. scalari

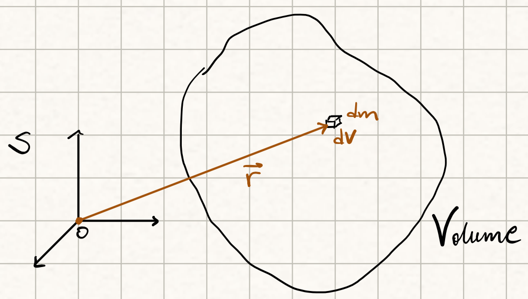
→ **SISTEMI RIGIDI** → le posizioni relative dei punti non cambiano → VINCOLO



⇒ 6 Gdl ⇒ 6 eq. cardinali

CORPI RIGIDI ⇒ sistemi indeformabili (rigidi)
⇒ corpi continui
↳ possiamo usare integrali per i calcoli

DEF.
sistema di p. materiali in cui le distanze tra i punti non variano.



N punti : $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ VS CORPI RIGIDI : $M = \int_M dm$

$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i$ $\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_M \vec{r}\, dm$

∃ Volume → posso definire la DENSITÀ :

$$\delta(\vec{r}) = \frac{dm}{dV} \quad \left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

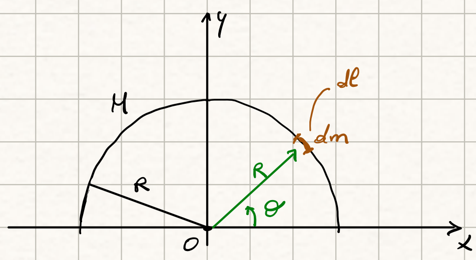
$$\Rightarrow dm = \delta(\vec{r})\, dV$$

$$\Rightarrow M = \int_M dm = \int_V \delta(\vec{r})\, dV$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_M \vec{r}\, dm = \frac{1}{M} \int_V \vec{r}\, \delta(\vec{r})\, dV$$

se δ non dipende da $\vec{r}$ (dalla posizione) il corpo si dice OMOGENEO

es. CALCOLO DEL CM:



? $\vec{r}_{CM}$

DENSITÀ LINEARE: $\lambda = \dfrac{dm}{dl} = \dfrac{M}{L} = \dfrac{M}{\pi R}$

$dm = \lambda \, dl$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int_M \vec{r}\, dm = \begin{cases} x_{CM} = \frac{1}{M}\int_M x\, dm \;\; \underline{\underline{=0}} & \text{per la simmetria} \\ y_{CM} = \frac{1}{M}\int_M y\, dm & (0 \leq y_{CM} \leq R) \end{cases}$$

Usando le coordinate polari:

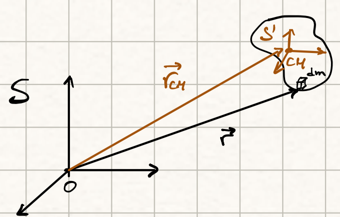
$y = R \sin\theta$

$dl = R\, d\theta$

$$\Rightarrow y_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^{\pi} \underbrace{R\sin\theta}_{y} \, \underbrace{\lambda \overbrace{R\, d\theta}^{dl}}_{dm} = \frac{1}{M}\lambda R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{\cancel{M}}\frac{\cancel{M}}{\pi \cancel{R}} R^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{R}{\pi}\left[1+1\right] = \frac{2}{\pi}R$$

MOTO DEI CORPI RIGIDI



il sistema S' è solidale con il C.R.

$$\vec{v}(\vec{r}) = \overset{0}{\vec{v}'(\vec{r})} + \vec{v}_T$$

$$\vec{v}_T = \underbrace{\vec{v}_{CM}}_{\text{traslaz.}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}'}_{\text{rotaz. di S'}}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{CM})}$$

MOTO di un C.R.:

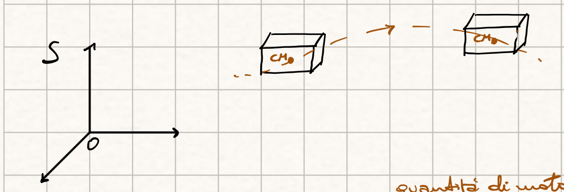
→ rototraslazione

traslazione ($\vec{\omega} = 0$)

rotazione ($\vec{v}_{CM} = 0$)

- TRASLAZIONE :

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_{CM} + \underset{0}{\cancel{\vec{\omega}}} \times (\vec{r} - \vec{r}_{CM}) = \vec{v}_{CM}$$



grandezze dinamiche : $\vec{p}$ (quantità di moto), $\vec{L}$ (momento angolare)

$$\vec{p} = M\vec{v}_{CM} = \int_M \vec{v}\,dm = \int_M \vec{v}_{CM}\,dm = \vec{v}_{CM} \cdot \int_M dm = M\vec{v}_{CM} \;*$$

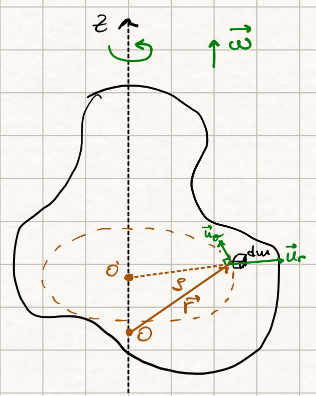
$$\vec{L}_{CM} = \int_M \underbrace{\vec{r}'}_{\text{rispetto al polo (CM)}} \times \vec{v}\,dm = \int_M (\vec{r} - \vec{r}_{CM}) \times \vec{v}_{CM}\,dm = \left\{ \int_M (\vec{r} - \vec{r}_{CM})\,dm \right\} \times \vec{v}_{CM} =$$

$$= \left\{ \underbrace{\int_M \vec{r}\,dm}_{M\vec{r}_{CM}} - \underbrace{\int_M \vec{r}_{CM}\,dm}_{\vec{r}_{CM} M} \right\} \times \vec{v}_{CM} = 0$$

