Per la lettura degli appunti:

- I teoremi scritti con questo ***font*** sono da studiare a memoria con dimostrazioni.
- Le dimostrazioni riportate ***possono non essere adeguate alle richieste dei vostri professori, prima di studiarle, verificare che siano adeguate (esempio: Formula di Taylor con resto Peano, perché arriva solo a n=2)***
- ***Non tutte le dimostrazioni*** in tale ***font*** ***sono da studiare a memoria, per essere precisi, confrontarsi con il programma dato dal proprio professore***.
- Non solo le dimostrazioni in tale ***font*** vanno sapute a memoria, ***per ogni incongruenza*** (dimostrazioni diverse/ dimostrazioni mancanti…) ***prendere come riferimento ciò che il proprio prof ha proposto.***

La maggior parte degli appunti riportati sono presi seguendo le lezioni del prof. Nicola Soave.

Una piccola parte è integrato con le lezioni del prof Marco Boella.

I programmi dell'esame presi in considerazione durante l'ultimazione degli appunti sono quelli del prof. Nicola Soave (per FEI-IMA) e del prof. Marco Boella (per MEZ-PEZ).

I prof citati sono professori di analisi 1 per il corso di ingegneria informatica e comunicazione.

Anno scolastico di riferimento: 2022-2023.

Per errori che incontrate negli appunti potete riferirli.

LA DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

Il principio d'induzione è una tecnica che serve per dimostrare la validità di un enunciato per tutti i numeri naturali a partire da un certo indice n_0 in poi.

$P(n)$ proposizione

Vogliamo dimostrare che $P(n)$ vale $\forall n \geq n_0$

Principio d'induzione

Se

I) $P(n_0)$ è vera **(PASSO BASE)**

II) $P(n)$ è vera $\Rightarrow$ è vera anche $P(n+1) \Rightarrow P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$

(PASSO INDUTTIVO)

(Intuitivamente: se $P(n_0)$ è vera ed è vero II)

⇨ $P(n_0+1)$ è vera. Inoltre, vale II)

⇨ $P(n_0+2)$ è vera.

⇨ $P(n_0+3)$ è vera.

⇨ …

Esempio:

$$P(n): 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$$

Verifica:

usiamo l'induzione

I) $P(1)$? $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ è vera

II) Supponiamo che $P(n)$ sia vera

$$1+2+\cdots+n+n+1 = \frac{(n+1)n}{2} + (n+1) =$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Per Induzione, $P(n)$ vale $\forall n \geq 1$.

GLI INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4, \dots\}$ numeri naturali

$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3 \dots\}$ numeri interi relativi

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ numeri razionali

osservazione:

$a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, si può sempre suppore che

- p e q non abbiano fattori in comune $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- $q > 0$ $\frac{1}{-2} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

In $\mathbb{Q}$ sono definiti due operazioni, + e $\cdot$:

$$a, b \in \mathbb{Q}: a + b \in \mathbb{Q}, a \cdot b \in \mathbb{Q}$$

+ e $\cdot$ godono delle seguenti proprietà:

p1)

I) $\underbrace{\forall}_{\text{per ogni,qualificatore universale}} a, b \in \mathbb{Q}: a + b = b + a$ (commutativa)

II) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}: a + (b + c) = (a + b) + c$

III) $\underbrace{\exists}_{\text{esiste,qualificatore esistenziale}}$! l'elemento neutro, 0, tale che $\forall a \in \mathbb{Q}: a + 0 = a$

IV) $\forall a \in \mathbb{Q}$ $\exists$ l'elemento opposto di a, $-a$, tale che $a + (-a) = 0$ $a - a = 0$

p2)

I) $\forall a, b \in \mathbb{Q}: a \cdot b = b \cdot a$ (commutativa)

II) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}: a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

III) $\exists$! l'elemento neutro, 1, tale che $\forall a \in \mathbb{Q}: a \cdot 1 = a$

IV) $\exists$ il reciproco di a, $\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, a^{-1}, tale che

$$\underbrace{\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}}_{\forall a \in \mathbb{Q}, a \neq 0} \quad : a\underbrace{(a^{-1})}_{\frac{1}{a}} = 1$$

V) Vale la proprietà distributiva

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}: (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$

Il fatto che $\mathbb{Q}$ sia dotato di + e $\cdot$ e che valgono p1) e p2), si sintetizza che $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo.

Notazioni:

- $\forall a \in \mathbb{Q} \neq 0$ è un modo sbagliato per scrivere "per ogni a appartenente a $\mathbb{Q}$ diverso da 0", perché in questo modo ciò che è diverso dallo 0 è l'insieme $\mathbb{Q}$, quindi la frase perde automaticamente senso siccome il primo è un elemento mentre il secondo un insieme.
- $\mathbb{Q} \setminus 0$ anche in questo caso, si ha un errore di notazione perché essendo 0 un elemento, è indispensabile che lo 0 sia tra $\{\}$, quindi la corretta scrittura sarebbe $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

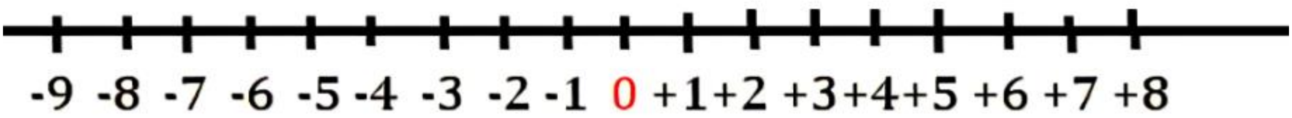
I numeri razionali si possono rappresentare in forma decimale

Esempio: $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = 0{,}\overline{3}$

In questa rappresentazione, ogni numero razionale ha dopo la virgola un numero finito diverso da 0, oppure un numero infinito che si ripete con periodicità da un certo punto in poi, e viceversa.

$1{,}259\overline{76}$ è razionale

Inoltre, i numeri razionali si possono rappresentare su una retta



Questo è legato al fatto che i numeri razionali si possono ordinare:

diamo che $a = \frac{p}{q}, b = \frac{r}{s}$, $q, s > 0$ sono tali che

$$a \leq b \Leftrightarrow s\cdot p \leq r\cdot q \qquad \text{tra numeri interi}$$

$$\cancel{q}\cdot s\cdot \frac{p}{\cancel{q}} \leq \frac{r}{\cancel{s}}\cdot q\cdot \cancel{s}$$

Questo ordinamento è compatibile con la struttura di campo, nel senso che

p3)

I) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$:se $a \leq b \Rightarrow a\cdot c \leq b\cdot c$

Si dice che $(\mathbb{Q}, +\cdot, \leq)$ è un campo ordinato.

Da questo fatto si deducono tutte le regole di calcolo che conoscete.

Esempio: in un qualsiasi campo ordinato valgono le regole dei segni:

$$x^2 \geq 0 \quad \forall x \qquad\qquad x\cdot 0 = 0$$

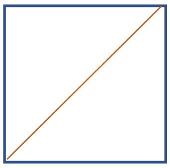
p1) e p2) assiomi del campo.

p1), p2) e p3) assiomi del campo ordinato.

Supponiamo di voler essere in grado di calcolare l'area di "molte" figure piane, in particolare, il nostro insieme numerico di riferimento deve contenere tutte le lunghezze dei segmenti.

Questa è vera in $\mathbb{Q}$? **NO.**

Per esempio, consideriamo la diagonale del quadrato di lato 1.



lato = 1

Per Pitagora $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

Chiamiamo $d = +\sqrt{2}$

Teorema: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

➔ Lemma (proposizione preliminare)

$\forall m \in \mathbb{N}$, se n è dispari $\Rightarrow n^2$ è dispari

Dimostrazione:

n è dispari $\underbrace{\Leftrightarrow}_{SSE, equivalenza}$ la divisione con resto di n per 2 dà resto 1

$\Leftrightarrow n = 2k + 1$, per un certo $k \in \mathbb{N}$

$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 1 + 4k = 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{\in \mathbb{N}} + 1$

$n^2 = 2 \cdot$ "un numero naturale" +1, cioè n^2è dispari.

Dimostrazione (del teorema):

Per assurdo, supponiamo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, $con\, \frac{p}{q}$ ridotte ai minimi termini, $p > 0$, $q > 0$

$$\sqrt{2} \cdot q = p \Leftrightarrow 2 \cdot q^2 = p^2 \Rightarrow p^2 \text{ è pari } \overset{LEMMA}{\Rightarrow} p \text{ è pari} : p = 2k, k \in \mathbb{N}$$

(Se p fosse dispari, anche p^2 lo è)

Sostituendo:

$$2q^2 = 4k^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2 \text{ è pari} \overset{LEMMA}{\Rightarrow} q \text{ è pari}$$

Quindi $\frac{p}{q}$ non è ridotto ai minimi termini (si potrebbe ancora semplificare un 2), assurdo. Necessariamente $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. □

Il teorema ci dice che non tutte le lunghezze dei segmenti sono misurabili con numeri in $\mathbb{Q}$.

I numeri razionali lasciano dei buchi sulla retta numerica.

Se pensiamo alla rappresentazione decimale, c'è un modo facile per ampliare $\mathbb{Q}$.

Possiamo considerare tutte le rappresentazioni decimali non necessariamente finite o periodiche.

Esempio: 0,1011011101110…

L'insieme di questi numeri prende il nome dei numeri reali e si indica con $\mathbb{R}$.

Gli elementi di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si dicono irrazionali.

In $\mathbb{R}$, si possono estendere + e · e $\leq$.

Si dimostra che $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è un campo ordinato.

DOMANDA: I punti di $\mathbb{R}$ se rappresentati su retta, "lasciare buchi" o no?

Estremo superiore e assioma di continuità

X insieme ordinato ($X = \mathbb{Q}\ o\ X = \mathbb{R}$).

$$E \subseteq X$$

Definizione: E si dice limitato superiormente se esiste $M \in X : x \leq M \quad \forall x \in E$.

In tal caso, M si dice maggiorante di E. (Notare che M può essere in E o no).

E si dice limitato se $\exists\ m \in X : m \leq x \quad \forall x \in E$. m si dice minorante di E.

E si dice limitato se lo è sia superiormente che inferiormente.

Definizione: $\bar{X}$ si dice $\underbrace{MASSIMO\ DI\ E}_{MAX\ E}$ se

I) $\bar{X} \in E$

II) $\bar{X}$ è un maggiorante di E

Definizione: $\underline{X}$ si dice $\underbrace{MINIMO\ DI\ E}_{min\ E}$ se

I) $\underline{X} \in E$

II) $\underline{X}$ è un minorante di E

Se un insieme è limitato, non è detto che abbia massimo o minimo.

$$E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\} \subseteq \mathbb{Q} = X$$

E limitato

- ⇨ 1 è una maggiorante (e quindi $\forall x \leq 1$ è maggiorante)
- ⇨ 0 è un minorante (e quindi $\forall x > 0$ è minorante)

Ma E non ha un minimo.

- Se per assurdo esistesse il minimo di E, dovrebbe essere un elemento del tipo $\frac{1}{\bar{n}}$. $\frac{1}{\bar{n}}$ dovrebbe essere minorante: $\frac{1}{\bar{n}} \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ma $\frac{1}{\bar{n}+1} < \frac{1}{\bar{n}}$, assurdo.

Definizione: $E \subseteq X$. Chiamiamo ESTREMO SUPERIORE di E, $\sup E$, il minimo dei maggioranti di E in X, se il minore esiste.

Definizione: $E \subseteq X$. Chiamiamo ESTREMO INFERIORE di E, $\inf E$, il massimo dei minoranti di E in X, se il massimo esiste.

Nell'esempio precedente

$\{maggiorante\ di\ E\} = \{x \in \mathbb{Q}: x \geq 1\} \Rightarrow \sup E = 1$

$\{minoranti\ di\ E\} = \{x \in \mathbb{Q}: x \leq 0\} \Rightarrow \inf E = 0$

In generale si può dimostrare che

- Se $\exists \max E \Rightarrow \exists \sup E = \max E$
- Se $\exists \min E \Rightarrow \exists \inf E = \min E$

<u>ma non il viceversa.</u>

- ***È vero che ogni, insieme superiormente/ inferiormente limitato ammette un sup/inf?***

  Dipende da X.

  In $\mathbb{Q}$, questo è falso.

  <u>Esempio:</u>

  $E = \{x \in \mathbb{Q}: x^2 < 2\} = \{x \in \mathbb{Q}: -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\} \subseteq \mathbb{Q}$, ma non ha né inf né sup in $\mathbb{Q}$ dato che $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

  Si può dimostrare che invece queste "patologie" non accade in $\mathbb{R}$.

p4)

I) $(x, \leq)$ soddisfa se ogni insieme superiormente limitato ammette un sup in *X*.
ASSIOMA DI CONTINUITÀ/ COMPLETEZZA/ DI DEDEKIN

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ non soddisfa p4)

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ soddisfa p4)

Si dice che $\mathbb{R}$ è un CAMPO ORDINATO COMPLETO.

Questa proprietà "ci dice" che i punti di $\mathbb{R}$ rappresentati su una retta, non lascia buchi.

Quindi in particolare i numeri reali sono adatti a rappresentare le lunghezze di qualsiasi segmento.

osservazione: La definizione "moderna" di $\mathbb{R}$ è assiomatica.

Sia $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ un campo completo.

Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ è DENSO in $\mathbb{R}$, nel senso che qualsiasi numero reale si può approssimare con precisione arbitrario con un numero razionale:

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \epsilon > 0 \; \exists p \in \mathbb{Q}: |x - p| < \epsilon$$

$$- - - \underbrace{(}_{x-\epsilon} - - - - - - \underset{x}{\cdot} - \underset{p \in \mathbb{Q}}{\cdot} - - \underbrace{)}_{x+\epsilon} - - \longrightarrow$$

Anche $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, ne consegue che in qualsiasi intervallo esistono infiniti razionali e infiniti irrazionali.

Cenni sulla cardinalità degli insiemi

La cardinalità di un insieme *A* è il numero di elementi contenuti in *A*.

$$card(A), |A|, \#A$$

Dati *A* e *B*, riusciamo sempre a ordinare *A* e *B* in base alla loro cardinalità?

Se *A* e *B* hanno ∞ elementi, non è chiaro.

Definizione: *A* e *B* hanno la stessa cardinalità se esiste una funzione biunivoca

$$f: A \to B \, .$$

Domanda: Con questa definizione, cosa possiamo dire sulla cardinalità di $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$?

PROPOSIZIONE: $\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Z}$ ($\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ sono equipotenti)

Dimostrazione:

$\mathbb{N}$	0	1	2	3	…	$2n-1$	$2n$	…
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$		$\updownarrow$	$\updownarrow$	
$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	…	n	$-n$	

Questa è una funzione biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$.

Gli insiemi che hanno la stessa cardinalità di $\mathbb{N}$ si dicono NUMERABILI.

Si dimostra che anche $\mathbb{Q}$ è numerabile, mentre $\mathbb{R}$ non è numerabile.

$\mathbb{R}$ ha la potenza del continuo. ($card\mathbb{R} > card\mathbb{N}$)

Qualsiasi intervallo ha cardinalità continua.

Ci sono cardinalità "più che continua"?

PROPOSIZIONE:

X inseme qualsiasi: $P(X) = \{sottoinisieme\ di\ X\}$.

$$\#P(X) > \#X$$

Quindi $\#P(\mathbb{R}) = \#\mathbb{R}$

$$P\big(P(\mathbb{R})\big) > P(\mathbb{R})$$

…

Esempio: $X = \{0, 1\}$ $P(X) = \{\emptyset, X, \{1\}, \{0\}\}$

VALORE ASSOLUTO

Definizione: Si dice valore assoluto (o modulo) di $x \in \mathbb{R}$ il numero reale ≥ 0 data da

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

osservazione: $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Dati $x, y \in \mathbb{R}$, $|x - y|$ misura la distanza tra x e y sulla retta reale

$$- - - - - - - - - \underset{x}{\cdot} - - - - \underset{y}{\cdot} - - - - \longrightarrow$$

Per definizione, dato $a \geq 0$ si ha $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

Disuguaglianza triangolare

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x + y| \leq |x| + |y| \qquad (1)$$

Dimostrazione:

visto che $\substack{-|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y|}$ $\forall x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \underbrace{-|x| - |y|}_{-(|x|+|y|)} \leq x + y \leq |x| + |y|$

Usando (1), si vede che questa equivalenza $|x + y| \leq |x| + |y|$

INTERVALLI DI $\mathbb{R}$

Definizione: Dati $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, si definisce INTERVALLO di estremi a e b uno dei seguenti sottoinsieme di $\mathbb{R}$:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}: a < x < b\}$ intervallo aperto
- $\substack{[a,b) = \{x \in \mathbb{R}: a \leq x < b\} \\ (a,b] = \{x \in \mathbb{R}: a < x \leq b\}}$ intervallo semichiuso/ semiaperto

Questi sono tutti intervalli limitati, con inf $= a$ e sup $= b$.

Si possono anche considerare intervalli illimitati.

- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}: x > a\}$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}: x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R}: x < b\}$

osservazione: $+\infty, -\infty$ non sono numeri reali.

Se $E \subseteq \mathbb{R}$ illimitato superiormente si pone $\sup E = +\infty$

Se $E \subseteq \mathbb{R}$ illimitato inferiormente si pone $\inf E = -\infty$

RADICALI

Teorema

Sia $y \in \mathbb{R}, y > 0$, e sia n intero ≥ 1, allora $\exists!\, x > 0 (x \in \mathbb{R}): x^n = y$.

x si dice radice *n*-esima aritmetica di y, e si indica con $\sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$

osservazione: la radice *n-esima* aritmetica è sempre ≥ 0

$x^2 = 4$ ha due radici in $\mathbb{R}, +2, -2$. La radice quadrata di 4 è 2.

osservazione: se n è dispari allora è possibile parlare di radice anche per $y < 0$ $\quad \underbrace{(-x) \cdot \ldots \cdot (-x)}_{dispari}$

Esempio: $(-2)^3 = -8 \Rightarrow \sqrt[3]{-8} = -2$

In generale, se n è dispari e $y < 0$, $\sqrt[n]{y} = -\sqrt[n]{\underbrace{-y}_{>0}}$.

Problema: Come stimare $\sqrt{2}$?

Costruiamo una successione di numeri razionali approssimati del seguente tipo:

$$\begin{gathered} 0 < a_0 \in \mathbb{N} \\ \downarrow \\ a_0, a_1 \\ a_0, a_1, a_2 \\ \cdots \\ a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \\ \cdots \end{gathered} \qquad\qquad a, \in \{0,1,2 \ldots 9\}$$

Con la regola che ciascun numero sia il più grande, tra quelli con lo stesso numero di cifre dopo la virgola, avente come quadrato una quantità ≤ 2:

$$a_0 = ? \qquad 1^2 = 1 \qquad\qquad 2^2 = 4 > 2$$

$a_0 = 1$

$a_1 = 4$ $\qquad$ perché $(1{,}4)^2 = 1{,}96 < 2$

$\qquad (1{,}5)^2 = 2{,}25 > 2$

$\ldots$

Se consideriamo l'insieme di tutte le approssimazioni.

$$\{a_0, \qquad a_0, a_1, \qquad a_0 a_1 a_2, \qquad \ldots\} = E$$

Abbiamo che questo è un insieme superiormente limitato.

Per esempio 2 è un maggiorante.

Per l'assioma dell'estremo superiore, $\sup E$ è un numero reale e si può dimostrare che $\sup E = \sqrt{2}$.

POTENZE AD ESPONENTE REALE

Definizione: se $a \geq 0, p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ (con $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$), definiamo

$$a^p = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ volte}$ se $n > 0$

$a^m = \frac{1}{\underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{m\ volte}}$ se $m < 0$

Se $m = 0, a^0 = 1\ \forall a$

Se l'esponente b è reale, si procede per approssimazione

$$b = b_0, b_1 b_2\ \ldots b_n \ldots$$

a^b si trova considerando

$$\{a^{b_0}, a^{b_0,b_1}, a^{b_0,b_1 b_2}, \ldots, a^{b_0,b_1 b_2 \ldots b_n}, \ldots\}$$

Come per la radice, si va poi a considerare l'estremo superiore, che viene definito come a^b.

Se $a < 0$, la potenza ad esponente reale in genere non è definito.

Se $a < 0$ e l'esponente è $p = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, allora dobbiamo fare attenzione.

Se m è dispari ed n è pari, non possiamo definire $a^{\frac{m}{n}}$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\qquad a^m < 0$, non ha senso in $\mathbb{R}$.

Se n è dispari, allora cambia. Per $a > 0$ definiamo $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Esempio:

$(-2)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{-8} = -\sqrt[5]{8}$

$(-2)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{4}$

$(-2)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{-8}$ non ha senso

Proprietà:

Siano $a, b > 0, c, d \in \mathbb{R}$. Allora

- $a^0 = 1\ \forall a \neq 0; 1^c = 1\ \forall c \in \mathbb{R}$
- $a^c > 0\ \forall c$

  $a^c > 1$ se $a > 1$ e $c > 0$

  $a^c < 1$ se $a < 1$ e $c > 0$
- $a^{c+d} = a^c \cdot a^d$
- $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$
- $(a^b)^c = a^{bc}$
- Se $c < d$ e $a > 1 \Rightarrow a^c < a^d$

  Se $c < d$ e $a < 1 \Rightarrow a^c > d^d$
- $0 < a \leq b \Rightarrow a^c \leq b^c, \forall\ c > 0$

LOGARITMI

Consideriamo l'equazione $a^x = y$, nell'incognita x. a e y assegnati, $a > 0, y \in \mathbb{R}$.

Se $a = 1 \Rightarrow a^x = a^x = 1\ \forall x \Rightarrow$l'equazione precedente ha soluzioni SSE $y = 1$, e in tal caso l'equazione vale $\forall\ x$.

Sia quindi $a \neq 1$.

Se $y < 0$, per le proprietà della potenza, l'equazione non ha soluzioni.

$$a > 0, a \neq 1, y > 0$$

Teorema

$$a > 0, a \neq 1, y > 0 \Rightarrow \exists!\, x \in \mathbb{R}: a^x = y$$

x si dice LOGARITMO in base a di y,

$$x = \log_a y$$

$$a^{\log_a y} = y$$

Proprietà:

$$x, y, a > 0, a \neq 1$$

- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \,, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\forall\, b > 0, b \neq, \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$
- Presi $x, y > 0$,

  se $x < y$ e $a > 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a y$

  se $x < y$ e $a < 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a y$

I NUMERI COMPLESSI

In $\mathbb{R}$ ci sono alcuni problemi di natura algebrica: ad esempio è facile trovare equazione che coinvolgono solo potenze dell'incognito (equazioni algebriche) che non ha soluzioni:

$\underbrace{x^2}_{\geq 0} + \underbrace{1}_{>0} = 0 \Leftrightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$ che soddisfa l'equazione.

Domanda:

si può introdurre un ampliamento di $\mathbb{R}$ che permette di risolvere queste problematiche?

Definizione: si definisce unità immaginaria un numero *i* tale che $i^2 = -1, i = \sqrt{-1}$

osservazione: $-i$ è soluzione anch'essa.

Un numero complesso è un numero della forma

$$z = a + ib \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{a \cdot 1 + b \cdot i}_{conbinazione\ lineare\ tra\ unità\ reali\ e\ unità\ immaginaria}$$

L'insieme dei numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$.

$z = a + ib$ FORMA ALGEBRICA DEI NUMERI COMPLESSI

a= parte reale di $z, Re(z)$

b= parte immaginaria di $z, Im(z)$

osservazione: $a, b \in \mathbb{R}$

Sui numeri complessi sono definite una somma + e un prodotto · nel modo seguente:

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1 = a + ib, z_2 = c + id$ allora

- $z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
- $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + i(ad + bc) = (a + ib) \cdot (c + id) = ac + ibc + iad + \underbrace{i^2}_{-1} bd$

osservazione: per somma e prodotto complessi si usano le stesse regole di + e · in $\mathbb{R}$, con l'unica con l'unica accortezza che $i^2 = -1$.

Non è difficile verificare che $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ è un campo:

valgono infatti le proprietà commutativa, associativa e distributiva.

Inoltre, esiste gli elementi neutri rispetto a

- $+ : \exists 0 = 0 + i \cdot 0 | z + 0 = (a + ib) + (0 + i \cdot) = a + ib = z \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\cdot : \exists 1 = 1 + i \cdot 0 | z \cdot \ 1 = (a + ib) \cdot 1 = a + ib = z \qquad \forall z \in \mathbb{C}$
- Esiste l'elemento opposto di z, rispetto a +, $\forall z \in \mathbb{C}$:

  se $z = a + ib \Rightarrow -z = -a - ib, z + (-z) = (a + ib) + (-a - ib) = 0$
- Esiste anche l'elemento inverso rispetto a $\cdot$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2 - (ib)^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2}$$

osservazione: in genere è sempre meglio razionalizzare.

osservazione: $\frac{1}{a+ib}$ non è la forma algebrica di $\frac{1}{z}$.

Verifica:

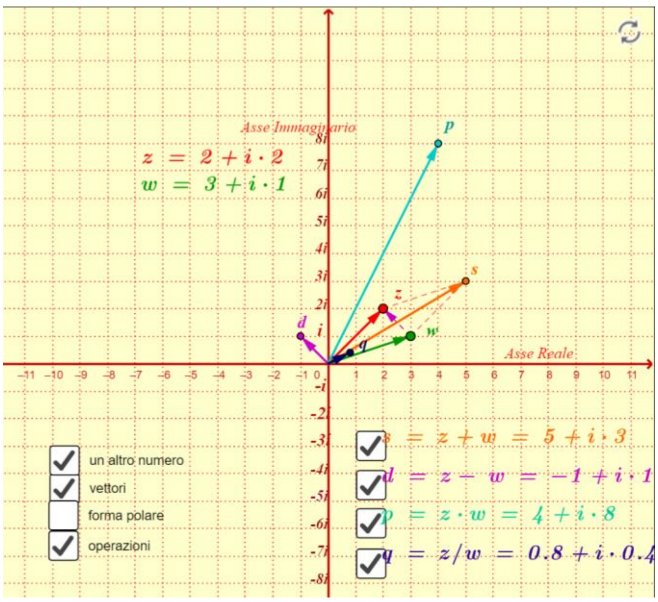
$$z \cdot \frac{1}{z} = (a + ib)\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2}\right) =$$

$$= \frac{a^2}{a^2+b^2} - \cancel{\frac{iab}{a^2+b^2}} + \cancel{\frac{iab}{a^2+b^2}} - \frac{i^2 b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

Un numero complesso è identificato da una copia di numeri reali:

$$z = a + ib \leftrightsquigarrow (a, b).$$

(a, b) si possono vedere come coordinate di un punto nel piano. (piano di Gauss/complesso)



osservazione: $\mathbb{C}$ è un ampliamento di $\mathbb{R}$, nel senso che i numeri reali si possono identificare coi numeri complissi del tipo

$$a + i \cdot 0, \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$\{numeri\ reali\} = \{numeri\ complessi\ con\ parte\ immaginaria = 0\}$$

osservazione: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z_1) = Re(z_2) \\ Im(z_1) = Im(z_2) \end{cases}$

PROPOSIZIONE:

$\mathbb{C}$ non è un campo ordinato: non esiste nessun "ordinamento" $\preccurlyeq$ in $\mathbb{C}$ compatibile con la struttura di campo.

Dimostrazione:

In un qualsiasi campo ordinato, il quadrato di un numero è ≥ 0 (valgono le regole dei segni).

Ma in $\mathbb{C}$,

$$1 = 1^2;\ -1 = i^2;\ \pm 1 = 0$$

Quindi $1, -1 > 0$. D'altra parte, $0 < 1 + (-1) = 0$, assurdo.

CONIUGATO E MODULO

$z = a + ib$ si definisce il CONIUATO di z come $\overline{z} = a - ib$ (cambia segno a $Im(A)$).

Si verifica che $z + \overline{z} = 2a = 2Re(z)$, $z - \overline{z} = 2bi = 2Im(z)$;

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\frac{\overline{1}}{z} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Si definisce il modulo di z come

$$\underbrace{|z|}_{questo\ numero\ misura\ la\ distanza\ di\ z\ da\ 0\ nel\ piano\ di\ Gauss} = \sqrt{z \cdot |\overline{z}|} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Se $z = a + i \cdot 0 \in \mathbb{R}$, allora $|z| = \sqrt{a^2} = \underbrace{|a|}_{valore\ assoluto}$

Risoluzioni di equazioni in $\mathbb{C}$

$$z^2 + 1 = 0$$

Usiamo la formula algebrica di z:

$z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R}$

$z^2 = a^2 + 2iab - b^2 = a^2 - b^2 + i(2ab)$

$z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + i(2ab) + 1 = 0 + i \cdot 0$

Quindi quest'equazione vale SSE parti reali e immaginarie di 1° e 2° membro coincidono.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 1 = 0 \\ \underbrace{2ab}_{a=0 \vee b=0} = 0 \end{cases}$ sistema non lineare

Se $a = 0$, la 1° equazione ci dà $-b^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow b^2 = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1$

$z_1 = 0 + i \cdot 1 = i, z_2 = 0 + i(-1) = -i$

Se $b = 0$, la 1° equazione ci dà $a^2 + 1 = 0\ \nexists a \in \mathbb{R}$

Le uniche soluzioni di $z^2 + 1 = 0$ sono $\pm i$.

osservazione: equazione di 2° grado a coefficienti reali

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

a patto che $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$.

La stessa formula vale sempre in $\mathbb{C}$:

se $\Delta < 0$, $\sqrt{-\Delta} \in \mathbb{R}$. Le soluzioni sono

$$z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \overbrace{\sqrt{-\Delta}}^{\in \mathbb{R}}}{2\alpha} \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{-\Delta \cdot (-1)} = i\sqrt{-\Delta}$$

osservazione: in genere risolvere sistemi non lineari non è banale.

osservazione: anche in $\mathbb{C}$ esistono equazioni non risolvibili.

$$z - \overline{z} = 4 \Leftrightarrow 2ib = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 4 \\ 2b = 0 \end{cases}$$

$z = a + ib,\ \ a, b \in \mathbb{R}$ non esistono soluzioni.

Questa non è un'equazione algebrica, cioè non sono coinvolti solo potenze di z (compare $\overline{z}$).

Spesso, per risolvere equazioni "complesse", è utile usare la forma trigonometrica e le coordinate polari.

$$z = a + ib$$

(a, b) sono le coordinate cartesiane di z.

z si può indicare anche mediante $\rho = |z| \geq 0$ (raggio polare) e $\theta = \arg(z)$ (angolo polare o argomento di z, dove θ è l'angolo che la retta passa per O e z forma con il semiasse positivo delle ascisse (semiasse reale positivo), contando in verso antiorario.

$$z \leftrightarrow (\rho, \theta)$$

osservazione:

θ è determinato in modo unico a meno di multipli (interi) di 2π:

θ e $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, individuano geometricamente lo stesso angolo$\Rightarrow$ $(\rho, \theta) \leftrightarrow (\rho, \theta + 2k\pi)$ individuano lo stesso angolo.

Per eliminare questa indeterminazione, spesso si fissa un intervallo di riferimento di 2π in cui far variare θ, tipicamente$[0, 2\pi)$ o $(-\pi, \pi]$.

La corrispondente scelta di θ si dice ARGOMENTO PRINCIPALE di z, $Arg(z)$.

Esempio: $z = i = 0 + 1 \cdot i$

La formula trigonometrica di i è la seguente:

$|i| = 1$

Fissiamo $[0, 2\pi)$ come intervallo per θ. $\quad Arg(i) = \frac{\pi}{2}$

osservazione: per $z = 0$, non si definisce l'argomento.

Per individuare 0 in coordinate polari, è sufficiente specificare $|0| = 0$.

Relazioni tra coordinate cartesiane e polari

Dalla trigonometria, sappiamo che

$$\begin{cases} a = \rho \cos\theta \\ b = \rho \sin\theta \end{cases} \qquad (2)$$

Viceversa, date (2) coordinate cartesiane, si possono ricavare quelle polari assumendo che

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

per ricavare θ , usando abbiamo che

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Esempio: scrivere $1 - i\sqrt{3}$ in forma trigonometrica:

$$\rho = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

Per determinare θ, fissiamo $[0, 2\pi)$ come intervallo e osserviamo che

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \vee \theta = \frac{5}{3}\pi$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{4}{3}\pi \vee \theta = \frac{5}{3}\pi$$

Quindi $\theta = \frac{5}{3}\pi, z = 2\left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right)$

osservazione: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

FORMULE DI DE MOIVRE

Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2)$, $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

Allora

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

e, se $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

Conseguenza:

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$Z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Dimostrazione (di De Moivre)

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_2) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)) =$$

$$= \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

C.v.d.

Per il quoziente, si razionalizza e si procede in modo analogo.

osservazione: $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

Per De Moivre

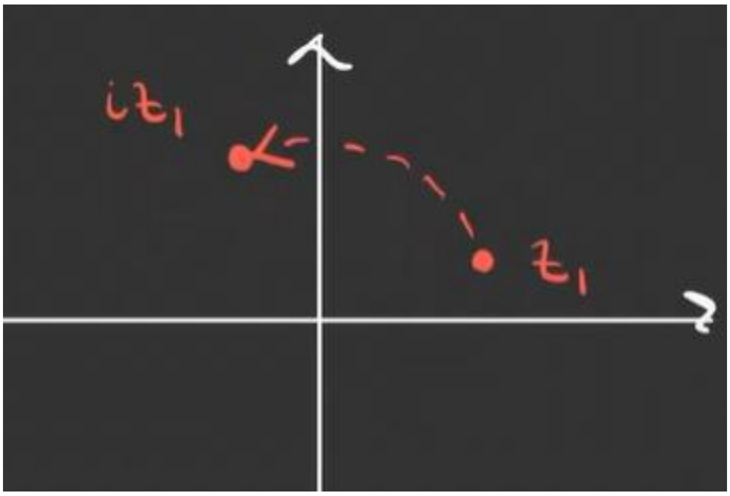
$$(1 + i)^7 = \left(\sqrt{2}\right)^7(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi)$$

$$\sqrt{2^7}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=8-8\sqrt{2}$$

osservazione: $z_1 \in \mathbb{C}, z_2=\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\in\mathbb{C}$.

Graficamente, De Moivre ci dice che moltiplicare z_1 per z_2 equivale a effettuare una contrazione/ dilatazione di $|z_1|$ di un fattore ρ_2, ed a ruotare z_1 di un angolo θ_2 in verso antiorario.

Ad esempio, $z_1 \cdot i$ si individua ruotando z_1 di $\frac{\pi}{2}$ in verso antiorario.



Esempio:

risolvere $z^3-|z|=0$

Usiamo la formula trigonometrica:

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)\Rightarrow z^3=\rho^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$$

$$|z|=\rho=\rho(\cos 0+i\sin 0)$$

L'equazione di potenza diventa $z^3=|z|$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\rho^3=\rho\Rightarrow\rho=0\vee\rho=+1\\ 3\theta=0+2k\pi, \qquad k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\theta=\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$$

Ci sarebbero infinite possibilità per θ, ma gli angoli sono determinati. A meno di numeri di 2π.

k=0, k=3, k=6 … ci danno tutti lo stesso angolo, che quindi coincidono con $\theta=0$.

k=1, k=4… ci danno tutti lo stesso angolo, che quindi coincidono con $\theta=\frac{2}{3}\pi$.

k=2, k=5… ci danno tutti lo stesso angolo, che quindi coincidono con $\theta=\frac{4}{3}\pi$.

$$\begin{cases}\rho=0\vee\rho=1\\ \theta=0\vee\theta=\frac{2}{3}\pi\vee\theta=\frac{4}{3}\pi\end{cases}$$

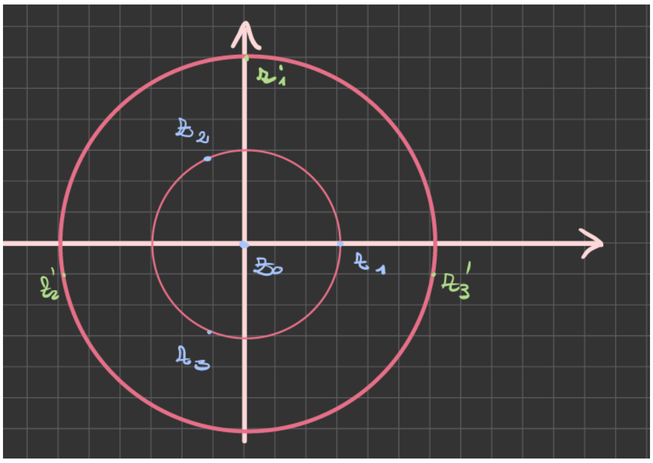
$\rho = 0$ mi dà una soluzione $z_0 = 0$

$\rho = 1$ mi dà tre soluzioni.

$$z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Abbiamo risolto $z^3 - |z| = 0$, le soluzioni sono $z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Rappresentare $A = \{z_0, z_1, z_2, z_3\} in\ \mathbb{C}$ $B = \{z \in \mathbb{C}: z = \underbrace{2iw}_{modulo\ 2\ e\ angolo \frac{\pi}{2}}, w \in A\}$



I punti di B, si ottengono a partire da A, dilatando i punti di A di un fattore 2, ruotando in verso antiorario.

Radice n-esima di numeri complessi

$w \in \mathbb{C}, w \neq 0, n \in \mathbb{N}, n > 1$ esiste esattamente n radici *n-esima* di $w, z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$.

Se $w = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$, allora $z_k = \rho(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, dove

$$\begin{cases} \rho = r^{\frac{1}{n}} \\ \theta_k = \frac{\phi + 2k\pi}{n} \end{cases}$$

osservazione: se $w = 0, z^n = 0$ è soddisfatto solo per $z = 0$.

Dimostrazione:

Step 1) i numeri z_k, definiti sopra sono radici *n-esimi*: quanto segue da De Moivre.

Step 2) non esistono altre radici *n-esime*. Se $R(\cos\psi + i\sin\psi)$ è una radice *n-esima*, allora

$$\begin{cases} R^n = r \\ n\psi = \phi + 2h\pi, \quad h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Quindi $R = r^{\frac{1}{n}}$. Inoltre, $\psi = \frac{\phi + 2h\pi}{n}$, con $h \in \mathbb{Z}$.

Se $h \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, allora ψ coincide con uno dei θ_k definito sopra.

Se invece $h \notin \{0, \dots, n-1\}$, possiamo fare la divisione intera $\frac{h}{n}$ con resto:

$$h = \underbrace{m}_{quoziente \in \mathbb{Z}} \cdot n + \underbrace{k}_{resto = \{0, \dots, n-1\}}$$

Quindi

$$\psi = \frac{\phi + 2h\pi}{n} = \frac{\phi + 2mn\pi + 2k\pi}{n} = \frac{\phi + 2k\pi}{n} + 2m\pi =$$
$$= \theta_k + 2m\pi$$

ψ si identifica con uno dei θ_k trovati in precedenza.

Quindi, presa una generica radice *n-esima* abbiamo mostrato che questa radice ha modulo

$$\begin{cases} R = r^{\frac{1}{n}} \\ \psi \underbrace{\cong}_{a\ meno\ di\ multipli\ di\ 2\pi} \theta \end{cases} \Rightarrow \text{la radice coincide con } z_k$$

Esempio: $z^6 = 1$

1 ha 6 radice seste$z_0, \dots, z_5$, tale che

$$|z_k| = 1 \ \ \forall k$$

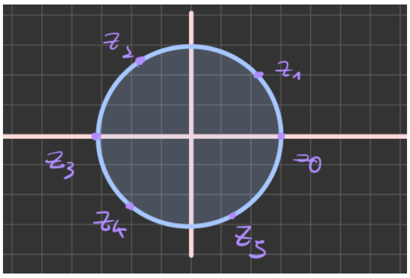
$$\arg z_k = \frac{\overbrace{0}^{\arg 1} + 2k\pi}{6}, \qquad k = 0, \dots, 5$$

$$z_0 = 1(\cos 0 + i \sin 0) = 1$$

$$z_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = 1\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i \sin\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

...



osservazione: $w = r(\cos\phi + i\sin\phi) \Rightarrow$ le radici *n-esime* di w si trovano nei vertici di un poligono regolare di n lati inscritti nella circonferenza di centro O e raggio $r^{\frac{1}{n}}$, con il "primo" vertice z_0 posto nel punto di angolo $\frac{\phi}{n}$.

