☐ COMANDO IN TENSIONE (RAPPRESENTAZIONE TIPO NORTON)

FORMA ESPLICITA
$$\begin{cases} i_1 = g_1(v_1, v_2) \\ i_2 = g_2(v_1, v_2) \end{cases}$$

ovvero (caso lineare)

$$\boxed{\begin{cases} i_1 = g_{11} v_1 + g_{12} v_2 + i_{N1} \\ i_2 = g_{21} v_1 + g_{22} v_2 + i_{N2} \end{cases}}$$

In forma matriciale:

$$\boxed{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{N1} \\ i_{N2} \end{bmatrix}}$$

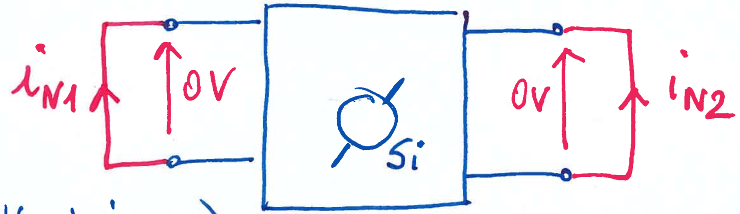
$$\underline{i} = \underset{\sim}{G}\, \underline{v} + \underline{i}_N$$

$\underline{i}_N$ vettore sorgenti

$\underset{\sim}{G}$ matrice delle CONDUTTANZE DI CORTOCIRCUITO

- SIGNIFICATO DI $\underline{i}_N$

Con porte chiuse in cortocircuito $\underline{v} = 0 \longrightarrow \underline{i} = \underline{i}_N$



i_{N1}, i_{N2} correnti di cortocircuito

(N.B. se non ci sono S_i risulterà $\underline{i}_N = \underline{0}$)

- SIGNIFICATO DI $\underset{\sim}{G}$: (conduttanze "di cortocircuito")

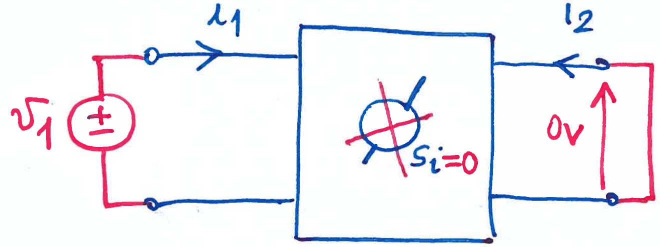
Spegniamo le sorgenti interne indipendenti $S_i \longrightarrow \underline{i} = \underset{\sim}{G}\,\underline{v}$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

I) comando v_1 acceso, v_2 spento (porta 2 cortocircuitata)

$g_{11} = \left.\dfrac{i_1}{v_1}\right|_{v_2=0}$ conduttanza di ingresso alla porta 1

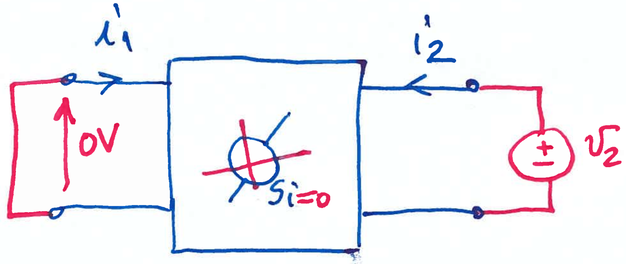
$g_{21} = \left.\dfrac{i_2}{v_1}\right|_{v_2=0}$ conduttanza di trasferimento da porta 1 a porta 2



II) comando v_2 acceso, v_1 spento (porta 1 cortocircuitata)

$g_{12} = \left.\dfrac{i_1}{v_2}\right|_{v_1=0}$ conduttanza di trasf. da porta 2 a porta 1

$g_{22} = \left.\dfrac{i_2}{v_2}\right|_{v_1=0}$ conduttanza di ingresso alla porta 2