* per trovare $\vec{v}_{CM}$ usare 1° EQ CARDINALE (TEOR. DEL CM) :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{(est)} \rightarrow \frac{d(M\vec{v}_{CM})}{dt} = \vec{F}^{(est)} \Rightarrow M\vec{a}_{CM} = \vec{F}^{(est)}$$

- ROTAZIONE ATTORNO A UN ASSE FISSO : → sistema a 1 grado di libertà (θ)



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$$

$$\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}$$

↳ ∀ punto del C.R. stessa velocità angolare

- $\vec{p} = M\vec{v}_{CM} = M\vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}$

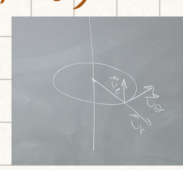
↳ se C.M. è sull'asse : $\vec{p} = 0$

→ non importante per la descrizione del moto

- $$\vec{L}_O = \int_M \vec{r} \times \vec{v}\,dm = \int_M (\rho\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \times \rho\omega\vec{u}_\theta\,dm = *$$

coord. cilindriche $(\rho, \theta, z) \rightarrow (\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ (tg circonfer.)

$\rightarrow \vec{r} = \rho\vec{u}_r + z\vec{u}_z$; $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \rho\omega\vec{u}_\theta$



cambiano

$$* \;= \int_M \rho\,\vec u_r \times \rho\,\omega\,\vec u_\theta\, dm + \int_M z\,\vec u_z \times \rho\,\omega\,\vec u_\theta\, dm = \omega\int_M \rho^2 \underbrace{(\vec u_r \times \vec u_\theta)}_{\vec u_z} dm + \omega\int_M z\rho\,\underbrace{(\vec u_z \times \vec u_\theta)}_{-\vec u_r} dm$$

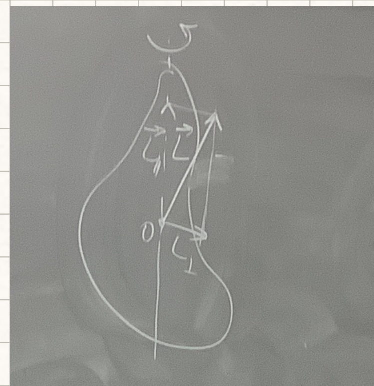
$$= \omega\int_M \rho^2\,\vec u_z\, dm - \omega\int_M z\rho\,\vec u_r\, dm = \underbrace{\omega\,\vec u_z\int_M \rho^2\, dm}_{\text{componente assiale del mom. angolare } (/\!/ \vec u_z)} - \underbrace{\omega\int_M z\rho\,\vec u_r\, dm}_{\text{componente ortogonale}} = \vec L_\parallel + \vec L_\perp$$

uguale per $\forall$ dm — cambia con dm

$$\Rightarrow \vec L_o = \vec L_\parallel + \vec L_\perp$$

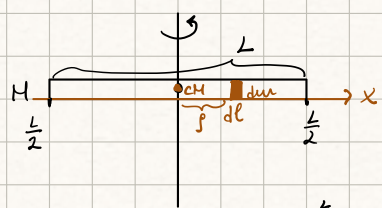
$$\begin{cases} \vec L_\parallel = \omega\left[\int_M \rho^2\, dm\right]\vec u_z = \omega\, I_o\, \vec u_z = I_o\vec\omega \quad * \\ \vec L_\perp = -\omega\int_M z\rho\,\vec u_r\, dm \end{cases}$$

$= 0$ se asse di rot. $\equiv$ asse di simmetria



$*$ $I_o = \int_M \rho^2\, dm$ MOMENTO DI INERZIA dipende da < corpo rigido (massa), asse di rotaz.

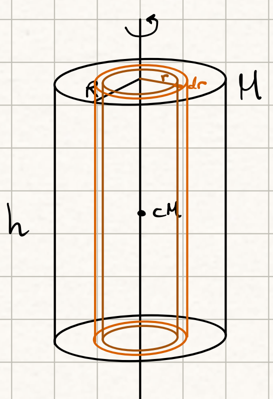
es. asta omogenea che ruota intorno a un asse passante per CM e $\perp$



$$\lambda = \frac{dm}{dl} = \frac{M}{L} \qquad dl = dx$$
$$dm = \lambda\, dl = \frac{M}{L}\, dl \qquad \rho = x$$

$$I_{CM} = \int_M \rho^2\, dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \frac{M}{L}\, dx = \frac{M}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{M}{3L}\left[\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}\right] = \frac{1}{12} M L^2$$

es. cilindro sfruttando la simmetrica cilindrica



$$I_{CM} = \int_M \rho^2\, dm$$

$$\delta = \frac{dm}{dV} = \frac{M}{\pi R^2 h}$$

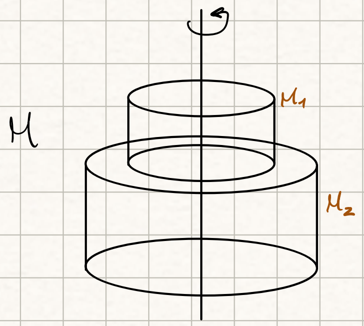
$$dm = \delta\, dV = \frac{M}{\pi R^2 h}\, 2\pi r\, dr\, h$$

$$\rho = r$$

$$\Rightarrow I_{CM} = \int_0^R r^2 \underbrace{\frac{M}{\cancel{\pi} R^2 \cancel{h}}}_{\delta} 2\cancel{\pi} r \cancel{h}\, dr = \frac{2M}{R^2}\int_0^R r^3\, dr = \frac{2M}{R^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{1}{2} M R^2$$

! non dipende dall'altezza del cilindro

es.