Il teorema ci dice che l'equazione $w^n - w = 0$ ($w \in \mathbb{C}$) ha in $\mathbb{C}$ esattamente n soluzioni.

Definizione: $P(z)$ polinomio nelle variabili z, a coefficienti in $\mathbb{C}$:

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, n \in \mathbb{N}$$

Diciamo che $\overline{z}$ è una radice di P se

$$P(\overline{z}) = 0$$

Diciamo che $\overline{z}$ è una radice di P con molteplicità k (k intero ≥ 1) se

$P(z) = (z - \overline{z})^k \cdot Q(z)$, dove Q è un polinomio, con $Q(\overline{z}) = 0$.

Esempio: $z^3 + z^2 = z^2(z+1)$ 0 è una radice con molteplicità 2.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Un polinomio $P(z)$ a coefficienti complessi di grado n ha sempre n radici, contate con molteplicità.

osservazione: in $\mathbb{R}$ non è così. $x^2 + 1 = 0$ non ha radici reali.

Notazione esponenziale

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$z = \rho e^{i\theta}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad \textit{FORMULA DI EULERO}$$

$$\underset{z_2=\rho_2 e^{i\theta_2}}{z_1=\rho_1 e^{i\theta_1}} \rightsquigarrow \textit{De Moivre: } z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

È quello che otteniamo trattando $e^{i\theta}$ come potenza classica.

$$(\rho_1 e^{i\theta_1})(\rho_2 e^{i\theta_2}) = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$$

Valgono le regole di calcolo standard.

FUNZIONI

Definizione: A, B insiemi. Una RELAZIONE tra A e B è un sottoinsieme

$$R \subseteq A \times B = \{(a, b) \in R : a \in A, b \in B\}$$

Notazioni: se R è una relazione $(a, b) \in R \Leftrightarrow aRb$

Esempio:

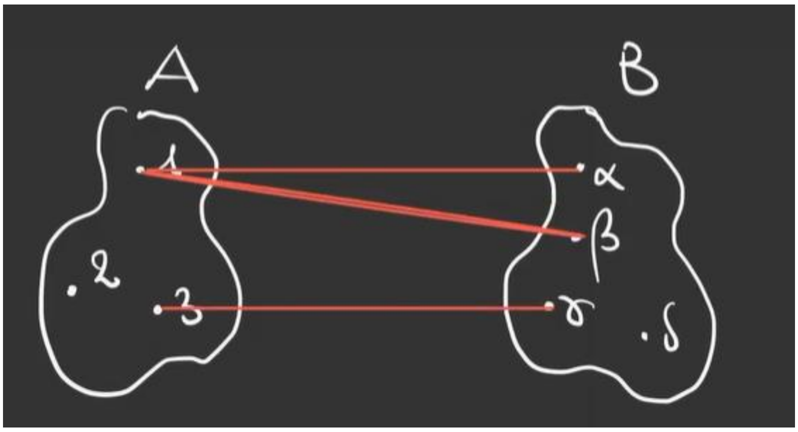
$A = \{1, 2, 3\}$ $\quad B = \{\alpha, \beta, \delta, \gamma\}$

$R = \{(1, \alpha), (1, \beta), (3, \delta)\}$ è una relazione, r è in relazione con α e con β.

Definizione: Una FUNZIONE tra A e B è una relazione che ad ogni elemento di A associa un unico elemento di B.

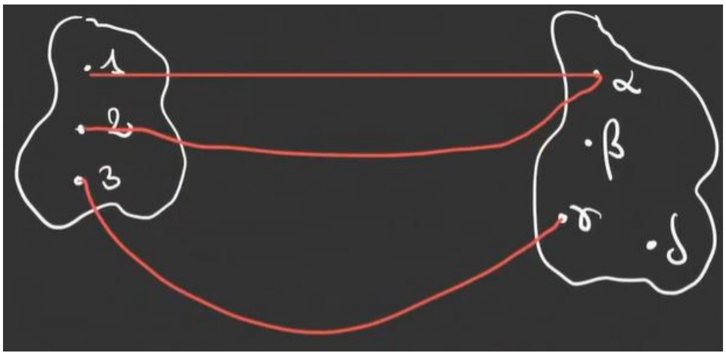
A si dice DOMINIO, B si dice CODOMINIO.

$f : A \to B \quad a \longmapsto b \qquad f(a) = b$



$R = \{(1, \alpha), (1, \beta), (3, \delta)\}$ non è una funzione:

- 1 è in relazione con 2 elementi;
- 2 non è in relazione con nessun elemento.



$R = \{(1, \alpha), (2, \alpha), (3, \delta)\}$ è una funzione.

$$f : A \to B$$

$$1 \longmapsto \alpha$$
$$2 \longmapsto \alpha$$
$$3 \longmapsto \delta$$

Se $f: A \to B$ è una funzione e $f(a) = b$, b si dice immagine di a (mediante *f*).

a si dice controimmagine di b (mediante *f*).

osservazione:

l'immagine di un elemento è sempre unica. Mentre ci possono essere più controimmagini.

Nell'esempio le controimmagini di α sono 1 e 2.

Definizione: si dice immagine dei $f: A \to B$ l'insieme $f(A)$.

$$Im(A) = \{b \in B: \exists a \in A \; per \; cui \; f(a) = b\}$$

Esempio: $f(1) = \{\alpha, \beta\}$

Definizione: $f: A \to B$ si dice iniettiva se $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

osservazione: L'esempio precedente non è un esempio di funzione iniettiva.

Definizione: $f: A \to B$ si dice suriettiva se $f(A) = B$

Se f è iniettiva e suriettiva, allora f si dice BIUNIVOCA o BIETTIVA.

Definizione: se $f: A \to B$ è iniettiva, si dice che f è invertibile.

La funzione inversa è f^{-1}: da $f(A) \to B$ a $f^{-1}(B) = A \Leftrightarrow f(a) = b$

osservazione: se f è suriettiva, il dominio di f^{-1} coincide con *B*. La suriettività non è però necessaria per definire l'inversa.

Esempio: $A = \{1, 2, 3\}$ $\quad B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ $\quad f: A \to B, f(1) = \alpha, f(2) = \beta, f(3) = \delta$

f è invertibile, e $f^{-1}(\alpha) = 1, f^{-1}(\beta) = 2, f^{-1}(\gamma) = 3$

Definizione: *A*, *B*, *C* insiemi, $f: A \to B, g: B \to C$ funzioni. Si definisce la funzione composta $(g \circ f): A \to C$ come $(g \circ f)(a) = g(\underbrace{f(a)}_{\in B = dom\, g})$.

osservazione: l'inversa si può caratterizzare nel modo seguente:

$$(f \circ f^{-1})(b) = b \qquad \forall b \in f(A)$$
$$(f^{-1} \circ f)(a) = a \qquad \forall a \in A$$

FUNZIONI REALI DI VARIABILI REALI

A livello intuitivo, una funzione è una "legge" che associa ad ogni elemento di dominio un unico elemento del codominio.

$$f: A \to B$$

$$x \in A \longmapsto f(x) \in B$$

Ricordiamo che l'insieme immagine di f è

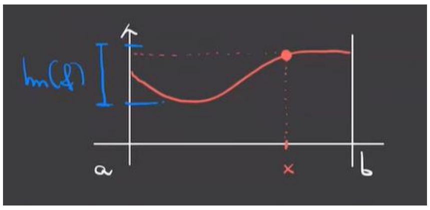
$$f(x) = Im(f) = \{y \in B: \exists x \in A \; con \; f(x) = y\}$$

Ci focalizzeremo su funzioni $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

La dipendenza di $f(x)$ da x si visualizza disegnando il grafico di f,

$$graf(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = f(x), x \in D\}$$

osservazione: l'immagine è sempre un sottoinsieme del codominio $\mathbb{R}$. Invece il grafico è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$.



- rappresenta il grafico di una funzione

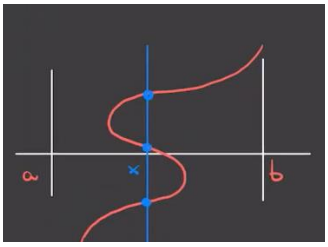
$f: [a, b] \to \mathbb{R}$

osservazione: una funzione si può assegnare tramite un'espressione algebrica, senza specificare il dominio.

Esempio: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \rightsquigarrow$ è un sottinteso che il dominio di f è l'insieme degli x tale che l'espressione ha senso.

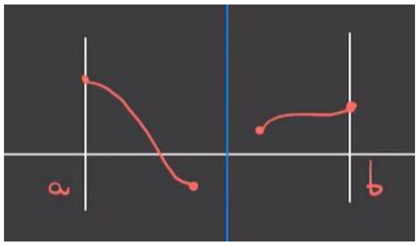
$$dom(f) = D(f) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0, x \neq 1\}$$

Si parla di DOMINIO NATURALE di f.



Questa curva non rappresenta un grafico

Geometricamente, una curva può essere il grafico di una funzione SSE ogni retta verticale che taglia l'asse delle x in un punto del dominio, interseca la curva in uno ed in un solo punto.



Questa curva non rappresenta un grafico

Definizione:

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice limitato superiormente se esiste $M \in \mathbb{R}: f(x) \leq M \;\; \forall x \in D$

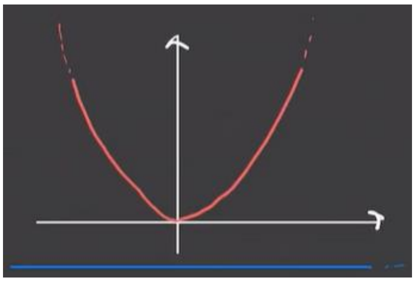
($\Leftrightarrow$ $\underbrace{f(D)}_{insieme\ immagine}$ è superiormente limitato).

f si dice limitato inferiormente se esiste $m \in \mathbb{R}: f(x) \geq m \;\; \forall x \in D$

($\Leftrightarrow$ $\underbrace{f(D)}_{insieme\ immagine}$ è inferiormente limitato).

f si dice limitato se lo è sia superiormente che inferiormente.

Esempio: $f(x) = x^2$ è inferiormente limitato $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, invece f non è superiormente limitato.



f è inferiormente limitato

$\Updownarrow$

Il grafico di f sta "sopra" una retta orizzontale.

La parabola non sta sotto nessuna retta orizzontale $\Leftrightarrow f$ non è superiormente limitato.

Esempio: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ è limitata

$$\frac{1}{1+x^2} \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

FUNZIONI CON SIMMETRIE

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Definizione: f si dice PARI se

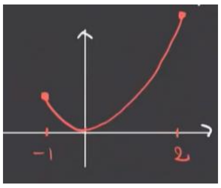
I) D è simmetrico rispetto a O, nel senso che $x \in D \Rightarrow -x \in D$

II) $f(-x) = f(x) \ \forall x \in D$

Esempio: $f(x) = x^2$

Se f è pari, il grafico di f è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.

osservazione: se consideriamo $f: [-1, 2] \to \mathbb{R}$ dati da $f(x) = x^2 \ \ \forall x \in [-1, 2]$, allora questa non è una funzione pari.



La restrizione di x^2 su [-1, 2]

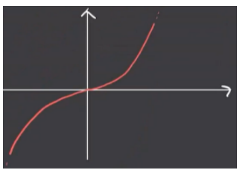
Definizione: f si dice DISPARI se

I) D è simmetrico rispetto a O

II) $f(-x) = -f(x) \ \forall x \in D$

In tal caso, il $graf(f)$ è simmetrico all'origine del piano.

Esempio:



$f(x) = x$ $\qquad$ $g(x) = x^3$

FUNZIONE MONOTONA

Definizione: f si dice (MONOTONA) CRESCENTE o NON-DECRESCENTE se $\forall x_1, x_2 \in D$ vale: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Se si rimpiazza $\geq$ con $>$, f si dice STRETTAMENTE CRESCENTE.

Se sostituiamo $\geq$ con $\leq$, f si dice DECRESCENTE o NON-CRESCENTE.

Se poi vale $<$, f si dice STRETTAMENTE DECRESCENTE.

Queste funzioni si dicono funzioni monotone.

Esempio: $f(x) = x^3$ è strettamente crescente.

$f(x) = x^2$ non è né crescente né decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

$\underbrace{x^2|_{[0,+\infty)}}_{restrizione\ di\ x^2\ su\ [0,+\infty)}$ è crescente strettamente

osservazione: $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$, funzione costante è sia crescente che decrescente (mai strettamente).

osservazione: ogni funzione strettamente monotona su un intervallo è invertibile.

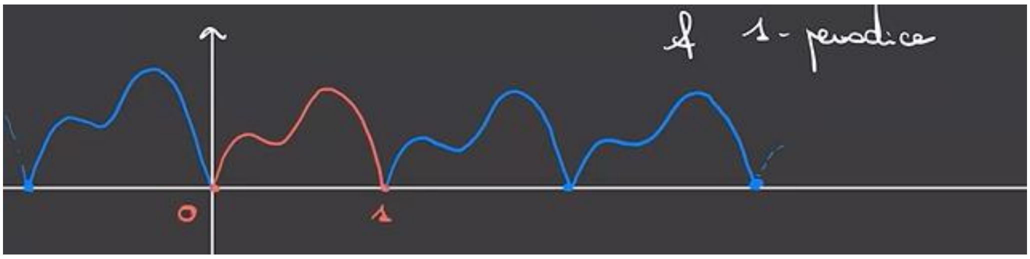
(se f è strettamente crescente in I, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, e quindi $f(x_2) \neq f(x_1)$)

FUNZIONI PERIODICHE

Definizione: $f: D \subseteq \mathbb{R}$ si dice PERIODICO di periodo $T > 0$ se T è il più piccolo numero reale > 0 tale che

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in D$$

Ogni intervallo di lunghezza T contenuto in D si dice INTERVALLO DI PERIODICITÀ. Se conosciamo il comportamento di f in un intervallo di periodicità, lo conosciamo ovunque.



osservazione: se f è T periodica allora $f(x+2T) = f(x+T) = f(x) \quad \forall x$

FUNZIONI ELEMENTARI

Funzioni di tipo potenza, esponenziali, log, funzioni trigonometriche:

c'è un file a parte.

Parte intera e mantissa:

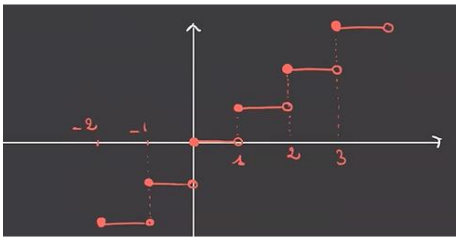
Sia $x \in \mathbb{R}$. Si chiama PARTE INTERA di x il numero

$\lfloor x \rfloor :=$ l'intero $n \in \mathbb{Z} : n \leq x \leq n + 1 =$ il più grande intero $n \in \mathbb{Z}: n \leq x$

$\lfloor 2{,}38 \rfloor = 2$

$\lfloor -2.38 \rfloor = -3 \quad (-3 \leq -2.38 < -2)$

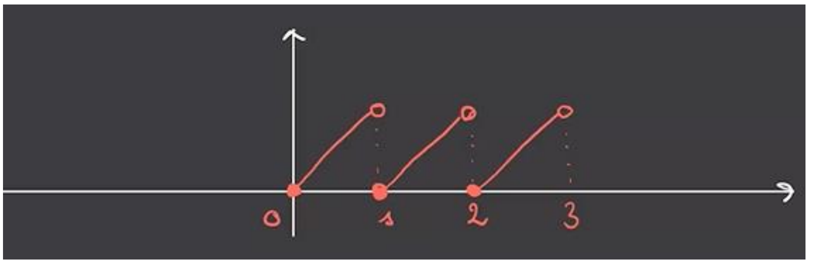
Il grafico è una scala



La MANTISSA di x (o PARTE DECIMALE di x), è definita da

$(x) = man(x) := x - \lfloor x \rfloor \qquad \in [0, 1)$

$(2{,}38) = 0{,}38 \qquad\qquad (-2{,}38) = -2{,}38 + 3 = 0{,}62$



La mantissa è una funzione periodica di periodo 1.

FUNZIONI DEFINITE A TRATTI E LE RESTRIZIONI

Se diamo una funzione tramite un'espressione analitica contenente x, il dominio di questa funzione è inteso come il domino naturale (insieme di x in $\mathbb{R}$ per cui l'espressione ha senso). A volte conviene però restringere il dominio.

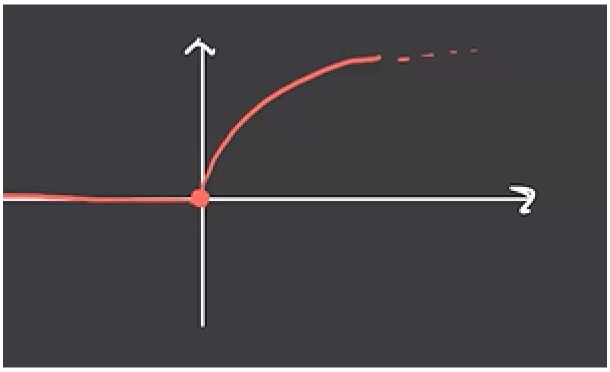
Si parla allora di RESTRIZIONE di f ad

$$A \underset{\neq}{\subset} dom\ (f)$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to x^2$ non è monotona

$f|_{[0,+\infty)}$ è stretta mente crescente $\qquad x_1, x_2 \geq 0, x_1 < x_2 \Rightarrow x_2^2 > x_1^2$

In modo simile, date 2 funzioni definite su sottoinsiemi disgiunti di $\mathbb{R}$, è possibile combinare in un'unica funzione, una FUNZIONE DEFINITA A TRATTI:



$$f: \begin{cases} 0 \; se \; x < 0 \\ \sqrt{x} \; se \; x \geq 0 \end{cases}$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile se è iniettiva:

$$x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in D \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

In questo caso f sarà biunivoca tra D e $f(D)$, l'insieme immagine.

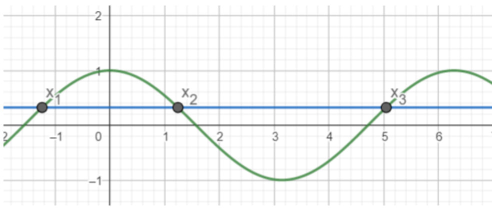
La funzione inversa è

$$f^{-1}: f(C) \to D: \begin{cases} y = f(x) \\ x \in D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(D) \end{cases}$$

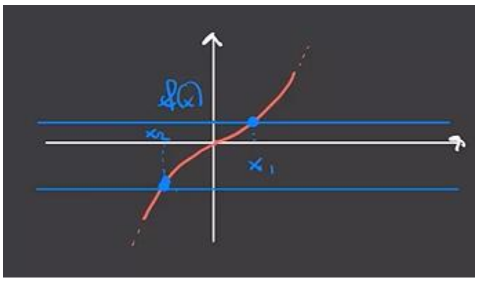
(ricordiamo che $f(D) = \{y \in \mathbb{R}: \exists \; x \in D \; per \; cui \; y = f(x)\}$)

Questo ci dice che se $(x_0, y_0) \in graf(f)$, allora $(y_0, x_0) \in graf(f^{-1})$. Quindi il grafico di f^{-1} si ricava da quello di f per simmetria rispetto alla bisettrice tra 1° e 3° quadrante $(y = x)$

osservazione: la condizione di invertibilità, a livello grafico, equivale a richiedere che $graf(f)$ sia intersecato al max in un punto da ogni retta parallela all'asse x. $x_1 \neq x_2$ ma $f(x_1) = f(x_2)$



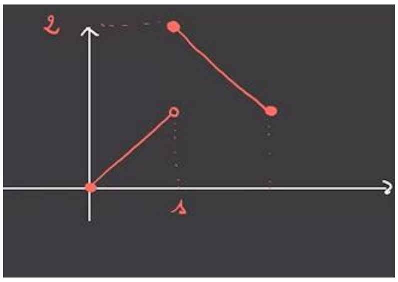
sicuramente, funzioni periodiche non possono essere invertibili.



funzioni strettamente monotone sono invertibili.

osservazione: non è vero che una funzione invertibile sia strettamente monotona.

$$f(x) = \begin{cases} x \ \ se\ x \in [0,1) \\ 3 - x \ \ se \in [1,2] \end{cases}$$

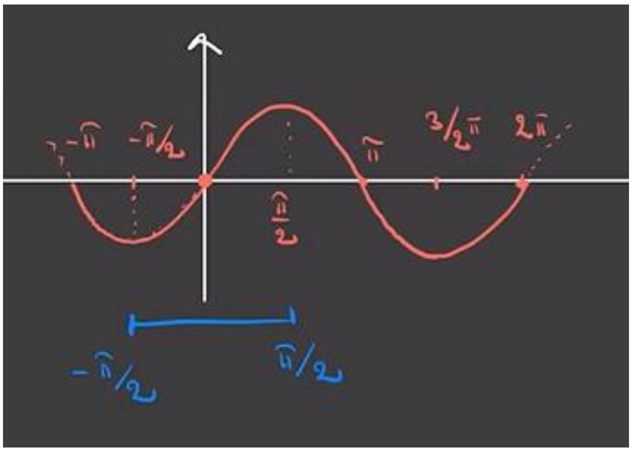


f è invertibile, ma non è monotona in $[0,2]$

notare che $f^{-1}(x) = f(x)$

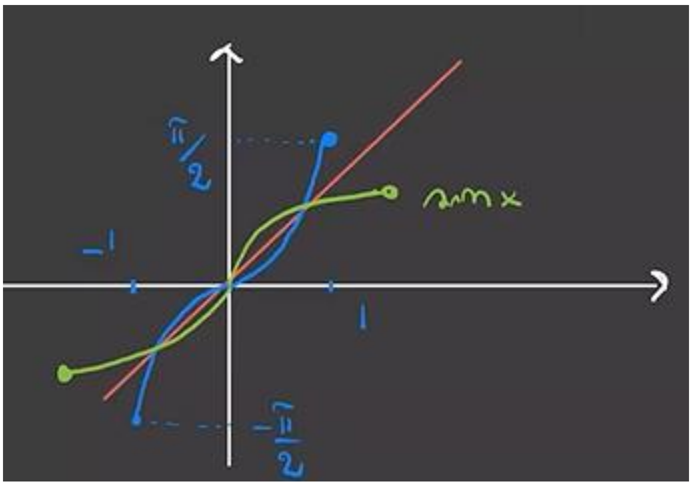
Le funzioni sono periodiche, e quindi non sono invertibili se "le guardo" su tutto il loro dominio.

Diventano invertibili se ne consideriamo la restrizione su sottointervalli di $\mathbb{R}$ su cui sono strettamente monotona.



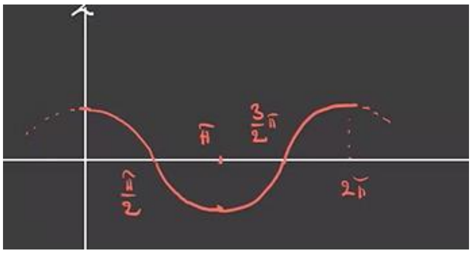
$\sin x$, 2π- periodica

Consideriamo $\sin x \mid_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$. Qui il seno è strettamente crescente, e varia tra -1 e 1.



$$\begin{cases} y = \sin x \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin y \\ y \in [-1,1] \end{cases}$$

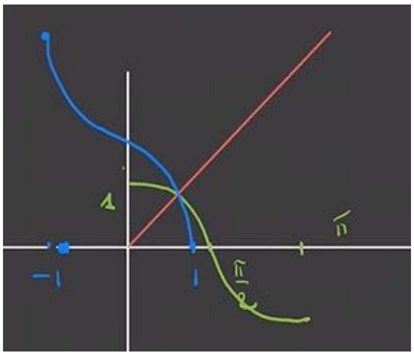
Il coseno non è invertibile su $\mathbb{R}$.



$\cos x$ è 2π-periodica

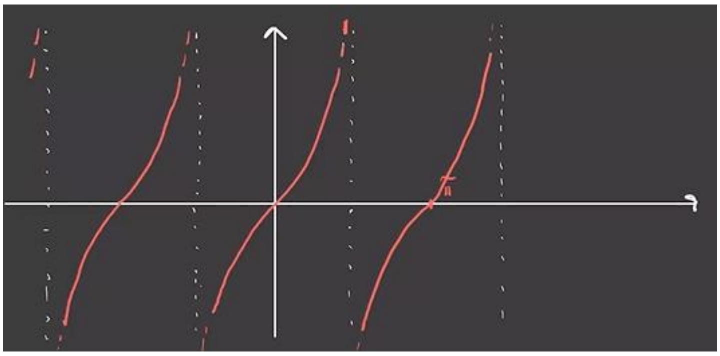
Su $[0, \pi]$, $\cos x$ è strettamente decrescente, e quindi invertibile.

La funzione inversa si dice ARCOCOSENO.



$$\begin{cases} y = \cos x \\ x \in [0, \pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos y \\ y \in [-1,1] \end{cases}$$

La tangente non è globalmente invertibile



$\tan x$ è π-periodica

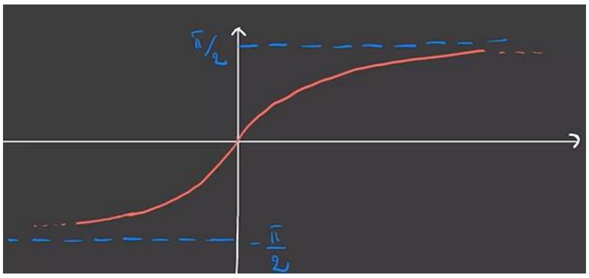
non è definita per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

La tangente è strettamente crescente in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, quindi è ivi invertibile.

La funzione inversa si dice ARCOTANGENTE.

$$\begin{cases} y = \tan x \\ x \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arctan y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(Notazione: $\tan x = tg\ x$; $\arctan x = arctg\ x$ arcotangente)



Si può anche definire un'arcocotangente.

FUNZIONI IPERBOLICHE

Sia e il NUMERO DI NEPERO, $e \in \mathbb{R}, e \cong 2{,}71$.

Definizione: si definisce il SENO IPERBOLICO di x, $\sinh x$ o $Sh\,x$, come

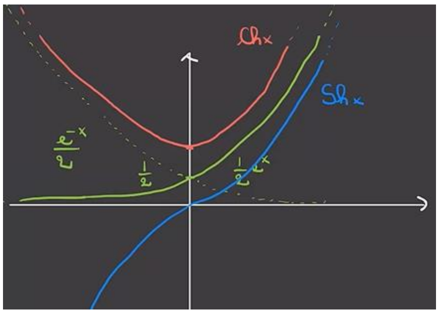
$Sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$ Sh è dispari

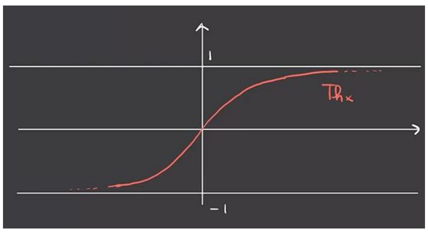
Si definisce il COSENO IPERBOLICO di x, $\cosh x$ o $Ch\,x$, come

$Ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, x \in \mathbb{R}$ Ch è pari

Si definisce la TANGENTE IPERBOLICA di x, $\tanh x$ o $Th\,x$, come

$Th\,x = \frac{Sh\,x}{Chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$ Th è dispari





RELAZIONI FONDAMENTALI

$$(\sin^2 x + \cos^2 x = 1) \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

Funzioni iperboliche inverse

$\sinh x$ è una funzione strettamente crescente in $\mathbb{R}$, e quindi invertibile. Troviamo l'inversa

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Cechiamo di esplicitare x in funzione di y.

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \Leftrightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = 2y \Leftrightarrow e^{2x} - 1 - 2ye^x = 0$$

Poniamo $t = e^x$. L'equazione diventa

$$t^2 - 2yt - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1} =$$

$y_1 = y + \sqrt{y^2 + 1}$

$y_2 = y - \sqrt{y^2 + 1}$ $y_2 < 0$ non accettabile perché $t = e^x > 0 \ \ \forall x$

Troviamo quindi

$$e^x = t = y + \sqrt{y^2 + 1} \Rightarrow x = \log e^x = \log(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

Notazioni: $\log \ = \log_e \ = \ln$ logaritmo naturale

$\log(y + \sqrt{y^2 + 1}) = settsinh\ x$ SETTORE SENO IPERBOLICO

Funzione inversa del seno iperbolico.

Funzione inversa del coseno iperbolico

$\cosh x$ non è globalmente invertibile, ma lo è se ne consideriamo la restrizione su $[0, +\infty)$.

Se $x \geq 0$

$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \rightsquigarrow x = \underbrace{\log(y + \sqrt{y^2 - 1})}_{SETTORE\ COSENO\ IPERBOLICO}$ (il dominio è $\underbrace{[1, +\infty)}_{Im(\cosh\ )}$)

SUCCESSIONI NUMERICHE

Definizione: una successione è una funzione $f: D \to \mathbb{R}$, dove D è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ (tipicamente $\mathbb{N}$ stesso o $\{n \in \mathbb{N}: n \geq n_0\}$).

$$f: n \to a_n$$

Esempio: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \longmapsto n^2$

I termini di una successione si possono elencare

0, 1, 4, 9, …, n^2, … $\{n^2\}$

- $n \longmapsto 2^{\frac{1}{n}}$ $(n \geq 1)$ $\{2^{\frac{1}{n}}\}$

  $2, \sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \dots, \sqrt[n]{2}, \dots$

  Notazioni: $n \longmapsto a_n, \{a_n\}, \{a_n: n \geq n_0\}, \{a_n\}_{n \geq n_0}, (a_n), \dots$

Le definizioni viste per funzioni si estendono in modo ovvio per le successioni. Ad esempio, una successione $\{a_n\}$ si dice…

…LIMITATA SUPERIORMENTE se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \leq M \ \ \forall n \in \mathbb{N} (\forall n \geq n_0)$

… LIMITATA INFERIORMENTE se $\exists m \in \mathbb{R}$ tale che $m \leq a_n \ \ \forall n$

… LIMITATA se lo è sia superiormente che inferiormente.

Definizione: $\{a_n\}$ si dice (MONOTONA)

- CRESCENTE se $a_n \leq a_{n+1} \ \forall n$
- DECRESCENTE se $a_n \geq a_{n+1} \ \forall n$
- STRETTAMENTE CRESCENTE se $a_n < a_{n+1}$
- STRETTAMENTE DECRESCENTE se $a_n > a_{n+1}$

Definizione: $\{a_n: n \geq n_0\}$ possiede DEFINITIVAMENTE una certa proprietà, se $\exists n_1 \geq n_0$ t.c a_n possiede quella proprietà $\forall n \geq n_1$

($\{a_n\}$ possiede definitivamente una proprietà, se i suoi elementi a_n possiedono quella proprietà da un certo indice in poi)

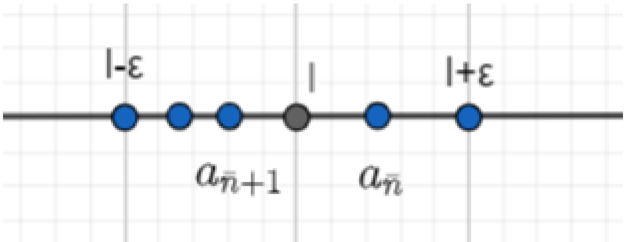
Esempio: $\{n - 10\sqrt{n}: n \in \mathbb{N}\}$ è definitivamente positiva

$$n - 10\sqrt{n} > 0 \Leftrightarrow n > 10\sqrt{n} \Leftrightarrow n^2 > 100n \Leftrightarrow n > 100$$

Definizione: $\{a_n\}$ suc. si dice che TENDE a $l \in \mathbb{R}$ per n CHE TENDE A INFINITO, e si scrive

$$a_n \to l \qquad\qquad \text{o} \qquad \lim_{a\to\infty} a_n = l,$$

se $\forall\epsilon > 0 \exists \overline{n} = \overline{n}(\epsilon) \in \mathbb{N}$ t. c. $n > \overline{n} \Rightarrow \underbrace{|a_n - l| < \epsilon}_{l-\epsilon<a_n<l+\epsilon \Leftrightarrow a_n\in(l-\epsilon,l+\epsilon)}$



$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \;\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0,\, a_n \in (l-\epsilon, l+\epsilon)$ definitivamente.

Se $\{a_n\}$ ha un limite $\underbrace{l \in \mathbb{R}}_{FINITO}$, si dice che $\{a_n\}$ è CONVERGENTE.

Esempio:

- $k \in \mathbb{R}, a_n = k \;\; \forall n$

  $\{a_n\}$ successione costante. Allora $a_n \to k$ per $n \to \infty$

  Verifica:

  Vogliamo verificare che, preso $\epsilon > 0$ arbitrario, abbiamo $a_n \in (k-\epsilon, k+\epsilon)$ definitivamente

  $\underbrace{a_n}_{k} \in (k-\epsilon, k+\epsilon) \quad \forall n$, e quindi a maggior ragione definitivamente.

- $k > 0$. Poniamo $a_n = \frac{1}{n^k}$ per $n \geq 1$

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n^k}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

  verifichiamo che $\frac{1}{n^k} \to 0$ se $n \to \infty$

  Verifica:

  Vogliamo verificare che, $\forall\epsilon > 0,\, \exists\, \overline{n} = \overline{n}(\epsilon)$:

  se $n > \overline{n} \Rightarrow \left|\frac{1}{n^k}\right| < \epsilon$

  Fissiamo $\epsilon > 0$.

$$\left|\frac{1}{n^k}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^k} < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow n^k > \frac{1}{\epsilon} <\Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{k}}}$$

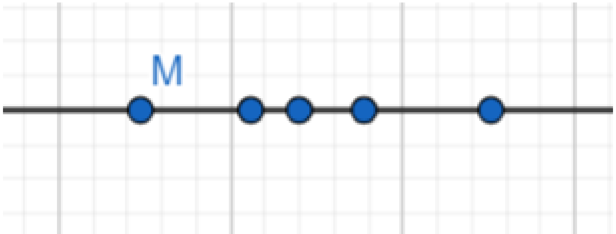
  Fissato $\epsilon > 0$, se poniamo $\overline{n} = \left|\frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{k}}}\right|$, allora che $n > \overline{n} \Rightarrow n > \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{k}}} \Rightarrow \epsilon > \left|\frac{1}{n^k}\right|$

Non tutte le successioni sono convergenti.

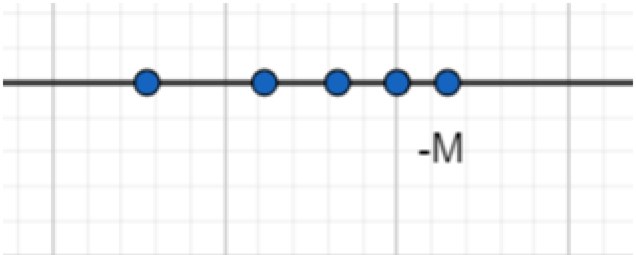
Definizione: diciamo che a_n TENDE A $+\infty$ PER n CHE TENDE A ∞, e scriviamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \text{o} \qquad a_n \to +\infty \text{ per } n \to +\infty,$$

se $\forall M > 0 \exists \overline{n} = \overline{n}(M) \in \mathbb{N}$ t.c. $n > \overline{n} \Rightarrow a_n > M$



a_n tende a $-\infty$ per $n \to \infty$ se $\forall M > 0 \exists \overline{n} = \overline{n}(M) \in \mathbb{N}$ t. c. $n > \overline{n} \Rightarrow a_n < -M$



Queste successioni si dicono DIVERGENTI.

osservazione: $+\infty$ e $-\infty$ non sono numeri reali.

Esempio: $k > 0$ fissato. $a_n = n^k \ \forall n$

$$\{n^k\}_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^k = +\infty$$

Verifica:

Vogliamo verificare che, dato $M > 0$, $\exists\, \overline{n} = \overline{n}(M)$ t. c.

$$n > \overline{n} \Rightarrow n^k > M$$

Fissiamo $m > 0$. $n^k > M \Leftrightarrow n > M^{\frac{1}{k}}$

Quindi, se poniamo $\overline{n} = \left\lfloor M^{\frac{1}{k}} \right\rfloor + 1$, abbiamo che

$$n > \overline{n} \Rightarrow n > M^{\frac{1}{k}} \Rightarrow n^k > M$$

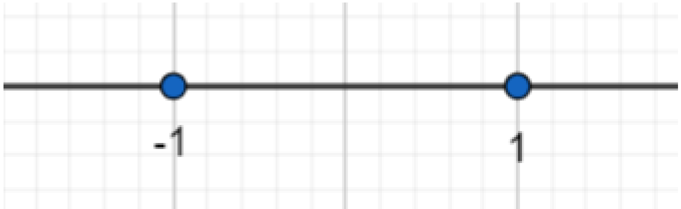
Definizione: se $\{a_n\}$ ha limite, finito o infinito, allora $\{a_n\}$si dice REGOLARE.

Se $\{a_n\}$ non è regolare, si dice IRREGOLARE o INDETERMINATA.

Esempio:

$$a_n = (-1)^n, n \geq 0$$

$$+1, -1, +1, -1, +1, \dots$$



I valori $\{a_n\}$ "oscillano" tra -1 e +1.

Definizione: $\{a_n\}$ successione.

$\{a_n\}$ si dice INFINITESIMA se $a_n \to 0$ per $n \to \infty$

$\{a_n\}$ si dice INFINITA se $a_n \to \pm\infty$ per $n \to \infty$

Diciamo che a_n TENDE A $l \in \mathbb{R}$ PER ECCESSO (PER $n \to \infty$), e scriviamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l^+ \qquad \text{o} \qquad a_n \to l^+, \text{ per } n \to \infty,$$

se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, ed inoltre $a_n \geq l$ definitivamente.

Diciamo che a_n TENDE A l PER DIFETTO PER $n \to \infty$, e scriviamo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l^- \qquad \text{o} \qquad a_n \to l^-, \text{ per } n \to \infty,$$

se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, ed inoltre $a_n \leq l$ definitivamente.

Esempio: $\frac{1}{n^k} \to 0^+$ per $n \to +\infty$: $\quad \frac{1}{n^k} \to 0$ e $\frac{1}{n^k} > 0 \ \ \forall n$

osservazione: ci sono successioni che convergono, ma lo fanno, né per eccesso né per difetto. Ad es

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$a_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Ma$\{a_n\}$ non è né definitivamente positivo, né definitivamente negativo.

UNICITÀ DEL LIMITE

Se esiste il limite di $\{a_n\}$, il limite è unico.

Dimostrazione:

Supponiamo per assurdo che $a_n \to l_1$ e $a_n \to l_2$ per $n \to \infty$ così da studiare:

$$l_1, l_2 \in \mathbb{R}, l_1 \neq l_2;$$

$$l_1 \in \mathbb{R}, l_2 = \pm\infty;$$

$$l_1 = +\infty, l_2 = -\infty;$$

Ci focalizziamo sul 1° caso:

$l_1 \neq l_2 \Rightarrow d := |l_1 - l_2| > 0.$

$a_n \Rightarrow l_1$ per $n \to \infty$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \overline{n_1} = \overline{n_1}(\epsilon) \text{ t.c. } n > \overline{n_1} \Rightarrow |a_n - l_1| < \epsilon$$

$a_n \to l_2$ per $n \to \infty$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \overline{n_2} = \overline{n_2}(\epsilon) \text{ t.c. } n > \overline{n_2} \Rightarrow |a_n - l_2| < \epsilon$$

Usiamo queste definizioni scegliendo $\epsilon = \frac{d}{3}$:

$$\exists \overline{n_1}\left(\frac{d}{3}\right) t.c. n > \overline{n_1} \Rightarrow |a_n - l_1| < \frac{d}{3}$$

$$\exists \overline{n_2}\left(\frac{d}{3}\right) t.c. n > \overline{n_2} \Rightarrow |a_n - l_2| < \frac{d}{3}$$

Poniamo $\overline{n} = \max\{\overline{n_1}, \overline{n_2}\}$. Se $n > \overline{n}$, valgono le due scritte precedenti.