RELAZIONE FRA RAPPRESENTAZIONE THEVENIN E NORTON:

Thevenin: $\underline{v} = \underset{\sim}{R}\,\underline{i} + \underline{v}_T$ comando in corrente

Se $\mathrm{Det}(\underset{\sim}{R}) \neq 0$ $\exists$ $\underset{\sim}{R}^{-1}$ allora:

$$\underset{\sim}{R}^{-1}\underline{v} = \cancel{\underset{\sim}{R}^{-1}\underset{\sim}{R}}\,\underline{i} + \underset{\sim}{R}^{-1}\underline{v}_T \qquad (\tilde{R}\tilde{R}^{-1} = \underline{1} \text{ matrice unità})$$

da cui ricavo

$$\underline{i} = \underbrace{\underset{\sim}{R}^{-1}}_{\underset{\sim}{G}}\underline{v} \underbrace{- \underset{\sim}{R}^{-1}\underline{v}_T}_{\underset{\sim}{i_N}}$$

comando in tensione! ovvero Norton

$$\boxed{\underset{\sim}{G} = \underset{\sim}{R}^{-1}} \qquad \boxed{\underline{i}_N = -\underset{\sim}{R}^{-1}\underline{v}_T}$$

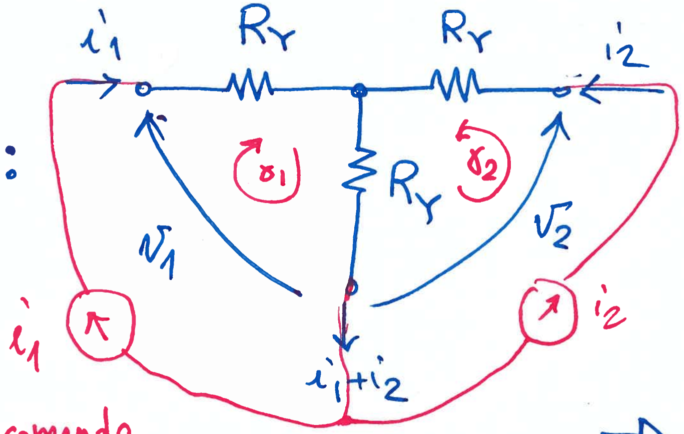
RELAZIONI (MATRICIALI) DI PASSAGGIO FRA LE RAPPRESENTAZIONI

Nota: Se $\det(\underset{\sim}{R}) = 0$ allora $\underset{\sim}{R}$ non e' invertibile, $\underset{\sim}{G}$ non esiste e il doppio-bipolo non e' comandabile in tensione

Nota 2: Per esercizio lo studente ricavi le formule di passaggio inverse da Norton a Thevenin

Esempio ☐ TRIPOLI A STELLA E A TRIANGOLO DI RESISTORI

STELLA: (Y)



i_1, i_2 comando

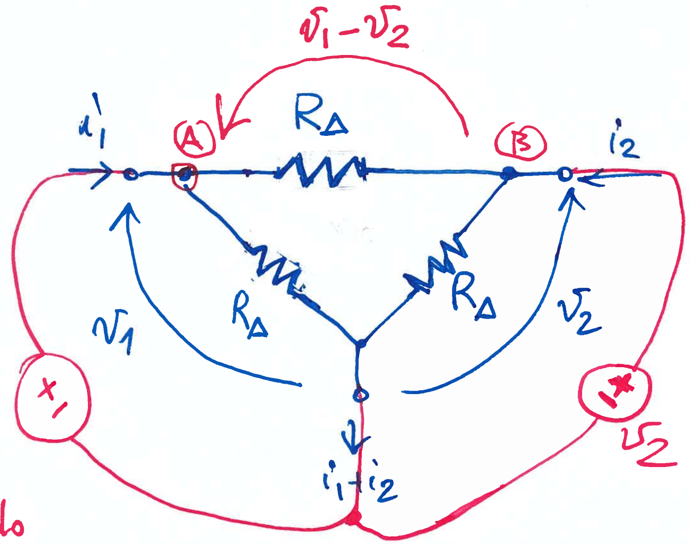
Trovare la matrice $\underset{\sim}{R}$

KVL γ_1: $v_1 = R_Y i_1 + R_Y (i_1 + i_2)$

KVL γ_2: $v_2 = R_Y i_2 + R_Y (i_1 + i_2)$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2R_Y & R_Y \\ R_Y & 2R_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