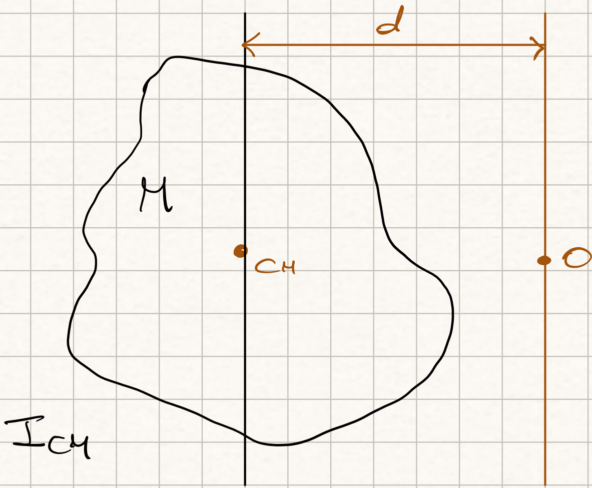


$$I_{CM} = \int_M \rho^2\,dm = \int_{M_1} \rho^2\,dm + \int_{M_2} \rho^2\,dm = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 + \frac{1}{2} M_2 R_2^2$$

(considero i cilindri separatamente)

→ **TEOREMA DI HUYGENS-STEINER** : (t. degli assi paralleli)

→ il momento di inerzia di un corpo rigido rispetto a un asse equivale alla somma tra tra il momento di inerzia rispetto all'asse // passante per CM e il prodotto della massa per il quadrato della distanze tra gli assi.

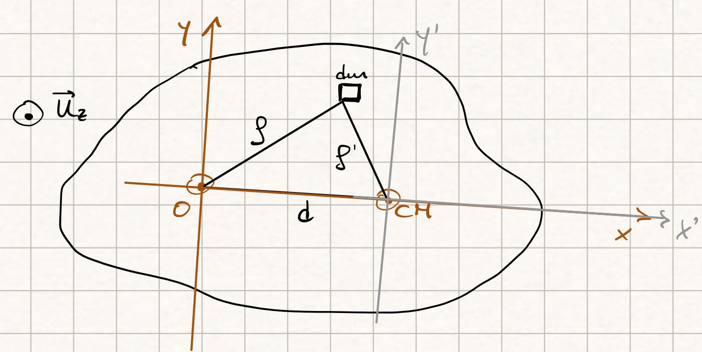


$$\boxed{I_O = I_{CM} + Md^2}$$

se conosco I_{CM} di ∀ asse passante per CM posso trovare I_O di tutti gli altri assi

DIMOSTRAZ.

→ vista dall'alto



$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

$$\rho'^2 = x'^2 + y'^2$$

$$\begin{cases} y' = y \\ x' = x - d \end{cases}$$

$$I_O = \int_M \rho^2\,dm = \int_M (x^2+y^2)\,dm = \int_M \left[(x'+d)^2 + y'^2\right] dm = \int_M \left(x'^2 + d^2 + 2dx' + y'^2\right) dm =$$

$$= \underbrace{\int_M \rho'^2\,dm}_{\text{mom. di inerz. rispetto asse passante per CM } (I_{CM})} + \underbrace{\int_M d^2\,dm}_{=\,Md^2} + \underbrace{\int_M 2dx'\,dm}_{=\,0}$$

perché:

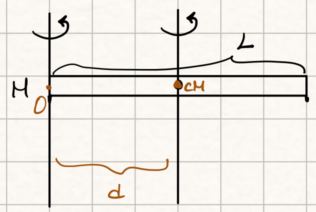
$$\int_M 2dx'\,dm = 2d\int_M x'\,dm = 2d\int_M (x - x_{CM})\,dm = 2d\left\{\int_M x\,dm - x_{CM}M\right\}$$

$$x_{CM} = \frac{1}{M}\int x\,dm \quad ; \quad x' = x - x_{CM}\ (d)$$

$$\int_M x\,dm = Mx_{CM} \quad\Rightarrow\quad Mx_{CM} - x_{CM}M = 0$$

$$\Rightarrow I_O = I_{CM} + Md^2 \quad \checkmark$$

es. asta con asse al bordo

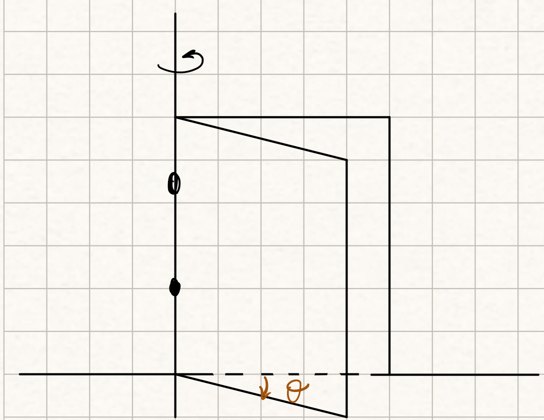


$$I_o = I_{CM} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2$$

---

relazione tra momento di inerzia e momento di una forza:

II° eq cardinale : $\dfrac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_o^{(est)}$



$\theta = \theta(t)$

$\Rightarrow$ 1° grado di libertà

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{L}_{\parallel} + \vec{L}_{\perp}\right) = \vec{\mathcal{M}}_o^{(est)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(I_o\vec{\omega} + \vec{L}_{\perp}\right) = \vec{\mathcal{M}}_o^{(est)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(I_o\vec{\omega} + \vec{L}_{\perp}\right)\cdot\vec{u}_z = \vec{\mathcal{M}}_o^{(est)}\cdot\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[I_o\vec{\omega}\cdot\vec{u}_z + \underbrace{\vec{L}_{\perp}\cdot\vec{u}_z}_{=0}\right] = \underline{\mathcal{M}_{\parallel}^{est}}$$

MOMENTO ASSIALE

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(I_o\omega) = \mathcal{M}_{\parallel}^{(est)}$$

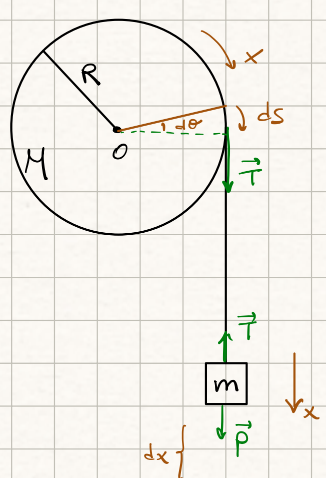
$$\Rightarrow I_o\alpha = \mathcal{M}_{\parallel}^{(est)}$$

EQ. DEL MOTO DI ROTAZ.