Ma allora, per $n > \overline{n}$

$$d = |l_1 - l_2| = |l_1 - l_2 \pm a_n| \leq \underbrace{|l_1 - a_n|}_{<\frac{d}{3}} + \underbrace{|a_n - l_2|}_{<\frac{d}{3}} < \frac{2}{3}d \Rightarrow d < \frac{2}{3}d$$

assurdo se $d > 0$. □

TEOREMA- ∃ DEL LIMITE PER SUCC. MONOTONE

Sia $\{a_n\}$ una successione monotona. Allora $\{a_n\}$ è regolare. Più precisamente, se $\{a_n\}$ è crescente, allora $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Se invece$\{a_n\}$ è decrescente, allora $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Dimostrazione:

4 casi:

1) $\{a_n\} \nearrow$ sup. limitato $(\sup\{a_n\} = \Lambda \in \mathbb{R})$
2) $\{a_n\} \nearrow$ illimitato $(\sup\{a_n\} = +\infty)$
3) $\{a_n\} \searrow \ldots$
4) ...

Consideriamo soltanto il caso 1.

Vogliamo mostrare che $a_n \to \Lambda$ per $n \to \infty$, cioè che

$$\forall \epsilon \ \exists \bar{n} = \bar{n}(\epsilon) \text{ t.c. } n > \bar{n} \Rightarrow \Lambda - \epsilon < a_n < \underbrace{\Lambda + \epsilon}_{\text{è } ovvio*}$$

*dato che per definizione di sup , $a_n < \Lambda \ \forall n \Rightarrow a_n < \Lambda + \epsilon \ \ \forall n$

Ora consideriamo che $\Lambda = \sup\{a_n\}$ è il <u>minimo</u> delle maggioranti di $\{a_n\}$

$\Rightarrow \Lambda - \epsilon$ non è un maggiorante di $\{a_n\}$

$\Rightarrow \exists N = N(\epsilon)$ t.c. $a_N > \Lambda - \epsilon$

Ma $\{a_n\}$ è crescente, quindi se $n > N \Rightarrow a_n \geq a_N > \Lambda - \epsilon$

Quindi, dato $\epsilon > 0$, abbiamo trovato

$N = N(\epsilon)$ t.c. $n > N \Rightarrow \Lambda - \epsilon < a_n < \Lambda + \epsilon$, cioè $a_n \to \Lambda \ per \ n \to \infty$ □

Notazioni: Per esprimere il fatto che $\{a_n\}$ è crescente, e $a_n \to l$, si scrive $a_n \uparrow l$. Se $\{a_n\} \searrow$, e $a_n \to l$, si scrive $a_n \downarrow l$

COROLLARIO-TEOREMA DI MONOTONIA

- Se $\{a_n\}$ crescente $\Rightarrow a_n \to \sup\{a_n\}$
- Se $\{a_n\}$ decrescente $\Rightarrow a_n \to \inf\{a_n\}$

Dimostrazione:

Caso limitato: Sia $\{a_n\}$ crescente e superiormente limitata ($S = \sup\{a_n\}$)

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n \leq S \ \ \forall n \\ \forall \epsilon > 0 \ \ \exists n^* : S - \epsilon < a_{n^*} \leq S \end{cases}$$

Inoltre, $\forall n > n^* \quad a_n \geq a_{n^*} > S - \epsilon$

$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists n^* : \forall n > n^* \ \ S - \epsilon < a_n < S + \epsilon$

$\Rightarrow |a_n - S| \leq S \quad \forall \epsilon > 0$

$\Rightarrow a_n \to S^-$

Caso illimitato: Sia $\{a_n\}$ crescente e superiormente illimitata ($S = \sup\{a_n\} = +\infty$)

Allora $\forall k > 0 \exists n^* : a_{n^*} > k$

$\forall n > n^* \ \ a_n \geq a_{n^*} > k$

$\Rightarrow \forall k > 0 \ \exists n^* : \forall n > n^* \ \ a_n > k \ \ \Rightarrow a_n \to +\infty(S)$

LIMITATEZZA DI SUCCESSIONI CONVERGENTI

Se $\{a_n\}$ è convergente, allora $\{a_n\}$ è limitata:

$$\exists M > 0 \text{ t.c. } |a_n| \leq M \ \ \forall n$$

TEOREMA- ALGEBRA DEI LIMITI

$a_n \to a \in \mathbb{R}$, $b_n \to b \in \mathbb{R}$. Allora

I) $a_n \pm b_n \to a \pm b$

II) $a_n b_n \to ab$

III) $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b} \quad (b_n, b \neq 0)$

IV) $a_n^{b_n} \to a^b \quad (a_n, a > 0, a = 0 \Rightarrow b > 0)$

per $n \to \infty$

Dimostrazione:

{Boella:

Se $\forall \epsilon > 0$ definitivamente $|a_n - a| < \epsilon, |b_n - b| < \epsilon$

$\Rightarrow |(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\epsilon$

$\Rightarrow |a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq$

$\leq |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| = \underbrace{|a_n|}_{<|a|+\epsilon} \underbrace{|b_n - b|}_{<\epsilon} + |b| \underbrace{|a_n - a|}_{<\epsilon} < \epsilon(|a| + \epsilon + |b|)$

Siccome $|a_n - a| < \epsilon \Rightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$

$\Rightarrow |a_n| < |a| + \epsilon$

PS: questa dimostrazione è richiesta nel programma del prof Boella, la parte che segue rientra nel quanto fatto dal prof Soave.

}

II) Se $\epsilon > 0$ arbitraria.

Siccome $\{a_n\}$ è convergente, è limitato: $\exists M > 0$ t.c. $|a_n| \leq M \;\; \forall n$.

Siccome $a_n \to a$ e $b_n \to b$,

$\exists \overline{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $n > \overline{n} \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\epsilon}{M+|b|}$ e $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{M+|b|}$

Quindi, se $n > \overline{n}$

$$|a_n b_n - ab| = \left|\underbrace{a_n b_n - ab \pm a_n b}_{a_n(b_n-b)+b(a_n-a)}\right|$$

Disuguaglianza triangolare

$$|a_n b_n - ab \pm a_n b| \leq \underbrace{|a_n|}_{\leq M} \underbrace{|b_n - b|}_{<\frac{\epsilon}{M+|b|}} + |b| \underbrace{|a_n - a|}_{<\frac{\epsilon}{M+|b|}} <$$

$$< M \frac{\epsilon}{M + |b|} + |b| \frac{\epsilon}{M + |b|} = \epsilon$$

osservazione: $\{a_n\}_{n \geq n_0}$

Fissiamo $m \geq n_0, m \in \mathbb{N}$, e consideriamo

$$b_n = a_{n+m}, n \in \mathbb{N}$$

$\left\{ \underbrace{b_n}_{a_{m+n}} \right\}_{n \geq 0}$ è diversa dalla successione di partenza

$$\left(\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \geq 1}, \left\{ \frac{1}{(n + 10)} \right\}_{n \geq 0} \right)$$

Il comportamento limite di $\{b_n\}$ è lo stesso di $\{a_n\}$: shiftando gli indici di una successione, non cambia il comportamento al lim $n \to \infty$.

Esempio:

supponiamo che $b_n \to +\infty$. Allora

- Se $a > 1$, allora

  $a^{b_n} \to +\infty$

  $\log_a b_n \to +\infty$

  Per $n \to \infty$

- Se $a \in (0, 1)$, allora

  $a^{b_n} \to 0$

  $\log_a b_n \to -\infty$

  Per $n \to \infty$

Inoltre, se $c_n \to 0^+$, allora

- Se $a > 1$, $\log_a c_n \to -\infty$
- Se $a \in (0, 1)$, $\log_a c_n \to +\infty$

Verifica di $\log_a b_n \to +\infty$ se $a > 1$ e $b_n \to +\infty$

Vogliamo verificare che, dato $M > 0$, si ha

$\log_a b_n > M$ definitivamente.

$$\log_a b_n > M \overset{a>1}{\Leftrightarrow} b_n > a^M$$

$$b_n = a^{\log_a b_n} > a^M$$

$b_n > a^M$ è sicuramente soddisfatta per n grande (definitivamente), perché $b_n \to +\infty$

Questo è quello che volevamo dimostrare.

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO 1

$\{a_n\}$ supponiamo che $a_n \to a > 0$, o $a_n \to +\infty$, per $n \to \infty$. Allora $a_n > 0$ definitivamente.

$(a_n \to a < 0$, o $a_n \to -\infty$, per $n \to \infty$, allora $a_n < 0$ definitivamente.)

Dimostrazione: $(a > 0, a \in \mathbb{R})$

$a_n \to a$, per $n \to \infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0\ \exists \overline{n} = \overline{n}(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > \overline{n} \Rightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$$

Scegliamo $\epsilon = \frac{a}{2} > 0$

$\exists \overline{n}\left(\frac{a}{2}\right) \in \mathbb{N}$ tale che $n > \overline{n}\left(\frac{a}{2}\right) \Rightarrow \underbrace{\frac{a}{2} < a_n}_{a_n > \frac{a}{2} > 0} < \frac{3}{2}a \qquad \square$

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO 2

Sia $\{a_n\}$ successione $a_n \to a \in \mathbb{R}, a_n \geq 0$ def.$\Rightarrow a \geq 0$. $(a_n \leq 0\ def \Rightarrow a \leq 0)$

osservazione: è vero che $a_n > 0$ def $\Rightarrow a > 0$?

NO. Ad esempio, $\underbrace{\frac{1}{n}}_{>0} \to 0$

Dimostrazione:

$a_n \geq 0$ def. Supponiamo per assurdo che $a < 0$.

Per la permanenza del segno 1, deduciamo che $a_n < 0$ definitivamente.

Questo è contro l'ipotesi. $\square$

TEOREMA DEL CONFRONTO

- ***CASO FINITO***

$\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ successioni.

Supponiamo che $a_n \leq b_n \leq c_n$ definitivamente e che $a_n \to l \in \mathbb{R}, c_n \to l$ per $n \to \infty$.

Allora anche $b_n \to l$ per $n \to \infty$.

Dimostrazione:

per ipotesi

$\forall \epsilon > 0 \exists \overline{n}_1 = \overline{n}_1(\epsilon)$ tale che $n > \overline{n}_1 \Rightarrow l - \epsilon < a_n < l + \epsilon$

$\forall \epsilon > 0 \exists \overline{n}_2 = \overline{n}_2(\epsilon)$ tale che $n > \overline{n}_2 \Rightarrow l - \epsilon < c_n < l + \epsilon$

Prendiamo $n > \overline{n} = \max\{\overline{n}_1, \overline{n}_2\}$: allora

$$l - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \epsilon$$

questo dimostra che $\forall \epsilon > 0\ \exists \overline{n}$ tale che $n > \overline{n} \Rightarrow |b_n - l| < \epsilon$, cioè $b_n \to l$ per $n \to \infty$ □

- ***CASO INFINITO***

$\{a_n\}, \{b_n\}$ succ., $a_n < b_n$ definitivamente

I) $a_n \to +\infty \Rightarrow b_n \to +\infty$

II) $b_n \to -\infty \Rightarrow a_n \to -\infty$

Conseguenze:

1) $|b_n| \leq c_n$, e $c_n \to 0 \Rightarrow b_n \to 0$
2) $\{b_n\}$ succ. limitata, $c_n \to 0 \Rightarrow b_n c_n \to 0$

Esempio: $\frac{\sin(n)}{n} = \underbrace{\sin(n)}_{|\sin(n)| \leq 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \to 0$ per $n \to \infty$

Nel teorema sull'algebra dei limiti, abbiamo supposto di lavorare con successioni convergenti (limiti finiti).

Cosa succede se $a_n \to a \in \mathbb{R}$ e $b_n \to +\infty$?

$a_n + b_n \to ?$

In questo caso, non è difficile verificare che

$$a_n + b_n \to +\infty$$

Questo si sintetizza scrivendo $a + \infty = +\infty\ \forall \in \mathbb{R}$

Si ottiene la

ARITMETICA PARZIALE DEL SIMBOLO ∞

$a + \infty = +\infty \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

$a - \infty = -\infty \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$a \cdot \infty = \infty \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0,$ e valgono le regole dei segni

$\frac{a}{0} = \infty \qquad \forall a \neq 0, a \in \mathbb{R}$

Qui è importante sapere se a denominatore c'è 0^+ o 0^-

$$a_n \to a > 0, b_n \to 0^+ \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{0^+} = +\infty$$

Se fosse $a < 0$, allora tenderebbe a $-\infty$.

$\frac{a}{\infty} = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}$

$a^{+\infty} = +\infty$ se $a > 1$

$a^{+\infty} = 0 \quad$ se $a \in (0,1)$

$a^{-\infty} = 0 \quad$ se $a > 1$

$a^{-\infty} = +\infty$ se $a \in (0, 1)$

Restano fuori alcuni casi. Questi casi vanno studiati caso per caso, e si dicono FORME INDETERMINATE (o DI INDECISIONE)

$$+\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}, \qquad 1^{\infty}, \qquad 0^0, \qquad (+\infty)^0$$

Esempio: $a_n = \frac{n+\sqrt{n}-1}{n^{\frac{5}{2}}-3n^2+2} \left(\to \frac{+\infty+\infty-1}{+\infty-\infty+2}\right)$

Ci sono delle F.I.

Osserviamo che

$$a_n = \frac{n\left(1+\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{1}{n}\right)}{n^{\frac{5}{2}}\left(1-\frac{3n^2}{n^{\frac{5}{2}}}+\frac{2}{n^{\frac{5}{2}}}\right)} \begin{array}{l} \Rightarrow 1+\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty} \to 1 \\ \Rightarrow 1-\frac{3}{\infty}+\frac{2}{\infty} \to 1 \end{array}$$

$= \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}}{n^{\frac{3}{2}}(1-\frac{3}{\sqrt{n}}+\frac{2}{n^{\frac{5}{2}}})} \overset{algebra\ dei\ limiti}{\rightleftarrows} \frac{1}{+\infty\cdot 1}=0$$

In generale, se a numeratore e a denominatore compaiono potenze positive di n, conviene raccogliere i termini di grado massimo e semplificare.

Esempio: $\sqrt{n}-\sqrt{n+2}$ $(\to +\infty-\infty\ F.I.)$

Osserviamo che

$$\sqrt{n}-\sqrt{n+2}\cdot\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}=\frac{n-(n+2)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}=-\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}\to-\frac{2}{\infty}=0^-$$

osservazione: $a_n^{b_n}$ F.I. di tipo esponenziale

Molte volte, conviene scrivere una F.I. di questo tipo in modo diverso:

$$a_n^{b_n}=e^{\log a_n^{b_n}}=e^{b_n\log a_n}$$

Consideriamo la successione $c_n=b_n\log a_n$.

Si può dimostrare che, se $c_n\to l\in\mathbb{R}$, allora $e^{c_n}\to e^l\Rightarrow a_n^{b_n}\to e^l$

Se $c_n\to+\infty\Rightarrow a_n^{b_n}=e^{c_n}\to+\infty$

Se $c_n\to-\infty\Rightarrow a_n^{b_n}=e^{c_n}\to 0^+$

Se $\{c_n\}$ è indeterminato, lo è anche $\{a_n^{b_n}\}$

Il vantaggio è che $\{a_n\}$ è una F.I del tipo $0\cdot\infty$ $(0\cdot\infty,1^\infty,0^0,(+\infty)^0 \rightsquigarrow 0\cdot\infty)$

Il numero di Nepero

TEOREMA

Sia $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, n\geq 1$.

Allora $\{a_n\}$ è convergente, e poniamo

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Dimostrazione:

$a_n\to 1^{+\infty}$ F.I.

Dimostriamo che $\{a_n\}$ è monotona crescente, ed è limitata.

Allora la tesi è conseguenza del teorema di esistenza del limite per successione monotona.

I) $\{a_n\} \nearrow$. Se $n \geq 2$, vogliamo mostrare che

$$a_n \geq a_{n_{-1}} \underbrace{\Leftrightarrow}_{a_n > 0\ \forall n} \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq 1$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{\underbrace{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^{n-1}}_{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}}} = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \cdot \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1}}$$

$$= \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n}} =$$

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n}{1-\frac{1}{n}} \geq \frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall n \geq 2$$

Usiamo la disuguaglianza di Bernoulli: $(1+x)^n \geq 1 + nx\ \forall x > -1$

In particolare, la disuguaglianza vale per $x = -\frac{1}{n^2}$, con $n \geq 2$:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 + n\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

Quindi $\{a_n\}$ è crescente.

II) $\{a_n\}$ è limitata: $2 \leq a_n < 4\ \forall n$

$$a_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$$

$$\{a_n\} \nearrow \Rightarrow a_n \geq a_1 = 2 \quad \forall n$$

Per mostrare che $a_n < 4\ \forall n$, consideriamo

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{>1}$$

Allora $b_n > a_n \forall n$.

Inoltre, come in I), si dimostra che $\{b_n\} \searrow \Rightarrow a_n < b_n \leq b_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 = 4\ \forall n$

osservazione: Dalla dimostrazione consegue che $2 \leq a_n < 4 \forall n \Rightarrow 2 \leq e \leq 4$.

Si può dimostrare che $e = 2{,}718281\ldots$, e che $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

osservazione: $1^{+\infty}$ è una F.I.: se $a_n \to 1$ e $b_n \to +\infty$, allora $a_n^{b_n}$ è F.I.

Se $a_n = 1\ \forall n$, allora può $1^{b_n} = 1\ \forall n \Rightarrow 1^{b_n} \to 1$

Più in generale, si può dimostrare il seguente TEOREMA.

Sia $\{a_n\}$ una successione divergente, $a + \infty$ o $a - \infty$ allora $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$

osservazione: che

$$\left(\frac{n}{3+n}\right)^{5n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n+3}{n}\right)^{5n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{5n+1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{3}{n}\right)^{(5n+1)\cdot\frac{n}{3}\cdot\frac{3}{n}}} = \frac{1}{\left[\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}}\right]^{\frac{3}{n}(5n+1)}} \to \frac{1}{e^{15}}$$

$\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}} \to e$ per il teorema $\left(\{a_n\} = \left\{\frac{n}{3}\right\}\right)$

$\frac{3}{n}(5n+1) = \frac{15n+5}{n} = \frac{15n\left(1+\frac{1}{15n}\right)}{n} = 15\left(1+\frac{1}{15n}\right) \to 15$

Confronti tra infiniti e infinitesimo

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ successioni infinite.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} i)\ 0 \\ ii)\ l \in \mathbb{R}, l \neq 0 \\ iii)\ \pm\infty \\ iv)\ \nexists \end{cases}$$

i) Si dice che $\{a_n\}$ è infinito DI ORDINE INFERIORE rispetto a $\{b_n\}$

ii) Si dice che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ HANNO LO STESSO ORDINE DI INFINITO

iii) Si dice che $\{a_n\}$ è un infinito DI ORDINE SUPERIORE rispetto a $\{b_n\}$

iv) Si dice che$\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ NON SONO CONFRONTABILI

Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infinitesime, allora ci sono le stesse possibilità scritte sopra.

i) Si dice che $\{a_n\}$ è un infinitesimo di ORDINE SUPERIORE a $\{b_n\}$

ii) Si dice che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno lo stesso ordine infinitesimo

iii) Si dice che $\{a_n\}$ è un infinitesimo di ORDINE INFERIORE a $\{b_n\}$

iv) Si dice che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ non sono confrontabili.

Caso particolare: $\frac{a_n}{b_n} \to 1$

In questo caso si dice che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono ASINTOTICHE, $a_n \sim b_n$ (per $n \to \infty$)

Esempio: $(n^{\frac{5}{2}} - 3n^2 + 2) \sim n^{\frac{5}{2}}$ per $n \to \infty$

Si dice che $n^{\frac{5}{2}}$ è la PARTE PRINCIPALE di: $\left(n^{\frac{5}{2}} - 3n^2 + 2\right)$

Per combinazioni di potenze positive di n, la parte principale è dato dal termine di grado massimo.

Per potenza negativa, il discorso cambia: $\frac{1}{n} + \frac{3}{5n^2} - \frac{4}{n^4} \sim \frac{1}{n}$ per $n \to \infty$

Verifica:

$$\frac{1}{n} + \frac{3}{5n^2} - \frac{4}{n^4} = \frac{\frac{1}{n}\left(1 + \frac{3}{5n} - \frac{4}{n^3}\right)}{\frac{1}{n}} \to 1$$

Per potenze negative, la parte principale è data dal termine di grado minimo.

TEOREMA-GERARCHIA DEGLI INFINITI

$a > 1, \alpha > 0, b_n \to +\infty$. Allora

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a b_n}{b_n^\alpha} = 0$ i log sono ∞ di ordine inferiore rispetto alla potenza

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n^\alpha}{a^{b_n}} = 0$ le potenze sono ∞ di ordine inferiore rispetto agli esponenziali

Esempio:

- $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = (+\infty)^0$ F.I

  $\sqrt[n]{n} = e^{\log n^{\frac{1}{n}}} \to e^0 = 1$

  $\frac{1}{n}\log n \to 0$ per $n \to \infty$

  osservazione: che $n! = n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1 > n \Rightarrow n! \to +\infty$ per $n \to \infty$

Per trattare i fattoriali, è molto utile il CRITERIO DEL RAPPORTO

$\{a_n\}, a_n > 0 \forall n$. Se esiste $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, e $l \in [0, 1)$, allora $a_n \to 0$.

Se invece $l > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$

Se invece $l = 1$, il criterio non dà informazioni.

Esempio: $\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = \frac{+\infty}{+\infty}$ F.I. $b > 1$

Usiamo il criterio:

$$a_n = \frac{b^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{b^n} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{b^n} = \frac{b}{n+1} \to 0 \text{ per } n \to \infty$$

Criterio $\Rightarrow a_n \to 0$ per $n \to \infty$

Quindi $\lim_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$

LIMITI DI FUNZIONI

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

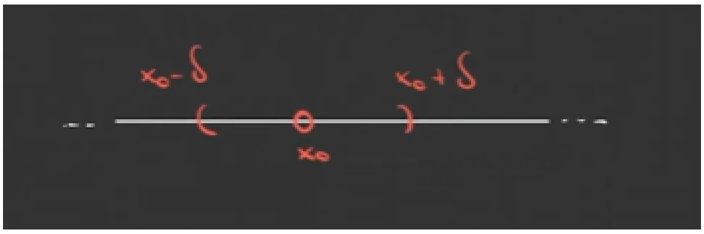
Definizione: $x_0 \in \mathbb{R}$

Si dice INTORNO DI x_0, di centro x_0 e raggio $\delta > 0$, l'intervallo

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = U_\delta(x_0).$$

Si dice poi INTORNO BUCATO di x_0, di centro x_0 e raggio $\delta > 0$, l'insieme

$$\dot{U}_\delta(x_0) = U_{x_0} \setminus \{x_0\}$$



osservazione: diremo spesso "se $U/\dot{U}$ un intorno / intorno bucato di x_0"

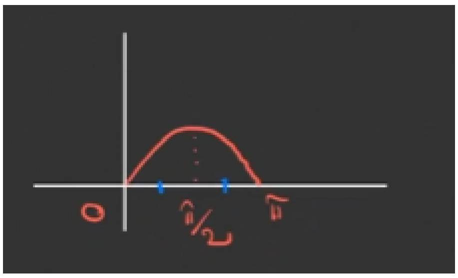
Definizione:

Si dice INTORNO di $+\infty$ un intervallo aperto del tipo $(M, +\infty)$, con $M \in \mathbb{R}$.

Si dice INTORNO di $-\infty$ un intervallo aperto del tipo $(-\infty, M)$, con $M \in \mathbb{R}$.

Definizione: una funzione f ha una certa proprietà DEFINITIVAMENTE PER x CHE TENDE A $c \in \mathbb{R}^*$ se ha questa proprietà in un intorno bucato di c.

Esempio: $\sin x$ è defi. > 0 per $x \to \frac{\pi}{2}$



Definizione (di limite di funzione tramite i lim di successione):

$f: \dot{U} \to \mathbb{R}$, dove $\dot{U}$ è un intorno bucato di $c \in \mathbb{R}^*$ (non è necessario che f sia definito in c).

Si dice che IL LIMITE PER $x \to c$ DI $f(x)$ è UGUALE A $l \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \qquad \text{(o } f(x) \to l \text{ per } x \to c\text{)}$$

se per ogni successione $\{x_n\} \subseteq \dot{U}$ tale che $x_n \to c$ (per $n \to \infty$) si ha che $f(x) \to l$ (per $n \to \infty$.)

osservazione: in qualsiasi modo mi avvicini a $c, \forall \{x_n\}$, il valore del limite di $\{f(x_n)\}$ è l.

osservazione: un vantaggio di questa definizione è che possiamo usare questo per le successioni

osservazione: la definizione è utile per mostrare che alcuni limiti non esistono

Esempio: $\nexists \lim_{x \to +\infty} \sin x$

Se il limite esistesse, per dovremmo avere $f(x) \to l$ per ogni successione $x_n \to +\infty$.

Poniamo

$y_n = n\pi \qquad y_n \to +\infty$

$z_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \qquad z_n \to +\infty$

$\sin(y_n) = \sin(n\pi) = 0 \ \forall n \qquad \sin(y_n) \to 0$ per $n \to \infty$

$\sin(z_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 1 \ \forall n \qquad \sin(z_n) \to 1$ per $n \to \infty$

Quindi abbiamo esibito 2 successioni tendenti a più infinito lungo le quali il seno assume limiti diversi.

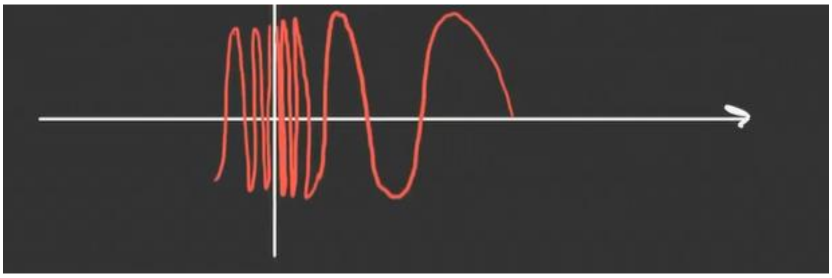
In base alla definizione, $\nexists \lim_{x \to +\infty} \cos x$

Esempio: $\nexists \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Qui prendiamo $y_n = \frac{1}{n\pi}$, $z_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $\to 0$

$$\sin\left(\frac{1}{y_n}\right) \to 0$$

$$\sin\left(\frac{1}{z_n}\right) \to 1$$



Non esistenza di limiti $\leftrightsquigarrow$ oscillazioni

osservazione: un altro vantaggio della definizione precedente è che non richiede di distinguere

$$c \in \mathbb{R}, c = +\infty, c = -\infty$$

$$l \in \mathbb{R}, l = +\infty, l = -\infty$$

Tuttavia, è utile avere a disposizione una definizione intrinseca di limite di funzioni, senza passare per le successioni.

Bisogna in questo caso distinguere tutti i casi

osservazione: avremo a disposizione 2 definizioni per i limiti di funzione:

1) Definizione tramite i limiti di successione
2) Definizione intrinseca

TEOREMA "PONTE"

Le due definizioni si equivalgono.

TERMINOLOGIA: $\lim_{x \to c} f(x) = l$

Si parla di limite $\begin{cases} finito\ se\ l \in \mathbb{R} \\ infinito\ se\ l = \pm\infty \end{cases}$

$\begin{cases} al\ finito\ se\ c \in \mathbb{R} \\ all'infinito\ se\ c = \pm\infty \end{cases}$

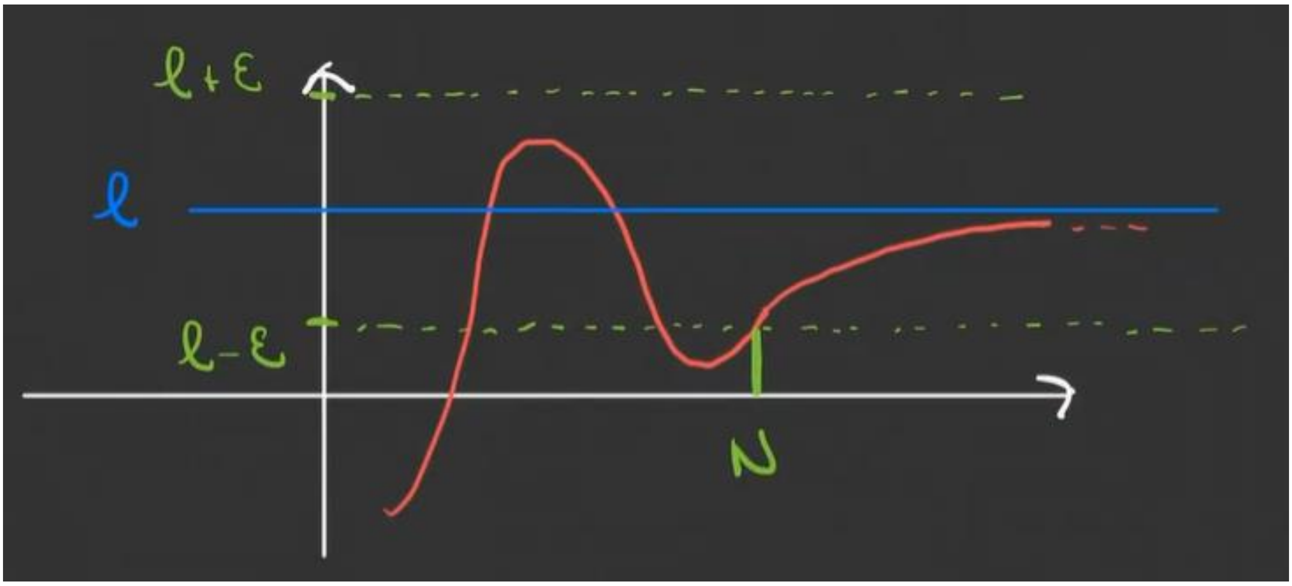
Limite finito all'infinito

$$l \in \mathbb{R}, c = \pm\infty$$

Definizione intrinseca $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ SSE

$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) > 0$ t. c. $x > N \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

"via via che x cresce, $f(x)$ si avvicina al valore l"



Fissato ϵ, è definita la "striscia" $l - \epsilon < y < l + \epsilon$.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ se, $\forall \epsilon$, possiamo trovare N t. c. per x a destra di N, il grafico di f è contenuto nella suddetta striscia.

Definizione: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ SSE

$\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) > 0$ t. c. $x < -N \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

Verifica: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\log x_n} = 0$

Verifica 1: - coi limiti di successione:

dobbiamo verificare che, per ogni successione $x_n \to +\infty$ si abbia $\frac{1}{\log x_n} \to 0$

$x_n \to +\infty \Rightarrow \log x_n \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{\log x_n} \to \frac{1}{+\infty} = 0$

Per aritmetica parziale di ∞ .

Verifica 2:

vogliamo verificare che, preso $\epsilon > 0, \exists N = N(\epsilon)$ t.c. $x > N \Rightarrow \left|\frac{1}{\log x}\right| < \epsilon$

$$\left|\frac{1}{\log x}\right| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|\log x|} < \epsilon$$

Stiamo considerando $x \to +\infty \Rightarrow x > 1$ def. per $x \to +\infty$.

Per $x > 1$,

$$\frac{1}{|\log x|} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\log x} < \epsilon \Leftrightarrow \log x > \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow x > \underbrace{e^{\frac{1}{\epsilon}}}_{=N(\epsilon)}$$

$$\forall \epsilon > 0, se\ x > e^{\frac{1}{\epsilon}} \Rightarrow \left|\frac{1}{\log x}\right| < \epsilon$$

Quindi la definizione di limite è soddisfatta, con $N = e^{\frac{1}{\epsilon}}$

Definizione: $l \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^*$

Si dice che $\lim_{x \to c} f(x) = l^+$, f TENDE A l per eccesso PER $x \to c$, se $\lim_{x \to c} f(x) = l$, e se $f(x) \geq l$ definitivamente per $x \to c$.

Si dice che $\lim_{x \to c} f(x) = l^-$, f TENDE A l per difetto PER $x \to c$, se $\lim_{x \to c} f(x) = l$, e se $f(x) \leq l$ definitivamente per $x \to c$.

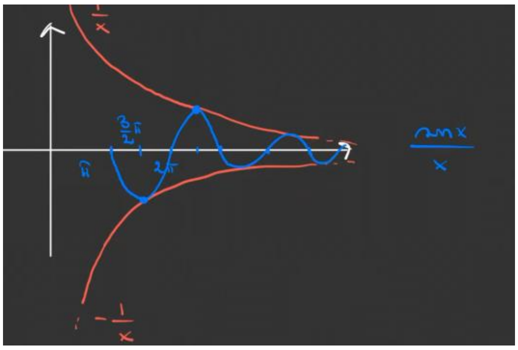
osservazione: $\frac{1}{\log x} \to 0^+$ per $x \to +\infty$

$\frac{1}{\log x} \to 0$ per $x \to +\infty$, e $\frac{1}{\log x} > 0$ $\forall x > 1 \Leftrightarrow \forall x \in \underbrace{(1, +\infty)}_{\text{è un intorno bucato di} +\infty}$

osservazione: si possono avere limiti che non sono lim per eccesso o per difetto.

Ad es $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$, ma non vi tende né per eccesso né per difetto.

$f(x)$ cambia segno ∞ volte per $x \to +\infty$.



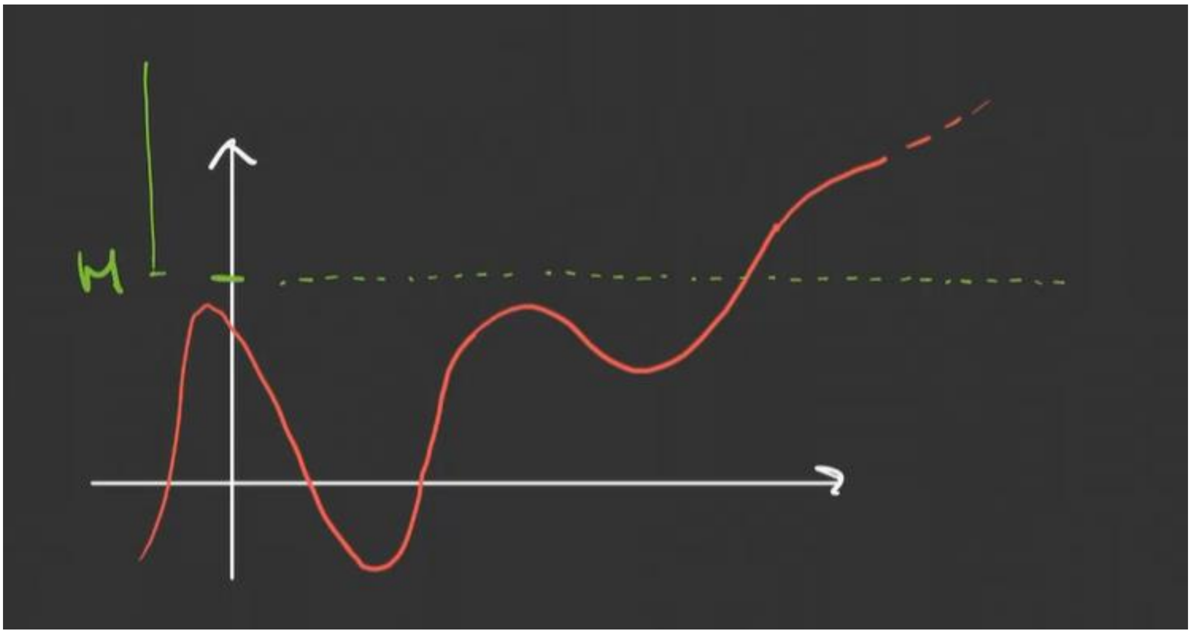
Verifica: $\frac{\sin x}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$.

$\forall \{x_n\}, x_n \to +\infty$, allora $\frac{\sin x_n}{x_n} = \underbrace{\frac{1}{x_n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin x_n}_{\text{è } limitato} \to 0$

Definizione: se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$, si dice che la retta di equazione $y = l$ è un ASINTOTO ORIZZONTALE di f. Limite ∞ all'∞, $c = \pm\infty, l = \pm\infty$

Definizione: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ SSE

$\forall M > 0 \exists N = N(M) > 0$ t. c. $x > N \Rightarrow f(x) > M$



$\forall M$, devo poter trovare un valore N t.c. se x sta a destra di N, allora il grafico di f sta sopra la retta $y = M$.

Definizione: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ SSE

$\forall M > 0 \exists N = N(M) > 0$ t. c. $x > N \Rightarrow f(x) < -M$

Definizione: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ SSE

$\forall M > 0 \exists N = N(M) > 0$ t. c. $x < -N \Rightarrow f(x) > M$

Definizione: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ SSE

$\forall M > 0 \exists N = N(M) > 0$ t. c. $x < -N \Rightarrow f(x) < -M$

Verifica:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$$

Vogliamo verificare che, preso $M > 0$, $\exists N = N(M) > 0$ t.c. $x > N \Rightarrow x^2 > M$.

$$x^2 > M \Leftrightarrow x < -\sqrt{M} \vee x > \sqrt{M}$$

Stiamo considerando $x \to +\infty \rightsquigarrow$ ci concentriamo su $x > 0$.

Per $x > 0$, $x^2 > M$

Quindi vale la definizione con $N = \sqrt{M}$:

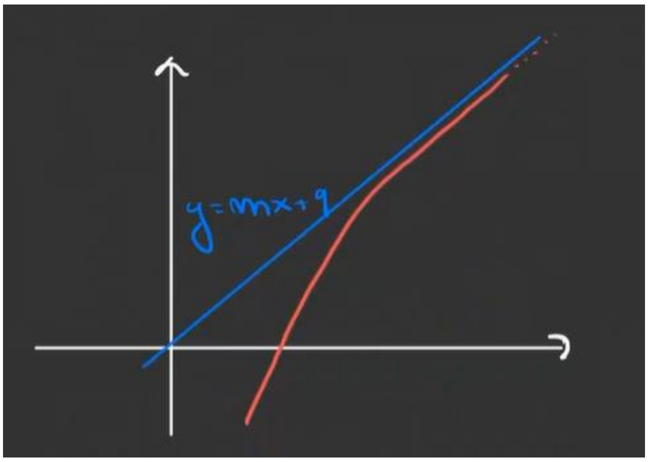
se $x > \sqrt{M} \Rightarrow x^2 > M$

Se $f(x) \to \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$, ci può essere un asintoto obliquo.