TRIANGOLO: (Δ)



v_1, v_2 comando

Trovare la matrice $\underset{\sim}{G}$

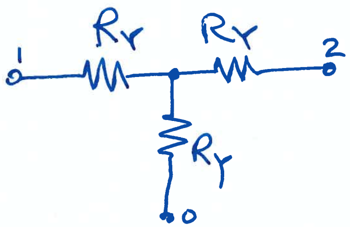
KCL A : $i_1 = \dfrac{v_1}{R_\Delta} + \dfrac{v_1 - v_2}{R_\Delta}$

KCL B : $i_2 = \dfrac{v_2}{R_\Delta} - \dfrac{v_1 - v_2}{R_\Delta}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{R_\Delta} & -\frac{1}{R_\Delta} \\ -\frac{1}{R_\Delta} & \frac{2}{R_\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

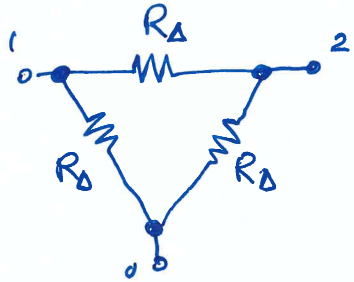
☐ EQUIVALENZA ESTERNA FRA TRIPOLI STELLA-TRIANGOLO DI RESISTORI

STELLA
(Y)



$$\underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 2R_Y & R_Y \\ R_Y & 2R_Y \end{bmatrix}$$

TRIANGOLO
(Δ)



$$\underset{\sim}{G} = \begin{bmatrix} \frac{2}{R_\Delta} & -\frac{1}{R_\Delta} \\ -\frac{1}{R_\Delta} & \frac{2}{R_\Delta} \end{bmatrix}$$

Ricavo $\underset{\sim}{R} = \underset{\sim}{G}^{-1} = \dfrac{1}{\det(G)} \begin{bmatrix} \frac{2}{R_\Delta} & \frac{1}{R_\Delta} \\ \frac{1}{R_\Delta} & \frac{2}{R_\Delta} \end{bmatrix} =$

$$\underset{\sim}{R} = \frac{1}{\frac{4}{R_\Delta^2} - \frac{1}{R_\Delta^2}} \begin{bmatrix} \frac{2}{R_\Delta} & \frac{1}{R_\Delta} \\ \frac{1}{R_\Delta} & \frac{2}{R_\Delta} \end{bmatrix} = \frac{R_\Delta^2}{3} \begin{bmatrix} \frac{2}{R_\Delta} & \frac{1}{R_\Delta} \\ \frac{1}{R_\Delta} & \frac{2}{R_\Delta} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3}R_\Delta & \frac{1}{3}R_\Delta \\ \frac{1}{3}R_\Delta & \frac{2}{3}R_\Delta \end{bmatrix}$$

IMPONIAMO LA STESSA REL. COSTITUTIVA, OVVERO STESSA $\underset{\sim}{R}$:

$$\begin{bmatrix} 2R_Y & R_Y \\ R_Y & 2R_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}R_\Delta & \frac{1}{3}R_\Delta \\ \frac{1}{3}R_\Delta & \frac{2}{3}R_\Delta \end{bmatrix}$$

È POSSIBILE SE

$$\boxed{R_Y = \frac{R_\Delta}{3}} \qquad \boxed{R_\Delta = 3R_Y}$$

"TRASFORMAZIONI STELLA-TRIANGOLO"

Risultato utilissimo nei circuiti con topologia "trifase" che vedremo più avanti!...