; $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt}$

$\mathcal{M}_{\parallel}^{(est)} = \vec{\mathcal{M}}_o^{(est)}\cdot\vec{u}_z$

es. carrucola



$m \to x$: $mg - T = ma$

CARRUCOLA $\to$ ROTAZIONE : $\underbrace{TR}_{\text{mom. della forza}} = I_o\alpha$

} EQ. del MOTO

$ds = dx$

$R\,d\theta = dx \;\Rightarrow\; R\omega = v \;\Rightarrow\; R\alpha = a$

$I_o = \frac{1}{2}MR^2$ (DISCO)

le acceleraz. sono legate tra loro

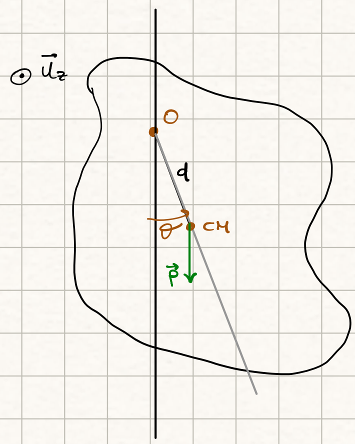
$$\Rightarrow \begin{cases} T = mg - ma \\ (mg-ma)\cancel{R} = \frac{1}{2}M R^{\cancel{2}}\,\dfrac{a}{\cancel{R}} \end{cases} \Rightarrow a\left(m + \frac{1}{2}M\right) = mg$$

$$\Rightarrow a = \frac{m}{m + \frac{M}{2}}\,g$$

MOTO UNIFORM. ACCELERATO
(m si muove con $\vec{a} < \vec{g}$ perché si trascina dietro anche il moto della carrucola)

PENDOLO FISICO :

DEF. | corpo rigido che oscilla per azione del suo peso, in un piano verticale attorno un asse orizzontale non passante per il CM.



O = punto di sospensione

$\Rightarrow$ moto oscillatorio

$$I_0 \alpha = m_{\parallel}^{(est)}$$

$$\vec{m}^{(est)} = \vec{m}_P = d \sin\theta \, Mg \, (-\vec{u}_z)$$

$$\Rightarrow m_{\parallel}^{est} = -Mg \, d\sin\theta \qquad \Rightarrow \quad I_0 \alpha = -Mg \, d\sin\theta$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt} = \ddot{\theta}$$

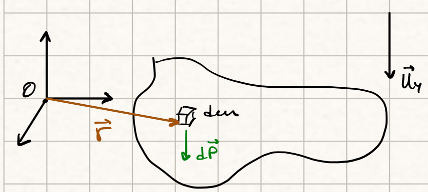
$$\Rightarrow I_0 \ddot{\theta} + Mg \, d\sin\theta = 0$$

se θ piccolo : $\sin\theta \sim \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{Mgd}{I_0}}_{\omega^2} \theta = 0$$ eq moto armonico con $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{Mgd}}$

$\hookrightarrow$ soluzione : $\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$

FORZA PESO E CM



$$d\vec{P} = g \, dm \, \vec{u}_y$$

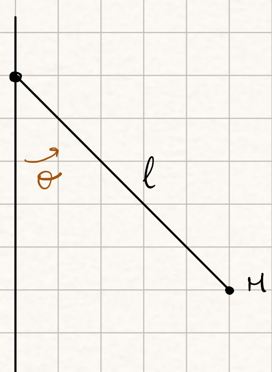
$$\vec{P} = \int_M d\vec{P} = \int_M g \, dm \, \vec{u}_y = g\left\{\int_M dm\right\} \vec{u}_y = Mg \, \vec{u}_y$$

$$\vec{m}_P = \int_M \vec{r} \times d\vec{P} = \int_M \vec{r} \times g \, dm \, \vec{u}_y = g\left\{\int_M dm \, \vec{r}\right\} \times \vec{u}_y = g M \vec{r}_{CM} \times \vec{u}_y =$$

$$= \vec{r}_{CM} \times Mg \, \vec{u}_y$$

$\Rightarrow$ posso considerare la forza peso agente sul centro di massa.

- lunghezza ridotta :



$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$? \ell \mid T' = T$? pendolo semplice con $T' = T$ del pendolo fisico

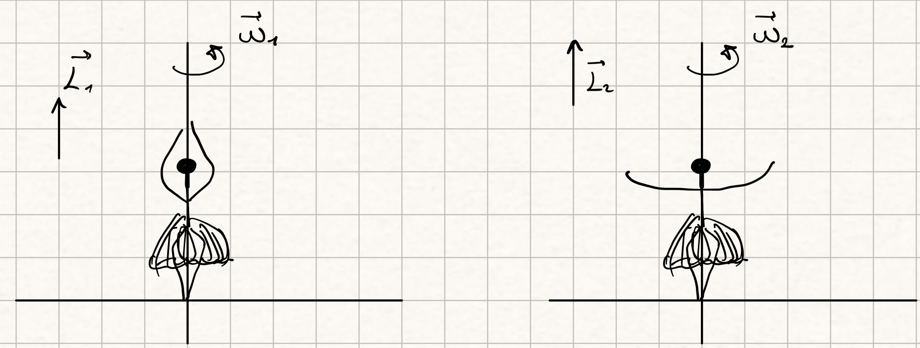
$$\Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{Mgd}} \Rightarrow \ell = \frac{I_0}{Md}$$ LUNGHEZZ. RIDOTTA