Definizione: diciamo che f ha un ASINTOTO OBLIQUO $y = mx + q, m \neq 0, m, q \in \mathbb{R}$, per $x \to +\infty$ se

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

Il grafico di f si avvicina alla retta $y = mx + q$ per $x \to \pm\infty$



Esempio: $f(x) = 5x + 2 + \frac{1}{\log x}$ ha l'asintoto obliquo $y = 5x + 2$ per $x \to +\infty$:

$[f(x) - (5x + 2)] = \frac{1}{\log x} \to 0$ per $x \to \infty$

Per determinare l'equazione dell'asintoto, e per stabilire se esiste, è utile la PROPOSIZIONE:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$$

f ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ SSE valgono:

1) $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
2) $\exists$ finito $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = q \in \mathbb{R}$

In tal caso, $y = mx + q$ è l'equazione dell'asintoto

Esempio:

- $f(x) = x^2$ non ha asintoto obliquo: $\frac{f(x)}{x} = x \to +\infty$ per $x \to +\infty$

  Non vale 1)

- $f(x) = x + \sqrt{x}$

  $\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \to 1$ per $x \to +\infty$

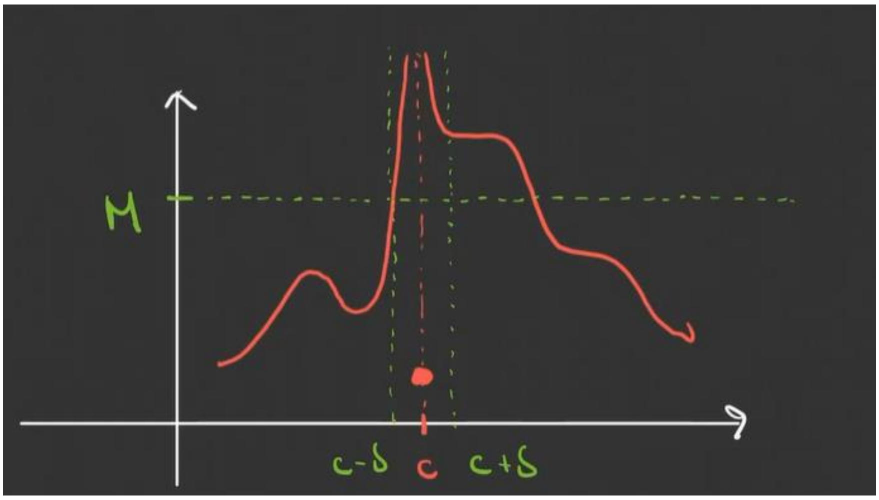
  Vale 1) con $m = 1$

  Ma $f(x) - mx = \sqrt{x} \to +\infty$ se $x \to +\infty$ non vale 2).

LIMITE ∞ AL FINITO

Definizione: $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ SSE

$$\forall\, M > 0 \exists \delta = \delta(M) > 0 \text{ t. c. } \underbrace{0 < |x - c| < \delta}_{x\in(c-\delta,c+\delta)\setminus\{c\}=x\in\dot{U}_\delta(c)} \Rightarrow f(x) > M$$



Fissato $M > 0, \exists\delta$ t.c. se $x \in \dot{U}_\delta(c)$ il grafico di f sta sopra la retta $y = M$.

Esempio: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Verifica 1 : vogliamo verificare che, presa $x_n \to 0$, allora $\frac{1}{x_n^2} \to +\infty$

Se $x_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{x_n^2} \to \frac{1}{0^+} = +\infty$ per aritmetica parziale.

Verifica 2: vogliamo verificare che

$\forall M > 0 \exists \delta = \delta(M) > 0$ t.c. se $x \in \dot{U}_\delta(0) \Leftrightarrow 0 < |x| < \delta$, allora $\frac{1}{x^2} > M$

$$\frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{M}} < x < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Quindi, posto $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, abbiamo che $x \neq 0, x \in (-\delta, \delta) \Rightarrow \frac{1}{x^2} > M$.

A volte, una funzione si comporta in modo diverso se $x \to c$ da destra o da sinistra.

Per esempio, $f(x) = \frac{1}{x}$, abbiamo che $\left|\frac{1}{x}\right| \to +\infty$ se $x \to 0^+$, ma $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$.

Infatti, se consideriamo $x_n = \frac{1}{n}$, allora $x_n \to 0$, $f(x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \to +\infty$

Ma se consideriamo $y_n = -\frac{1}{n}$, allora $y_n \to 0$, ma $f(y_n) = -n \to -\infty$

Definizione: $c \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}^*$ si dice che

$\lim_{x\to c^+} f(x) = l$ (limite per x che tende a c da destra, o LIMITE DESTRO)

se $\forall \{x_n\}, x_n \neq c, x_n \to c^+$, si ha che $f(x_n) \to l$

Analogamente, si dice che

$\lim_{x\to c^-} f(x) = l$ (LIMITE SINISTRO)

se $\forall \{x_n\}, x_n \neq c, x_n \to c^-$, si ha che $f(x_n) \to l$

Esempio: $\frac{1}{x} \to +\infty$ se $x \to 0^+$ $\frac{1}{x} \to -\infty$ se $x \to 0^-$

osservazione: anche per i limiti destro/ sinistro ci sono definizioni intrinseche. Per esempio, diciamo che

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = +\infty$$

se $\forall M > 0 \exists \delta = \delta(M) > 0$ t. c. se $\underbrace{0 < x - c < \delta}_{senza\ valore\ assoluto (c<x<c+\delta)} \Rightarrow f(x) > M$

PROPOSIZIONE: $c \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}^*$

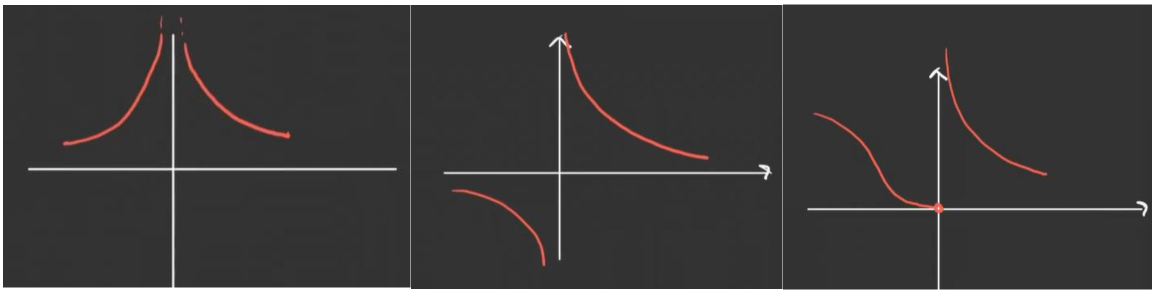
$\exists \lim_{x\to c} f(x) = l \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to c^-} f(x)$ e $\lim_{x\to c^+} f(x)$, con $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$

Definizione: $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$

se $\forall M > 0 \exists \delta = \delta(M) > 0$ t. c. se $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$

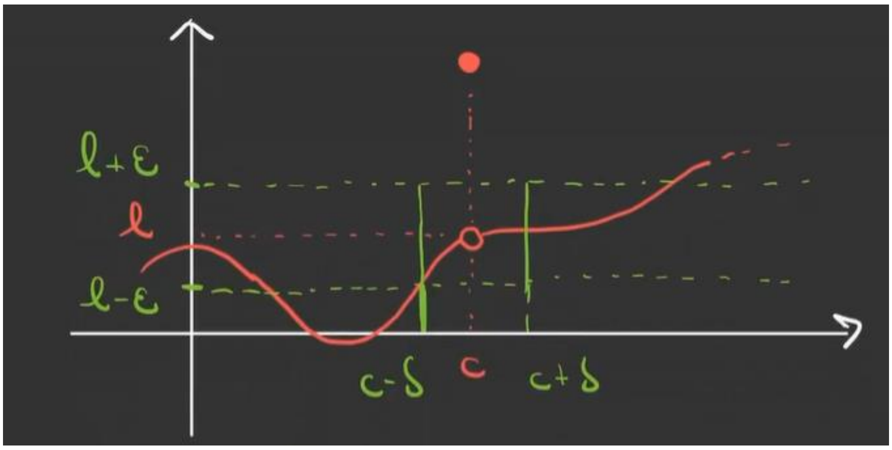
Definizione: f ha un ASINTOTO VERTICALE di equazione $x = c$, con $c \in \mathbb{R}$, se

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{o} \qquad \lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty$$



LIMITE FINITO AL FINITO $c, l \in \mathbb{R}$

Definizione: $\exists \lim_{x \to c} f(x) = l$ SSE $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ t.c. $0 < |x - c| < \delta$



Dato $\epsilon > 0, \exists \delta$ t.c. $x \in \dot{U}_\delta(c) \Rightarrow$il grafico di f sta nel rettangolo.

Verifica: $f(x) = x^2$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

Vogliamo verificare che, dato $\epsilon > 0$,

$$\exists \delta = \delta(\epsilon) t.c. 0 < |x| < \delta \Rightarrow |x^2| < \epsilon \Leftrightarrow x^2 < \epsilon \Leftrightarrow -\sqrt{\epsilon} < x < \sqrt{\epsilon}$$

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow |x^2| < \epsilon$$

osservazione: in questo caso,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = f(\lim_{x \to 0} x)$$

Si può sempre fare, o no? NO.

Esempio: $f(x) = \begin{cases} x^2 \; se \; x \neq 0 \\ 5 \; se \; x = 0 \end{cases}$

Come sopra, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

Ma $0 \neq f(0) = 5$

Definizione: $f: U \to \mathbb{R}$, U intorno di $c \in \mathbb{R}$. Si dice che f è CONTINUA in c se

$$\exists \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

$(\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ t.c. $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon)$

A livello intuitivo, f è continua in c significa che, se x varia vicino a $c, f(x)$ varia vicino a $f(c)$:

a piccole variazioni di x corrispondono piccole variazioni di $f(x)$ vicino a $f(c)$.

f continua $\rightsquigarrow$ il grafico di f(se lo sappiamo disegnare) si può disegnare senza staccare la penna dal foglio.

Cosa succede se f non è continua?

Esempio 1:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & se\ x \neq 0 \\ 5 & se\ x = 0 \end{cases}$$

f non è continua in 0. Tuttavia, lo diventa se modifichiamo il suo valore in 0:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & se\ x \neq 0 \\ 0 = \lim_{x \to 0} f(x) & se\ x = 0 \end{cases}$$

(PROLUNGAMENTO DI f PER CONTINUITÀ)

Definizione: $f: U \to \mathbb{R}, c \in U, U$ intorno di c.

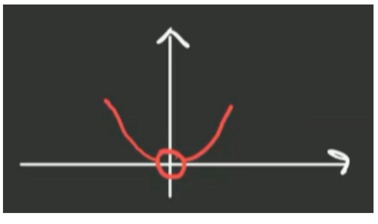
f è DISCONTINUA in c se non è continua in c. c si dice PUNTO DI DISCONTINUITÀ.

Definizione: si dice che f ha una DISCONTINUITÀ ELIMINABILE (o DI TERZA SPECIE) in c se $\exists \lim_{x \to c} f(x) = l \in \mathbb{R}$, ma $l \neq f(c)$, oppure f non è definita in c.

Esempio: $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

$f(x) \to 0$ per $x \to 0$

$(\forall \{x_n\}, x_n \to 0, e^{-\frac{1}{x_n^2}} = e^{-\infty} = 0)$



$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0 \\ \lim_{x \to 0} f(x) & x = 0 \end{cases} \Rightarrow \tilde{f}\ è\ continuo\ in\ 0$$

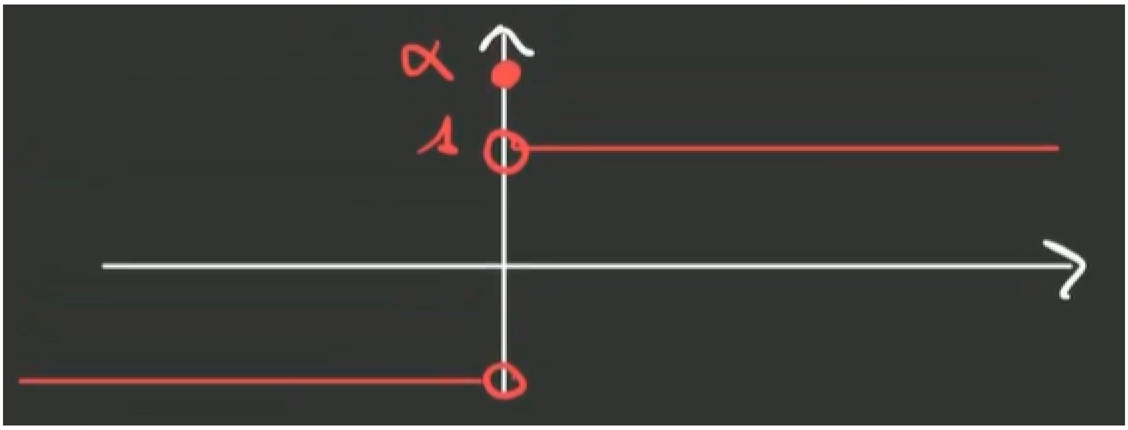
Esempio 2:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & se\ x \neq 0 \\ \alpha & se\ x = 0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

osservazione: che se $x > 0$, allora $f(x) = \frac{x}{\underbrace{|x|}_{=x}} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$

Se $x < 0$, allora $f(x) = \frac{x}{\underbrace{|x|}_{=-x}} = -1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$

f non è continuo in 0 $\left(\nexists \lim_{x\to 0} f(x)\right)$, e la discontinuità non è eliminabile.



Definizione: c'è un punto di DISCONTINUITÀ A SALTO (o DI PRIMA SPECIE) per f se esistono, finiti, $\lim_{x\to c^+} f(x)$ e $\lim_{x\to c^-} f(x)$, ma sono diversi da loro.

Se f è definita anche in c, e $f(c)$ coincide con uno dei 2 limiti, allora si dice che f è CONTINUA A DETSRA o SINISTRA.

Nell'esempio, abbiamo una discontinuità a salto:

se $\alpha = 1$, f è continua a destra in $x = 0$

se $\alpha = -1$, f è continua a sinistra in $x = 0$

Esempio 3:

$f: \dot{U} \to \mathbb{R}$, $\dot{U}$ intorno bucato di c.

Diciamo che f ha una DISCONTINUITÀ DI 2^a SPECIE in c se $x = c$ è un asintoto verticale, oppure se $\nexists \lim_{x\to c} f(x)$.

Ad esempio, $\frac{1}{x^2}$ ha una discontinuità di 2^a specie in 0.

$\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ha una discontinuità di 2^a specie in 0.

Definizione: $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Diciamo che f è continua in I se lo è in ogni punto di I.

Se $I = [a, b)$, diciamo che f è continua in a se $f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

Se $I = (a, b]$, diciamo che f è continua in b se $f(b) = \lim_{x\to b^-} f(x)$

Se $I = [a, b]$, / / / /

f è continua in I $\leftrightsquigarrow$ $f \in \mathcal{C}^\circ(I), f \in \mathcal{C}(I)$

Estendiamo ora alcune proprietà viste per le successioni.

TEOREMA- UNICITÀ DEL LIMITE

Se $\exists l = \lim_{x \to c} f(x)\,, c, l \in \mathbb{R}^*$, allora è unico.

Dimostrazione:

per assurdo, $\exists\; l_1 = \lim_{x \to c} f(x)\,, l_2 = \lim_{x \to c} f(x)\,, l_1 \neq l_2$

$$\forall \{x_n\}, x_n \to c \Rightarrow f(x_n) \to l_1$$

$$\forall \{x_n\}, x_n \to c \Rightarrow f(x_n) \to l_2$$

Prendiamo una successione $\{y_n\}, y_n \to c$

$$f(y_n) \to l_1$$

$$f(y_n) \to l_2$$

Quindi $\{f(y_n)\}$ tende a 2 limiti diversi, contro l'unicità dei limiti di successioni. □

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO 1

$$\lim_{x \to c} f(x) = l, l > 0$$

Allora $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to c$ (idem se $l < 0$)

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO 2

Se $\lim_{x \to c} f(x) = l$, e $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \to c \Rightarrow l \geq 0$ (idem $f(x) \leq 0$)

TEOREMA DEL CONFRONTO

Supponiamo che $f(x) \to l \in \mathbb{R}$ e $g(x) \to l$ per $x \to c$

Supponiamo inoltre che $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to c$.

Allora anche $h(x) \to l$ per $x \to c$

- Supponiamo ora che $f(x) \leq g(x)$ per $x \to c$.

I) se $f(x) \to +\infty$ per $x \to c \Rightarrow g(x) \to +\infty$ per $x \to c$

II) se $g(x) \to -\infty$ per $x \to c \Rightarrow f(x) \to -\infty$ per $x \to c$

ALGEBRA DEI LIMITI E ARITMETICA DELL'INFINITO

$f(x) \to l_1, g(x) \to l_2$ per $x \to c$ $\quad l_1, l_2 \in \mathbb{R}$

Allora, per $x \to c$:

- $f(x) \pm g(x) \to l_1 \pm l_2$

- $f(x) \cdot g(x) \to l_1 \cdot l_2$
- $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{l_1}{l_2}$ $\quad (l_2 \neq 0, g(x) \neq 0$ $def.$ per $x \to c$)
- $\left(f(x)\right)^{g(x)} \to l_1^{l_2}$ per $x \to c$

  ($f(x) > 0$ definitivamente per $x \to c, l_1 > 0$)

Se $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^*$, vale l'aritmetica parziale di ∞ vista per le successioni.

COROLLARIO

f, g definite in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$, continu e in x_0.

Allora $f \pm g$ è una funzione continua in x_0.

$f \cdot g$ è una funzione continua in x_0.

$\frac{f}{g}$ è una funzione continua in x_o, a patto che $g(x_0) \neq 0$,

f^g è una funzione continua in x_0, purché $f(x_0) > 0$

($f + g$ è continua in x_0 se $\lim\limits_{x \to x_0}\left(f(x) + g(x)\right) = f(x_0) + g(x_0)$)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0)$$

Esempio:

$f(x) = k$ funzione costante

$f(x) = x$

Sono continue (immediate)

Verifica: ad es. $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ (se $x \to x_0 \Rightarrow x \to x_0$)

$\Rightarrow$ per il corollario, qualsiasi funzione polinomiale è continua per es.

$$3x^4 + 2x^2 - 5x = 3 \cdot x \cdot x \cdot x + 2 \cdot x \cdot x - 5 \cdot x$$

È ottenuto da somme e prodotti di funzioni continue.

Potenze a base > 0 ad esponente reale sono continue: $e^x = \underbrace{(e)^x}_{f\ costante}$ è continua

Sono continue le funzioni reali (quozienti di polinomi) in tutti i punti in cui il denominatore è $\neq 0$.

Si può dimostrare, che anche le funzioni logaritmiche e trigonometriche sono continue nel loro dominio.

$$\frac{e^x + \log|x| - \cos x}{\arctan x - 3x^{\frac{1}{3}}}$$

È continua in tutti i punti del dominio.

CAMBIO DI VARIABILI

$x_0 \in \mathbb{R}^*, f$ definite in un intorno bucato di x_0

$t_0 \in \mathbb{R}^*, g$ definite in un intorno bucato di t_0

Sappiamo che:

I) $\lim_{x \to x_0} f(x) = t_0$

II) $\lim_{t \to t_0} g(t) = l \in \mathbb{R}^*$

III) $f(x) \neq t_0$ definitivamente per $t \to t_0$, oppure g è continua in t_0 ⇝considerazioni tecniche che assicura che $g \circ f$ sia ben definita

Allora esiste

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = l$$

$$\lim_{x \to x_0} g(\underbrace{f(x)}_{t}) = \lim_{t \to t_0} g(t) \overset{II)}{\triangleq} l$$

Per I), se $x \to x_0 \Rightarrow t \to t_0$

COROLLARIO

f definita in un intorno di x_0, continua in x_0.

g definita in un intorno di $f(x_0)$, continua in $f(x_0)$.

$\Rightarrow (g \circ f)$ è definita in un intorno di x_0, ed è continua in x_0.

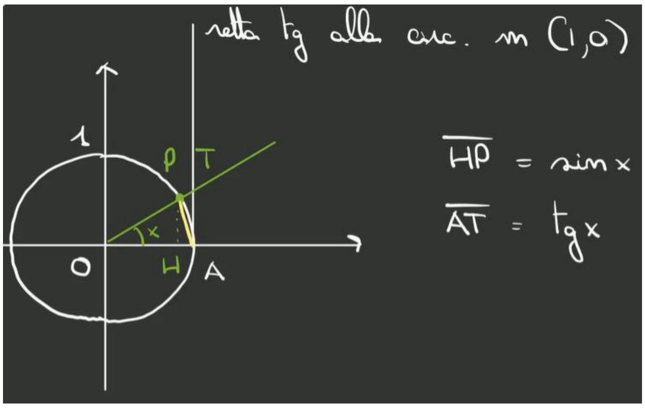
LIMITI NOTEVOLI

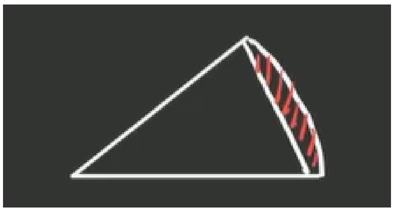
- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \left(= \frac{0}{0}\ F.I.\right)$

  Dimostrazione:

  osservazione: che $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ è pari: $f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x)$

  Quindi ci basta mostrare che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.





L'area di $\overset{\triangle}{OAP}$ è minore dell'area del settore circolare delimitato da OAP, che a sua volta è minore dell'area di $\overset{\triangle}{OAT}$

$$Area\left(\overset{\triangle}{OAP}\right) < Area\left(\begin{matrix} settore\ circolare \\ OAP \end{matrix}\right) < Area\left(\overset{\triangle}{OAT}\right)$$

$$1 \cdot \frac{\sin x}{2} < 1 \cdot \frac{x}{2} < 1 \cdot \frac{\tan x}{2}$$

$\Rightarrow \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$. Dividiamo per $\sin x > 0$ $(x \to 0^+)$ $\Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

Passiamo a reciproci $\Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x > 0, x$ "piccolo"

Dal teorema del confronto, siccome $\cos x \to \cos 0 = 1$ per $x \to 0$ deduco $\frac{\sin x}{x} \to 1$ per $x \to 0^+$

- $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad (= \frac{0}{0}\ F.I.)$

  Dimostrazione:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x} =$$

$$= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos x} \overset{x\to 0}{\to} \frac{1}{2}$$

- $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

  Dimostrazione:

È conseguenze del fatto che $a_n \to \pm\infty \Rightarrow \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \qquad (= \frac{0}{0}\ F.I.)$

Dimostrazione:

Cambio variabile $y = \frac{1}{x}: x \to 0^{\pm} \Rightarrow y \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to\pm\infty} y\log\left(1+\frac{1}{y}\right) =$$

$$= \lim_{y\to\pm\infty} \log\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = \log e = 1$$

⇨ Posso fare questo passaggio, perché $f(x) = \log x$ è continua in e.

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

Dimostrazione:

Partiamo da $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \underbrace{=}_{cambiamo\ variabile, ponendo\ x=e^y-1}$

$$x \to 0 \Leftrightarrow e^y - 1 \to 0 \Leftrightarrow e^y \to 1 \Leftrightarrow y \to 0$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y-1} = 1$$

- $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}$

Dimostrazione:

Da $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \Longrightarrow x \to 0 \Leftrightarrow (1+y)^\alpha \to 1 \Leftrightarrow y \to 0$

cambiamo variabile, ponendo $x = (1+y)^\alpha - 1$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\log(1+(1+y)^\alpha - 1)}{(1+y)^\alpha - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{\alpha\log(1+y)}{(1+y)^\alpha - 1} \cdot \frac{y}{y} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \alpha \cdot \underbrace{\frac{\log(1+y)}{y}}_{\to 1} \cdot \frac{y}{(1+y)^\alpha - 1} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \alpha \cdot \frac{y}{(1+y)^\alpha - 1}$$

Passando ai reciproci, troviamo la tesi. Cvd.

La definizione di infinitesimi/ infiniti di ordine superiore/inferiore date le successioni si estendono pari pari per le funzioni.

Per esempio, si dice che f è INFINITESIMA per $x \to c$ se $\lim_{x\to c} f(x) = 0$.

Si dice che f è INFINITA per $x \to c$ se $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$.

Si dice che f, g, definite e $\neq 0$ definitivamente in un intorno di c, sono ASINTOTICHE PER $x \to c$, se $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Si scrive $f \sim g$ per $x \to c$

I limiti notevoli si possono riscrivere in termini asintotici:

$\sin x \sim x \qquad$ per $x \to 0$

$\log(1+x) \sim x \qquad$ per $x \to 0$

…

Esempio: $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+2x)}{\sin 3x} = \frac{0}{0}$ F.I.

$$\frac{\log(1+2x)}{\sin 3x} = \frac{\log(1+2x)}{2x} \cdot \frac{2x}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} =$$

Poniamo $t = 2x, x \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$

$z = 3x \qquad \Leftrightarrow z \to 0$

$$= \underbrace{\frac{\log(1+t)}{t}}_{\to 1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \underbrace{\frac{z}{\sin z}}_{\to 1} \overset{x\to 0}{\to} \frac{2}{3}$$

$$\frac{\log(1+2x)}{2x} \to 1 \text{ per } x \to 0$$

I ragionamenti fatti nell'esempio si possono generalizzare: se $f(x) \to 0$ per $x \to c$, allora:

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos f(x)}{(f(x))^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x\to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+f(x))}{f(x)} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^{f(x)}-1}{f(x)} = 1$

- $\lim_{x\to 0}\frac{(1+f(x))^{\alpha}-1}{f(x)} = \alpha \;\; \forall\alpha\in\mathbb{R}$

…

osservazione: in termini asintotici, $\log(1+2x) \sim 2x$ per $x \to 0$

$\sin 3x \sim 3x$ per $x \to 0$

$\frac{\log(1+2x)}{\sin 3x} \sim \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$ per $x \to 0$

Si possono sempre fare "sostituzioni asintotiche?"

In generale, no.

Esempio: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{0}{0}$ F.I.

osservazione: $\tan x \sim x$ per $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} \sim \frac{x-x}{x^3} = \frac{0}{x^3} \to 0 \qquad \text{per } x \to 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos x}}_{\to 1} = \frac{1}{2}$$

Le sostituzioni asintotiche <u>NON</u> si possono fare con + e -, perché ci possono essere le semplificazioni.

Dobbiamo anche stare molto attenti con le composizioni

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{(n+1)^2}}{e^{n^2}} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ F.I.}$$

$(n+1)^2 \sim n^2$ per $n \to +\infty$

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{n^2} = \frac{n^2}{n^2}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \to 1$$

$$\overset{?}{\Rightarrow}\frac{e^{(n+1)^2}}{e^{n^2}} \sim \frac{e^{n^2}}{e^{n^2}} = 1$$

Ovviamente è falso

$$\frac{e^{(n+1)^2}}{e^{n^2}} = \frac{e^{n^2+2n+1}}{e^{n^2}} = e^{2n+1} \to +\infty$$

Anche in questo caso, c'è di mezzo una semplificazione.

Invece, con prodotti e quozienti si possono usare le sostituzioni.

PROPOSIZIONE:

$f_1 \sim f_2, g_1 \sim g_2$ per $x \to 0$.

Allora $f_1 \cdot g_1 \sim f_2 \cdot g_2$ $\frac{f_1}{g_1} \sim \frac{f_2}{g_2}$ per $x \to 0$

In particolare, le formule

“$\frac{\log(1+2x)}{\sin 3x} \sim \frac{2x}{3x}$ per $x \to 0$” è giustificato.

GERARCHIA DEGLI INFINITI

$a, b > 1$ $, \alpha, \beta > 0$. Allora

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} = 0$ “le potenze sono infiniti di ordine superiore a log”
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{b^{x^\beta}} = 0$ “gli esponenti sono infiniti di ordine superiore alle potenze”

Esempio:

- $\forall a > 1, \forall \alpha, \beta > 0$:

  $\lim_{y\to0^+} y^\beta(-\log_a y)^\alpha = 0$ $= (0 \cdot \infty\, F.I.)$

  Cambiamo variabile: $y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}$, $y \to 0^+ \Leftrightarrow x \to +\infty$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^\beta \left(-\log_\infty \frac{1}{x}\right)^\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta} = 0$$

- $\lim_{x\to0^+} \left(\frac{\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)^\beta}{x^\alpha}\right) = 0$

SERIE NUMERICHE

La nozione di serie formalizza il concetto di somma tra infiniti addendi.

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \dots$$

Definizione: $\{a_n\} \subseteq \mathbb{R}$ successione. Chiamiamo SERIE DI TERMINE GENERALE a_n la scrittura formale

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \quad (serie\ per\ n\ da\ n_0\ a + \infty\ di\ a_n)$$

Per dare senso a questa scrittura, si definisce una successione $\{s_n\}_{n \geq n_0}$, come

$s_0 = a_{n_0}$

$s_{n_0+1} = a_{n_0} + a_{n_0+1} = s_0 + a_{n_0+1}$

…

$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k = s_{n-1} + a_n$

s_n si dice SOMMA PARZIALE n-ESIMA (o RIDOTTA n-ESIMA) della serie.

$\{s_n\}$ successione della somma parziali.

La serie si dice convergente, divergente, o indeterminate, a seconda che lo sia $\{s_n\}$

Se $s_n \to s \in \mathbb{R}$, s si dice SOMMA DELLA SERIE,

$$s = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$$

Se $s_n \to \pm\infty$, si scrive allora

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = \pm\infty$$

osservazione: la serie non è un numero, è un abuso di notazione.

La somma tra infiniti addendi, si traduce facendo il limite per $n \to \infty$ della somma finita dei primi n addendi.

Si parla di studiare il carattere/ le convergenze di una serie quando si vuole stabilire se sia convergente, divergente, o indeterminata.

osservazione:

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \leftrightsquigarrow \{\{a_n\},\{s_n\}\}$$

Definizione: se una serie è convergente,

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$$

si usa scrivere

$$s = s_n + \underbrace{R_n}_{RESTO\ n-ESIMO}$$

Dove

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

Notiamo che se $R_n = s - \underbrace{s_n}_{\to s\ dato\ che\ la\ serie\ converge} \to 0$

Una serie converge $\Leftrightarrow R_n \to 0$ per $n \to \infty$

Esempio:

$$a_n = c \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad (serie\ di\ costanti)$$

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \underbrace{c + \cdots + c}_{(n+1)-volte} = (n+1)c$$

$$\Rightarrow s_n \begin{cases} +\infty & se\ c > 0 \\ 0 & se\ c = 0 \\ -\infty & se\ c < 0 \end{cases} \quad per\ n \to \infty$$

Le serie di costanti divergono $\forall c \neq 0$.

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} -1 & se\ n\ dispari \\ +1 & se\ n\ pari \end{cases}$$

$$s_0 = a_0 = +1, \qquad s_1 = a_0 + a_1 = +1 - 1 = 0,$$

$$s_2 = s_1 + a_2 = 0 + 1 = +1, \qquad s_3 = s_2 + a_3 = +1 - 1 = 0$$

$$s_n \begin{cases} +1\ se\ n\ è\ pari \\ 0\ se\ n\ è\ dispari \end{cases}$$

$\{s_n\}$ è indeterminata$\Rightarrow \sum(-1)^n$ è indeterminata

osservazione: $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n , \sum a_n , \sum_n a_n$

Serie geometrica di ragione/ base $q \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \quad (quindi\ a_n = q^n)$$

Se $q = 1 \Rightarrow a_n = 1^n = 1\ \ \forall n \rightsquigarrow$ serie di costanti

Sia $q \neq 1$

$$\boldsymbol{s_n} = \sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{q^k} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$(1 - q) \sum_{k=0}^{n} q^k = (1 - q)(q + q + q^2 + \cdots + q^n)$$

$$= 1 + q + q^2 + \cdots + q^n - q - q^2 - q^3 - \cdots - q^n - q^{n+1} = \boldsymbol{1 - q^{n+1}}$$

Quindi, ricordando che

$$\lim_{n \to +\infty} q^{n+1} = \begin{cases} +\infty\ \ se\ q \geq 1 \\ 0\ \ se\ |q| < 1 \\ \underbrace{\nexists\ \ se\ q \leq -1}_{q^{n+1} = \underbrace{(-1)^{n+1}}_{oscilla\ tra -1\ e +1\ \lim\ \nexists} \cdot \underbrace{|q|^{n+1}}_{\substack{\to +\infty\ se\ q < -1 \\ =1\ se\ q = -1}}} \end{cases}$$

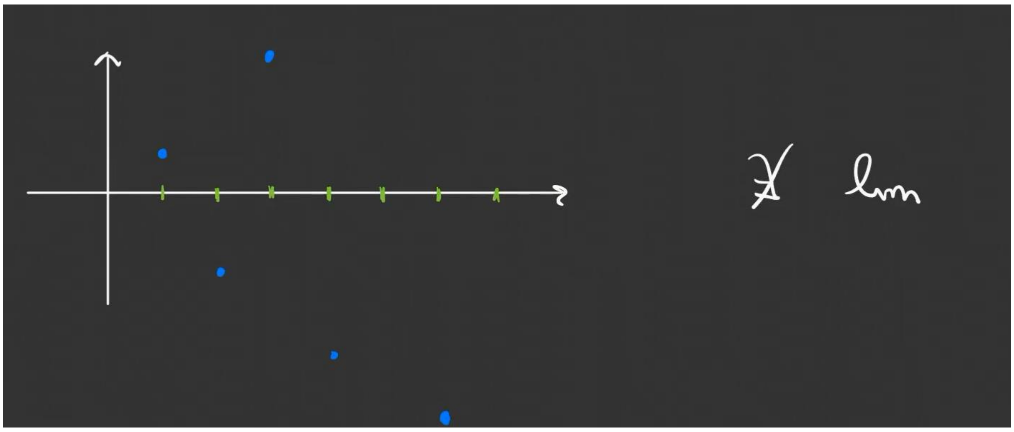
Se $q \leq -1 \Rightarrow \{q^{n+1}\}$ è indeterminata.

- Se $q = -1 \rightsquigarrow (-1)^{n+1}$

$$(-1)^{n+1} = \begin{cases} +1 & se\ n\ è\ dispari \\ -1 & se\ n\ è\ pari \end{cases}$$

- Se $q < -1$, scriviamo $q^{n+1} = (-|q|)^{n+1} = (-1)^{n+1}|q|^{n+1}$

  Questa successione è t.c. $|q^{n+1}| = |q^{n+1}| \to +\infty$ $(|q| > 1)$. Ma la successione assume alternativamente valori > 0 e < 0.



Quindi $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \begin{cases} +\infty & \text{se } q > 1 \\ \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ \nexists & \text{se } q \le -1 \end{cases}$

Inoltre, se $|q| < 1$

$$\sum_{n=M}^{\infty} q^n = q^M + q^{M+1} + \cdots = q^M(1 + q + \cdots) = \frac{q^M}{1-q}$$

SERIE TELESCOPICA

$\{b_n\} \subseteq \mathbb{R}$ successione, $a_n = b_n - b_{n+1}$

La serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \ \textit{si dice serie telescopica}$$

Per le serie telescopiche, si può osservare che

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1}) = (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) =$$

$$= b_0 - b_{n+1}$$

Quindi il carattere della serie telescopica si riduce allo studio di $\lim_{n\to\infty} b_{n+1}$.

Esempio: la serie (***SERIE DI MENGOLI***)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad a_n = \left(\frac{1}{n(n+1)}\right) = b_n - b_{n+1}$$

È una serie telescopica $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow s_n = 1 - \frac{1}{n+1} = b_1 - b_{n+1}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

Proprietà di base

(derivano direttamente da definizione e da proprietà analoghe per le successioni)

- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\{s_n\}$ successioni delle ridotte.

  definiamo una nuova serie, dato $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$$

  Calcoliamo l'indice di partenza

  Le somme parziali associate alla nuova serie sono

$$s_n^1 = \sum_{k=n_0}^{n} a_k \quad \left(s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k = s_n - \underbrace{s_{n_0-1}}_{non\ dipende\ da\ n}$$

  Quindi $\lim_{n\to\infty} s_n^1 = \left(\lim_{n\to\infty} s_n\right) - s_{n_0-1}$:

  il carattere di $\{s_n^1\}$ coincide con quello di $\{s_n\}$.

  Il carattere di una serie non cambia se sopprimiamo un numero finito di (grande a piacere) di termini.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad e \quad \sum_{n=10^9}^{+\infty} a_n$$

  Hanno lo stesso carattere (la somma della serie potrebbe cambiare).

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - 1 = 1$$

- Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ sono serie convergenti, e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n) \underbrace{=}_{\text{è } convergente} \lambda_1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \lambda_2 \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è divergente a $+\infty$, e $\lambda > 0$, allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-a_n) = -\infty, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda \cdot a_n = +\infty$$

Infine, se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = s \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) = +\infty$$

osservazione:in generale non è vero che

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

Criteri di convergenza

CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA:

$\sum a_n$ converge $\Rightarrow a_n \to 0$ per $n \to \infty$

conseguenza: se $a_n \nrightarrow 0 \Rightarrow \sum a_n$ non può convergere

Dimostrazione:

$\{s_n\}$ successione delle somme parziali.

$\sum a_n$ converge $\Leftrightarrow s_n \to s$ per $n \to \infty \Rightarrow s_{n-1} \to s$ per $n \to \infty$

$s_n = s_{n-1} + a_n$ per definizione

$\Updownarrow$

$a_n = s_n - s_{n-1} \to 0$ per $n \to \infty$

osservazione: la condizione è anche sufficiente?

Esempio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{a_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \log\frac{n+1}{n}$$

Se $n \to \infty \Rightarrow \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow a_n \to 0 = \sum_{n=1}^{+\infty}(\log(n+1) - \log n) = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}$

È una serie telescopica, con termine generale $b_n - b_{n+1}$, dove $b_n = -\log n$

$$= \lim_{n\to\infty} \log(n+1) = +\infty$$

Serie a termini non-negativi

$\sum a_n$ si dice a termini non-negativi (o a termini definitivamente non-negativi) se $a_n \geq 0\ \forall n$ (rispettivamente se $a_n > 0$ definitivamente)

Per semplicità ci concentreremo, nelle dimostrazioni, su serie a termini non-negativi.

Questo detto verrà anche per le serie a termini definitivamente non-negativi.

SERIE A TERMINI NON-NEGATIVI CONVERGONO O DIVERGONO A $+\infty$

$\sum a_n$ è una serie a termini definitivamente non-negativi$\Rightarrow \sum a_n$ o converge o diverge a $+\infty$.

Dimostrazione:

$a_n \geq 0$ per ogni $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$.

Se $n \geq n_0$:

$$s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{>0} \geq s_n \quad \forall n \geq n_0$$

$\Rightarrow \{s_n\}$ è definitivamente crescente

$\Rightarrow$ per $\exists$ del limite per successioni monotone, $s_n \to l$, finito o $+\infty$.

CRITERIO DEL CONFRONTO PER LE SERIE

$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ serie a termini definitivamente non-negativi. Sappiamo che

$a_n \leq b_n$ definitivamente

Allora:

I) $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

II) $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge

Dimostrazione:

per semplicità, supponiamo che $0 \leq a_n \leq b_n\ \ \forall n$.

$\{s_n\}$ successione delle ridotte di $\sum a_n$

$\{s_n^1\}$ successione delle ridotte di $\sum b_n$

$$s_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k \, , s_n^1 = \sum_{k=n_0}^{n} b_k$$

Dall'ipotesi

$0 \le s_n \le s_n^1, \forall n \Rightarrow$ passando al limite, abbiamo

1) $\sum b_n$ converge $\Rightarrow s_n^1 \to s^1 \in \mathbb{R}$

   $\Rightarrow$ per permanenza del segno

$$0 \le \lim_{n\to\infty} s_n \le s^1 < +\infty$$

   $\Rightarrow \sum a_n$ converge

2) $\sum a_n$ diverge $\Leftrightarrow s_n \to +\infty \Rightarrow$ per confronto

$$+\infty = \lim_{n\to\infty} s_n \le \lim_{n\to+\infty} s_n^1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n^1 = +\infty$$

   $\Rightarrow \sum b_n$ diverge.