☐ COMANDO IN FORMA IBRIDA

DEL PRIMO TIPO

FORMA ESPLICITA
$$\begin{cases} v_1 = h_1(i_1, v_2) \\ i_2 = h_2(i_1, v_2) \end{cases}$$

ovvero (caso lineare)

$$\boxed{\begin{cases} v_1 = h_{11}\, i_1 + h_{12}\, v_2 + v_{T1} \\ i_2 = h_{21}\, i_1 + h_{22}\, v_2 + i_{N2} \end{cases}}$$

In forma matriciale

$$\boxed{\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{H}} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{T1} \\ i_{N2} \end{bmatrix}}$$

$\underset{\sim}{H}$ matrice ibrida del 1° tipo

DEL SECONDO TIPO

FORMA ESPLICITA
$$\begin{cases} i_1 = h'_1(v_1, i_2) \\ v_2 = h'_2(v_1, i_2) \end{cases}$$

ovvero (caso Lineare)

$$\boxed{\begin{cases} i_1 = h'_{11} v_1 + h'_{12} i_2 + i_{N1} \\ v_2 = h'_{21} v_1 + h'_{22} i_2 + v_{T2} \end{cases}}$$

In forma matriciale

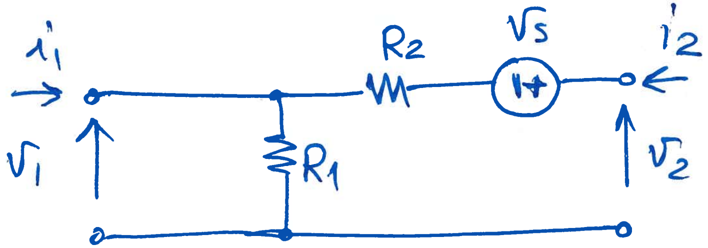
$$\boxed{\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{H}'} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{N1} \\ v_{T2} \end{bmatrix}}$$

$\underset{\sim}{H}'$ matrice ibrida del 2° tipo

È FACILE MOSTRARE CHE $\underset{\sim}{H}' = \underset{\sim}{H}^{-1}$

Si può dare un significato ai singoli parametri delle forme ibride nello stesso modo visto per le rappresentazioni thevenin e Norton

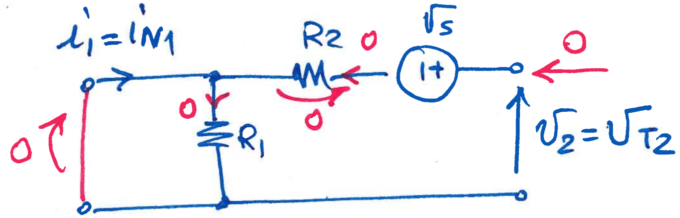
Esempio (2° tipo)



Determinare la rappresentazione $\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_{N1} \\ v_{T2} \end{bmatrix}$

- vettore delle sorgenti:

Spengo il comando $\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$



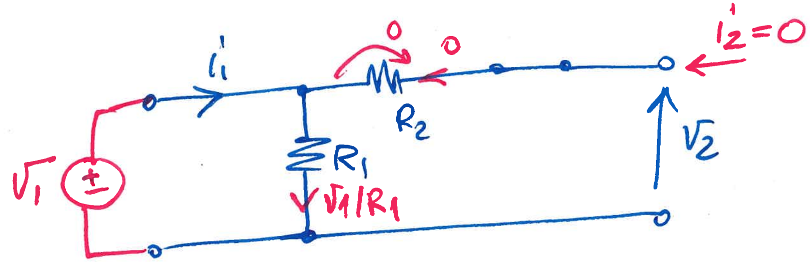
$\boxed{\begin{matrix} i_{N1} = 0 \\ v_{T2} = v_s \end{matrix}}$

- matrice $\underset{\sim}{H}'$:

Spengo sorgenti interne $\Rightarrow \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12} \\ h'_{21} & h'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$

I) $h'_{11} = \left.\dfrac{i_1}{v_1}\right|_{i_2=0} = \dfrac{1}{R_1}$

$h'_{21} = \left.\dfrac{v_2}{v_1}\right|_{i_2=0} = 1$

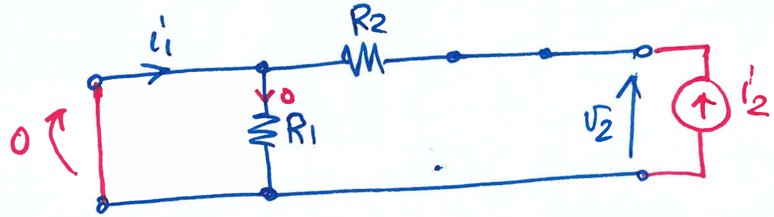


$i_1 = \dfrac{v_1}{R_1}$

$v_2 = v_1$

II) $h'_{12} = \left.\dfrac{i_1}{i'_2}\right|_{v_1=0} = -1$

$h'_{22} = \left.\dfrac{v_2}{i'_2}\right|_{v_1=0} = R_2$



$i_1 = -i'_2$

$v_2 = R_2 i'_2$

RISULTATO:

$$\boxed{\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & -1 \\ 1 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ v_S \end{bmatrix}}$$

FORME DI TRASMISSIONE

forma esplicita funzione di $(v_2, -i_2)$
(diretta)

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{T}} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} v_0 \\ i_0 \end{bmatrix}}_{\text{vettore sorgenti}}$$

$\underset{\sim}{T}$ matrice di trasmissione

forma esplicita funzione di (v_1, i_1)
(inversa)

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{T}'} \begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} v'_0 \\ i'_0 \end{bmatrix}}_{\text{vettore sorgenti}}$$

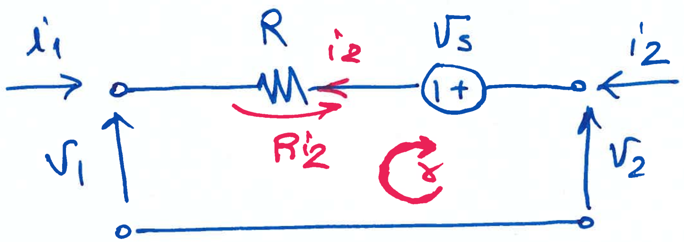
$\underset{\sim}{T}'$ matrice di trasmissione inversa

- È FACILE MOSTRARE CHE $\underset{\sim}{T}' = \underset{\sim}{T}^{-1}$

- Il segno $(-)$ per i_2 e' usato per definizione ; comporta che $(-i_2)$ rispetto a v_2 forma una convenzione dei generatori alla porta 2

- Le forme di trasmissione sono valide matematicamente ma non esprimono forme di comando perche' le variabili indipendenti sono prese alla stessa porta ($v_2, -i_2$ alla porta 2 oppure v_1, i_1 alla porta 1)

Esempio (Forma di trasmissione)