CONSERVAZIONE DI $\vec{L}$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o^{(ext)}$$

$\rightarrow$ se $\vec{M}_o^{(est)} = 0$ $\rightarrow$ $\frac{d\vec{L}_o}{dt} = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{L}_o$ SI CONSERVA

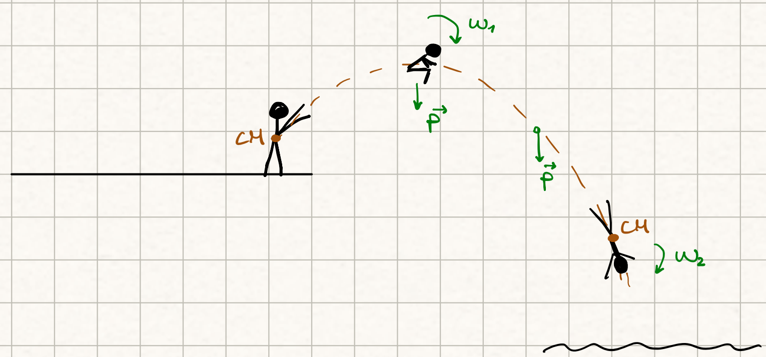
es.



$I_1 < I_2$
$\omega_1 > \omega_2$

Aprendo le braccia la ballerina rallenta la sua velocità angolare

es.

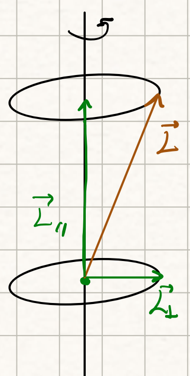


$I_1 < I_2$
$L_2 = L_1$
$\omega_2 < \omega_1$

Quando è raccolto il tuffatore ha velocità angolare maggiore

MOTO DI PRECESSIONE

$\vec{L}_\perp = -\omega \int_M \rho z \, dm \, \vec{u}_r$ $\rightarrow$ $\vec{L}_\perp$ ruota assieme al corpo rigido

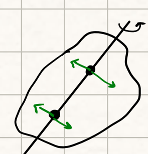


precessione di $\vec{L}$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_o^{(est)} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{L}_\parallel + \vec{L}_\perp) = \vec{M}_o^{(est)} \Rightarrow \overset{\parallel}{I_o \frac{d\omega}{dt}} + \overset{\perp}{\frac{d\vec{L}_\perp}{dt}} = M_o^{(est)}$$

$$\rightarrow I_o \frac{d\omega}{dt} = M_\parallel^{(est)}$$

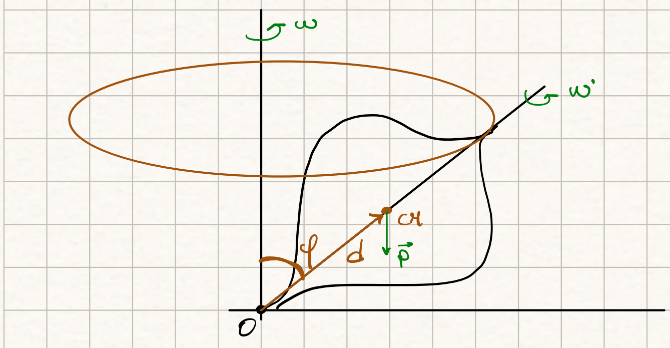
$$\frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = M_\perp^{(est)}$$



$\Rightarrow$ ci sono delle forze ortogonali all'asse di rotazione (perchè c'è la componente ortogonale del momento di forza)
$\rightarrow$ provocano l'usura dei perni

es. Trottola

$\uparrow \vec{u}_z \quad \otimes \vec{u}_\theta$

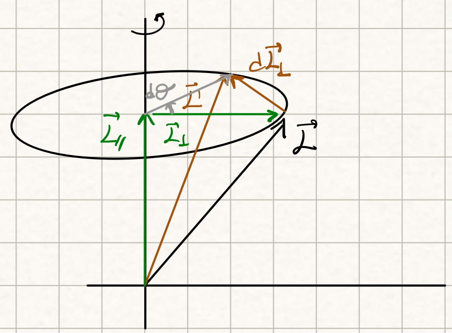


$$\vec{M}_P = \vec{r}_{CM} \times \vec{P} = d \sin\varphi \, M g \, \vec{u}_\theta \quad \perp \vec{u}_z$$

$$d\vec{L}_\perp = d \sin\varphi \, M g \, dt \, \vec{u}_\theta$$

$$\boxed{M_{P,\parallel} = 0} \Rightarrow$$

- $L_\parallel$ si conserva
- $|\vec{L}|$ si conserva



se $\omega' >> \omega \Rightarrow L \cong I\omega'$

↳ l'asse ~ asse della trottola

$$dL_\perp = L_\perp \, d\theta = L \sin\varphi \, d\theta$$

$$\Rightarrow d \cancel{\sin\varphi} \, M g \, dt = L \cancel{\sin\varphi} \, d\theta$$

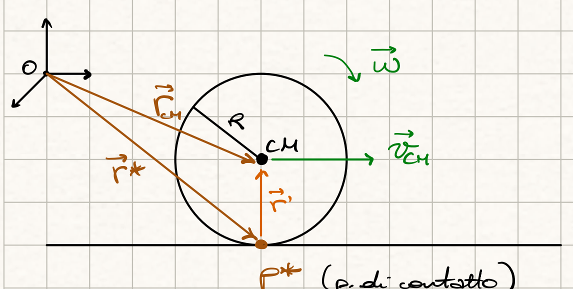
$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{M g d}{L} = \omega}$$

momento della forza peso

MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

caso particolare

- moto roto-traslatorio : $\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{CM})$