Si può poi ricavare il ***CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO***

$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \, , \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ serie a termini non-negativi, con $b_n \neq 0$ definitivamente supponiamo che esiste $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, finito o $+\infty$

Allora:

1. Se $l \in (0, +\infty) \Rightarrow \sum a_n \, e \sum b_n$ hanno lo stesso carattere
2. Se $l = 0$ e $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge
3. Se $l = +\infty$ e $\sum b_n$ diverge$\Rightarrow \sum a_n$ diverge

SERIE ARMONICA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

La serie armonica diverge:

$\frac{1}{n} \sim \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \, per \, n \to \infty$

$\frac{\frac{1}{n}}{\log 1 + \frac{1}{n}} \to 1 \Rightarrow$ per confronto asintotico

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$hanno lo stesso carattere. Quindi (vedi esempio precedente)$\sum\frac{1}{n}$ diverge a $+\infty$.

SERIE ARMONICAGENERALIZZATA

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\quad \alpha\in\mathbb{R}$$

$\alpha\leq 0$: le serie diverge:$\frac{1}{n^{\alpha}}\nrightarrow 0$ per $n\to\infty$

$\alpha=1$: la serie diverge.

Si deduce che $\sum\frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge a $+\infty\ \forall\alpha\in(0,1)$:

se $\alpha\in(0,1)$ allora $n^{\alpha}\leq n\ \forall n\Rightarrow\frac{1}{n^{\alpha}}\geq\frac{1}{n}\ \ \forall n$

$\Rightarrow$ per il criterio del confronto (caso 2), siccome $\sum\frac{1}{n}=+\infty$ abbiamo $\sum\frac{1}{n^{\alpha}}+\infty,\forall\alpha\in(0,1)$.

Se $\alpha=2,\sum\frac{1}{n^{2}}$ converge:

$$\frac{1}{n^{2}}\sim\underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{termine\ generale\ della\ serie\ di\ Mengoli}$$

Per confronto asintotico, siccome la serie di Mengoli converge, allora anche $\sum\frac{1}{n^{2}}$

Si deduce che $\sum\frac{1}{n^{\alpha}}$ converge $\forall\alpha>2$ (per confronto, $\frac{1}{n^{\alpha}}\leq\frac{1}{n^{2}}\forall n$ se $\alpha>2$)

$\alpha\in(1,2)$? dimostreremo che in questi casi la serie converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\begin{cases}converge\ se\ \alpha>1\\ diverge\ a+\infty\ se\ \alpha\leq 1\end{cases}$$

Esempio: $\sum\underbrace{\sin\frac{1}{n^{\alpha}}}_{\substack{\sim\frac{1}{n^{\alpha}}\ per\ n\to\infty\\ \sum\frac{1}{n^{\alpha}}\ converge\\ \Leftrightarrow\alpha>1}}$ converge $\Leftrightarrow\alpha>1$

CRITERIO DELLA RADICE

$\sum a_n$ a termini definitivamente ≥ 0

Supponiamo che $\exists\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$

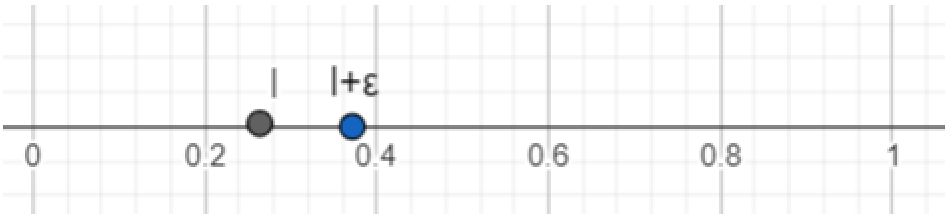
Allora:

- Se $l \in [0.1) \Rightarrow$ la serie converge
- Se $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge a $+\infty$
- Se $l = 1 \Rightarrow$ il criterio non dà info.

Esempio: $\sqrt[n]{\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^\alpha \to 1 \qquad$ per $n \to \infty, \forall \alpha$

Dimostrazione:

$l < 1$. Sia $\epsilon > 0$ tale che $l + \epsilon < 1$



$\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $n > \bar{n} \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \in (l - \epsilon, l + \epsilon)$, in particolare, $\sqrt[n]{a_n} < \ l + \epsilon \ \ \forall n > \bar{n}$. Quindi $a_n < \underbrace{(l + \epsilon)^n}_{q^n \ con \ q<1} \ \ \forall n > \bar{n}$.

Siccome $\sum (l + \epsilon)^n$converge, per confronto converge anche $\sum a_n$.

Procedendo come sopra, si verifica che $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ definitivamente

$\Rightarrow a_n \geq 1$ definitivamente

$\Rightarrow a_n \nrightarrow 0 \Rightarrow$ non abbiamo la condizione necessaria di convergenza$\Rightarrow$ la serie diverge.

Esempio:

$$n^\alpha e^{-n}, a = \frac{1}{e}$$

$$\uparrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n^\alpha a^n}_{a_n}, \alpha \in \mathbb{R}, a > 0$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{n^\alpha} \cdot a = \left(\sqrt[n]{n}\right)^\alpha \cdot a$$

Quindi

$$\sqrt[n]{a_n} \to a \begin{cases} se \ a < 1 \Rightarrow la \ serie \ converge, \forall \alpha \\ se \ a > 1 \Rightarrow la \ serie \ diverge, \forall \alpha \end{cases}$$

$a = 1$ lo studiamo a parte.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-\alpha}} \begin{cases} converge\ se\ \alpha < -1 \\ diverge\ se\ \alpha \geq -1 \end{cases}$$

CRITERIO DEL RAPPORTO

$\sum a_n$ serie a termini definitivamente≥ 0, con $a_n > 0$ definitivamente.

Supponiamo che $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

- Se $l \in [0,1) \Rightarrow$ la serie converge
- Se $l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge
- Se $l = 1$ il criterio non dà informazioni.

Dimostrazione:

$\sum a_n$, se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,\ \ l < 1$

$\Rightarrow \exists \bar{n}: \forall n > \bar{n}\ \ a_{n+1} < a_n(\underbrace{l+\epsilon}_{\delta<1})$

$a_{\bar{n}+1} < \delta \cdot a_{\bar{n}}, a_{\bar{n}+2} < \delta^2 \cdot a_{\bar{n}}, a_{\bar{n}+3} < \delta^3 \cdot a_{\bar{n}} \ldots \Rightarrow a_{\bar{n}+k} < \delta^k \cdot a_{\bar{n}}$

$0 \leq \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to+\infty} a_{\bar{n}+k} \leq \lim_{k\to+\infty} a_{\bar{n}} \cdot \delta^k$

Inoltre, $\lim_{k\to+\infty} a_{\bar{n}} \cdot \delta^k = a_{\bar{n}} \lim_{k\to+\infty} \delta^k \Rightarrow$ converge (serie geometrica)

$\Rightarrow$ per confronto converge anche $\sum a_n$

Esempio:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n n!}{n^n}, b > 0$$

$$a_n = \frac{b^n n!}{n^n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{b^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{b^n n!} = \frac{(n+1)b}{(n+1)(n+1)^n} \cdot n^n = b \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{b}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{b}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{b}{e}$$

Per $n \to \infty$

Per il criterio del rapporto, abbiamo che

$b < e \Rightarrow \sum a_n$ converge

$b > e \Rightarrow \sum a_n$ diverge

$b = e$ lo studiamo a parte.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{n}\right)^n n!$$

Si usa la FORMULA DI STIRLING

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Quindi

$$\left(\frac{e}{n}\right)^n n! \sim \left(\frac{e}{n}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Siccome $\sum \sqrt{2\pi n}$ diverge

$\Rightarrow$ per confronto asintotico, diverge anche $\sum \left(\frac{e}{n}\right)^n n!$

SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALSIASI

Definizione: $\sum a_n$ si dice ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se $\sum |a_n|$ è convergente

(la convergenza in casi precedenti si chiama CONVERGENZA SEMPLICE)

TEOREMA DI ASSOLUTA CONVERGENZA

Se $\sum a_n$ converge assolutamente $\Rightarrow$ converge anche semplicemente

Esempio: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ converge assolutamente, e quindi semplicemente, $\forall \alpha > 1$.

Il viceversa è falso; ci possono essere serie che convergono semplicemente, ma non assolutamente.

Esempio: $\sum (-1)^n \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge semplicemente anche per $\alpha \in (0,1]$, ma non assolutamente.

Serie a segni alterni

Definizione: una serie a SEGNI ALTERNI è una serie del tipo $\sum (-1)^n b_n$, con $b_n \geq 0 \ \ \forall n$

Il termine generale di queste serie è $a_n = (-1)^n b_n \begin{cases} \geq 0 \ se \ n \ è \ pari \\ \leq 0 \ \ se \ n \ è \ dispari \end{cases}$

Per queste serie, vale il CRITERIO DI LEIBNIZ

$\sum (-1)^n b_n$ serie a segni alterni. Se

i) $b_n \to 0$

ii) $\{b_n\}$ è decrescente

$\Rightarrow \sum(-1)^n b_n$ converge semplicemente

Esempio:

$\sum(-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ $\forall\alpha > 0$ converge semplicemente $\forall\alpha > 0$:

$$\frac{1}{n^\alpha} \to 0 \quad \forall\alpha > 0$$

$\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}$ è decrescente $\forall\alpha > 0$ per Leibniz.

CRITERIO DI LEIBNIZ

Consideriamo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n \quad serie\ a\ segni\ alterni$$

Se

i) $b_n \to 0$

ii) $\{b_n\}$ è decrescente

$\Rightarrow \sum(-1)^n b_n$ converge semplicemente

Dimostrazione:

Vogliamo dimostrare che $\{s_n\}$, successione delle somme parziali converge.

Consideriamo separatamente $\underbrace{\{s_{2n} : n \in \mathbb{N}\}}_{somme\ parzilai\ di\ indice\ pari}$, $\underbrace{\{s_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}}_{somme\ parzilai\ di\ indice\ dispari}$

Osserviamo che

$$s_{2(n+1)} = s_{2n+2} = s_{2n} + (-1)^{2n+1}b_{2n+1} + (-1)^{2n+2}b_{2n+2} =$$

$$= s_{2n} - b_{2n+1} + b_{2n+2} = s_{2n} - \underbrace{(b_{2n+1} - b_{2n+2})}_{\substack{\geq 0 \\ perchè\,\{b_n\}\searrow}} \leq s_{2n}, \qquad \forall n$$

$\Rightarrow \{s_{2n}\}$ è decrescente

Allo stesso modo, si dimostra che $\{s_{2n+1}\}$ è crescente.

Inoltre

$$s_{2n+1} = s_{2n} + (-1)^{2n+1}b_{2n+1} = s_{2n} - b_{2n+1} \leq s_{2n} \quad \forall n$$

Quindi

$$s_1 \leq s_{2n+1} \leq s_{2n} \leq s_2$$

Quindi $\{s_{2n}\}$ e $\{s_{2n+1}\}$, oltre a essere monotone, sono anche limitate

$\Rightarrow$ per il teorema di esistenza del limite per successioni monotone $s_{2n} \to l_1$ finito, $s_{2n+1} \to l_2$ finito.

Per mostrare che $l_1 = l_2$, consideriamo

$$s_{2n+1} - s_{2n} = (-1)^{2n+1} b_{2n+1} = -b_{2n+1} \to 0$$

Per ipotesi ($b_n \to 0$)

$$s_{2n+1} - s_{2n} \to l_2 - l_1 = 0$$

Quindi sia la successione $\{s_{2n}\}$ che $\{s_{2n+1}\}$ tendevano a l $\Rightarrow$l'intera successione $\{s_n\}$ tende a $l \in \mathbb{R}$; cioè la serie converge semplicemente. CVD.

Combinando la convergenza assoluta con i criteri della radice e del rapporto, si possono due ulteriori criteri:

CRITERIO DELLA RADICE GENERALIZZATO

$\sum a_n$ serie qualsiasi.

Supponiamo che esiste $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$

- Se $l \in [0,1) \Rightarrow$ la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente.
- Se $l > 1 \Rightarrow$ la serie non converge né assolutamente, né semplicemente (non siamo sicuri che diverga)
- Se $l = 1$, non abbiamo info.

CRITERIO DEL RAPPORTO GENERALIZZATO

$\sum a_n$ serie qualsiasi.

Supponiamo che esiste $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{a_n} = l$

Allora

- Se $l \in [0,1) \Rightarrow$ la serie converge assolutamente e quindi anche semplicemente.
- Se $l > 1 \Rightarrow$ la serie non converge né assolutamente, né semplicemente (non siamo sicuri che diverga)
- Se $l = 1 \Rightarrow$ non abbiamo info

Esempio: studiamo la convergenza di semplice e assoluta di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

Svolgimento

Osserviamo che il termine generale è $\frac{(x-3)^n}{n2^n} = a_n$

$a_n \geq 0$ se $x \geq 3$

a_n è a segni alterni se $x < 3$.

$$(x-3)^n = (-|x-3|)^n = (-1)^n|x-3|^n$$

Studiamo la convergenza assoluta. Usiamo il criterio della radice generalizzata.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(x-3)^n}{n2^n}\right|} = \frac{|x-3|}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{|n|}} \to \frac{|x-3|}{2}$$

Per $n \to \infty$

$$\frac{|x-3|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x-3| < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5$$

Per $x \in (1,5)$, per il criterio della radice generalizzata c'è convergenza assoluta, e quindi anche semplice

$$\frac{|x-3|}{2} > 1 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 5$$

In questi casi non c'è né convergenza assoluta, né semplice.

Se $x > 5$, la serie diverge.

Ci restano da studiare $x = 1$ e $x = 5$.

- $\underline{x = 5}$

  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (sia in senso assoluto, che semplice)

- $\underline{x = 1}$

  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, che converge semplicemente ma non assolutamente.

Esempio: studiare la convergenza semplice e assoluta di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} + \cos n\pi}{n}$$

Svolgimento

$$a_n = \frac{\sin\frac{1}{n} + (-1)^n}{n}$$

È una serie a segni alterni.

Convergenza assoluta

$$|a_n| = \left|(-1)^n \cdot \frac{1 + (-1)^n \sin\frac{1}{n}}{n}\right| = \frac{1 + (-1)^n \sin\frac{1}{n}}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\left[1 + (-1)^n \underbrace{\sin\frac{1}{n}}_{\to 0}\right] \sim \frac{1}{n}$$

per $n \to \infty$

$\Rightarrow \sum|a_n|$ diverge a $+\infty$, per confronto asintoto con la serie armonica.

Non c'è convergenza assoluta.

Convergenza semplice:

osserviamo che

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}_{b_n} + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{c_n}$$

$\sum b_n$ converge, essendo $b_n \sim \frac{1}{n^2}$ (confronto asintotico)

$\sum c_n$ converge per Leibnitz.

$\Rightarrow \sum a_n$ converge essendo del tipo $\sum(b_n + c_n)$, con b_n e c_n convergenti.

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE SU UN INTERVALLO

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

$\underbrace{f:[a,b]}_{chiusa\ e\ limitata} \to \mathbb{R}$, continua su $[a,b]$.

Supponiamo che $f(a)\cdot f(b) < 0$.

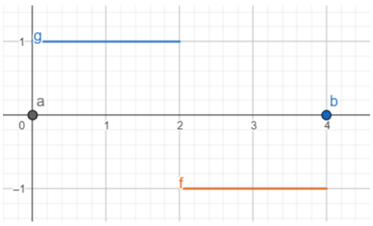
Allora $\exists c \in (a,b)$ tale che $f(c)=0$ (esiste almeno uno zero di f)

Verifica:

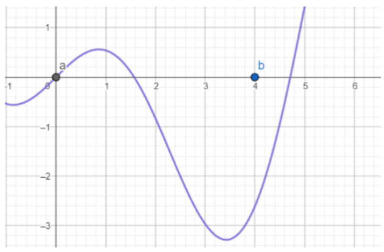
$f:\underbrace{(a,b)}_{non\ necessariamente\ limitata} \to \mathbb{R}$ continua in $\mathbb{R}$

Supponiamo che $\exists \lim_{x\to a^+} f(x), \lim_{x\to b^-} f(x)$ e che $\left(\lim_{x\to a^+} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to b^-} f(x)\right) < 0$

Allora $\exists c \in (a,b)$ tale che $f(c)=0$

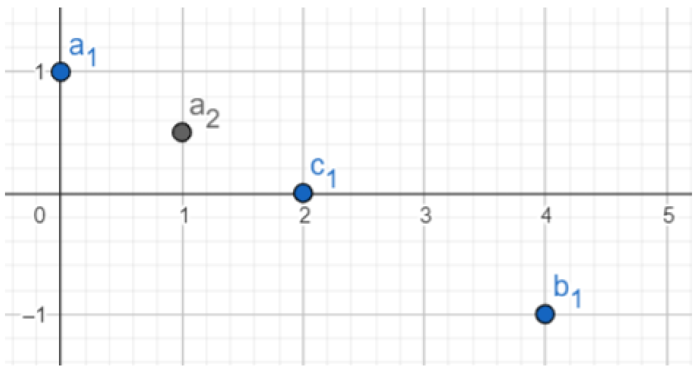


Se f è discontinua potrei non avere zero.



Dimostrazione:

Per fissare le idee, supponiamo che $f(a)>0, f(b)<0$.



Poniamo $c_1 = \frac{a+b}{2}$, punto medio tra a e b.

Se $f(c_1)=0$, c_1 è lo zero cercato.

Se $f(c_1)\neq 0$, allora abbiamo due casi.

$\begin{matrix} f(c_1)<0 \searrow \\ f(c_1)>0 \nearrow \end{matrix}$ definiamo un nuovo intervallo $[a_1, b_1]$ dove $\begin{matrix} \nearrow a_1=a \ \ e \ \ b_1=c_1 \\ \searrow a_1=c_1 \ \ e \ \ b_1=b \end{matrix}$

Su $[a_1, b_1], f$ è continua e $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$

Ripetiamo il ragionamento su $[a_1, b_1]$: definiamo $c_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ e valutiamo $f(c_2)$.

Se $f(c_2) = 0$, c_2 è lo zero cercato.

Se $f(c_2) \neq 0$, allora

$\begin{matrix} f(c_2)<0 \searrow \\ f(c_2)>0 \nearrow \end{matrix}$ definiamo un nuovo intervallo $[a_2, b_2]$ dove $\begin{matrix} \nearrow a_2=a_1 \ \ e \ \ b_2=c_2 \\ \searrow a_2=c_2 \ \ e \ \ b_2=b_1 \end{matrix}$

Su $[a_2, b_2], f$ è continua e $f(a_2) \cdot f(b_2) < 0$.

Iteriamo il ragionamento.

O dopo in numero finito di passi $f(c_n) = 0$ e c_n è lo zero cercato.

Punto medio tra a_{n-1} e b_{n-1}

Oppure abbiamo una successione di intervalli $[a_n, b_n]$, tale che

1) $[a_n, b_n] \subseteq [a_{n-1}, b_{n-1}] \ \forall n$
2) $b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \cdots = \frac{b-a}{2^n}$
3) $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$

Il punto 1) ci dice che $a_n \geq a_{n-1}$ e $b_n \leq b_{n-1} \ \forall n \Rightarrow \{a_n\} \nearrow, \{b_n\} \searrow$

Inoltre, sono limitate, perché $a \leq a_n \leq b_n \leq b \ \forall n \Rightarrow a_n \to l_1 \in \mathbb{R}, b_n \to l_2 \in \mathbb{R}$

Il punto 2) ci dice che $l_1 = l_2$: infatti

$$l_2 - l_1 = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) \overset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0 \Rightarrow l_2 = l_1 = l$$

Il punto 3) ci dice che, essendo f continua, $\left(f(l)\right)^2 = \underbrace{\lim_{n\to\infty} f(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} f(b_n)}_{qui\ uso\ la\ continuità}$

$$f(l) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

$$f(l) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{f(a_n) \cdot f(b_n)}_{<0\ per\ 3)} \leq \underbrace{0}_{per\ la\ permanenza\ del\ segno}$$

Quindi necessariamente

$$\left(f(l)\right)^2 = 0 \Rightarrow f(l) = 0.$$

e l è lo zero cercato.

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

I intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo che $\exists y_1, y_2 \in \mathbb{R}, y_1 < y_2$, e $x_1, x_2 \in I$, tale che $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$.

Allora f assume tutti i valori intermedi tra y_1 e y_2 cioè $\forall \lambda \in (y_1, y_2) \exists x_\lambda \in I$ tale che $f(x_\lambda) = \lambda$.

Dimostrazione:

Consideriamo il sottoinvervallo chiuso di estremi x_1 e x_2: $[x_1, x_2] (o\ [x_2, x_1])$.

Preso $\lambda \in (y_1, y_2)$, consideriamo poi $g_\lambda(x) = f(x) - \lambda$, su $[x_1, x_2]$. g_λ è continua,

$$g_\lambda(x_1) = y_1 - \lambda < 0$$

$$g_\lambda(x_2) = y_2 - \lambda > 0$$

Quindi g_λ soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri su $[x_1, x_2]$

$\Rightarrow \exists x_\lambda \in [x_1, x_2]$ tale che

$$\underbrace{g_\lambda(x_\lambda)}_{f(x_\lambda) - \lambda} = 0 \Rightarrow f(x_\lambda) = \lambda$$

C.v.d.

I intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$: $\sup_I f = \sup f(I)$, $\inf_I f = \inf f(I)$

Corollario

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua.

Allora f assume tutti i valori intermedi in $\left(\inf_I f, \sup_I f\right)$. In particolare, $f(I)$ è un intervallo.

Massimi e minimi

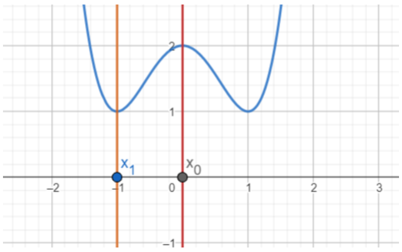
$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Si dice che x_0 è un PUNTO DI MASSIMO LOCALE (o RELATIVO) per f, se

$\exists \delta > 0\ t.c. f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$

$x_0 =$ punto di massimo locale

$x_1 =$ punto di minimo locale e assoluto



Si dice che x_0 è un PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO e che M è il VALORE MASSIMO di f su I, se

$M = f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in I$ $(\forall x \in I \setminus \{x_0\})$

$$M = \max_I f$$

Se nel caso "locale" la disuguaglianza vale con > al posto di ≥, si parla di punti di massimo STRETTO o FORTE.

Si possono dare analoghe definizioni per punti di MINIMO sostituendo ≥ e > con ≤ e <.

osservazione: f ha massimo assoluto su $I \Leftrightarrow \sup_I f < +\infty \exists \overline{x} \in I\ t.c. f(\overline{x}) = \sup_I f$. In questo caso $\sup_I f = \max_I f$, e $\overline{x}$ è il punto di massimo assoluto.

Se f non è superiormente limitata⇒ f non ha max assoluto.

Ci possono comunque essere punti di max locale.

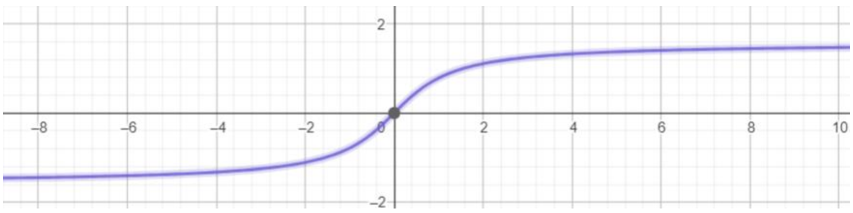
osservazione: gli eventuali valori di massimo/ minimo assoluto sono unici. Al contrario, ci possono essere anche ∞ punti di max/min assoluto

$$f(x) = \sin x$$

$$\sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

1 è il valore di max assoluto, con ∞ punti di massimo $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

osservazione: se una funzione è superiormente limitata, non è detto che abbia un max.



$$f(x) = \arctan x$$

$$\sup_I f = \frac{\pi}{2}$$

∄ alcun punto di massimo.

TEOREMA DI WEIERSTRASS

$f: \underbrace{[a, b]}_{chiuso\ e\ limitato} \rightarrow \mathbb{R}$, continua.

Allora ∃ un punto di minimo assoluto e uno di massimo assoluto per f in $[a, b]$. (f assume max assoluto e min assoluto in $[a, b]$)

osservazione:

- Se l'intervallo di definizione di f è aperto, il teorema non vale.

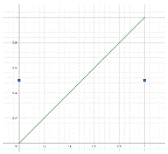
  $f(x) = x$ su $(0,1)$

  $\underset{(0,1)}{ing\ f} = 0, \underset{(0,1)}{\sup f} = 1$, ma non abbiamo punti di max/min.

- Se l'intervallo non è limitato, possono non esserci punti di max/min (vedi arctan)

- Se f è discontinua, possono non esserci punti di max o min

$$f(x) = \begin{cases} x \ \ se\ x \in (0,1) \\ \frac{1}{2} \ \ sex = 0\ o\ x = 1 \end{cases} \quad f: [0,1] \to \mathbb{R}$$



$\underset{[0,1]}{\inf f} = 0$

$\underset{[0,1]}{\sup f} = 1$, ma non abbiamo max/min

Funzioni monotone su un intervallo

TEOREMA:

$f: (a, b) \to \mathbb{R}, f$ monotona.

Allora $\forall c \in (a, b)$ esistono finiti $\lim_{x \to c^+} f(x)$ e $\lim_{x \to c^-} f(x)$.

Esistono anche $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to b^-} f(x)$, eventualmente infiniti.

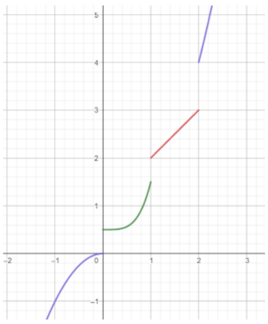
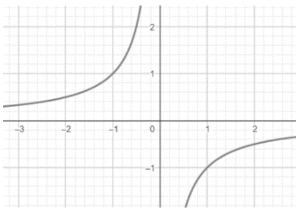
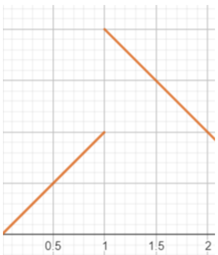


Grafico ammissibile per f monotona.



Non è il grafico di una funzione monotona.

Avevamo visto che f strettamente monotona $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f$ invertibile



$$f(x) = \begin{cases} x \ \ x \in [0,1] \\ 3 - x \ \ x \in [1,2] \end{cases}$$

Invertibile ma non monotona

TEOREMA:

$f: I \to \mathbb{R}, f$ continua.

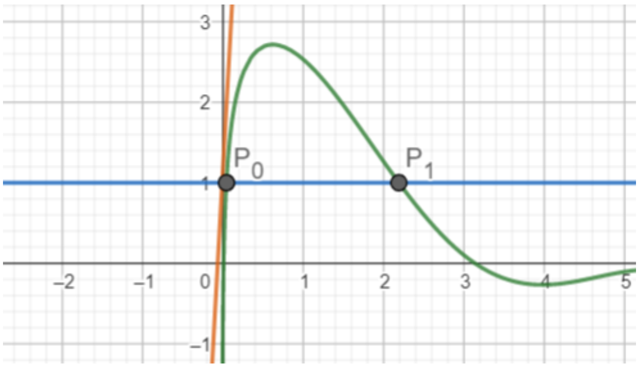
f è invertibile $\Leftrightarrow$ f è strettamente monotona.

In tal caso f^{-1} è a sua volta continua e strettamente monotona.

osservazione: $\log x$ è l'inversa di e^x. Sapendo che e^x è continua, deduciamo che $\log x$ è continua.

CALCOLO DIFFERENZIALE

Il problema della tangente



DOMANDA:

Qual è l'equazione della retta tangente al grafico di f in P_0?

Preso $P_0 \neq P_1$ sul grafico di f, consideriamo la retta passante P_0 e P_1:

$$P_0 = (x_0, f(x_0)), P_1 = (x_1, f(x_1))$$

Per P_0 e P_1:

$$y = f(x_0) + m_{P_0,P_1}(x - x_0),$$

$$m_{P_0,P_1} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Muovendo P_1 verso P_0, la retta per P_0 e P_1, "si avvicina" alla tangente $\rightsquigarrow \lim_{x_1 \to x_0}$:

$\exists \lim_{x_1 \to x_0} m_{P_1,P_0}$? È finito?

Se sì, posso definire l'equazione della retta tangente come limite dell'equazione delle rette secanti.

Definizione: $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ f si dice DERIVABILE in $x_0 \in (a, b)$ se esiste finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \overset{x=x_0+h}{\cong} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{rapporti incrementali}$$

den: incremento della variabile.

Se f è derivabile in x_0, il limite precedente si chiama DERIVATA di f in x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(se esiste finito)

$$f'(x_0), \frac{df}{dx}(x_0), Df(x_0), \dot{f}(x_0), \left.\frac{df}{dx}\right|_{x = x_0}$$

Se f è derivabile in x_0, la retta di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

si dice RETTA TANGENTE al grafico di f in x_0.

Notazioni: a volte si scrive

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

anche se il lim è $+\infty$ o $-\infty$.

In questi casi f non è derivabile in x_0, ma la notazione è comoda.

Se f è in derivabile in tutti i punti di (a, b), dice che f è derivabile in (a, b), e si può considerare la funzione derivata:

$$f' : (a, b) \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f'(x)$$

Se f' è a sua volta derivabile (in un punto o in un intervallo), si definisce la DERIVATA SECONDA di f come funzione

$$(f')'(x_0) = f"(x_0)$$

$$\ddot{f}(x_0), \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0), D^2 f(x_0), \dots$$

In modo analogo, si definiscono derivate di ordine qualsiasi: $\forall n \in \mathbb{N}$, la derivata n-ESIMA di f (se esiste) denota con

$$f^{(n)}(x_0), \frac{d^n f}{dx^n}(x_0), D^n f(x_0)$$

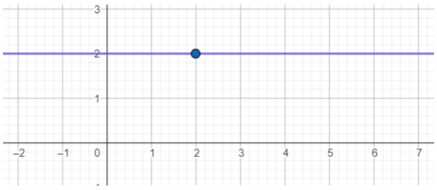
Derivate di funzioni elementari

f	f'
Cost.$=k \in \mathbb{R}$	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$ $(x \geq 0)$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

$x^\alpha \quad \alpha \in \mathbb{R}$ $(x \geq 0)$	$\alpha x^{\alpha-1} \quad \begin{pmatrix} x > 0 \;\; se\ \alpha < 1 \\ x \geq 0 \;\; se\ \alpha \geq 1 \end{pmatrix}$

Verifica:

1)



$f(x) = K$ costante

$$x \in \mathbb{R}, \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

2)-5) sono casi particolari del caso 6)

(eventualmente si può usare la simmetria per ricondursi a $x \geq 0$)

$$f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$$

Sia $x > 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \cdots$$

Ricordiamo che $\lim_{t \to 0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha$

$$\ldots = \lim_{h \to 0} x^\alpha \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{h \cdot \frac{x}{x}} = \lim_{h \to 0} x^{\alpha - 1} \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} \overset{t = \frac{h}{x}}{\cong} \alpha x^{\alpha - 1}$$

f	f'
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-(1 + \cot^2 x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x \quad (x \in [-1,1])$	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \in (-1, 1)$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1 + x^2}$

Verifica di 7 e 8:

7) $f(x) = \sin x \quad x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\sin h\cos x-\sin x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[(\sin x)\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\,\frac{\sin h}{h}\right]=\cos x$$

8) Analogo.

f	f'
e^x	e^x
$(x>0)\ \ \log x$	$\frac{1}{x}\ \ (x>0)$
$(a>0)\ \ \ a^x$	$a^x\log a$
$(a>0,a\neq 1)\ \ \log_a x$	$\frac{1}{x\log a}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

Verifica di 14 e 15

14) $f(x)=e^x, x\in\mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}e^x\,\frac{e^h-1}{h}=e^x$$

15) $f(x)=\log x\,,\ x>0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-\log x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\log\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

Ricordiamo che $\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot 1=\frac{1}{x}$$

Le altre formule non verificate si ricavano da quella precedenti tramite opportune regole di calcolo.

Proprietà di base delle funzioni derivabili

Derivabilità implica continuità

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, derivabile in $x_0\in(a,b)\Rightarrow f$ è continua in x_0.

Dimostrazione:

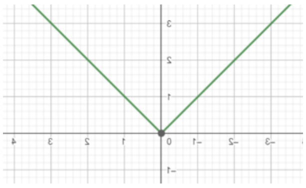
f è continua in $x_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$

Sia f derivabile in x_0. Allora

$$f(x)-f(x_0)=\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\to f'(x_0)\in\mathbb{R}}\cdot\underbrace{(x-x_0)}_{\to 0}\to 0\quad \text{per } x\to x_0$$

Il viceversa è falso: ci sono funzioni continue ma non derivabili in un punto.

Esempio: $f(x) = |x|$



f è continua in $\mathbb{R}$, ma non è derivabile in 0.

$$f(x) = \begin{cases} x \;\; se\; x \geq 0 \\ -x \;\; se\; x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h| - 0}{h} = \begin{cases} +1\; se\; h > 0 \\ -1\; se\; h < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1$$

Limite destro e sinistro esiste finito, ma sono diversi. Quindi non esiste $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$, e quindi f non è derivabile in 0.

f è derivabile in x $\forall x \neq 0$, e

$$f'(x) = \begin{cases} +1 \;\; se\; x > 0 \\ -1 \;\; se\; x < 0 \end{cases} = \underbrace{sign(x)}_{funzine\; segno} = \frac{x}{|x|}$$

Definizione: se f è continua in x_0, ed esistono, finiti, $\lim_{h \to 0^\pm} \frac{f(h)-f(x_0)}{h}$, ma sono diversi tra di loro, si dice che f ha un PUNTO ANGOLOSO in x_0.

$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$ derivata destra di f in x_0

$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$ derivata sinistra di f in x_0

Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, posso considerare $f'_+(a)$ e $f'_-(b)$

f si dice derivabile in a se $f'_+(a)$ esiste finita.

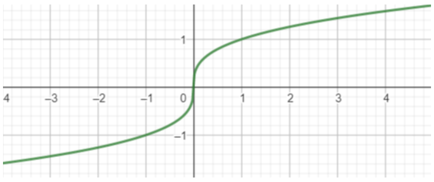
f si dice derivabile in b se $f'_-(b)$ esiste finita.

Abbiamo visto un esempio di PUNTO DI NON DERIVABILITÀ (punto in cui f non è derivabile)

Quali sono i possibili punti di non-derivabilità?

- Punti angolosi
- Punti di discontinuità

Consideriamo $f(x) = \sqrt[3]{x}$



f è continua in $\mathbb{R}$, e

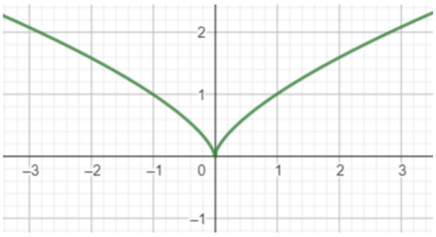
$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h^{\frac{2}{3}}}=+\infty$$

Esiste il limite del rapporto incrementale, ma non è finito.

Si dice che f ha un FLESSO(PUNTO) A TANGENTE VERTICALE.

Notazioni: $f'(0)=+\infty$

Ora consideriamo $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$



f è continua in $\mathbb{R}$, e

$$\lim_{h\to0^{\pm}}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^{\pm}}\frac{h^{\frac{2}{3}}-0}{h}=\lim_{h\to0^{\pm}}\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}$$
$$=\pm\infty$$

Se il limite destro e sinistro del rapporto incrementale esistono, entrambi infiniti, e diversi tra loro, si dice che f ha una CUSPIDE.

osservazione: se $f'_+(x_0)\in\mathbb{R}$ e $f'_-(x_0)=\pm\infty$. Si dice comunque che c'è un punto angoloso

Se $f'_+(x_0)=\pm\infty$ e $f'_-(x_0)\in\mathbb{R}$ si dice che x_0 è un punto angoloso.

Derivabilità delle funzioni definite a tratti

$f(x)=|x|$ è derivabile $\forall x\neq0$, e $f'_+(0)=+1$, $f'_-(0)=-1$

Per $x\neq0$,

$$f'(x)=\begin{cases}+1 \ se \ x>0\\ -1 \ se \ x<0\end{cases}$$
$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}f'(x)$$
$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}f'(x)$$

È sempre vera?

Non è detto in genere.

Esempio:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x} & x>0\\ 0 & x\leq0\end{cases}$$

f è derivabile $\forall x\neq0$, e (lo verificheremo)

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \quad se\ x > 0$$

$$f'(x) = 0 \quad se\ x < 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x} \nexists$$

Ma f è derivabile in 0, con derivata $= 0$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = 0$$

Quindi esiste $f'_+(0) = 0$, ma

$$f'_+ \neq \underbrace{\lim_{x\to 0^+} f'(x)}_{\nexists}$$

TEOREMA:

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in a, derivabile in (a,b), e supponiamo che $\exists$ (finito o ∞)

$$\lim_{x\to a^+} f'(x) = m \in \mathbb{R}^*$$

Allora $\exists f'_+(a) = m$.

conseguenze:

supponiamo di voler studiare la derivabilità di

$$f(x) = \begin{cases}\phi(x) & se\ x \geq x_0\\ \beta(x) & se\ x < x_0\end{cases}$$

con ϕ derivabile in $(x_0, +\infty)$, e β derivabile in $(-\infty, x_0)$

Per stabilire la derivabilità di f in x_0, abbiamo due possibilità

1) Verifichiamo che f sia continua in x_0, e calcoliamo $\lim_{x\to x_0^+}\phi'(x)$ e $\lim_{x\to x_0^-}\beta'(x)$.
   Se questi limiti esistono finiti e coincidono, allora f è derivabile in x_0.
   Se questi limiti esistono e sono diversi oppure sono $\pm\infty$, allora f non è derivabile in x_0.
   Se uno dei due limiti non esiste, non possiamo usare questa strada.
2) Calcoliamo direttamente

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

e f è derivabile in $x_0 \Leftrightarrow f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$

Algebra delle derivate

$f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili in (a,b).

Allora $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}\,(g \neq 0)$ sono derivabili in (a,b), e

1) $(f \pm g)' = f' \pm g'$
2) $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ REGOLA DI LEIBNIZ
3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Casi particolari: $K \in \mathbb{R}, (Kf)' = (Kf)'$

(*) $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{1}{g^2} g'$

Dimostrazione:

1) Banale
2) Per $x \in (a, b]$ consideriamo

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) \pm f(x+h)g(x)}{h}$$

$$= \underbrace{f(x+h)}_{\substack{\to f(x) \\ per\ h \to 0, dato \\ che\ f\ \text{è}\ continua \\ (essendo \\ derivabile)}} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\substack{\to g'(x) \\ per\ h \to 0}} + g(x) \cdot \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\substack{\to f'(x) \\ per\ h \to 0}} =$$

$$\to f' \cdot g + f \cdot g'$$

per $h \to 0$.

3) Si ricava da Leibniz + (*):

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'$$

Dimostriamo (*): per $x \in (a, b)$

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)} =$$

$$= -\underbrace{\frac{1}{g(x)g(x+h)}}_{\substack{\frac{1}{g^2(x)} \\ per\ h \to 0}} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\substack{g'(x) \\ per\ h \to 0}} \to -\frac{1}{g^2(x)} g'(x)$$

Per $h \to 0$.

Esempio:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

TEOREMA-REGOLA DELLA CATENA

f definita in un intorno di x, derivabile in x.

g definita in un intorno di $y = f(x)$, derivabile in y.