Rappresentare la relazione costitutiva in forma di trasmissione

matematicamente deduco che: $\boxed{i_1 = -i_2}$

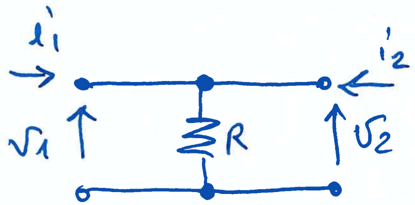
(KVL γ:) $v_1 + Ri_2 + v_s - v_2 = 0$

$$\boxed{v_1 = -Ri_2 + v_2 - v_s}$$

da cui si ottiene

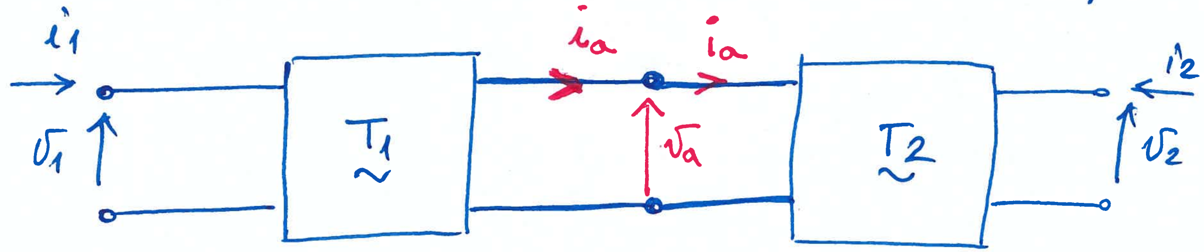
$$\boxed{\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{T}} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v_s \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Esempio



$$\begin{cases} v_1 = v_2 \\ i_1 = -i_2 + \dfrac{v_2}{R} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix}}$$

☐ CONNESSIONE IN CASCATA DI DOPPI BIPOLI E MATRICI DI TRASMISSIONE (senza sorgenti indipendenti)



Determinare la matrice di trasmissione $\underset{\sim}{T}$

Per il doppio bipolo #1: $\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{T_1} \begin{bmatrix} v_a \\ i_a \end{bmatrix}$ (infatti v_a e $-i_a$ sono le grandezze alla "porta 2")

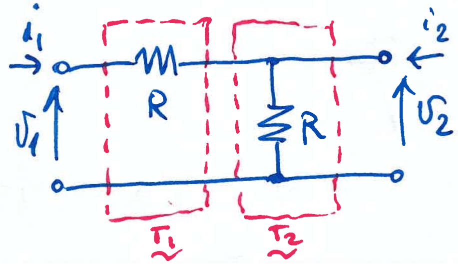
Per il doppio bipolo #2 $\begin{bmatrix} v_a \\ i_a \end{bmatrix} = \underset{\sim}{T_2} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$ (infatti v_a e i_a sono le grandezze alla "porta 1")

Quindi $\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{T_1}\, \underset{\sim}{T_2} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T_1}\, \underset{\sim}{T_2}}$

Prodotto delle matrici $\underset{\sim}{T}$ nell'ordine di connessione

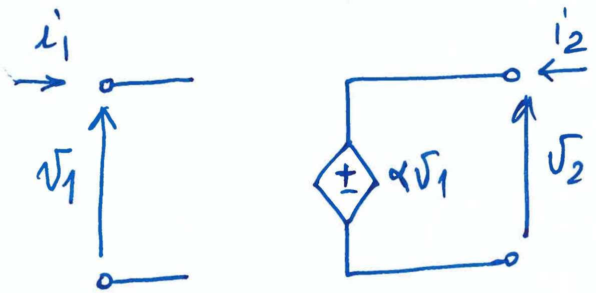
(• Per la matrice di trasmissione inversa si otterrebbe $\underset{\sim}{T}' = \underset{\sim}{T_2}'\, \underset{\sim}{T_1}'$)

Esempio:

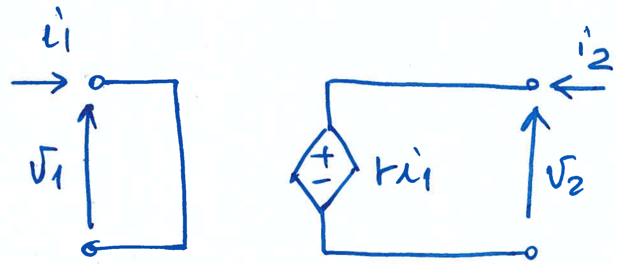


$$\underset{\sim}{T} = \underset{\sim}{T_1}\, \underset{\sim}{T_2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/R & 1 \end{bmatrix}}_{\text{(Vedi esempi precedenti)}} = \begin{bmatrix} 2 & R \\ 1/R & 1 \end{bmatrix}$$