P^* (p. di contatto)

se $\vec{v}(P^*) = 0 \Rightarrow$ MOTO DI PURO ROTOLAMENTO ∘ MOTO DI ROTOLAMENTO SENZA STRISCIAMENTO

$$\boxed{\vec{v}(P^*) = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}^* - \vec{r}_{CM}) = 0}$$

$$\vec{v}_{CM} = \vec{\omega} \times \underbrace{(\vec{r}_{CM} - \vec{r}^*)}_{\vec{r}'} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

per un punto generico P : $\vec{v}(P) = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{CM}) =$

$$= \vec{\omega} \times (\vec{r}_{CM} - \vec{r}^*) + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{CM}) =$$

$$= \vec{\omega} \times (\cancel{\vec{r}_{CM}} - \vec{r}^* + \vec{r} - \cancel{\vec{r}_{CM}}) = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}^*)$$

$\rightarrow$ $\boxed{\vec{v}(P) = \vec{\omega} \times \vec{r}'}$

ROTAZIONE ATTORNO A UN ASSE PER P^* CHE È ISTANTE PER ISTANTE FERMO

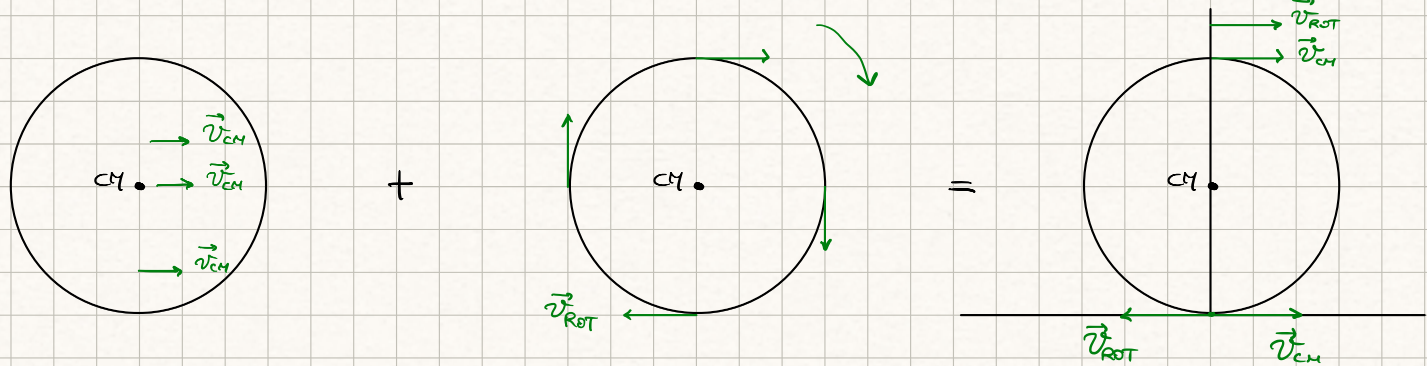
$\downarrow$ ASSE ISTANTANTANEA DI ROTAZIONE

MOTO DI PURO ROTOLAMENTO $\rightarrow$ ROTO-TRASLAZIONE:

$$\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{CM})$$

$\searrow$ ROTAZIONE ATTORNO ASSE PER P^*:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \underbrace{(\vec{r} - \vec{r}^*)}_{\vec{r}'}$$



TRASLAZIONE

$\vec{v}_{CM}$

ROTAZIONE

$$\vec{v}_{ROT} = \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{CM})$$

$v_{ROT} = \omega R = v_{CM}$

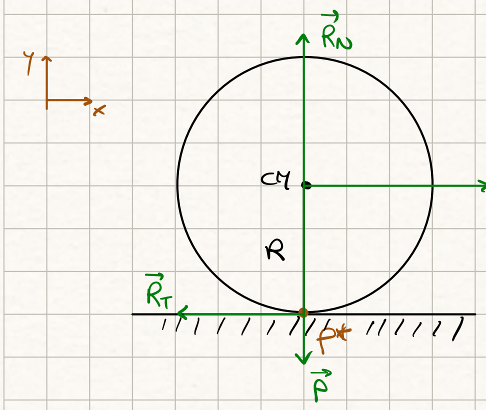
$v(P^*) = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{v_{CM} = \omega R}$

$\rightarrow$ se $v^* = v(P^*) = 0$: MOTO DI PURO ROTOLAMENTO

$\hookrightarrow$ RELAZIONE TRA v_{CM} e ω : $v_{CM} = R\omega$

es. moto di puro rotolamento :



perché avvenga questo tipo di moto bisogna che ci sia la forza di attrito (in opposizione al moto, applicata al punto di appoggio)

$$\vec{v}(P^*) = \vec{v}^* = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{CM} = R\omega$$

TRASLAZIONE : $M\vec{a}_{CM} = \vec{F}^{(ext)} \Rightarrow \begin{cases} x: & F - R_T = Ma_{CM} \quad (1) \\ y: & R_N - Mg = 0 \quad (2) \end{cases}$

ROTAZIONE : $I_{CM}\alpha = M_{CM}^{(ext)} \Rightarrow R_T \cdot R = I_{CM}\alpha \quad (3)$

l'unica forza che ha momento $\neq 0$ è la forza di attrito (perché non applicata a CM)

poiché $v^* = 0 \Rightarrow$ ATTRITO STATICO : $R_T \leq \mu_s R_N$ (5)

CONDIZIONE DI COMPATIBILITÀ (perché p. di contatto fermo)

$\Rightarrow v_{CM} = R\omega \xrightarrow{\text{derivo}} a_{CM} = R\alpha$ (4)

altrimenti : strisciamento

(1) (2) (3) (4) eq del moto (4 eq in 4 incognite)