Allora $(g \circ f)$ è definita in un intorno di x, è derivabile in x, e

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Esempio:

- $(e^{-x})' = g'\big(f(x)\big)f'(x) = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$
  $e^{-x} = (g \circ f)$, dove $g(y) = e^y, f(x) = -x$
  $$g'(y) = e^y, f'(x) = -1$$
- $(\cosh x)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^x)' + \frac{1}{2}(e^{-x})' = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} = \sinh x$
- $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad x \neq 0$
  f è derivabile in x, $\forall x \neq 0$, e
  $$f'(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$$
  $\sin\left(\frac{1}{x}\right) = g(f(x))$, dove
  $$g(y) = \sin y\,, f(x) = \frac{1}{x}$$
  $$\Rightarrow g'(y) = \cos y\,, f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$
  $$\Rightarrow \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
  $$\Rightarrow f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2}$$
- $(\sin(\log(2x-3)))' = (h \circ g \circ f)(x)$
  Dove
  $$f(x) = 2x - 3, g(y) = \log y\,, h(z) = \sin z.$$
  $$f'(x) = 2, g'(y) = \frac{1}{y}, h'(z) = \cos z$$
  $\ldots = h'(g \circ f)(x)(g \circ f)'(x)$
  $$= h'\Big(g\big(f(x)\big)\Big)\, g'\big(f(x)\big)f'(x) =$$
  $$= \cos(\log(2x-3))\frac{1}{2x-3} \cdot 2$$

TEOREMA-DERIVATA DELL'INVERSA

$f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ continua e invertibile in (a,b), $g = f^{-1}$ definita in $f((a,b))$.

Supponiamo che f sia derivabile in $x \in (a,b)$, con $f'(x) \neq 0$. Sia poi $y = f(x)$.

Allora g è derivabile in y, e

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\big(g(y)\big)}$$

Esempio:

- Per $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, la tangente di x è invertibile, con inversa arctan :

$$y = \tan x\,, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = \arctan y\,, y \in \mathbb{R}$$

$$(\arctan y)' = \frac{1}{\tan' x} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

- $\begin{cases} y = \sin x \\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin y \\ y \in [-1,1] \end{cases}$

sin x è continua e derivabile in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ma $(\sin x)' = \cos x = 0$ in $x = \pm\frac{\pi}{2}$.

Per $x \neq \pm\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow y \neq \pm 1$,

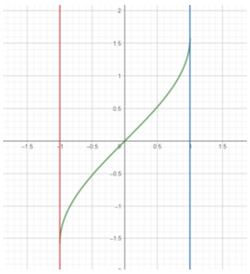
$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(sin\, x)'} = \frac{1}{\cos x} = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = 1/\sqrt{1-y^2}$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Notiamo che arcsin x è derivabile solo in $(-1,1)$:

$$f'_+(-1) = +\infty, f'_-(1) = +\infty$$



- Discutere la derivabilità di

$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & se\ x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & se\ x = 0 \end{cases}$, e

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

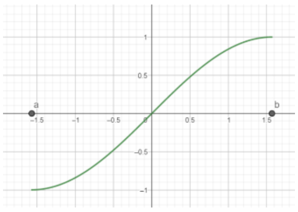
f non è continua in 0 $\Rightarrow$ non è derivabile in 0
Ma l'espressione di f' è ben definita anche per $x = 0$.
Dominio della derivata $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

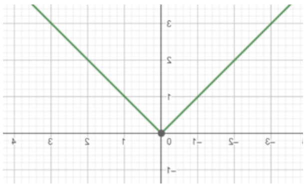
Problema: data una funzione, vogliamo essere in grado di determinarne i punti di estremo locale/globale.

<u>Passo 1:</u> ricerca dei candidati ad essere punti di estremo locale/globale.

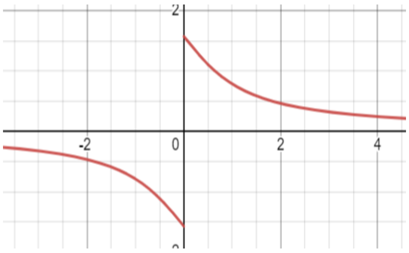
<u>Passo 2:</u> verifica del fatto che questi candidati siano davvero punti di estremo.



Se f è definita su un intervallo, gli estremi dell'intervallo possono essere punti di max/min.

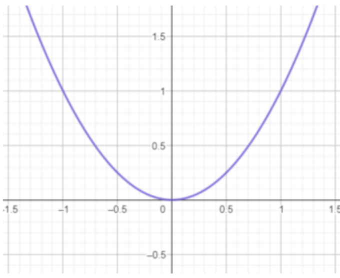


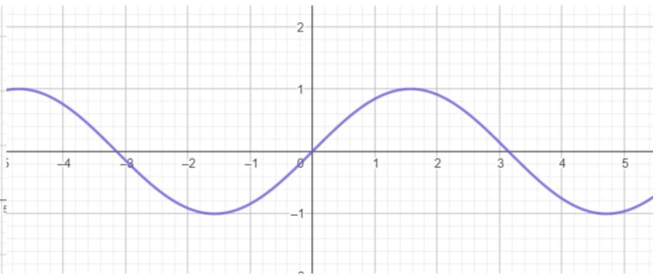
Punti di non derivabilità



$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) & se\ x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2} & se\ x = 0 \end{cases}$$

Punti di discontinuità possono essere punti di estremo.





Per quanto riguardai punti interni al dominio della funzione in cui f è derivabile, pensando ai casi che conosciamo sembrerebbe che se f ha un estremo locale in $x_0 \Rightarrow$ la tangente al grafico di f in x_0 è orizzontale, cioè $f'(x_0) = 0$.

Definizione:

f derivabile in x_0, e $f'(x_0) = 0$, allora x_0 si dice PUNTO CRITICO (o STAZIONARIO) di f.

<u>Teorema di Fermat</u>

$$f: (a, b) \to \mathbb{R}, \qquad a, b \in \mathbb{R}^*$$

Se x_0 è un punto di max/min locale per f, e f è derivabile in $x_0 \Rightarrow x_0$ è un punto critico, $f'(x_0) = 0$.

conseguenze: i candidati ad essere punti di max /min locale sono:

1) gli eventuali estremi del dominio
2) punti di non derivabilità
3) punti di discontinuità
4) punti critici

osservazione: Fermat dice che se x_0 è di max/min e f è derivabile in $x_0 \Rightarrow x_0$ è critico.

Ma la viceversa non è vero in genere.

Esempio: $f(x) = x^3$ ha un punto critico in 0 ($f'(x) = 3x^2$), ma è strettamente monotona.

Questo vale anche per gli "altri candidati".

Esempio: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ non è derivabile in 0 ma è strettamente monotona.

Dimostrazione:

supponiamo che x_0 sia di max locale:

$$\exists \delta > 0 \; t.c. f(x) \leq f(x_0) \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Per tali x:

- se $x > x_0$: $\dfrac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{>0}} \leq 0$

  passando al limite per $x \to x_0^+$, per la permanenza del segno

  $$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

- se $x < x_0$: $\dfrac{\overbrace{f(x)-f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x-x_0}_{<0}} \geq 0$

  passando al limite per $x \to x_0^-$, per la permanenza del segno

  $$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

d'altra parte, f è derivabile in $x_0 \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$

l'unica possibilità che $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ è che valgono entrambi 0 $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.□

Per affrontare il passo 2, ci servono 2 teoremi:

Teorema di Lagrange(o del valor medio)

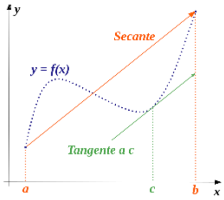
$f: [a, b] \to \mathbb{R}, [a, b]$chiuso e limitato.

f continua in $[a, b]$, e derivabile in (a, b).

Allora $\exists c \in (a, b)$ t.c. $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (1)

Pendenza della tangente al grafico in $(c, f(c))$

Pendenza della retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$



osservazione: c non è necessariamente unico.

Dimostrazione:

Equazione della retta per AB:

$$y(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

Consideriamo

$$w(x) = f(x) - y(x)$$

Allora

$$w(a) = f(a) - (f(a) + 0) = 0$$

$$w(b) = f(b) - (f(a) + (f(b) - f(a))) = 0$$

Inoltre, w è continua in $[a, b]$, ed è derivabile in (a, b).

$$w'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}:$$

dimostrare che esiste un punto $c \in (a, b)$ t.c. valga (1) equivale a dimostrare che w ha un punto critico in (a, b).

Per Weierstrass, w ha un punto di min globale x_m e un punto di max globale x_M in $[a, b]$.

CASO 1: w è costante. In tal caso

$$w'(x) = 0 \; \forall x \in (a, b)$$

$\Rightarrow$ogni punto $c \in (a, b)$ è critico per w, e il teorema è dimostrato.

CASO 2: w non è costante: $w(x_m) < w(x_{max})$

Non può succedere che x_m e $x_M$sono i 2 estremi di $[a, b]$, perché $w(a) = w(b) = 0$

$\Rightarrow$almeno uno tra x_m e x_M sta in (a, b).

Ma allora, per Fermat, $w'(x_m) = 0$ o $w'(x_M) = 0$

$\Rightarrow \exists$ almeno un punto $c \in (a, b)$ t.c. valga (1).□

osservazione: caso particolare $f(a) = f(b)$.

Il teorema dice che $\exists c \in (a, b)\ t.c. f'(c) = 0$ (Teorema di Rolle)

Test di monotonia per funzioni derivabili

$f: (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora:

1) f è crescente in $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in (a, b)$
   f è decrescente in $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) \leq 0 \forall x \in (a, b)$
   f è costante in $(a, b) \Leftrightarrow f'(x) = 0 \forall x \in (a, b)$
2) $f'(x) > 0\ \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ strettamente crescente
   $f'(x) < 0\ \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ strettamente decrescente
   osservazione: in 2), " $\Leftarrow$ " non sono vere in generale.
   Esempio: $f(x) = x^3$ è strettamente crescente ma $f'(0) = 0$.

Dimostrazione:

CASO 1), solo per f crescente.

Supponiamo che f sia crescente in (a, b).

Allora

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq 0 \quad \forall x, z \in (a, b)$$

Infatti, se $z > x$:

$$\left.\begin{array}{c} f(z) - f(x) \geq 0 \\ z - x > 0 \end{array} \quad per\ monotonia\right\} \Rightarrow \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq 0$$

Se $z < x$:

$$\left.\begin{array}{c} f(z) - f(x) \leq 0 \\ z - x < 0 \end{array} \quad per\ monotonia\right\} \Rightarrow \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \geq 0$$

Passando al limite per $z \to x$, per permanenza del segno $f'(x) \geq 0$.

Sia ora $f'(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$.

Consideriamo $a < x_1 < x_2 < b$.

Usiamo Lagrange su $[x_1, x_2]$ (valgono le ipotesi):$\exists c \in (x_1, x_2)$ t. c.

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq 0$$

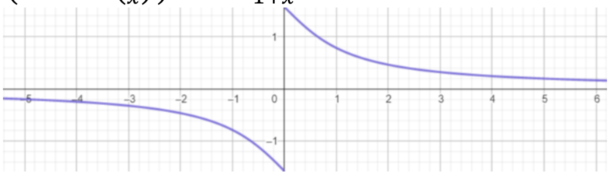
Cioè $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$, che è la monotonia desiderata. □

osservazione: il teorema funziona su intervalli.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x > 0 \\ 0 & se\ x < 0 \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ma f non è crescente

- $\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$



$f'(x) < 0$ ovunque è definita, ma f non è monotona su $\mathbb{R}$.

Teorema "del tappabucchi"

Data $f \in C^1(a,b)$ derivabile in (a,b) (salvo al più in x_0)

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = L \Rightarrow f$ è derivabile in x_0, $x_0 = L$

Dimostrazione:

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(c_n) \ \ x_0 < c_n < x_0 + h$ per Lagrange

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} f'(c_n) = f'(x_0) = L$$

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} e^x + x^2 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ \nexists \lim_{x \to x_0} f'(x) & x_0 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ si utilizza la definizione

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h + h^2 \sin\frac{1}{h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{e^h - 1}{h} + \frac{h^2 \sin\frac{1}{h}}{h} \right\} = 1$$

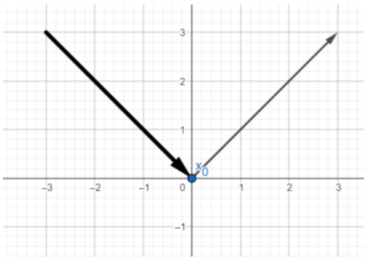
C.v.d.

osservazione: $f \in C^1(D) \Rightarrow$ funzione continua, derivabile 1^a continua.

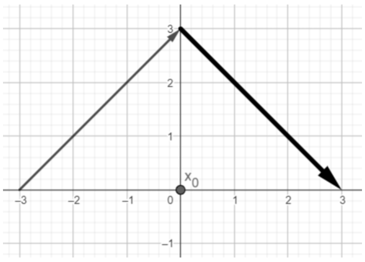
Torniamo alla ricerca di punti di max/min.

Una volta trovati i candidati, per capire se sono punti di max/min si può studiare la monotonia di f vicino a x_0.

Se x_0 è un candidato, f è $\nearrow$ in un intorno destro di x_0, f è decrescente in un intorno sinistro di x_0, allora x_0 è punto di min locale



- Se x_0 è un candidato, f è $\nearrow$ in un intorno sinistro di x_0, allora x_0 è punto di max locale.



Punti di estremo locale $\leftrightsquigarrow$ cambi di monotonia.

$$f(x) = x^3$$

$f'(x) = 3x^2 > 0 \;\; \forall x \neq 0 \Rightarrow f$ è strettamente $\nearrow$ in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$: non c'è cambio di monotonia.

Esempio:

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-1,2]$.

Cerchiamo i punti di max / min di f

- Candidati: $-1, 2$, punti critici? 0

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \cdot 2x$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

- Monotonia: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

0 è punto di max locale $\Rightarrow$0 è max assoluto

-1, 2 sono punti di min locale.

$f(-1) = \frac{1}{2}, f(2) = \frac{1}{5} < \frac{1}{2} \Rightarrow$ 2 è punto di min assoluto.

APPLICAZIONE2: monotonia di successioni

Studiamo la convergenza di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n}$$

$a_n = (-1)^n b_n$, $b_n = \frac{\log n}{n}$.

Volendo usare Leibniz, dovremmo mostrare che $b_n \searrow$ (definitivamente).

Osserviamo che $b_n = f(n)$, dove $f(x) = \frac{\log x}{x}$.

Se mostriamo che f è definitivamente decrescente per $x \to +\infty \Rightarrow$ anche b_n è definitivamente decrescente.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x} < 0 \;\; \forall x > e$$

Per il test di monotonia, f è definitivamente decrescente per $x \to +\infty \Rightarrow b_n \searrow$ definitivamente, $b_n \to 0$ per $n \to \infty$

$\Rightarrow$ per Leibniz, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n}$ converge.

Una generalizzazione di Lagrange è il ***teorema di Cauchy DEL VALOR MEDIO***

$f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a, b]$, derivabile in (a, b). Allora esiste $c \in (a, b)$ t.c.

$$\big(g(b) - g(a)\big) f'(c) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

osservazione: $g(x) = x$ ci dà Lagrange.

Teorema di de l'Hôpital

f, g derivabili in $[a, b] \setminus \{x_0\}$, con $g(x), g'(x) \neq 0$ definitivamente per $x \to x_0$.

Se

i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$, e questo limite vale 0 o $\pm\infty$.

ii) Esite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

iii) $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Valgono enunciati analoghi per i limiti $x \to a^+$ o $x \to b^-$.

osservazione: è importante suppore che $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Per esempio, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = 1$, ma il limite del quoziente delle derivate non esiste.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1-\cos x}$ non esiste.

Dimostrazione:

la dimostriamo nel caso in cui $f(x), g(x) \to 0$ per $x \to x_0$.

Prolunghiamo il f e g per continuità in x_0, ponendole uguali a 0.

Se $x \neq x_0$, diciamo $x > x_0$, e usiamo Cauchy in $[x_0, x]$:

$$\exists c_x \in [x_0, x]\ t.c. \big(g(x) - g(x_0)\big) f'(c_x) = g'(c_x)(f(x) - f(x_0))$$

$$\Rightarrow \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Passiamo al $\lim_{x\to x_0^+}$

$$x_0 < c_x < x \Rightarrow c_x \to x_0^+$$

$$\lim_{c_x\to x_0^+} \underbrace{\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}}_{l} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

C.v.d.

Applicazione: gerarchia degli ∞

Avevamo anticipato che $\forall \alpha, \beta > 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$ (se a numeratore mettiamo $b^{\alpha x}$, con $b > 1$, non cambia nulla)

È una forma di indecisione del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Consideriamo come primo passo $\beta = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} = \alpha \frac{e^{\alpha x}}{1} = +\infty$$

$$\frac{(e^{\alpha x})'}{x'} = \alpha \frac{e^{\alpha x}}{1} = +\infty$$

Caso generale $\beta > 0$

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = \left(\frac{e^{\frac{\alpha x}{\beta}}}{x}\right)^\beta \to (+\infty)^\beta = +\infty \ \ \forall \beta > 0$$

$$= \frac{e^{\gamma x}}{x} \text{ per } \gamma = \frac{\alpha}{\beta} > 0 \qquad \to +\infty \text{ per } x \to +\infty$$

Si deduce anche che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \forall a > 1, \forall \alpha, \beta > 0$$

Dimostrazione:

cambiamo variabile, ponendo $t = \log_a x \Leftrightarrow x = a^t$

$$x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log_a x)^\alpha}{x^\beta} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^\alpha}{a^{\beta t}} = 0$$

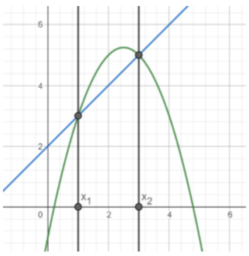
Esempio: $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x} = \frac{0}{0}$ F.I.

$x - \sin x \sim x - x = 0$ cancellazione della parte principale

$\frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \frac{1 - \cos x}{3x^2} \to \frac{1}{6}$ per $x \to 0$

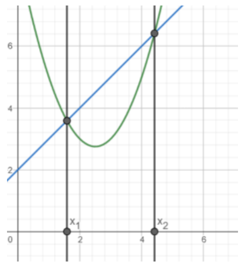
$\Rightarrow$ per de l'Hôpital, $\lim_{(x \to 0)} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$

CONCAVITÀ E CONVESSITÀ



Concava

Convessa



Definizione: $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Si dice che f è CONVESSA in I (rispettivamente CONCAVA) se $\forall x_1, x_2 \in I$ il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ con $(x_2, f(x_2))$, detto CORDA, sta interamente sopra il grafico di f (rispettivamente sotto il grafico di f).

Analiticamente, f è convessa in I se

$$f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2) \ \ \forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in [0,1]$$

Se c'è $<$ $\big(\forall t \in (0,1)\big)$ si dice che f è STRETTAMENTE CONVESSA. Se c'è $\geq$ si dice che f è CONCAVA. Se c'è $>$ si dice che f è STRETTAMENTE CONCAVA.

Verificare la convessità a mano è complicato.

TEST DI CONVESSITÀ

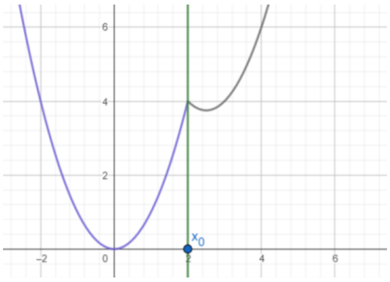
$f: (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabili due volte in (a, b).

1) f è convessa in $(a,b) \Leftrightarrow f"(a,b) \geq 0 \forall x \in (a,b)$
   f è concava in $(a,b) \Leftrightarrow f"(a,b) \leq 0 \forall x \in (a,b)$
   f è lineare in (a,b), $f(x) = mx + q, m, q \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f"(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$
2) $f"(x) > 0 \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ è strettamente convessa
   $f"(x) < 0 \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ è strettamente concava

osservazione: nel punto 2, non vale " $\Leftarrow$ "

Esempio: $f(x) = x^4$ è strettamente convessa, ma $f"(x) = 12x^2$ si annulla in 0.

Inoltre, il test vale su intervalli.



f è convessa in $(-\infty, x_0) \cup (x_0, +\infty)$ ma non è convessa in $\mathbb{R}$.

In generale, data $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, non è detto che sia concava o convessa su (a,b). Ci possono essere cambi di convessità.

Definizione: $f: (a,b) \to \mathbb{R}$. $x_0 \in (a,b)$ si dice FLESSO se f è derivabile in x_0, oppure $f'(x_0) = +\infty$, oppure $f'(x_0) = -\infty$, e se f è strettamente convessa (rispettivamente concava) in un intorno sinistro di x_0, e strettamente concava (rispettivamente convessa) in un intorno destro di x_0.

TEOREMA:

Se $x_0 \in (a,b)$ è un punto di flesso per f ed f è derivabile due volte in x_0

$\Rightarrow f''(x_0) = 0$

osservazione: " $\Leftarrow$ " è falso in generale.

Esempio: $f(x) = x^4$ non ha flessi, e $f''(0) = 0$.

Siamo ora in grado di tracciare il grafico di un gran numero di funzioni.

o-piccolo e formula di Taylor

f, g definite in un intorno di x_0, bucato.

Supponiamo che $g \neq 0$ in questo intorno bucato.

Definizione: si dice che f è UN O-PICCOLO DI g per $x \to x_0$, $f = o(g)$ per $x \to x_0$, $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$, se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

osservazione:

1) Se g è infinitesima per $x \to x_0$, $f = o(g)$ per $x \to x_0$ significa che f è un infinitesima di ordine superiore a g.
2) $f = o(1)$ per $x \to x_0$: significa che
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$
3) $f \sim g$ per $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
$$\Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0$$
$$\Leftrightarrow f - g = o(g) \text{ per } x \to x_0$$
$$\Leftrightarrow f = g + o(g) \text{ per } x \to x_0$$
Esempio: $\sin x = x + o(x)$ per $x \to 0$
4) $x_0 \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < \beta$. Allora $|x - x_0|^\beta = o(|x - x_0|^\alpha)$ per $x \to x_0$. Infatti:
$$\lim_{x \to x_0} \frac{|x - x_0|^\beta}{|x - x_0|^\alpha} = \lim_{x \to x_0} |x - x_0|^{\beta - \alpha} = 0$$
Se $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, si possono togliere i valori assoluti.
Esempio:
$x^2 = o(x)$ per $x \to 0$
$x^3 = o(x)$ per $x \to 0$
$x^2 - x^3 = o(x) - o(x) = 0$? No.
Il termine $o(g)$ non indica una funzione, ma tutta una famiglia di funzioni
$$\underset{per\ x \to x_0}{o(g)} = \left\{ f : \frac{f}{g} \to 0, per\ x \to x_0 \right\}$$
$f = o(g)$ per $x \to x_0$

Non è = in senso classico, ma è una notazione.

Algebra degli o-piccoli

1) $o(f) \pm o(f) = o(f) \qquad$ per $x \to x_0$
Verifica:
$\phi_1 = o(f), \phi_2 = o(f) \qquad$ per $x \to x_0$
Vogliamo verificare che $\frac{\phi_1(x) \pm \phi_2(x)}{f(x)} \to 0 \quad$ per $x \to x_0$
$$= \underbrace{\frac{\phi_1(x)}{f(x)}}_{\to 0} \pm \underbrace{\frac{\phi_2(x)}{f(x)}}_{\to 0} \to 0$$
2) $a \cdot o(f) = o(f)$
$o(af) = o(f) \qquad$ per $x \to x_0, \forall a \neq 0$
Verifica:
$\frac{\phi_1(x)}{f(x)} \to 0$ per $x \to x_0$
la 1°: vogliamo verificare che $\phi_1 = o(f)$ per $x \to x_0 \Rightarrow a\phi_1 = o(f)$ per $x \to x_0$, ma allora
$$a \cdot \frac{\phi(x)}{f(x)} \to a \cdot 0 = 0 \text{ per } x \to x_0$$
$$a\phi_1 = o(f) \text{ per } x \to x_0$$
3) Se $f = o(g)$ per $x \to x_o \Rightarrow o(f) + o(g) = o(g)$ per $x \to x_0$

$o(f)$ = "termine piccolo"
$o(g)$ = "termine grande"

Verifica:

$\phi_1 = o(f)$ $\phi_2 = o(g)$ per $x \to x_0$

$$\frac{\phi_1(x) + \phi_2(x)}{g(x)} = \frac{\phi_1(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{\phi_2(x)}{g(x)} \to 0$$

per $x \to x_0$.

4) $f \cdot o(g) = o(fg)$ per $x \to x_0$

Verifica:

$\left(o(x^2) = xo(x) = x^2 o(1)\right)$

$o(f) \cdot o(g) = o(fg)$ per $x \to x_0$

5) $o\big(f + o(f)\big) = o(f)$

$o\big(o(f)\big) = o(f)$ per $x \to x_0$

Definizione: f derivabile n volte in x_0. Si definisce il POLINOMIO DI TAYLOR di ordine n centrato in x_0 come

$$T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

osservazione: se $x_0 = 0$, $T_{n,0}$ si dice anche polinomio di MAC LAURIN

Teorema-Formula di Taylor (o di MAC LAURIN) con resto Peano

f derivabile n volte in un intorno di $x_0 \in (a, b)$.

Allora

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + o((x - x_0)^n) \text{ per } x \to x_0$$

In altri termini,

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + R_{n,x_0}(x),$$

dove $R_{n,x_0}(x)$, detto RESTO DI PEANO, è un o-piccolo di $(x - x_0)^n$ per $x \to x_0$, cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n,x_0}(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

osservazione: più f è derivabile, meglio possiamo approssimarla con dei polinomi.

osservazione: f derivabile in x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow 0 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)f(x - x_0)}{x - x_0}$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = o(x - x_0) \text{ per } x \to x_0,$$

che è Taylor con $n = 1$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ per } x \to x_0$$

osservazione: si può dimostrare che $T_{n,x_0}(x)$ è l'UNICO polinomio di grado n t.c. $f(x) = T_{n,x_0}(x) + o((x - x_0)^n)$ (UNICITÀ DEL POLINOMIO DI TAYLOR).

Esempio: $f(x) = 1 + x + o(x)$ per $x \to 0 \Longrightarrow 1 + x = T_{1,0}(x)$

$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1$

Dimostrazione(del teorema):

Per semplicità ci concentriamo sul caso $n = 2$, con $x_0 = 0$.

Dimostriamo che se f è derivabile 2 volte in 0, allora

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + R(x),$$

dove $R(x) = o(x^2)$ per $x \to x_0$.

$$\Longleftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{1}{2}f''(0)x^2}{x^2} = 0 = \frac{0}{0} \quad F.I.$$

Proviamo a usare de l'Hôpital: il quoziente delle derivate è

$$\frac{f'(x) - f'(0) - f''(0)x}{2x}$$

È vero che tende a 0?

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0) - f''(0)x}{2x} = 0$$

$$\Longleftrightarrow f'(x) - f'(0) - f''(0)x = o(x) \text{ per } x \to 0$$

$$\Longleftrightarrow f'(x) = f'(0) + f''(0)x + o(x) \text{ per } x \to 0$$

Noi sappiamo che f' è derivabile 1 volta in 0 $\Longrightarrow$ per f', vale Taylor all'ordine 1(vedi 2° osservazione dopo l'enunciato)

$\Longrightarrow$ vale il limite $\Longrightarrow$ per de l'Hôpital, vale anche il limite, che è la nostra tesi.

Per n qualsiasi, si ragiona per induzione.

Alcuni sviluppi notevoli

1) $f(x) = e^x \quad \forall n, \forall x \Longrightarrow f^{(n)}(0) = 1 \;\; \forall n$
   Di conseguenza

$$T_{n,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \text{ per } x \to 0, \forall n$$

2) $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$
$f'''(x) = -\cos x$, $f^{(IV)}(x) = \sin x$
$\Longrightarrow$ la derivata "si ripete" con periodicità 4:
$f(x) = f^{(IV)}(x) = f^{(VIII)}(x) = \cdots$
$f'(x) = f^{(V)}(x) = \cdots$
$f''(x) = f^{(VI)}(x) = \cdots$
$f'''(x) = f^{(VII)}(x) = \cdots$

In particolare

$f(0) = 0 = f^{(IV)}(0) = \cdots$

$f'(0) = 1 = f^{(V)}(0) = \cdots$

$f''(0) = 0 = f^{(VI)}(0) = \cdots$

$f'''^{(0)} = -1 = f^{(VII)}(0) = \cdots$

Riassumendo: $f^{(2k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$

Quindi

$$T_{2n+1,0}(x) = 0 + x + 0 - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

per $x \to 0$.

- $f(x) = \cos x$

$$T_{2n,0} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

- $f(x) = \log(1+x)$
$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x}$
$(\log(1+x))'' = -\frac{1}{(1+x)^2}$
$(\log(1+x))''' = -1 \cdot (-2)(1+x)^{-3} = 2(1+x)^{-3}$

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!\Longrightarrow T_{n,0}(x)=x-\frac{x^2}{x}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$f(x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)\qquad \text{per } x\to 0.$$

OPERAZIONI SU SVILUPPI DI TAYLOR

Esempio:

1) sviluppare all'ordine 2

$$\sin x-\log(1+x)=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)+o(x^2)=$$

$$=\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

2) $e^x\log(1+x)$ sviluppo all'ordine 2

$$e^x\log(1+x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+x^2-\frac{x^3}{2}+xo(x^2)+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}o(x^2)+o(x^2)x-\frac{o(x^2)x^2}{2}+o(x^2)o(x^2)=$$

$$=x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

3) Sviluppare all'ordine 3 vicino a $x=0$ $e^{\sin x}$

Poniamo $t=\sin x\,, x\to 0\Rightarrow t\to 0$

$$e^t=1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+o(t^3)$$

$$=1+\sin x+\frac{(\sin x)^2}{2}+\frac{(\sin x)^3}{6}+o((\sin x)^3)$$

$$=1+\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)+\frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2}{2}+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3+o\left(\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3\right)=$$

$$=1+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)+\frac{1}{2}\left(x^2+\underbrace{\frac{x^6}{36}-2\frac{x^4}{6}+o(x^6)+2xo(x^3)-2\frac{x^3}{6}o(x^3)}_{=o(x^3)}\right)+$$

$$+\frac{1}{6}\left(x^3+o(x^3)\right)+\underbrace{o\left(x^3+o(x^3)\right)}_{=o(x^3)}=1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)=$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2}+\underbrace{0x^3+o(x^3)}_{=o(x^2)}\text{per } x\to 0$$

$$\alpha x^3+o(x^3)=o(x^2)\quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$$

4) Sviluppare all'ordine 3 $\quad \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad$ per $x\to+\infty$

Poniamo $t=\frac{1}{x}$, $x\to+\infty\Rightarrow t\to 0^+$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\quad \text{per } x\to+\infty$$

In modo simile, per $\alpha>0$

$\sin(|x|^\alpha)=|x|^\alpha-\frac{|x|^{3\alpha}}{6}+o(|x|^{3\alpha})$ per $x\to 0$

5) calcolare, al variare di $\alpha>0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x^3)+6\sin x-6x}{x^\alpha}=\left[\frac{0}{0}\right]\quad F.I.$$

Sviluppiamo il numeratore:

$$\sin(x^3)+6\sin x-6x=x^3-\frac{x^9}{6}+o(x^9)+6\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-6x=$$

$$=-\frac{x^9}{6}+o(x^9)+o(x^3)=o(x^3)$$

Non ci basta, dobbiamo andare avanti con lo sviluppo del seno

$$\ldots=x^3-\frac{x^9}{6}+o(x^9)+6\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right)-6x=\frac{6}{5}x^5+o(x^5)$$

Allora

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x^3)+6\sin x-6x}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{6}{5!}x^5+o(x^5)}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}x^{5-\alpha}\underbrace{\left(\frac{6}{5!}+o(1)\right)}_{\to\frac{6}{5!}}=$$

$$=\begin{cases}0 & \alpha<5\\ \frac{6}{5!} & \alpha=5\\ +\infty & \alpha>5\end{cases}$$

Esempio: studio locale di funzioni

tracciare il grafico della funzione $f(x)=\left(\frac{x^4}{1-x}\right)^{\frac{1}{4}}$ in un intorno di $x=0$.

Idea: se troviamo uno sviluppo di f per $x \to 0$, il grafico di f in un intorno di 0 coincide col grafico dato dai primi termini dello sviluppo

$$f(x) = |x| \underbrace{(1-x)^{-\frac{1}{4}}}_{\substack{\text{è derivabile} \\ \text{in } 0 \\ \phi(x)}}$$

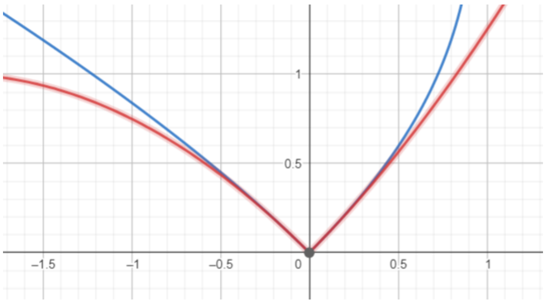
$$\phi(0) = 1, \phi'(x) = -\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{5}{4}} \cdot (-1)$$

$$\phi'(0) = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow \phi(x) = 1 + \frac{1}{4}x + o(x)$ per $x \to 0$

$\Rightarrow f(x) = |x|\left(1 + \frac{x}{4} + o(x)\right) = \underbrace{|x| + \frac{x|x|}{4}}_{\substack{\text{il grafico di } 0 \\ \text{è dato dai primi} \\ \text{termini dello} \\ \text{sviluppo}}} + o(x^2)$ per $x \to 0$

$$|x| + \frac{x|x|}{4} = \begin{cases} -x - \dfrac{x^2}{4} & se\ x < 0 \\ x + \dfrac{x^2}{4} & se\ x > 0 \end{cases}$$



"Vicino" a 0, questo è il grafico di f.

Uso delle derivate seconde, per i max/min

TEOREMA

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile due volte in (a,b) $x_0 \in (a,b) t.c. f'(x_0) = 0$

i) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è un punto di minimo locale
ii) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è un punto di massimo locale

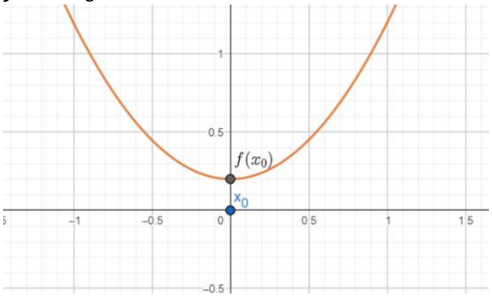
osservazione: $f''(x_0) = 0$ non dà info.

"Dimostrazione:"

Facciamo uno studio locale:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \cancel{f'(x_0)(x-x_0)} + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2}_{\text{questo determina il grafico di } f \text{ vicino a } 0} + o((x-x_0)^2)$$

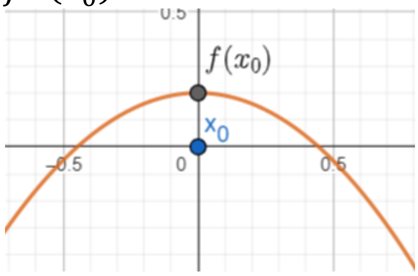
i) $f''(x_0) > 0$



$$f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

Coefficiente positivo, abbiamo una parabola, e x_0 è punto di min locale.

ii) $f''(x_0) < 0$



Il coefficiente di $(x - x_0)^2$ è < 0
$\Rightarrow x_0$ è punto di max locale. $\square$

Esempio:

$f(x) = x^2 \cos(x^3)$

Determinare $f^{13}(0)$ e $f^{14}(0)$.

Usiamo Taylor: per $t \to 0$

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)$$

$\Rightarrow \cos(x^3) = 1 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^{12}}{4!} + o(x^{12})$ per $x \to 0$

$$\Rightarrow x^2 \cos(x^3) = \underbrace{x^2 - \frac{x^8}{2} + \frac{x^{14}}{4!}}_{\substack{\text{per unicità del} \\ \text{polinomio, questo è} \\ T_{14,0}(x)}} + o(x^{14})$$

$$T_{14,0}(x) = \sum_{k=0}^{14} \frac{f^k(0)}{k!} x^k$$

Quindi $\frac{f^{13}(0)}{13!}$ = "coefficienti di x^{13} in $T_{14,0}(x)$" $= 0$

$\frac{f^{(14)}(0)}{14!}$ = "coefficienti di x^{14} in $T_{14,0}(x)$" $= \frac{1}{4!} = \frac{1}{24} \Rightarrow f^{14}(0) = \frac{14!}{24}$

Esempio:

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} \right)^n = \left(\frac{1^{+\infty}}{e} \right)^{+\infty}$ F.I.

$$\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)^n = e^{n\cdot\log\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right)}$$

$$n\cdot\log\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}\right) = n\left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right] =$$

$$= n\left[n\cdot\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1\,\right]$$

Usiamo Taylor: $\log 1 + t = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$

$t = \frac{1}{n} \rightsquigarrow \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ per $n \to \infty$

$\ldots = n\left[n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1\right] = n\left[-\frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] = -\frac{1}{2} + o(1) \to \frac{1}{2}$ per $n \to \infty$

Quindi il limite cercato vale $e^{-\frac{1}{2}}$.

FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE

$$e^x = T_{3,0}(x) + R_{3,0}(x)$$

Possiamo stimare $e^{\frac{1}{2}}$ usando la formula precedente col resto di Peano?

$$e^{\frac{1}{2}} = T_{3,0}\left(\frac{1}{2}\right) + R_{3,0}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Sul resto, sappiamo solo che $R_{3,0}(x) = o(x^3)$ per $x \to 0$

Non sappiamo nulla sul resto “lontano da 0”.

FORMULA DI TAYLOR (o MAC LAURIN) CON RESTO DI LAGRANGE

$f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile $(n+1)$-volte in (a,b), con $x_0, x \in (a,b)$. Allora $\exists c$ compreso tra x_0 e x t.c. $f(x) = T_{n,x_0}(x) + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

osservazione: c non è esplicito. c dipende da x_0, x e n.

osservazione: $n = 0 \Rightarrow$ teorema di Lagrange

Torniamo al nostro problema di stimare $e^{\frac{1}{2}}$.

Sappiamo che $e < 4$.

Per Taylor con Lagrange $\quad f(x) = e^x, x_0 = 0, x = \frac{1}{2}$

$$e^{\frac{1}{2}} = T_{(3,0)}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{e^c}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\left|e^{\frac{1}{2}} - T_{(3,0)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{e^c}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Per un c tra 0 e $\frac{1}{2}$.

Errore che commetto nell'approssimare $e^{\frac{1}{2}}$ con $T_{(3,0)}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{79}{48}$

$e^x \nearrow \quad c < \frac{1}{2} \qquad \leq \frac{e^{\frac{1}{2}}}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \leq \frac{4^{\frac{1}{2}}}{4!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{8} \simeq 0{,}0052$

Quindi la conoscenza di $T_{3,0}$ ci permette di avere informazioni anche lontano da 0, usando il resto di Lagrange.

SERIE DI TAYLOR (cenni)

Supponiamo di avere una funzione f derivabile ∞ volte

$\forall n \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + E_n(x, x_0)$$

Dove $E_n(x, x_0) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, c compreso tra x_0 e x, dipendente da $x_0, x,$ e da n.

DOMANDA: possiamo passare al lim per $n \to \infty$?

La serie a 2° membro converge sempre?

Qual è la relazione tra la serie e $f(x)$?

In alcuni casi "fortunati" la serie converge a $f(x)$.

- $f(x) = e^x$. $\forall n, \forall x \; \exists c$ (dipendente da n e x) t.c.