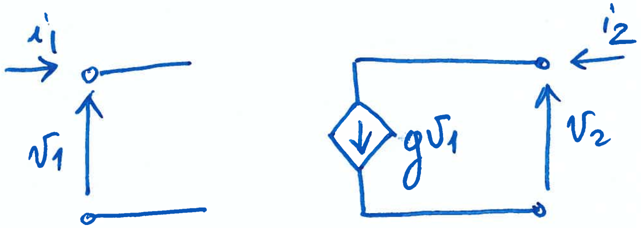
□ GENERATORI PILOTATI COME DOPPI-BIPOLI INTRINSECI



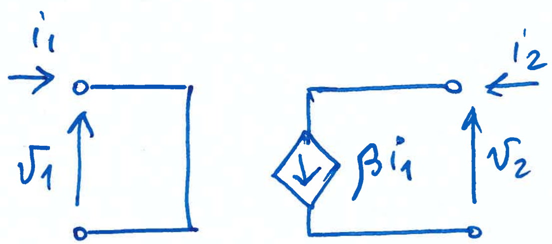
$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ v_2 = \alpha v_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \underset{\sim}{H}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = r i_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \underset{\sim}{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix}$$



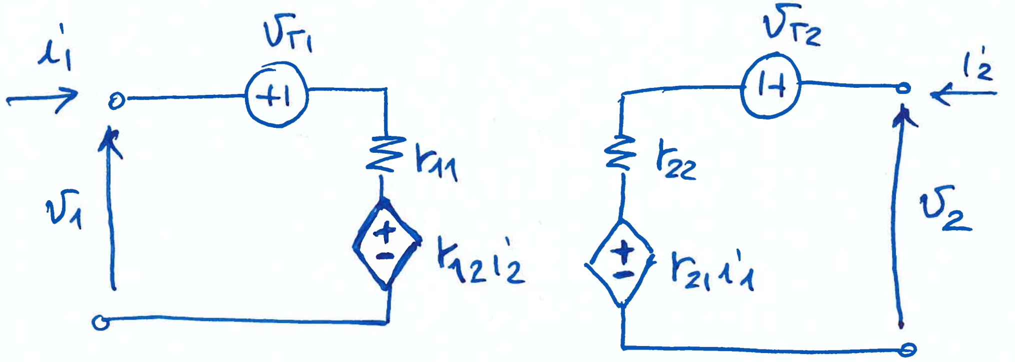
$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = g v_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \underset{\sim}{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{bmatrix}$$



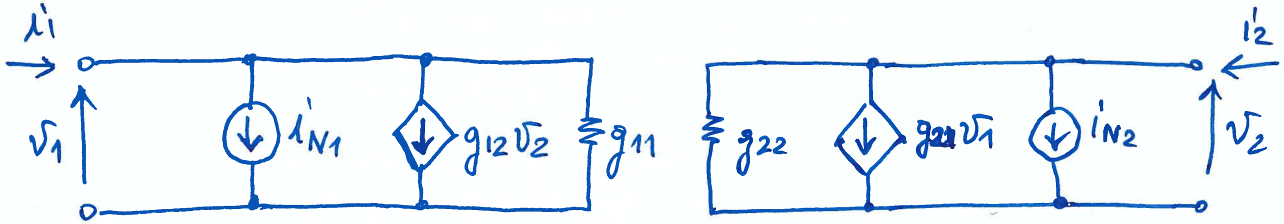
$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ i_2 = \beta i_1 \end{cases} \Rightarrow \quad \underset{\sim}{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}$$

☐ CIRCUITI EQUIVALENTI

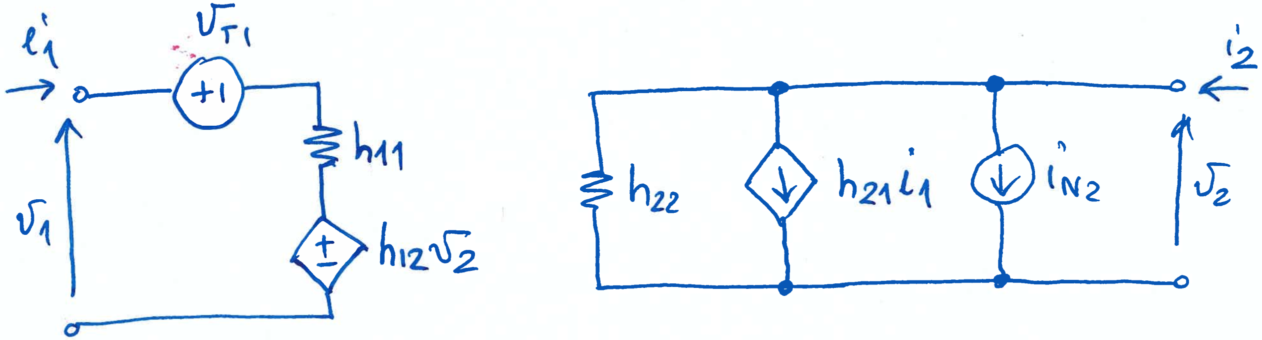
■ THEVENIN



■ NORTON



■ IBRIDO 1° TIPO



■ IBRIDO 2° TIPO

lasciato allo studente per esercizio

N.B. Le forme di trasmissione <u>non</u> descrivono circuiti equivalenti

Table 3.1 Six representations of a two-port

Representations	Independent variables	Dependent variables
Current-controlled	i_1, i_2	v_1, v_2
Voltage-controlled	v_1, v_2	i_1, i_2
Hybrid 1	i_1, v_2	v_1, i_2
Hybrid 2	v_1, i_2	i_1, v_2
Transmission 1	v_2, i_2	v_1, i_1
Transmission 2	v_1, i_1	v_2, i_2

Table 3.2 Equations for the six representations of a linear resistive two-port (without inner independent sources)

Representations	Scalar equations	Vector equations
Current-controlled	$v_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2$ $v_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2$	$\mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{i}$
Voltage-controlled	$i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2$ $i_2 = g_{21}v_1 + g_{22}v_2$	$\mathbf{i} = \mathbf{G}\mathbf{v}$
Hybrid 1	$v_1 = h_{11}i_1 + h_{12}v_2$ $i_2 = h_{21}i_1 + h_{22}v_2$	$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$
Hybrid 2	$i_1 = h'_{11}v_1 + h'_{12}i_2$ $v_2 = h'_{21}v_1 + h'_{22}i_2$	$\begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}'\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$
Transmission 1†	$v_1 = t_{11}v_2 - t_{12}i_2$ $i_1 = t_{21}v_2 - t_{22}i_2$	$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}\begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$
Transmission 2†	$v_2 = t'_{11}v_1 + t'_{12}i_1$ $-i_2 = t'_{21}v_1 + t'_{22}i_1$	$\begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}'\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix}$

† For historical reasons, a minus sign is used in conjunction with i_2. Because of the reference direction chosen for i_2, $-i_2$ gives the current leaving the output port.

transmission media. Transmission matrices are important in the study of communication networks and will be treated in Chap. 13.

Example Consider the two-port in Fig. 1.3. Let $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, and $R_3 = 3\,\Omega$. Equations (1.2*a* and *b*) give the following current-controlled representation:

$$v_1 = 4i_1 + 3i_2 \tag{1.9}$$

$$v_2 = 3i_1 + 5i_2 \tag{1.10}$$

The voltage-controlled representation is given by Eqs. (1.7) and (1.8):

$$i_1 = \tfrac{5}{11}v_1 - \tfrac{3}{11}v_2 \tag{1.11}$$

$$i_2 = -\tfrac{3}{11}v_1 + \tfrac{4}{11}v_2 \tag{1.12}$$