(2) : $R_N = Mg$

(3) : $R_T = \frac{I_{CM}}{R}\alpha \overset{(4)}{=} \frac{I_{CM}}{R^2}a_{CM}$

(1) : $F - \frac{I_{CM}}{R^2}a_{CM} = Ma_{CM}$

$$\Rightarrow \boxed{a_{CM} = \frac{F}{M + \frac{I_{CM}}{R^2}}}$$

VERIFICO CONDIZ. DI COMPATIBILITÀ :

$$\frac{I_{CM}}{R^2}\frac{F}{M + \frac{I_{CM}}{R^2}} \leq \mu_s Mg$$

$$\Rightarrow F \leq \mu_s Mg\left(\frac{R^2M}{I_{CM}} + 1\right) = F_{max}$$

$I_{CM} = \frac{1}{2}R^2M$ (se cilindro)

$I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$ (se sfera)

! se $F > F_{max} \Rightarrow$ ROTO-TRASLAZIONE :

- TRASL : $\begin{cases} x: & F - R_T = Ma_{CM} \\ y: & R_N - Mg = 0 \end{cases}$
- ROT. : $I_{CM}\alpha = R_T R$
- ATTR. DIN. : $R_T = \mu_d R_N$

$\Rightarrow$ si raggiunge alla stessa accelerazione se si considerasse il moto come rotatorio attorno all'asse istantaneo di P^* (in tal caso l'unica forza che ha momento $\neq 0$ è $\vec{F}$)

ASPETTI ENERGETICI DEL MOTO DI UN C.R. :

• ENERGIA CINETICA :

In generale: $\vec{v}(P) = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\overbrace{\vec{r} - \vec{r}_{CM}}^{\vec{r}\,'})$

$$E_K = \int_M \frac{1}{2} dm\, v^2 = \frac{1}{2}\int_M dm\, \vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\int_M dm \left[\vec{v}_{CM} + \vec{\omega}\times(\vec{r}-\vec{r}_{CM})\right]\cdot\left[\vec{v}_{CM} + \vec{\omega}\times(\vec{r}-\vec{r}_{CM})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_M dm\, \vec{v}_{CM}\cdot\vec{v}_{CM} + \frac{1}{2}\int_M dm \left[\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right]\cdot\left[\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right] + \frac{1}{2}\int_M dm\; 2\vec{v}_{CM}\cdot\left[\vec{\omega}\times\vec{r}\,'\right] =$$

non dipendono da dm

non dipende da dm

$$= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2}\int_M dm\, |\vec{\omega}\times\vec{r}\,'|^2 + \cancel{\vec{v}_{CM}\cdot\left[\vec{\omega}\times\int_M dm\,\vec{r}\,'\right]}$$

posizione CM pesata su CM

$\int_M dm\,\vec{r} - \int_M dm\,\vec{r}_{CM} = M\int_M \vec{r} - M\vec{r}_{CM} = M\vec{r}_{CM} - M\vec{r}_{CM} = 0$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} M v_{CM}^2}_{E_K \text{ del CM}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_M dm\, |\vec{\omega}\times\vec{r}\,'|^2}_{E_K \text{ rispetto CM}} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2}\left[\int_M dm\, \rho'^2\right]\omega^2$$

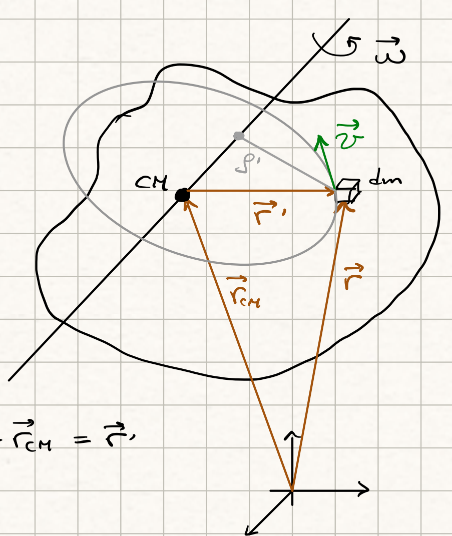
(KÖNIG)

↳ $\vec{\omega}\times\vec{r}\,' = \vec{v}_{rot} = \rho'\omega\vec{u}_\theta$

↳ raggio di circonf. percorsa da dm

$$= \boxed{\frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2}$$

TRASL. ↑ ROT. ↑



$\vec{r} - \vec{r}_{CM} = \vec{r}\,'$

• TRASLAZ. : $\boxed{E_K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2}$

• ROT. ATTORNO ASSE FISSO : $\boxed{E_K = \frac{1}{2} I_O \omega^2}$ → $\boxed{E_K = \frac{1}{2}\frac{L^2}{I_O}}$

• ROTO-TRASL. : $\boxed{E_K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2}$

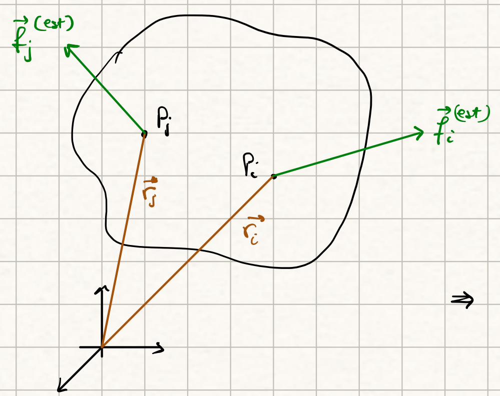
• LAVORO FORZE SU C.R.:

→ $\vec{F}_{int}$ compiono lavoro solo se cambiano le distanze tra i punti del sistema

↳ in un C.R. per def. le distanze tra i punti non cambiano ⇒ $\delta W^{(int)} = 0$

⇒ Quindi il lavoro è compiuto solo da $\vec{F}^{(est)}$

⇒ Poiché il corpo è esteso è importante il punto di applicazione della forza



$$\delta W = \sum_{1}^{N}{}_i \, \vec{f}_i^{(est)} \cdot d\vec{r}_i$$

$$d\vec{r}_i = \vec{v}_i \, dt = \left[\vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM})\right] dt$$

$$\Rightarrow \delta W = \sum_{1}^{N}{}_i \, \vec{f}_i^{(est)} \cdot \left[\vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\overbrace{\vec{r}_i - \vec{r}_{CM}}^{\vec{r}_i\,'})\right] dt =$$

$$= \underbrace{\sum_{1}^{N}{}_i \, \vec{f}_i^{(est)} \cdot \vec{v}_{CM} \, dt}_{(2 \text{ componenti})} + \sum_{1}^{N}{}_i \, \underbrace{\vec{f}_i^{(est)} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i\,')}_{\text{posso far scalare i termini di un posto (PRODOTTO MISTO)}} \, dt$$

$$= \left(\sum_{1}^{N}{}_i \vec{f}_i^{(est)}\right) \cdot \vec{v}_{CM} \, dt + \sum_{1}^{N}{}_i \, \vec{\omega} \cdot (\underbrace{\vec{r}_i\,' \times \vec{f}_i^{(est)}}_{\text{momento di } \vec{f}_i^{(est)}}) \, dt$$

$$= \underbrace{\vec{F}^{(est)} \cdot \vec{v}_{CM} \, dt}_{\text{componente del lavoro che modifica la velocità (trasl) del CM}} + \underbrace{\vec{\omega} \cdot \vec{M}_{CM}^{(est)} \, dt}_{\text{" velocità di rotazione di CM}}$$

$$= \vec{F}^{(est)} \cdot d\vec{r}_{CM} + \overset{\text{momento proiettato sull'asse}}{M_{\parallel}^{(est)}} \, \underbrace{\omega \, dt}_{d\theta}$$

TEOR. DELLE FORZE VIVE:

$$dE_K = \delta W \Rightarrow d\left(\frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2\right) = \vec{F}^{(est)} \cdot \vec{v}_{CM} \, dt + \overset{M_{\parallel}^{est} \, d\theta \; \parallel}{\vec{M}_{CM}^{(est)} \cdot \vec{\omega} \, dt}$$

- la variazione dell'E_K di traslazione dipende da
- la variazione dell'E_K di rotazione dipende da

POTENZA ISTANTANEA:

$$P = \frac{\delta W}{dt} = M_{\parallel}^{est} \frac{d\theta}{dt} = M_{\parallel}^{est} \, \omega$$

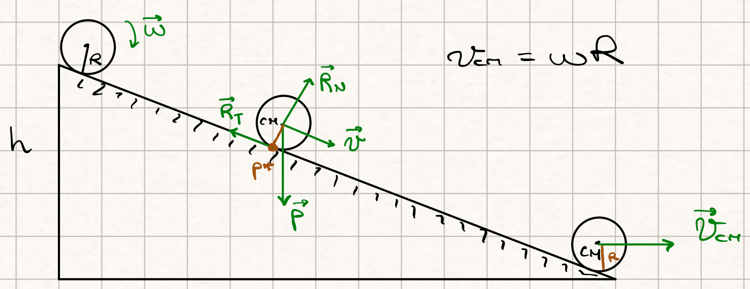
• CONSERVAZIONE EN. MECCANICA :

$$dE_k = \delta W = \delta W_c + \delta W_{n.c.} = \underbrace{-dU}_{\text{en. potenz}} + \delta W_{n.c.}$$

$$\Rightarrow d(E_k + U) = \delta W_{n.c.}$$

$$\Rightarrow dE_m = \delta W_{n.c.}$$ • se $\delta W_{n.c.} = 0 \Rightarrow dE_m = 0$ CONSERV. di E_m

Es. moto lungo un piano inclinato (puro rotolam.)



$v_{CM} = \omega R$

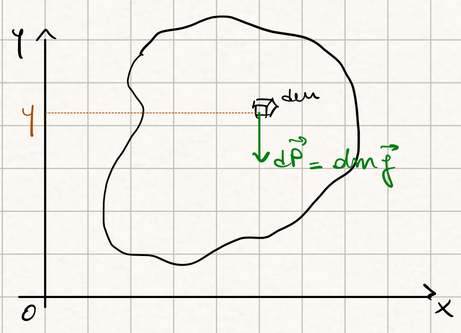
MOTO PURO ROT. $\rightarrow$ P* fermo

$\Rightarrow$ R_T e R_N NON compiono lavoro

$\underline{\underline{L}}_{n.c.}$

$\Rightarrow$ SÌ CONSERVAZIONE E_m

- U forza peso :



$$dU = dm\, g\, y$$

$$\Rightarrow U = \int_M dU = \int_M dm\, g\, y = g \overbrace{\int_M dm\, y}^{M y_{CM}} = M g y_{CM}$$

tornando all'Es :

$\Rightarrow$ CONS. E_m : $E_{m_i} = Mg(h+R)$; $E_{m_f} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + MgR$

$$E_{m_i} = E_{m_f} : \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \cancel{MgR} = Mg(h + \cancel{R})$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2} v_{CM}^2 = Mgh$$

$$\rightarrow v_{CM} = \sqrt{\frac{2Mgh}{M + I/R^2}}$$

$<$ v_f di un moto di semplice traslazione perché in questo caso parte dell'E_k va al moto di rotazione

- grandezze lineari | grandezze angolari

	TRASLAZIONE	ROTAZIONE
CINEMATICA	s	ϑ
	$v_s = \dot{s}$	$\omega = \dot{\vartheta}$
	$a_t = \ddot{s}$	$\alpha = \ddot{\vartheta}$
	$ds = v_s\, dt$	$d\vartheta = \omega\, dt$
DINAMICA	m	I
	$p = m v_s$	$L_{\parallel} = I\omega$
	F_t	$M_{\parallel}$ (momento delle forze assiale)
	$m a_t = F_t$ (1° eq card)	$I\alpha = M_{\parallel}$ (2° eq. card.)
ENERGIA	$E_k = \frac{1}{2} m v_s^2$	$E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$
	$\delta W = f_t\, ds$	$\delta W = M_{\parallel}\, d\vartheta$