  $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1}$$

  c compreso tra 0 e x.
  per fissare le idee, consideriamo $x > 0$.
  Volendo passare al limite per $n \to \infty$, consideriamo il resto:

  $$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \underbrace{\leq}_{c>0} \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!} \underbrace{\leq}_{c<x} \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$n \to \infty \downarrow\to 0 \qquad \to 0 \downarrow per\ confronto \quad \to 0 \downarrow n \to \infty$$

$x \in \mathbb{R}$ fissato

(il fattoriale prevale su x^{n+1})

Quindi, torniamo a ⍰, abbiamo che

$$e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}_{\substack{serie\ di \\ Taylor}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(osservazione: la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$ fissato)

- $f(x) = \cos x$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

FORMULA DI EULERO

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta\ \forall\theta \in \mathbb{R}$

formalmente

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \frac{i^{2k}\theta^{2k}}{(2k)!} + \frac{i^{2k+1}\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cdots$$

$$i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$$

$$i^{2k+1} = i \cdot i^{2k} = i(-1)^k$$

$$\ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^k}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos\theta + i\sin\theta$$

CALCOLO INTEGRALE

1) ***Problema inverso della derivata ⇝ integrale indefinito***
2) ***Calcolo di aree di figure piane, lunghezze di curve, etc.***

1) *Definizione:*

Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo. Diciamo che G è una PRIMITIVA di f su I se G è derivabile in I e se $G'(x) = f(x)\ \forall x \in I$.

Esempio: x^2, x^2+1 sono primitive di $2x$.

Problema: data f, è vero che f ammette una primitiva?

se sì, possiamo calcolarla?

TEOREMA

Se f continua su un intervallo $I \Rightarrow f$ ha una primitiva.

PROPOSIZIONE SULLE PRIMITIVE DI UNA FUNZIONE

Sia $G(x)$ una primitiva di $f(x)$. allora

i) $G(x) + c$ è una primitiva di $f(x)$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

ii) Se $H(x)$ è un'altra primitiva di $f(x)$, allora $H(x) - G(x) = c$ per qualche $c \in \mathbb{R}$.

conseguenze:se f ha primitiva, ne ha infinite che sono identificate a meno di costanti additive.

Dimostrazione:

i) $(G(x)+c)' = G'(x) + (c)' = G'(x) = f(x)$

ii) $\big(H(x) - G(x)\big)' = H'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$

Siccome lavoriamo su un intervallo, deduciamo che $H(x) - G(x) = c, c \in \mathbb{R}$.

(vedi test di monotonia).

Definizione: data $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, l'inverso della primitiva di f si dice INTEGRALE INDEFINITO di f,

$$\int f(x)dx$$

Primitive delle funzioni elementari

$f(x)$	$G(x)$	(derivando G si trova f)
$K \in \mathbb{R}$	Kx	$(Kx)' = K$

$\alpha \neq -1, x^\alpha$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{\alpha+1}{\alpha+1}x^\alpha$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	
$\sin ax$	$-\frac{\cos ax}{a}, \forall a \in \mathbb{R}$	
$\cos ax$	$\frac{\sin ax}{a}$	
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	
e^x	e^x	
$a > 0 \quad a^x$	$\frac{a^x}{\log a}$	
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	$\left(\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a} = = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\frac{a^2+x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2+x^2}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\frac{1}{a}\arcsin\frac{x}{a}$ $-\frac{1}{a}\arccos\left(\frac{x}{a}\right)$	

Nella tabella abbiamo riportato una primitiva. Per ottenere tutte, si aggiunge $c \in \mathbb{R}$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c \quad , c \in \mathbb{R}.$$

TECNICHE DI INTEGRAZIONE

Linearità dell'integrale

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g$ aventi primitiva su un intervallo I.

Allora $\alpha f + \beta g$ ha primitiva in I, e

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

Esempio: $\int (x^3 + \sin x)dx = \frac{x^4}{4} - \cos x + c, c \in \mathbb{R}$

INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

$G: I \to \mathbb{R}$ derivabile, I intervallo, $G'(x) = f(x)$.

$\phi: J \to I$ derivabile, J intervallo.

Sappiamo che

$$\frac{d}{dx}\big(G \circ \phi(x)\big) = G'\big(\phi(x)\big)\phi'(x) = (f \circ \phi)(x)\phi'(x)$$

Dimostrazione:

Quindi

$$\int (f \circ \phi)(x)\phi'(x)dx = \int \frac{d}{dx}(G \circ \phi)(x)dx = (G \circ \phi)(x) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Per trovare la primitiva di $(f \circ \phi)\phi'$, ci basta conoscere una primitiva di f e comporla con ϕ.

Esempio:

- $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$
  La funzione sotto il simbolo $\int$, detta FUNZIONE INTEGRANDA, dipende solo da $e^x \Rightarrow \phi(x) = e^x$. Notiamo che $\phi'(x) = e^x$.
  Quindi, se poniamo $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, abbiamo che
  $$\frac{e^x}{1 + e^{2x}} = f\big(\phi(x)\big)\phi'(x)$$
  Quindi, per la formula di integrazione per sostituzione, abbiamo che
  $$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = G(e^x) + c$$
  dove $c \in \mathbb{R}$, e G è una primitiva di $f \Rightarrow G(t) = \arctan(t)$
  $$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \arctan(e^x) + c, \qquad c \in I$$
  Formalmente, poniamo $e^x = t: t = \phi(x)$
  $$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$$
  $\frac{dt}{dx} = \phi'(x) = e^x$ (trattiamo $\frac{dt}{dx}$ come una frazione.)
  $\Rightarrow dt = e^x dx$
  $\ldots = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + c$
  $= \arctan(e^x) + c, c \in \mathbb{R}$
- $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \rightsquigarrow \frac{dt}{dx} = -\sin x \Rightarrow \sin x\, dx = -dt$

  $t = \cos x$

  $\ldots = -\int \frac{dt}{t} = -\log|t| + c = -\log|\cos x| + c, \ c \in \mathbb{R}$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE 1

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(t)dt\,, \qquad t = f(x)$$

Seconda forma

Nel discorso precedente, supponiamo che ϕ sia invertibile.

Allora si può leggere la formula di integrazione per sostituzione da destra a sinistra:

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(y))\phi'(y)dy\,, \qquad x = \phi(y) \Leftrightarrow y = y^{-1}(x)$$

Ci sono casi in cui non lo sappiamo calcolare

Magari sappiamo calcolare questo

Dimostrazione:

$$\int f(\phi(y))\phi'(y)dy\,, \mathfrak{F}(y) + c$$

Allora

$$\int f(x)dx = \mathfrak{F}(\phi'(x)) + c$$

Esempio: $\int \sqrt{1-x^2}dx = ?$

Osserviamo che $x \in [-1{,}1]$. Possiamo allora

$x = \sin t$, che tra -1 e 1 per $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \;\Rightarrow dx = \cos t\, dt$$

$$\dots = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\, dt = \int |\cos t| \cos t\, dt = \int \cos^2 t\; dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 2t\, dt + \frac{1}{2}\int 1\, dt$$

Ricordiamo che $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1$

$$\Rightarrow \cos^2 t = \frac{\cos(2t)+1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{t}{2} + c$$

$$\underbrace{=}_{t=\arcsin x} \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + \frac{\arcsin x}{2} + c$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c,\quad c \in \mathbb{R}$$

INTEGRAZIONE PER PARTI

f, g derivabili in I intervallo $\Rightarrow (fg)' = f'g + fg' \Rightarrow fg' = (fg)' - f'g$

Dimostrazione:

Prendiamo l'$\int$ di entrambi i membri:

$$\int f(x)g'(x)dx = \int \left[\left(f(x)g(x)\right)' - f'(x)g(x)\right]dx$$
$$= \int \left(f(x)g(x)\right)' dx - \int f'(x)g(x)\,dx =$$
$$f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$
$$\int fg'dx = fg - \int f'g\ \ dx$$

Esempio:

- $\int xe^x\,dx$
  Usiamo la formula per parti con
  $$f = x \quad g' = e^x \Rightarrow f' = 1 \quad g = e^x$$
  $$= xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx = xe^x - e^x + c,\ \ c \in \mathbb{R}$$
- $\int \log x\,dx = \int 1\cdot \log x\,dx$
  $f = \log x \quad g' = 1$
  $\Rightarrow f' = \frac{1}{x} \quad g = x$
  $\ldots = x\log x - \int 1\,dx = x\log x - x + c, c \in \mathbb{R}$
- $\cos^2 x\,dx = \int \cos x\cos x\,dx$
  $f = \cos x \quad g' = \cos x$
  $\Rightarrow f' = -\sin x \quad g = \sin x$
  $$= \cos x\sin x + \int \sin^2 x\,dx = \cos x\sin x + \int 1dx - \int \cos^2 x\,dx$$
  Abbiamo dimostrato che
  $$\int \cos^2 x = \cos x\sin x + \int 1dx - \int \cos^2 x\,dx \Rightarrow \int \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos x\sin x + x) + c,$$
  $$c \in \mathbb{R}$$

INTEGRALI DI FUNZIONI RAZIONALI

$\int \frac{P(x)}{D(x)}dx$, dove P, D sono polinomi in x di grado n, m rispettivamente

PASSO BASE: ci si riconduce al caso $n < m$ con le DIVISIONE TRA POLINOMI CON RESTO

Esempio: divisione con resto

$P(x) = x^4 + 2x^2 + x - 1$ (dividendo)

$D(x) = x^2 + x + 1$ (divisore)

Valgono determinare due polinomi Q (quoziente) ed R(resto), con $grado(R) < grado(D)$, t.c.

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$

Scriviamo una tabella

$x^4 + 0x^3 + 2x^2 + x - 1$	$x^2 + x + 1$
$-x^4 - x^3 - x^2$ $-x^3 + x^2 + x - 1$	$Q(x) = x^2 - x + 2$
$+x^3 + x^2 + x$ $2x^2 + 2x - 1$	
$-2x^2 - 2x - 2$	
$R(x) = -3$	

Dividiamo il termine di grado massimo di P per quello di grado massimo di D

$$\frac{x^4}{x^2} = x^2$$

Moltiplico questo risultato per $D(x)$, e riporto sotto $P(x)$:

iteriamo fin quando troviamo un polinomio di $grado < grado(D)$ sotto P.

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x) = (x^2 - x + 2)(x^2 + x + 1) - 3$$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = x^2 - x + 2 - \frac{3}{x^2 + x + 1}$$

Grado del numeratore< grado del denominatore.

Fatto il passo base, ci sono da studiare i vari casi.

Funzioni razionali con denominatore di grado 1 $\quad a, b \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \log|ax + b| + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Denominatore di grado 2

Si divide in 3 sottocasi

1) $D(x) = 0$ ha due radici reali e distinte.

$$\rightsquigarrow D(x) = \alpha(x - x_1)(x - x_2)$$

In questi casi si procede con LA DECOMPOSIZIONE IN FATTI SEMPLICE

$$\frac{P(x)}{D(x)} = \frac{P(x)}{\alpha(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\eta}{x - x_1} + \frac{\mu}{x - x_2}\right]$$

Calcoliamo $\eta, \mu \in \mathbb{R}$

Esempio:

$$\int \frac{x}{x^2 - x - 2} dx$$

$x^2 - x - 2 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{(1 \pm \sqrt{1+8})}{2} = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -1 \end{matrix}$

$\Rightarrow x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$

Vogliamo scrivere

$$\frac{x}{x^2 - x - 2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$$

Per determinare a e b, osserviamo che

$$\frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1} = \frac{ax + x - bx - 2b}{(x-2)(x+1)} = \frac{(a+b)x + (a-2b)}{(x-2)(x+1)}$$

Questo è poi a

$$\frac{x}{x^2 - x - 2} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a - 2b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3b = 1 \\ a = 2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3} \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Di conseguenza,

$$I = \int \left[\frac{2}{3(x-2)} + \frac{1}{3(x+1)}\right] dx = \frac{2}{3}\log|x-2| + \frac{1}{3}\log|x+1| + c, c \in \mathbb{R}$$

2) $D(x) = 0$ è t.c. $D(x) = \alpha(x - x_1)^2$
(D ha due radici reali coincidenti).
Si ragiona per sostituzione:

Esempio:

$$\int \frac{2x+5}{(x+1)^2} dx = \int \frac{2(t-1)+5}{t^2} dt = \int \frac{2t+3}{t^2} dt = 2\int \frac{dt}{t} + 3\int \frac{dt}{t^2} = 2\log|t| - \frac{3}{t} + c$$

$$= 2\log|x+1| - \frac{3}{x+1} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

3) $D(x) = 0$ non ha radici reali.
Ci sono due ulteriori sottocasi

- Il numeratore ha grado 0. Si usa

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c, \qquad a > 0$$

Esempio:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 6}$$

$$x^2 + 2x + 6 = x^2 + 2x + 1 - 1 + 6 = (x+1)^2 + 5$$

$$= \int \frac{dx}{\left(\sqrt{5}\right)^2 + (x+1)^2} =$$

$$x + 1 = t \Rightarrow dt = dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{5}}\right) + c = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right) + c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

- Il numeratore ha grado 1

  Se il numeratore ha grado 1, cerchiamo a e $b \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\frac{P(x)}{D(x)} = \frac{aD'(x) + b}{D(x)}$$

  Trovati a e b,

$$\int \frac{P(x)}{D(x)} dx = a \int \frac{D'(x)}{D(x)} dx + b \int \frac{dx}{D(x)}$$

  Poniamo $D(x) = t$

$$D'(x)dx = dt = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|D(x)| + c$$

  Esempio:

$$\int \frac{x}{x^2 + 2x + 6} dx$$

  $D'(x) = 2x + 2$ cerchiamo a, b t.c.

$$x = a(2x + x) + b = 2ax + 2a + b \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\ldots = \frac{1}{2} \int \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 6} dx - \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 6}$$

$$= \frac{1}{2} \log(x^2 + 2x + 6) - \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{x + 1}{\sqrt{5}} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

4) DENOMINATORE DI GRADO >2

- $\int \frac{2x^2+3x-1}{(x+2)(x^2+1)} dx$

  Proviamo a spezzare le funzioni nel modo seguente

$$\frac{2x^2 + 3x - 1}{(x + 2)(x^2 + 1)} = \frac{a}{x + 2} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$$

  Un polinomio di grado minore del denominatore

$$= \frac{ax^2 + a + bx^2 + 2bx + cx + 2c}{(x + 2)(x^2 + 1)} \Rightarrow (a + b)x^2 + (2b + c)x + (a + 2c)$$

  È verificata solo se

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2b + c = 3 \\ a + 2c = -1 \end{cases} \ldots$$

- $\frac{x+1}{x^3(x+3)} = \frac{ax^3+bx+c}{x^3} + \frac{d}{x+3}$

  si ricava a, b, c, d e si integra.

Integrazione di alcune funzioni trigonometriche

Se abbiamo

$\int f(\sin x) \cos x \, dx$, poniamo $\sin x = t$, $\cos x \, dx = dt$

$\int f(t) \, dt$

Idem per

$\int f(\cos x)\sin x\,dx$; $\cos x = t, -\sin x\,dx = dt$

$-\int f(t)dt$

Esempio: $\int \sin^3 x \cos x\,dx = \int \underbrace{(1-\cos^2 x)\cos^2 x}_{=f(\cos x)} \sin x\,dx$

$$\cos x = t \Rightarrow -\sin x\,dx = dt$$
$$= -\int (1-t^2)t^2 dt = \cdots$$

Se in integrali simili al precedente compaiono solo potenze pari di $\sin x$ e $\cos x$, è convenente ricordare che

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x)), \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$$

Poi eventualmente si integra per parti

Esempio: $\int \cos^2 x \sin^2 x\,dx$

- Se si ha a che fare con

$$\int \cos(\alpha x)\sin(\beta x)\,dx, \int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx$$

... $\Rightarrow$ si usano le formule di Werner…

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

…o di prostaferesi

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

- Funzioni razionali di $\sin x$ e $\cos x$ (no casi precedenti)

$$\int \frac{1}{3+\sin x}dx$$

Si usa la sostituzione $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\Rightarrow x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

$\begin{cases} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$ (si dimostra)

Ci si riconduce quindi a un integrale di funzione razionale

$$\int \frac{1}{3+\sin x}dx = \int \left(\frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \underbrace{\int \frac{(1+t^2)}{3+3t^2+2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt}_{\grave{e}\ un\ \int\ di\ forma\ razionale}$$

$$= \cdots$$

Integrazione di alcune funzioni irrazionale

- $f(x) =$ funzione razionale di x e $\sqrt{a^2-x^2}$, per $a > 0$.

  (ad es.: $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \frac{x^3+x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \sqrt{a^2-x^2}$ $\frac{\sin x}{\sqrt{a^2-x^2}}$)

  Si pone $x = a\sin t \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

  $dx = a\cos t\, dt$

  $$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = |a||\cos t| = a\cos t$$

  Ci si riconduce all'$\int$ di funzioni trigonometriche.

  Esempio: $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

- $f(x) =$funzione razionale di x e $\sqrt{a^2+x^2}, a > 0$

  Usiamo le funzioni iperboliche

  $$\cosh^2 t - \sinh^2 x = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

  Quindi l'idea è di porre $x = a\sinh t$:

  $dx = a\cosh t\, dt,$

  $$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(1+\sinh^2 t)} = |a||\cosh t| = a\cosh t$$

  Esempio: $\int \sqrt{6+4x+x^2}\,dx = \int \sqrt{(x+2)^2+2}\,dx =$

  $$= \int \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\sinh t\right)^2+2}\,\sqrt{2}\cosh t\, dt$$

  Poniamo $x+2 = \sqrt{2}\sinh t \Rightarrow dx = \sqrt{2}\cosh t\, dt$

  $$= 2\int \cosh^2 t\, dt = \overset{per\ parti}{usiamo\ \cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}}$$

  $$= 2\int \frac{e^{2t}+2+e^{-2t}}{4}dt = \int 1\, dt + \frac{1}{2}\int e^{2t}dt + \frac{1}{2}\int e^{-2t}dt = t + \frac{e^{2t}-e^{-2t}}{4} + c =$$

  $$= t + \frac{\sinh 2t}{2} + c = t + \sinh t\cosh t + c = t + \sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t} + c =$$

  $$= SettSh\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x+2}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right)^2} + c$$

$\sinh t = \frac{x+2}{\sqrt{2}} \Rightarrow t = SettSh\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) \qquad c \in \mathbb{R}$

- $f(x) =$ funzione razionale di x e $\sqrt{x^2 - a^2}, a > 0, |x| \geq a.$

$$\cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t \quad \forall t$$

Poniamo

$$x = a \cosh t$$

Se $x \geq a \Rightarrow a \cosh t \geq a \quad \forall t \geq 0$
(cosh è invertibile su $[0, +\infty)$)
Se $x \leq -a\ldots$
$x \geq a. \qquad\qquad x = a \cosh t$
$dx = a \sinh t \ dt$
$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} = a|\sinh t| = a \sinh t$
Ci si riconduce anche qui al caso di $\int$ di funzioni iperboliche.

- $f(x) =$ funzione razionale di $x, x^{\frac{n_1}{m_1}}, \ldots, x^{\frac{n_p}{m_p}}.$

Esempio:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\left(2x^{\frac{1}{3}} + 3\right)x}$$

Si pone $x = t^m$, dove $m =$ mcm di $m_1, \ldots, m_p$
Le potenze diventano così intere.

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\left(2x^{\frac{1}{3}} + 3\right)x} dx$$

$$\begin{array}{ll} x^{\frac{n_1}{m_1}} = x^{\frac{1}{2}} & m_1 = 2 \\ x^{\frac{n_2}{m_2}} = x^{\frac{1}{3}} & m_2 = 3 \end{array} \Rightarrow m = 6$$

Poniamo $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$

$$\ldots = \int \frac{t^3}{(2t^2+3)t^6} \cdot 6t^5 dt = \int \frac{6t^3}{t(2t^2+3)} dt = \int \frac{6t^2}{2t^2+3} dt = \int \frac{6t^2+9-9}{2t^2+3} dt =$$

$$= 3\int \frac{2t^2+3}{2t^2+3} dt - 9\int \frac{dt}{2t^2+3} = 3t - 9\int \frac{dt}{2t^2+3} = \cdots$$

Alla fine, si sostituisce $t = x^{\frac{1}{6}}$.

osservazione: ci sono anche funzioni "semplici" che non si riescono a integrare elementarmente:

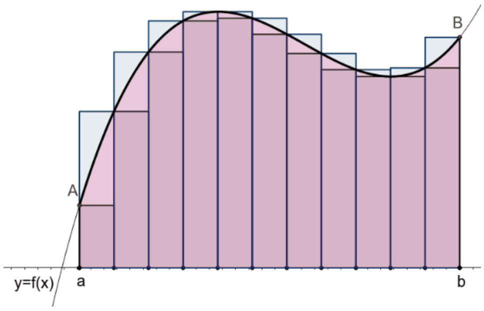
$f(x) = e^{-x^2}$ non ammette una primitiva esprimibile tramite funzioni elementari.

e^{-x^2} è continua su $\mathbb{R} \Rightarrow$ ha primitive.

Integrali definito – calcolo di aree, lunghezze

Data f: $[a, b] \to \mathbb{R}$, f limitata, vogliamo calcoliamo l'area compresa sotto il grafico di f.

chiuso e limitato



Consideriamo una suddivisione di $[a, b]$ in un intervallo aventi la stessa lunghezza $\frac{b-a}{n}$: definiamo

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

Per ciascun intervallo, scegliamo $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$

Definizione: l'espressione

$$S_n(\underline{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)$$

Si dice SOMMA DI RIEMANN di f in $[a, b]$, determinate da $n \in \mathbb{N}$ e dalla scelta di punti

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \underline{\alpha}$$

$\underbrace{f(\alpha_i)}_{altezza} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{base}$ = area del rettangolo di base $[x_{i-1}, x_i]$ e l'altezza $f(\alpha_i)$

Somma di Riemann = area sotto il pluri-rettangolo.

È un'approssimazione dell'area sotto il grafico di f.

Definizione: diciamo che la somma di Riemann di f convergano ad un limite S(per $n \to \infty$) se $\forall \epsilon > 0\ \exists\ \overline{n} \in \mathbb{N}\ t.c. n > \overline{n} \Rightarrow \left|S_n(\underline{\alpha}) - S\right| < \epsilon\ \ \forall$ scelta di $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$

(il valore di S non deve dipendere da $\underline{\alpha}$)

Se le somme di Riemann convergono, S si dice INTEGRALE DEFINITO di f su $[a,b]$,

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

Inoltre, si dice che f è INTEGRABILE (SECONDO RIEMANN) in $[a,b]$.

$\int_a^b f(x)\,dx =$ area compresa tra l'asse x e il grafico f su $[a,b]$.

osservazione: $\int f(x)\,dx =$ insieme delle primitive di f, $\int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R}$

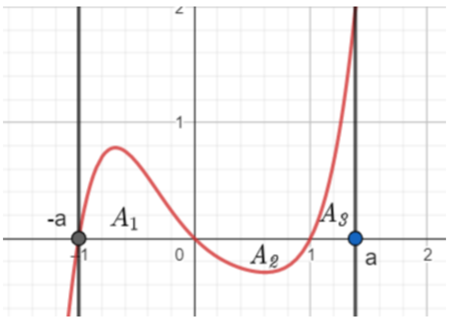
Al momento tra queste nozioni non c'è relazione.

osservazione:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$$

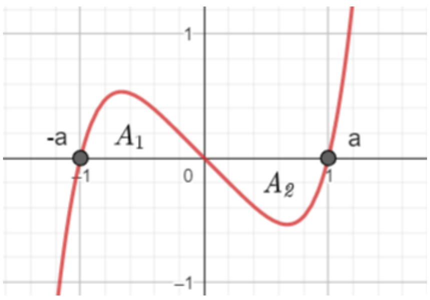
La variabile di integrazione è muta.

osservazione: $\int_a^b f(x)\,dx$ è un'area con segno.



$$\int_a^b f(x)\,dx = Area(A_1) - Area(A_2) + Area(A_3)$$

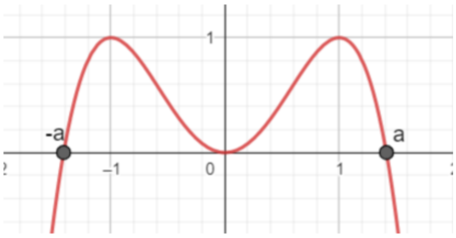
osservazione: se $f: [-a,a] \to \mathbb{R}$ è integrabile ed è dispari $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$



Per simmetria $Area(A_1) = Area(A_2)$ ma hanno segno opposto

Se è pari ed è integrabile, allora

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$



Problema1: stabilire quali funzioni sono integrabili

Problema2: calcolare gli integrali

Problema1: $\exists$ funzioni non integrabili

Esempio:

funzione di DIRICHLET

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \forall x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \qquad f\colon [0,1] \to \mathbb{R}\,,\ f \text{ è limitato}$$

Dimostrazione:

Consideriamo una suddivisione di $[0,1]$ in n intervalli di uguale lunghezza $\frac{1}{n}$.

Per mostrare che f non è integrabile devo esibire due somme di Riemann diverse (corrispondenti ad $\underline{\alpha}$ diversi) che convergono a limiti diversi.

- In ciascun intervallo $[x_{i-1}, x_i] = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, scegliamo $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q}$ (ogni intervallo contiene infiniti razionali)

$$S_n(\underline{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\,, \qquad \forall n \Rightarrow S_n(\underline{\alpha}) \to 1$$

  per $n \to \infty$

- In ciascun intervallo $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, scegliamo $\beta_i \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right] \setminus \mathbb{Q}$.

$$S_n\left(\underline{\beta}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\beta_i) = 0\,, \qquad \forall n \Rightarrow S_n\left(\underline{\beta}\right) \to 0$$

  per $n \to \infty$

Il valore limite nelle somme di Riemann dipende dalla scelta di $\underline{\alpha} \Rightarrow f$ non è integrabile in $[0,1]$.

Vediamo alcune condizioni sufficienti per l'integrabilità.

TEOREMA

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ chiuso e limitato.

Se $f \in \mathcal{C}([a,b])$ (f è continua in $[a,b]$) $\Rightarrow f$ è integrabile in $[a,b]$.

DOMANDA: Cosa succede se f ha delle discontinuità?

TEOREMA

$f_1: [a,b] \to \mathbb{R}, f_2: [b,c] \to \mathbb{R}$ f_1, f_2 chiuse, limitate e integrabili

Allora la funzione

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \ \ se\ x \in [a,b) \\ f_2(x)\ se\ x \in (b,c] \\ f(b)\ \ arbitrario \end{cases}$$

è integrabile su $[a,c]$, e

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_b^c f_2(x)\,dx$$

osservazione: il valore di f in b non è rilevante perché l'area del segmento è nullo.

COROLLARIO

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, a meno di un punto di discontinuità di 1° o 3° specie, allora f è integrabile in $[a,b]$.

COROLLARIO

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitato, $[a,b]$ chiuso e limitato.

Se f è continua in $[a,b]$, a meno di un numero finito di punti di discontinuità di 1° o 3° specie $\Rightarrow f$ è integrabile in $[a,b]$.

osservazione: la funzione di Dirichlet su $[0,1]$ ha infiniti punti di discontinuità.

Proprietà base dell'integrale

Linearità

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili $\Rightarrow \alpha f + \beta g$ è integrabile in $[a,b]$, e

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Dimostrazione:

consideriamo una somma di Riemann di $\alpha f + \beta g$:

$$
\begin{aligned}
S_{n,\alpha f+\beta g}\left(\underline{\gamma}\right) &= \sum_{i=1}^{n}[\alpha f(\gamma_i)+\beta g(\gamma_i)]\frac{b-a}{n} \\
&= \alpha\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)+\beta\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\gamma_i) \\
&= \alpha\cdot S_{n,f}\left(\underline{\gamma}\right)+\beta\cdot S_{n,g}\left(\underline{\gamma}\right)
\end{aligned}
$$

Se passiamo al limite per $n\to\infty$, siccome f,g sono integrabili per ipotesi, $S_{n,\alpha f+\beta g}\left(\underline{\gamma}\right)\to\int_a^b f$, $S_{n,\alpha f+\beta g}\left(\underline{\gamma}\right)\to\int_a^b g$ per qualsiasi scelta di $\underline{\gamma}$. Quindi le somme di Riemann di $\alpha f+\beta g$ convergono, e

$$S_{n,\alpha f+\beta g}\left(\underline{\gamma}\right)\to\int_a^b(\alpha f+\beta g)$$

Per unicità del limite, la tesi è dimostrata.

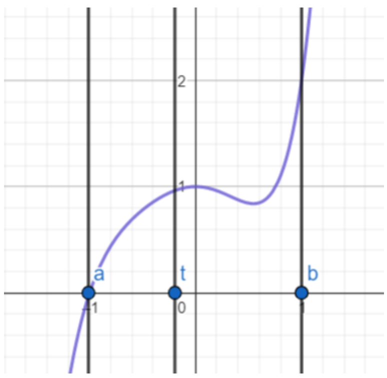
Additività rispetto al dominio

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrabile.

$\forall t\in[a,b], f$ è integrabile anche su $[a,t]$ e $[t,b]$, e

$$\int_a^b f=\int_a^t f+\int_t^b f$$

Dimostrazione:



osservazione: sarà utile poter definire, per $a<b$ $\int_b^a f$.

Si pone $\int_b^a f=-\int_a^b f$.

Con questa regola, la formula vale per qualsiasi sia l'ordinamento tra a,b,t.

Positività e monotonia

$g, f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile

(POS) Se $f \geq 0$ in $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$ (qui è importante che $a < b$)

(MON) Se $f \geq g$ in $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$

In particolare, vale la DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Dimostrazione:

(POS) Consideriamo una somma di Riemann di f:

$$S_{n,f}\left(\underline{\gamma}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{f(\gamma_i)}_{\geq 0} \geq 0$$

Passando al limite, per permanenza del segno

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S_{n,f}\left(\underline{\gamma}\right) \geq 0$$

(MON) $f \geq g \Leftrightarrow f - g \geq 0 \underbrace{\Rightarrow}_{(POS)} \int_a^b (f-g) \geq 0 \overbrace{\Rightarrow}^{linearità} \int_a^b f \geq \int_a^b g.$

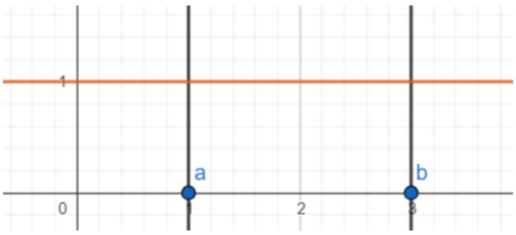
La disuguaglianza triangolare consegue da

$$-|f| \leq f \leq |f| \;\; in\ [a,b]$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{(MON)} -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|.$$

osservazione:

$$\int_a^b 1\,dx = (b-a)\cdot 1 = b - a$$



TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esiste $c \in [a,b]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

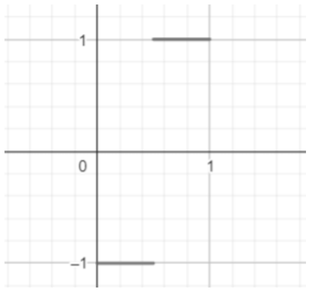
MEDIA INTEGRALE DI f su $[a, b]$

osservazione:

$$\frac{S_n(\underline{\alpha})}{b-a} = \frac{\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)}{b-a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)$$

Media aritmetica.

osservazione: se f non è continua, il teorema è falso



$$f(x) = \begin{cases} 1 \;\; se\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ -1 \;\; se\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$\frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, e non esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = 0$.

Dimostrazione:

f è continua in $[a, b] \Longrightarrow f$ ammette massimo M e minimo m su $[a, b]$, per Weierstrass.

$$m \leq f(x) \leq M \;\; \forall x \in [a, b]$$

$$\overset{(MON)}{\Longrightarrow} \frac{1}{b-a}\int_a^b m\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b M\,dx$$

Vediamo osservazione precedente

$$* \; m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

Quindi $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \in [m, M]$. Per il teorema di valori intermedi, siamo certi che $\exists c \in [a, b]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

$$* \frac{1}{b-a}\int_a^b m\,dx = \frac{m}{b-a}\int_a^b 1\,dx = \frac{m}{b-a}\cdot(b-a) = m$$

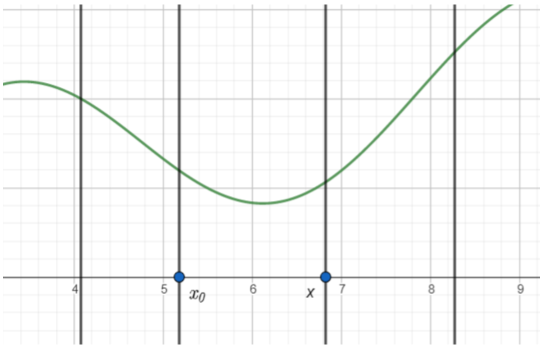
Calcolo di integrali definiti

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile in $[a,b]$.

Definizione: dato $x_0 \in [a,b]$, la funzione $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ definito da

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

Si dice FUNZIONE INTEGRALE di f (centrata in x_0)



$\forall x \in [a,b]$, considero $\int_{x_0}^{x} f \in \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f$$

(Se $x < x_0$, ricordare la convenzione $\int_b^a f \geq -\int_a^b f$)

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

f integrabile in $[a,b], x_0, x \in [a,b]$,

$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ funzione integrale.

- Allora F è continua in $[a,b]$
- Se f è continua in $[a,b] \Longrightarrow F$ è DERIVABILE, e $F'(x) = f(x), \forall\, x \in [a,b]$.

  Cioè F è una primitiva di f

- Se poi G è una qualsiasi altra primitiva di f in $[a,b]$, allora
$$F(x) = G(x) - G(x_0)$$

conseguenza 1:

Supponiamo di conoscere una primitiva di f in $[a,b]$. allora, $\forall x \in [a,b]$

$$F(x) = G(x) - G(a)$$

Per $x = b$ troviamo

$$G(b) - G(a) = F(b) = \int_a^b f(t)\, dt$$

FORMULA DI VALUTAZIONE PER GLI INTEGRALI DEFINITI

osservazione: $\int_0^1 x^n\, dx = G(1) - G(0)$, dove G è una primitiva di x^n.

$$G(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Longrightarrow \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$$

Notazione: $G(b) - G(a) = G(x)|_a^b = [G(x)]_a^b$

La formula di valutazione lega l'integrazione indefinita con quella definita.

conseguenza 2:

Se f è continua $\Longrightarrow$ ha una primitiva, data dalla funzione integrale.

Dimostrazione:

i) No dimostrazione.
ii) Vogliamo mostrare che F è derivabile, e $F'(x) = f(x)$.

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\underbrace{\int_{x_0}^{x+h} f(t)\, dt}_{\int_{x_0}^{x+h} = \int_{x_0}^{x} + \int_x^{x+h}} - \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt + \int_x^{x+h} f(t)\, dt - \int_{x_0}^{x} f(x)\, dt \right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\, dt$$

È la media integrale di f sull'intervallo di estremi $x, x+h \Longrightarrow$ siccome f è continua, per il teorema della media integrale esiste x_h compreso tra x e $x+h$ tale che $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = f(x_h)$

$\ldots = f(x_h)$

Volendo passare al limite per $h \to 0$, osserviamo che se $h \to 0^+$

$x \leq x_h \leq x+h \Longrightarrow x_h \to x$ per $h \to 0$ (per confronto);

se $h \to 0^-$

$x+h \leq x_h \leq x \Longrightarrow x_h \to x$ per $h \to 0$.

Quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x_h) = f\left(\lim_{h\to 0} f(x_h)\right) = f(x).$$

f continua

iii) Sia G una primitiva di f. Già sappiamo che diverse primitive differiscono per una costante, e che F è un'altra primitiva:

$G(x) - F(x) = \text{const.} = K \in \mathbb{R}.$

Per determinare la costante, valutiamo l'uguaglianza in $x = x_0$:

$$G(x_0) - F(x_0) = K$$

$$= \int_{x_0}^{x_0} f(t)\, dt = 0$$

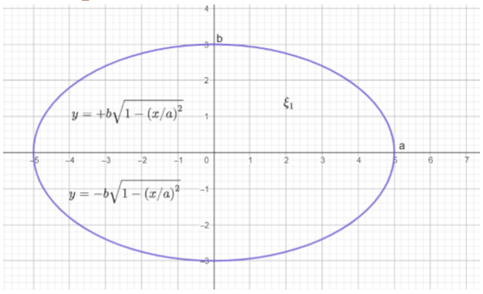
$\Longrightarrow K = G(x_0)$. Ma allora

$$G(x) - F(x) = G(x_0) \Longrightarrow G(x) - G(x_0) = F(x)$$

osservazione:

- Calcoliamo $\int_0^2 |(x-1)(x+3)|\, dx = I$
  Prima di cercare la primitiva, conviene discutere il valore assoluto.
  $$|(x-1)(x+3)| = |x-1|(x+3) \;\; \forall x \in [0,2]$$
  $$= \begin{cases} (x-1)(x+3) & se\ x \in [1,2] \\ (1-x)(x+3) & se\ x \in [0,1) \end{cases} \Longrightarrow I = \int_0^1 (1-x)(x+3)\, dx + \int_1^2 (x-1)(x+3)\, dx$$
  $$= \cdots$$
- La regola di sostituzione per gli integrali definiti si modifica nel modo seguente:
  $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua
  $\phi: [\alpha, \beta] \to [a,b]$ derivabile e biunivoca
  Allora
  $$\int_\alpha^\beta f\big(\phi(x)\phi'(x)\big)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt$$
  Questa è un'uguaglianza numerica.
  Esempio:
  $$\int_1^e \frac{\log x}{x} dx$$
  due strade:
  1) Calcoliamo $\int \frac{\log x}{x} dx$. Troviamo una primitiva G, e poi usiamo la formula di valutazione.
  2) Usiamo la formula:
  $$\int_1^e \frac{\log x}{x} dx$$
  $$t = \log x \Longrightarrow dt = \frac{dx}{x}$$
  Per trasformare gli estremi di integrazione, notiamo che
  $$x = 1 \Longrightarrow t = \log 1 = 0$$
  $$x = e \Longrightarrow t = \log e = 1$$
  $$\int_1^e \frac{\log x}{x} dx = \int_0^1 t \; dt = \frac{t^2}{2} |_0^1 = \frac{1}{2}$$

Esempio:



calcolare l'area dell'elisse ξ di semiassi $a, b > 0$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$Area(\xi)$ =la area $Area(\xi_1)$

$$y = \pm b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

Per definizione di integrale

$$Area(\xi_1) = \int_0^a b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\, dx =$$

Poniamo $x = a\sin t\,, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$dx = a\cos t \ dt$$

$$x = 0 \Longrightarrow a\sin t = 0, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Longrightarrow t = 0$$

$$x = a \Longrightarrow a\sin t = a, t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Longrightarrow t = \frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$$

$$\ldots = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos^2 t\, dt = ab\left[\frac{t + \cos t \sin t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = ab\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = ab\frac{\pi}{4}$$

$$\Longrightarrow Area(\xi) = ab\pi$$

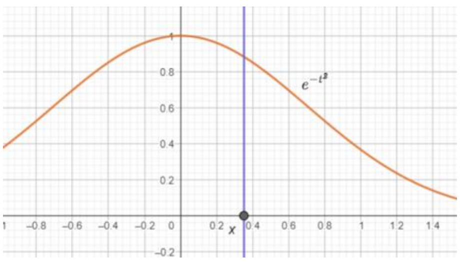
L'esempio precedente mostra come calcolare un'area di figura piana che non è l'area compresa tra l'asse x e un grafico.
In generale, se D è un insieme del piano delimitato dai grafici di due funzioni f e g, con $f \geq g$, su $[a, b]$, allora

$$Area(D) = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Esempio:

Consideriamo $f(x) = e^{-x^2}$.

Sappiamo che $\int_0^x e^{-t^2}\, dt = F(x)$ è una primitiva di f non è esprimibile in termini delle funzioni elementari. Sappiamo dire qualcosa su F, o no?



Dominio di F $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ è ben definito $\Longrightarrow dom\, F = \mathbb{R}$

Segno e zeri

$F(x) > 0 \qquad \forall x > 0$

$F(0) = \int_0^0 e^{-t^2}\, dt = 0$

$F(x) = -\int_x^0 e^{-t^2}\, dt < 0 \qquad \forall x < 0$

Derivata e monotonia

Per il teorema fondamentale, F è derivabile e

$F'(x) = e^{-x^2}$

$F'(x) > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \Longrightarrow F$ è strettamente crescente

Derivata seconda e concavità

$$F''(x) = \left(F'(x)\right)' = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2}$$

$F''(x) > 0$ se $x < 0$

$F''(x) < 0$ se $x > 0$

$F''(x) = 0$ se $x = 0$

$x = 0$ punto di flesso, f è convessa in $(-\infty, 0)$ e concava in $(0, +\infty)$.

Per uno studio di funzione completo, ci mancano i limiti di F per $x \to \pm\infty$. Dobbiamo dare un senso

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx, \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx$$

Quindi sono esempi di INTEGRALI GENERALIZZATI.

INTEGRALI GENERALIZZATI

Abbiamo definito integrali definiti per funzioni limitati definiti su intervalli limitati.

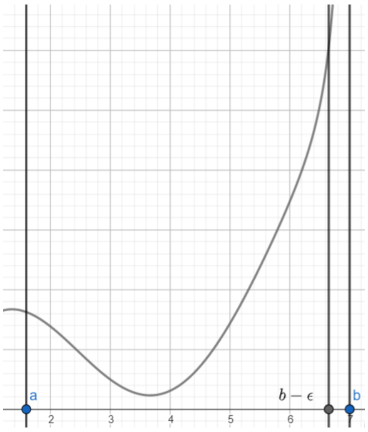
Cosa succede se f è illimitata, o se lo è il dominio di integrazione?

Supponiamo che $f \in \mathcal{C}°([a,b])$, illimitata per $x \to b^-$:

$$\exists x_n \to b^- \; t.c. \; |f(x_n)| \to +\infty$$

(non è necessario che $f(x) \to +\infty$ o $f(x) \to -\infty$ per $x \to b^-$)

Esempio: $\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ è illimitata per $x \to 0^-$, ma non ha limite per $x \to 0^-$



$f \in \mathcal{C}°([a, b-\epsilon]), \forall\epsilon >$ piccolo $\Longrightarrow f$ è integrabile su $[a, b-\epsilon], \forall\, \epsilon > 0$ piccolo

$\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$ $\quad\quad \exists$ finito $\forall\epsilon > 0$ piccolo.

Definizione: supponiamo che valga l'ipotesi. Se esiste

$$I = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$

Diciamo che I è l'INTEGRALE GENERALIZZATO DI f SU $[a, b]$, e scriviamo

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Se I è finito, diciamo che l'integrale generalizzato CONVERGE e che f è INTEGRABILE (in senso generalizzato) su $[a, b]$.

Se I non esiste, l'integrale generalizzato non esiste e f non è integrabile.

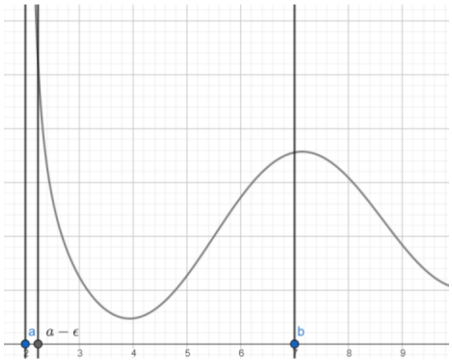
Se I è infinito, diciamo che l'integrale generalizzato DIVERGE e che f è NON-INTEGRABILE (in senso generalizzato) su $[a, b]$.

Si danno definizioni analoghe se, al posto dell'ipotesi, consideriamo $f \in C^\circ((a, b]), a, b \in \mathbb{R}$,

f illimitato per $x \to a^+$

In questo caso

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$$



osservazione: con gli integrali generalizzati si cerca di definire un'area per regioni di piano illimitato.

Esempio: $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

Consideriamo

$$I_\alpha = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, \alpha > 0$$

Vogliamo studiare la convergenza.

$\forall \epsilon > 0$, calcoliamo

$$\int_a^{b-\epsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} =$$

Poniamo $b - x = t$

$$\Longrightarrow -dx = dt$$

$$x = a \Longrightarrow t = b - a$$

$$x = b - \epsilon \Longrightarrow t = \epsilon$$

$$\int_a^{b-\epsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \int_\epsilon^{b-a} t^{-\alpha}\,dt = \begin{cases} \left.\dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_\epsilon^{b-a} = \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ \log|t|\,|_\epsilon^{b-a} = \log(b-a) - \log\epsilon & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$I_\alpha = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ +\infty \quad \alpha \geq 1 \end{cases}$$

I_α converge per $\alpha \in (0,1)$, diverge per $\alpha \geq 1$

Vale un risultato analogo per

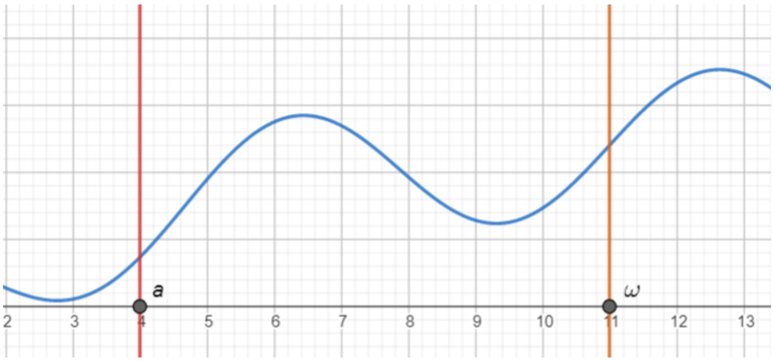
$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = J_\alpha$$

$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ è illimitato per $x \to a^+$

J_α converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$, diverge $\Leftrightarrow \alpha \geq 1$

Se l'intervallo di integrazione è illimitato abbiamo due ulteriori casi

$f \in C°([a, +\infty)), a \in \mathbb{R}$



$\forall \omega > a, f \in C°([a, +\infty)) \Rightarrow$ è integrabile in $[a, \omega]$.

Definizione: sotto l'ipotesi, se $\exists\, I = \lim_{\omega \to +\infty} \int_a^\omega f(x)\,dx$, diciamo che I è l'INTEGRALE GENERALE di f su $[a, +\infty)$,

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

Se I è finto, diciamo che l'integrale CONVERGE, e che f è INTEGRABILE in senso generalizzato su $[a, +\infty)$.

Se I non esiste, l'integrale generalizzato non esiste e f NON è INTEGRABILE su $[a, +\infty)$.

Se I esiste infinito, diciamo che l'integrale DIVERGE e che f NON è INTEGRABILE su $[a, +\infty)$.

Definizione analoghe per $f \in C°([-\infty, b))$

In questo caso

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_{-\omega}^b f(x)\,dx$$

Esempio: studiamo la convergenza di

$$I_\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \alpha > 0$$

$\forall \omega > 1$, calcoliamo

$$\int_1^\omega \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^\omega, & se\ \alpha \neq 1 \\ \left.\log x\right|_1^\omega, & se\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha} & se\ \ \alpha \neq 1 \\ \log \omega & se\ \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \to +\infty} \int_1^\omega \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

I_α converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$, diverge $\Leftrightarrow \alpha(0,1]$.

Proprio come per le serie, non ci interesserà tanto capire il valore esatto degli integrali, quanto stabilire se converge o diverge.

Per quanto riguarda l'esistenza

Supponiamo che valga l'ipotesi,

$f \in C^\circ([a,b))$, illimitata per $x \to b^-$.

Se $f(x) \to +\infty$ o $f(x) \to -\infty$ per $x \to b^- \Longrightarrow \int_a^b f(x)\, dx$ esiste in senso generalizzato.

Idem per l'ipotesi.

Per quanto riguarda ipotesi e ipotesi, vale quanto segue:

Se $f \in C^\circ([a,+\infty))$, $a \in \mathbb{R}$, e f non cambia segno definitivamente per $x \to +\infty \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ esiste.

Se $f \in C^\circ([-\infty,b))$, $b \in \mathbb{R}$, e f non cambia segno definitivamente per $x \to -\infty \Longrightarrow \int_{-\infty}^b f(x)\, dx$ esiste.

Esempio:

$\int_1^{+\infty} \cos x\, dx$ non esiste

$$\int_1^{+\infty} \cos x\, dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^\omega \cos x\, dx = \lim_{\omega \to +\infty} (\sin \omega - \sin 1) \nexists$$

Problemi di esistenza sono legati a oscillazioni di f.

DOMANDA: cosa succede se $f: [a,b] \setminus \{c\} \to \mathbb{R}$, illimitato per $x \to c$, e continua in $[a,c)$ e $(c,b]$.

Definizione: in tal caso f si dice integrabile in senso generalizzato in $[a,b]$ SSE lo è separatamente su $[a,c)$ e su $(c,b]$. In tal caso

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Esempio:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} w$$

$\frac{1}{x}$ è illimitato per $x \to 0$

$\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty \Longrightarrow \frac{1}{x}$ non è integrabile in $[-1,1]$

Attenzione: $\frac{1}{x}$ è dispari, e $[-1,1]$ è simmetrico.

Tuttavia, $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} \neq 0$. Non esiste proprio.

osservazione: allo stesso modo, sia $f: (a,b) \to \mathbb{R}$, continua in (a,b), illimitata.

Definizione: f si dice integrabile in senso generalizzato in $[a,b] \Leftrightarrow$ fissato $c \in [a,b]$ arbitraria, esistono finiti, separatamente, $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$.

In tal caso vale l'espressione.

osservazione: sia ora $f \in C(\mathbb{R})$.

f è integrabile in senso generalizzato su $\mathbb{R}$ se e solo se fissato $c \in \mathbb{R}$ arbitrario, esistono finiti

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \;\; e \;\; \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

In tal caso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

CRITERI DI CONVERGENZA

CRITERIO DEL CONFRONTO

$f, g \in C^\circ\big([a,b)\big), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$ (b può essere $+\infty$)

Supponiamo che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ definitivamente per $x \to b^-$

Allora in seguenti integrali esistono, e valgono le seguenti implicazioni:

1) $\int_a^b g$ converge$\Longrightarrow \int_a^b f$ converge
2) $\int_a^b f$ diverge a $+\infty \Longrightarrow \int_a^b g$ diverge a $+\infty$

CONFRONTO ASINTOTICO

$f, g \in C^\circ\big([a,b)\big), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^*$ (b può essere $+\infty$)

Supponiamo che $f, g > 0$ def per $x \to b^-$, e che

$$\exists \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

Allora:

1) $l \in (0, +\infty) \Longrightarrow$ in questo caso
   $\int_a^b f$ converge $\Leftrightarrow \int_a^b g$ converge
2) $l = 0$. Allora
   $\int_a^b g$ converge $\Rightarrow \int_a^b f$converge
3) $l = +\infty$. Allora
   $\int_a^b g$ diverge a$+\infty$ $\Rightarrow \int_a^b f$diverge a$+\infty$

Valgono enunciati analoghi se $f, g \in C^\circ\big((a,b]\big), b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$

Esempio:

- $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x} = +\infty$
  Infatti, $\frac{1}{\sin x} \in C^\circ\big((0,1)\big)$, $\frac{1}{\sin x} \to +\infty$ per $x \to 0^+$
  $\frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{x}$ per $x \to 0^+$ e $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ diverge per confronto asintotico, caso 1), diverge anche $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ converge
  $\frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$
  Siccome $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, per confronto asintotico converge anche $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$
- Consideriamo $\int_1^{+\infty} x^\beta e^{-\alpha x} dx, \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$
  L'integrale converge. Chiamiamo $f(x) = x^\beta e^{-\alpha x}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2}$
- Consideriamo $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^\beta e^{-\alpha x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^{\beta-2}}{e^{\alpha x}} \to 0, per\ x \to +\infty$
  Siamo quindi nel caso 2 del confronto asintotico.
  Siccome $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge $\Rightarrow \int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} x^\beta\, dx \quad \forall \alpha > 0, \forall \beta \in \mathbb{R}$

A volte, volendo usare il confronto asintotico, non è sufficiente usare gli asintotici elementari.

In tal caso si usa Taylor.

$\int_0^1 f(x)\, dx,\ f(x) = \frac{\sin(3x)+6\sin x-6x}{x^\alpha}$

Avevamo visto che

$$f(x) = \frac{6}{5!}\cdot\frac{x^5+o(x^5)}{x^\alpha} \qquad \text{per } x \to 0^+$$
$$\sim \frac{6}{5!}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-5}} \qquad \text{per } x \to 0^+$$

Siccome

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-5}} \text{ converge} \Leftrightarrow \alpha - 5 < 1,$$

deducono, per confronto, che $\int_0^1 f(x)\, dx$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 6$. Diverge per $\alpha \geq 6$.

osservazione: dall'espressione, si deduce anche che $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to 0^+$.

CRITERIO DI CONVERGENZA PER FUNZIONI QUALSIASI

Definizione: $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, limitato o illimitato, $f: I \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è ASSOLUTAMENTE INTEGRABILE (in senso generalizzato) su I se $|f|$ è integrabile (…) su I.

TEOREMA-CRITERIO DI ASSOLUTA INTEGRABILITÀ

I intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$.

Se f è assolutamente integrabile su I, allora f è integrabile su I e

$$\left|\int_I f(x)\, dx\right| \leq \int_I |f(x)|\, dx$$

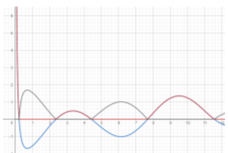
osservazione: f Riemann-integrabile su $[a, b] \Leftrightarrow |f|$ Riemann-integrabile su $[a, b]$ (f limitata, $[a, b]$ chiuso e limitato)

Per gli integrali generalizzato, $|f|$ integrabile su $I \Longrightarrow f$ integrabile su I.

Il viceversa è falso.

Dimostrazione:

Per fissare le idee, supponiamo che $I = (a, b]$, limitato.



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$$

Introduciamo la PARTE POSITIVA/NEGATIVA di f:

$$f^+(x) = \max\{f(x),0\} = \begin{cases} f(x) & se\ f(x)\geq 0 \\ 0 & se\ f(x)<0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x),0\} = \begin{cases} 0 & se\ f(x)\geq 0 \\ -f(x) & se\ f(x)<0 \end{cases}$$

È immediato verificare che

- $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$
- $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$
- $f^+, f^- \geq 0$
- $f^+, f^- \leq |f|$

Quindi, essendo funzioni positive, $\int_a^b f^+$, $\int_a^b f^-$ esistono e per confronto

$$0 \leq \int_a^b f^+, \int_a^b f^- \leq \int_a^b |f| < +\infty$$

per ipotesi

Ma allora

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^b f = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{a+\epsilon}^b (f^+ - f^-)\right) =$$

$$\underbrace{=}_{linearità} \lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{a+\epsilon}^b f^+ - \int_{a+\epsilon}^b f^-\right) =$$

Il limite per $\epsilon \to 0^+$ esiste

$$\underbrace{=}_{algebra\ dei\ limiti} \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^b f^+ - \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{a+\epsilon}^b f^- =$$

$$= \underbrace{\int_a^b f^+}_{\in\mathbb{R}} - \underbrace{\int_a^b f^-}_{\in\mathbb{R}}$$

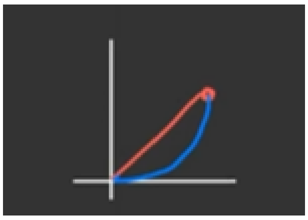
esistono finiti per la formula.

$$\Rightarrow \int_a^b f$$

esiste finito. C.V.D.

Esempio:

- $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx = I_\alpha$
  I_α converge $\forall\ \alpha > 1$: consideriamo infatti
$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^\alpha} dx$$
$$0 \le \frac{|\cos x|}{x^\alpha} \le \frac{1}{x^\alpha}$$
  $\frac{1}{x^\alpha}$ è integrabile su $[1, +\infty), \forall \alpha > 1$
  $\Rightarrow$ per il criterio del confronto
  $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^\alpha} dx$ converge $\qquad \forall \alpha > 1$
  $\Rightarrow$ per assoluta integrabilità, converge anche
$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx, \qquad \forall \alpha > 1$$
  Cosa succede se $\alpha \in (0,1]$? Il problema è delicato.
- $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge $\forall \alpha > 1$, per assoluta integrabilità. Mostriamo che $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge, mentre $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ diverge.
  1) $\frac{\sin x}{x}$ è integrabile in $[1, +\infty)$, ma non è assolutamente integrabile in $[1, +\infty)$.
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{\sin x}{x} dx =$$
  per parti:
  $f = \frac{1}{x} \qquad g' = \sin x$
  $f' = -\frac{1}{x^2} \qquad g = -\cos x$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{\cos x}{x} \Big|_1^t - \int_1^t \frac{\cos x}{x} dx \right)$$
$$= \lim_{t \to +\infty} \left(-\frac{\cos t}{t} + \cos 1 - \int_1^t \frac{\cos x}{x^2} dx \right)$$
$$= \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \in \mathbb{R}$$
  esiste finito, vedi esempio precedente
  Quindi $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ esiste finito.
  2) Mostriamo che invece $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$
  Dobbiamo escludere che l'integrale converga.
  Ragioniamo per assurdo, supponendo che $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ sia convergente. Osserviamo che



$$-1 \le \sin x \le 1$$
$$\Rightarrow \sin^2 x = |\sin x|^2 \le |\sin x|$$
$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx \text{ converge per confronto}$$
$$\left(0 \le \frac{\sin^2 x}{x} \le |\sin x| \right)$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$\Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(2x)}{2x}\,dx$ converge.

Ora, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx$ converge (si dimostra come $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$), mentre $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x} = +\infty$.

Ma allora

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx = +\infty - (\in \mathbb{R}) = +\infty$$

in contraddizione con l'affermazione.

Quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$$

INTEGRALI GENRALIZZATI E SERIE

La convergenza della serie armonica usando integrali impropri

Consideriamo l'esempio seguente

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0, x \in (1, +\infty)$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \begin{array}{l} \nearrow \quad converge \iff \alpha > 1 \\ \searrow diverge\ a + \infty \iff \alpha \leq 1 \end{array}$$

Consideriamo inoltre

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \begin{array}{l} \nearrow \quad converge \iff \alpha > 1 \\ \searrow diverge\ a + \infty \iff \alpha \leq 1 \end{array}$$

avevamo dimostrato la convergenza per $\alpha > 2$ e $\alpha \leq 1$.

$\alpha \in (1,2)$ era aperto.

Dimostrazione:

Vediamo come legare integrale e serie.

Definiamo

$$g(x) = \frac{1}{n^\alpha} \qquad \forall x \in (n-1, n], \forall n \in \mathbb{N}$$

Per definizione, $g(x) \leq f(x)\ \forall x \in [1, +\infty]$, e sono ≥ 0

$\Rightarrow$ per confronto, $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \lim_{m \to +\infty} \int_1^m g(x)\,dx =$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\left(\int_1^2 g + \int_2^3 g + \cdots + \int_{m-1}^m g\right)$$

su ciascuno di questi intervalli, g è costante

$$\int_{n-1}^n g(x)\,dx = \frac{1}{n^\alpha}\int_{n-1}^n 1\,dx = \frac{1}{n^\alpha}$$

$$\ldots = \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=2}^m \int_{n-1}^n g(x)\,dx =$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=2}^m \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$$

Quindi la disuguaglianza

$$\int_1^{+\infty} g \le \int_1^{+\infty} f$$

ci dice che

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha} \le \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\begin{cases} < +\infty\ \forall\alpha > 1 \\ = +\infty\ \forall\alpha \le 1\end{cases}$$

Questa dimostra che $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha > 1$

Se avessimo voluto dimostrare che $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ diverge per $\alpha \le 1$, al posto di g avremmo potuto considerare

$$h(x) = \frac{1}{n} \quad \forall x \in [n, n+1), \forall n$$

Ragionando come sopra, si ricava che $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha} = \int_1^{+\infty} h(x)\,dx \ge \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \begin{cases} = +\infty\ \ \forall\alpha \le 1 \\ \in \mathbb{R}\ \ \forall\alpha > 1\end{cases}$

Più in generale, abbiamo il

CRITERIO SERIE-INTEGRALI

$k_0 \in \mathbb{N}, f\colon [k_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ t.c.

- f è continua
- f è ≥ 0 ed è decrescente in $[k_0, +\infty)$
  Se $a_n = f(n)$, per $n \in \mathbb{N}, n \ge k_0$. Allora

$$\sum_{n=k_0}^{+\infty} a_n \ converge \ \Leftrightarrow \int_{k_0}^{+\infty} f(x)\,dx \ converge$$

Esempio: nel caso della serie armonica generalizzata

$$a_n = f(n) \ per \ f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

Esempio: studiare la convergenza di

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}, \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ se $\alpha > 1$, la serie converge $\forall \beta$ (confronto asintotico).

Se $\alpha = 1$, è più delicato. Consideriamo

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^\beta} = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta}$$

$$\log x = t, \frac{dx}{x} = dt$$

che converge $\Leftrightarrow \beta > 1$.

Per il criterio integrale serie, la serie di potenza converge, per $\alpha = 1$, SSE $\beta > 1$.

È lecito chiedersi se la condizione necessaria di convergenza per le serie abbia in analogia per gli integrali.

In particolare, è vero che "$f \in \mathcal{C}([a, +\infty))$, integrabile su $[a, +\infty) \Longrightarrow f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$"?

La risposta è negativa.

Esempio: $\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ converge, anche se $\sin(x^2)$ non ha limite a $+\infty$

$$\int_1^{+\infty} \sin(x^2)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt$$

$$x^2 = t \Longrightarrow x = \sqrt{t} \ \ (x > 0)$$
$$2x\,dx = dt \Longrightarrow dx = \frac{dt}{2x}$$

per parti

$f = \frac{1}{\sqrt{t}}$ $\qquad g' = \sin t$

$f' = -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}}$ $\quad g = -\cos t$

$$= \lim_{z\to+\infty}\left(-\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\Big|_1^z - \frac{1}{2}\int_1^z \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt\right) =$$

$$= \cos 1 - \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt \quad \in \mathbb{R}$$

converge per assoluta integrabilità

Esempio: definiamo

$$f(x) = \begin{cases} n & se\ x \in \left[n, n + \frac{1}{n^3}\right), \forall n \in \mathbb{N} \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{m\to+\infty} f(x)\,dx = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m-1} \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

Sappiamo che

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx = \int_n^{n+\frac{1}{n^3}} \underbrace{f(x)}_{n}\,dx + \int_{n+\frac{1}{n^3}}^{n+1} \underbrace{f(x)}_{0}\,dx$$

$$\int_n^{n+\frac{1}{n^3}} f(x)\,dx = n\int_n^{n+\frac{1}{n^3}} 1\,dx = n \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}$$

Tornando al limite

$$= \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},$$

converge.

Qui $\int_1^{+\infty} f$ converge, $\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$, ed f è addirittura illimitata a $+\infty$: $\exists x_n \to +\infty$ t.c. $f(x_n) \to +\infty$

Si può comunque stabilire la

PROPOSIZIONE:

$f \in \mathcal{C}([a, +\infty))$, integrabile su $[a, +\infty)$.

Se esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Longrightarrow l = 0$.

Torniamo allo studio di

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

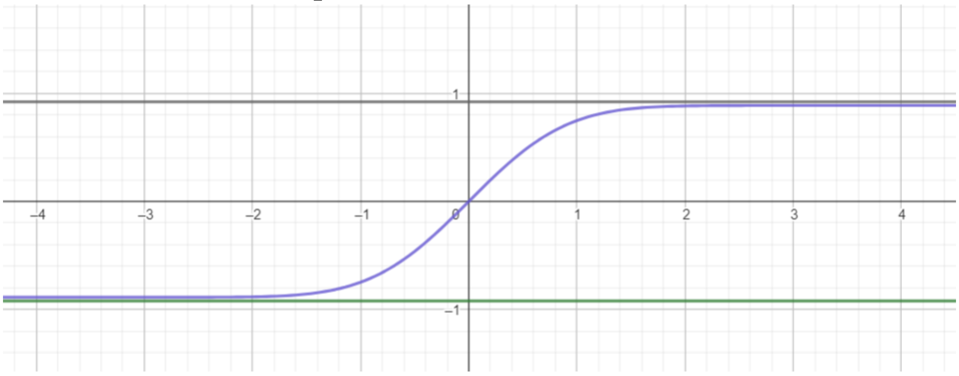
Avevamo stabilito che:

- $Dom\ F = \mathbb{R}$, e F è dispari.

- $F(x) > 0$ per $x > 0, = 0$ in $x = 0, < 0$ per $x < 0$.
- F è derivabile in $\mathbb{R}$, con $F'(x) = e^{-x^2} > 0 \ \ \forall x \Longrightarrow F$ è strettamente crescente
- F è derivabile due volte in $\mathbb{R}$, con $F''(x) = -2xe^{-x^2} \Longrightarrow F$ è concava in $(0, +\infty)$, convessa in $(-\infty, 0)$, e ha un flesso in $x = 0$.
- Limiti

  $$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt\,,$$

  che converge per decadimento esponenziale, $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$ converge.
- F ha due asintoti orizzontali per $x \to \pm\infty$



In generale, a questo punto siamo in grado di studiare funzioni integrali non calcolabili in forma esplicita.

Esempio:

scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di

$$G(x) = \int_1^{x^2+x+1} \log(\arctan t)\, dt$$

nel punto $\big(0, G(0)\big)$. Scrivere inoltre il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in 0.

Per scrivere l'equazione della retta tangente, devo ricavare $G'(0)$.

$$G(x) = F(x^2 + x + 1),$$

dove

$$F(y) = \int_1^{y} \log(\arctan t)\, dt$$

Usiamo la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$G'(x) = F'(x^2 + x + 1)\ \underbrace{(2x + 1)}_{=\frac{d}{dx}(x^2+x+1)}\ =$$

Per il teorema fondamentale

$$= \log(\arctan(x^2 + x + 1))\,(2x + 1)$$

In particolare,

$$G'(0) = \log(\arctan 1) = \log\frac{\pi}{4}$$

$$G(0) = \int_1^{0+0+1} \log(\arctan t)\, dt = 0$$

L'equazione della retta tangente sarà

$$y - G(0) = G'(0)(x-0) \Longrightarrow y = \log\left(\frac{\pi}{4}\right) x$$

Per Taylor di ordine 2, ci basta calcolare $G''(0)$:

$$G''(x) = \left((2x+1)\log(\arctan(x^2+x+1))\right)'$$

$$= 2\log(\arctan(x^2+x+1)) + (2x+1)^2 \cdot \frac{1}{\arctan(x^2+x+1)} \cdot \frac{1}{1+(x^2+x+1)^2}$$

$$G''(0) = 2\log\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2} = 2\log\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{\pi}$$

$$T_{2,0}(x) = \left(\log\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)x + \left(2\log\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{\pi}\right)x^2$$

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

f integrabile in $[a,b]$, anche in senso generalizzato, $x_0 \in [a,b]$.

$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ funzione integrale.

i) Allora F è continua in $[a,b]$.

ii) Se f è integrabile (anche in senso generalizzato) in $[a,b]$, $x \in [a,b]$, e f è continua in x
$\Longrightarrow F$ è derivabile in x, con $F'(x) = f(x)$

Esempio:

1) Determinare il dominio delle seguenti funzioni
   - $F(x) = \int_5^x \frac{e^t+6}{\sqrt{t-3}} dt = \int_5^x f(t)\, dt$, dove $f(t) = \frac{e^t+6}{\sqrt{t-3}}$
     Osserviamo che $D(f) = (3,+\infty)$, e f è continua in $D(f)$.
     $5 \in (3,+\infty)$
     $\int_5^x f(t)\, dt$ con $x \in (3,+\infty)$
     è l'integrale di una f continua su un intervallo limitato, di estremi 5 e x
     $\Longrightarrow F(x)$ è definita $\forall x \in (3,+\infty)$ (come integrali di Riemann).
     Se $x < 3$,
     $$\int_5^x f(t)\, dt = -\int_x^5 f(t)\, dt = -\int_x^3 f(t)\, dt + \int_3^5 f(t)\, dt$$
     non ha senso, perché f non è definito in $(x,3)$
     $\Longrightarrow F(x)$ non è definita per $x < 3$

$x = 3$?

$$-\int_3^5 f(t)\,dt$$

$\exists$ come integrale generalizzato?

$f(t) \sim \frac{e^3+6}{\sqrt{t-3}}$ per $t \to 3^+$

$\frac{e^3+6}{\sqrt{t-3}}$ è integrabile su $[3,5] \Longrightarrow$ per confronto asintotico, f è integrabile in $[3,5]$, e $F(3)$ è definito (come integrale generalizzato)

In conclusione, $D(F) = [3, +\infty)$

- $F(x) = \int_5^x f(t)\,dt,$

  $f(t) = \frac{e^t+6}{\sqrt{|t-3|}}$

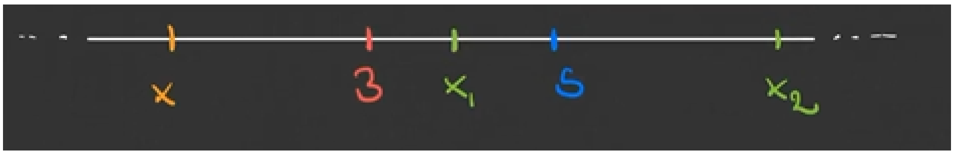
  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$, e f è continua in $D(f)$.

  $$5 \in (3, +\infty)$$

  Se $x > 3$, allora

  $$F(x) = \int_5^x f(t)\,dt$$

  è l'integrale di f continua su un intervallo chiuso e limitato $\Longrightarrow F(x)$ è ben definito



  $x = 3$?

  $$F(x) = -\int_3^5 \frac{e^t+6}{\sqrt{|t-3|}}\,dt = -\int_3^5 \frac{e^t+6}{\sqrt{t-3}}\,dt$$

  Questo integrale generalizzato converge$\Longrightarrow F$ è ben definito in $x = 3$.

  $x < 3$?

  $$F(x) = -\int_x^5 f(t)\,dt =$$

  $$= -\underbrace{\int_x^3 f(t)\,dt}_{=?} - \underbrace{\int_3^5 f(t)\,dt}_{converge, è\ F(3)}$$

  $f(t) \sim \frac{(e^3+6)}{\sqrt{3-t}}$ per $t \to 3^-$

  Siccome $\frac{(e^3+6)}{\sqrt{3-t}}$ è integrabile in $[x, 3]$, per confronto asintotico $F(x)$ è ben definito, $\forall x < 3$.

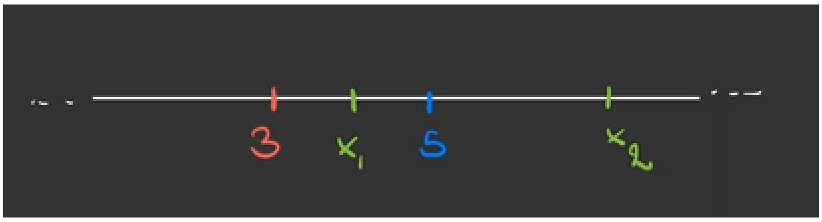
  $D(F) = \mathbb{R}$, e F è continua in $\mathbb{R}$

- $F(x) = \int_5^x f(t)\,dt$

  $f(t) = \frac{e^t+6}{t-3}$

  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$, e f è continua nel dominio.

  $\Longrightarrow \forall x > 3, \int_5^t f(t)\,dt$ è ben definito come integrale di Riemann.



$x = 3$? Dobbiamo studiare la convergenza di

$$-\int_3^5 f(t)\,dt$$

$f(t) \sim \frac{e^3+6}{t-3}$ per $t \to 3^+$

Siccome $\frac{e^3+6}{t-3}$ non è integrabile in [3,5], per confronto asintotico f non è integrabile in [3,5]

$\Longrightarrow F(3)$ non è definito in $x = 3$.

$x < 3$?

$$F(x) = -\int_x^3 f(t)\,dt - \underbrace{\int_3^5 f(t)\ dt}_{non\ converge}$$

$\Longrightarrow F$ non è definito in x.

$D(F) = (3, +\infty)$

2) Studiare la funzione

$F(x) = \int_5^x f(t)\,dt, \quad f(t) = \frac{e^t+6}{\sqrt{|t-3|}}$.

- $D(F) = \mathbb{R}$, e F è continua in $\mathbb{R}$.
- Monotonia: per il teorema fondamentale

  $F'(x) = f(x) \qquad \forall x \neq 3$

  $= \frac{e^x+6}{\sqrt{|x-3|}} > 0 \quad \forall x \neq 3$

  F è continua in 3, e

$$\lim_{x\to 3^+} F'(x) = \lim_{x\to 3^\pm} \frac{e^x+6}{\sqrt{|x-3|}} = +\infty$$

  $\Longrightarrow x = 3$ è un punto di flesso a tangente verticale.

  F è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.
- Segno

$$F(5) = \int_5^5 f(t)\,dt = 0$$

  $\Longrightarrow$ per monotonia, deduciamo che $F(x) > 0 \ \ \forall x > 5, F(x) < 0$ per $x < 5$. $x = 5$ l'unico zero di F.
- Limiti

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_5^{+\infty} \frac{e^t+6}{\sqrt{|t-3|}}\,dt$$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty \Longrightarrow \int_5^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty$$

  Asintoto obliquo?

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} \overset{De\ l'Hospital}{\cong} \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{1} = +\infty$$

non c'è asintoto obliquo.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\int_{-\infty}^{3} f(t)\,dt - \underbrace{\int_{3}^{5} f(t)\,dt}_{\in\mathbb{R}}$$

$$-\int_{-\infty}^{3} f(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt - \underbrace{\int_{0}^{3} f(t)\,dt}_{\in\mathbb{R}}$$

è un integrale generalizzato con $f \in \mathcal{C}((-\infty,0])$

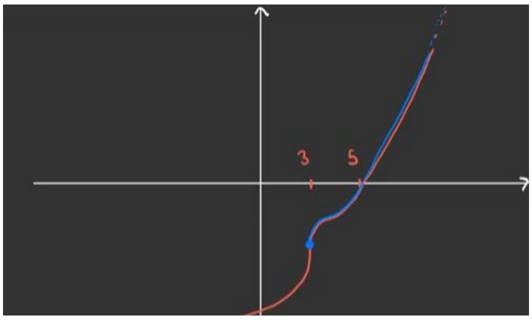
$$f(t) \sim \frac{e^{-\infty}+6}{\sqrt{3-t}} \sim \frac{6}{\sqrt{|t|}}$$

(ricordiamo che $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{|t|^{\alpha}}$ è convergente $\Leftrightarrow \alpha > 1$)

Siccome $\frac{6}{\sqrt{|t|}}$ non è integrabile a $-\infty$, per confronto asintotico anche f non lo sarà

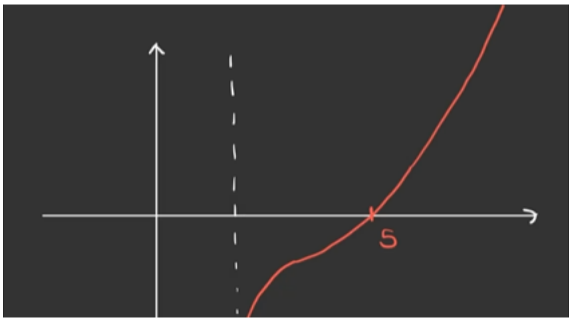
$\Longrightarrow \lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{F(x)}{x} \overset{De\ l'\text{Hôpital}}{\cong} \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ non c'è l'asintoto obliquo.



$F(x)$

$$G(x) = \int_{5}^{x} \frac{e^{t}+6}{\sqrt{t-3}}\,dt$$

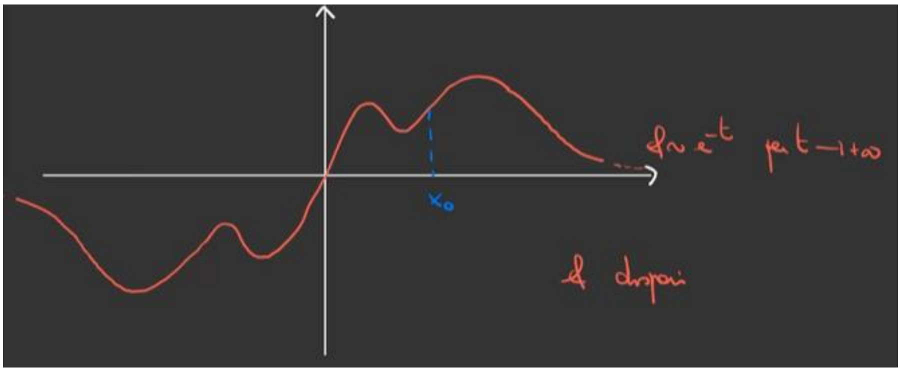


$$H(x) = \int_{5}^{x} \frac{e^{t}+6}{t-3}\,dt$$

$x > 5)$ $\int_{5}^{t} f(t)\,dt \geq 0$ per monotonia $\quad f(t) > 0\ \ \forall t$

$x < 5)$ $-\int_{x}^{5} f(t)\,dt \leq 0$ per monotonia

Consideriamo la funzione f con il grafico seguente



Tracciare un grafico qualitativo di $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$.

- f dispari$\Longrightarrow$ F è pari.

$$F(-x) = \int_{x_0}^{-x} f = -\int_{-x}^{x_0} f(t)\,dt =$$

$$= \int_{x}^{x_0} f(-s)\,ds = -\int_{-x_0}^{x} (-f(s))\,ds$$

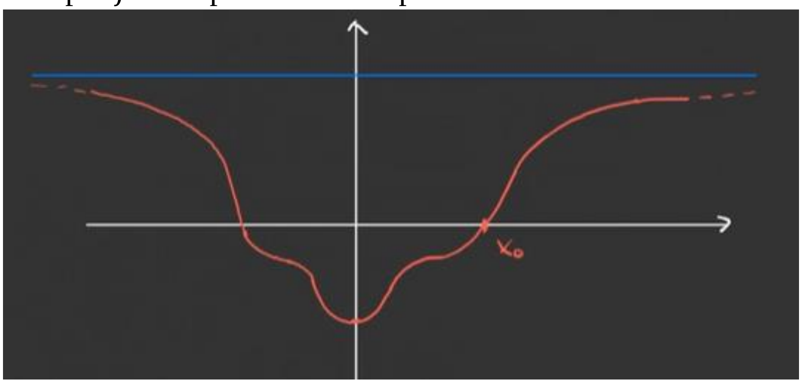
$$t = -s \quad dt = -ds$$
$$t = -x \Longrightarrow s = x$$
$$t = x_0 \Longrightarrow s = -x_0$$

$$= \int_{-x_0}^{x} f(s)\,ds = \underbrace{\int_{-x_0}^{x} f}_{=0} + \int_{x_0}^{x} f = F(x)$$

Studiamo F per $x > 0$.
Possiamo dire che $F < 0$ in $[0, x_0), F > 0$ in $(x_0, +\infty)$.
Per il teorema fondamentale $F'(x) = f(x) > 0 \ \forall x > 0 \Longrightarrow F$ è strettamente crescente.

$$F''(x) = f'(x)$$

Dove f è crescente $\Longrightarrow f' > 0 \Longrightarrow F'' > 0 \Longrightarrow F$ è convesso
Dove f è decrescente $\Longrightarrow F$ è concava
I punti di estremo per f sono punti di flesso per F



$\lim_{x\to+\infty} F(x) = ?$
$f(t) \sim e^{-t}$ per $t \to +\infty$
$\Longrightarrow f$ è integrabile a $+\infty$
$\Longrightarrow$ c'è un asintoto orizzontale
$\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge