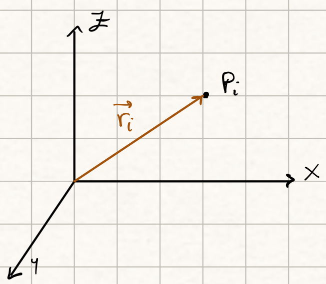
DINAMICA DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI

→ forze di interazione tra punti
  ∟ **FORZE INTERNE** tra punti del sistema in considerazione
  ESTERNE del "resto dell'universo"

→ anche sistemi interagiscono tra di loro
  ∟ valgono i principi della dinamica

inerziale
$n, P_i, m_i, \vec{v}_i, \vec{a}_i$



$$\vec{q}_i = m_i \vec{v}_i \quad ; \quad \mathcal{E}_K = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i}{m_i} \quad ; \quad \vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{F}_i = \overset{\text{esterno}}{\vec{F}_i^{(E)}} + \overset{\text{interno}}{\vec{F}_i^{(I)}} = \vec{F}_i^{(E)} + \sum_{\substack{j=1\dots n \\ j \neq i}} \vec{F}_{ij}$$

Grandezze globali:

- $\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} \vec{q}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i$
- $\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$
- $\mathcal{E}_K = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_{K_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

→ **CENTRO DI MASSA** = punto più vicino a dove è concentrata la massa
↳ geometrica → centro di simmetria

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

media pesata delle posizioni

- $$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{q}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\vec{Q}}{M}$$

! massa non dipendente da $\vec{v}$ (non relativistica)

↳ media pesata delle velocità

⇒ $\vec{Q} = M \vec{v}_{CM}$ il sistema di punti materiali si muove come se fosse collassato in un unico punto, con velocità pari a quella del centro di massa

- $$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i}{M} = \frac{\vec{F}^{(E)}}{M}$$

se sistema isolato: $\vec{Q} = \text{cost}$ → $\vec{v}_{CM} = \text{cost}$ → $\vec{a}_{CM} = 0$ (CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO)

S, S' interagiscono: $S + S'$ = sistema isolato

$$\vec{Q}_{S+S'} = \text{cost}$$

→ scambio di quantità di moto nell'interazione tra i due sistemi. $\Delta \vec{Q}_S = -\Delta \vec{Q}_{S'}$

Forze interne → accelerazione dei singoli punti del sistema

↳ ma somma di $F_i^{(I)}$ si annullano a due a due

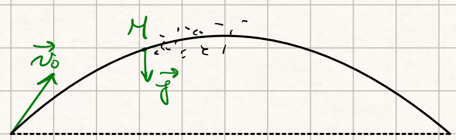
$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + F_i^{(I)}$$

$$M\vec{a}_{CM} = \vec{F}^{(E)} + \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{(I)}}}_{=0} \Rightarrow \boxed{\vec{F}^{(E)} = M\vec{a}_{CM}}$$ (TEOREMA DEL MOTO DEL C.M.)

↳ l'accelerazione del centro di massa dipende solo dalle forze esterne

$$M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d(M\vec{v}_{CM})}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{F}^{(E)} = \frac{d\vec{Q}}{dt}}$$

oss. L'azione delle f. interne non modifica lo stato di moto del centro di massa, ma il moto di ∀ punto dipende dall'azione delle forze est. e interne agenti su di esso.



$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^{(E)}$$

M esplode → il C.M. dei frammenti continua a percorrere la traiettoria parabolica, perchè non dipende dalle f. int.
→ ∀ frammento percorre traiettorie diverse perchè, oltre alle forze est., è anche soggetto a forze interne.

Momento angolare:

$\vec{L}_O$ centro fisso coincidente con l'origine :

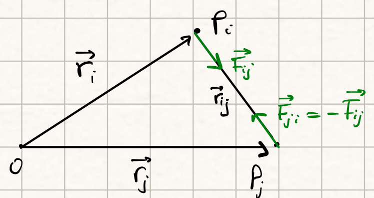
$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i$$

somma dei momenti delle forze applicate su i

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i\vec{v}_i\right)}}_{=0} + \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \underbrace{m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}}_{m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{\tau}_i^{(E)} + \cancel{\vec{\tau}_i^{(I)}}\right)$$

$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$; $\vec{\tau}_i^{(I)} = 0$ *

↳ momenti meccanici



$$* \quad \vec{\tau}_{ij}^{(I)} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = \vec{r}_{ij} \times \vec{F}_{ij} = 0$$

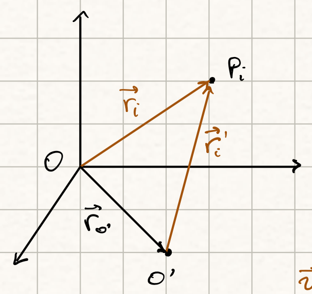
2 momenti meccanici: j su i, i su j

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{(E)}}$$ rispetto O fisso

Rispetto O' mobile (con $\vec{v}$ cost):

vel. del singolo punto materiale (nel sistema di riferimento inerziale)

$\vec{v}_{O'} = cost$



$$\vec{L}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{r}_{O'}$$

$$\rightarrow \vec{L}_{O'} = \sum_{i=1}^{n} \left[(\vec{r}_i - \vec{r}_{O'}) \times m_i \vec{v}_i \right]$$

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \cancel{\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i \right)}}_{=0} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\overbrace{\frac{d\vec{r}_{O'}}{dt}}^{\vec{v}_{O'}} \times m_i \vec{v}_i \right)}_{-\vec{v}_{O'} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i' \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right)}_{\text{sommatoria di momenti meccanici}}$$

$$= -\vec{v}_{O'} \times \overbrace{M \vec{v}_{CM}}^{\vec{Q}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt}} = -\vec{v}_{O'} \times M\vec{v}_{CM} + \cancel{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(I)}} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(E)} = \boxed{\vec{\tau}_{O'}^{(E)} - \underline{\vec{v}_{O'} \times M\vec{v}_{CM}}}$$

Σ dei due $\vec{\tau}$ interne:
$\vec{r}_i' \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j' \times \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_i' - \vec{r}_j') \times \vec{F}_{ij}$

$=0$
- se O' è fisso $(\vec{v}_{O'} = 0)$
- se centro di massa fisso $(\vec{v}_{CM} = 0)$
- se $O' \equiv CM$
- se $\vec{v}_{O'} \parallel \vec{v}_{CM}$

La variazione del momento angolare dipende solo dal momento meccanico esterno se il polo è fisso oppure si muove parallelamente al centro di massa

Il moto del punto materiale = moto del centro di massa + moto del punto materiale rispetto al CM

$\hookrightarrow$ dipende dalle forze esterne

- $\vec{Q} = cost$ se $\vec{F}^{(E)} = 0$
- CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE se:

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{\tau}_{O'}^{(E)} \cancel{- \vec{v}_{O'} \times \underbrace{M\vec{v}_{CM}}_{\vec{Q}}}$$

bisogna scegliere opportunamente O' t.c. il termine $= 0$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{\tau}_{O'}^{(E)} = \vec{0} \quad \text{se} \quad \vec{F}^{(E)} = 0 \quad \vee \quad \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^{(E)} = 0 \rightarrow \vec{r}_i' \parallel \vec{F}_i^{(E)}$$

Dunque se $\vec{F}^{(E)} = 0$ (sistema isolato) si conservano sia la quantità di moto che il momento angolare ($\vec{L}$ cost, $\vec{Q}$ cost)

$F^{(I)}$ → determina solo il moto delle particelle del sistema tra di loro

$$F^{(E)} = \frac{d\vec{Q}}{dt} = M\vec{a}_{CM} \qquad \text{con} \quad \vec{Q} = M\vec{v}_{CM}$$

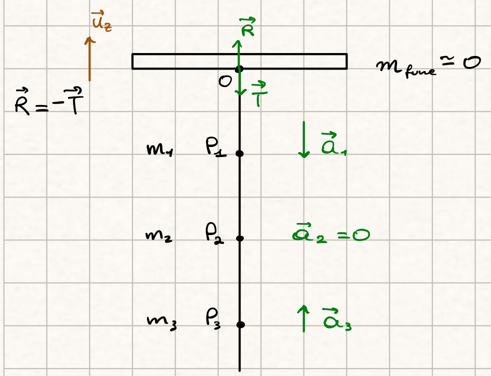
- polo O' mobile ($\vec{v}_{O'} = \text{cost}$)

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{\tau}_{O'}^{(E)} - \underbrace{\boxed{\vec{v}_{O'} \times \vec{Q}}}_{=0} \quad \text{se}$$

1. $\vec{v}_{O'} = 0$
2. $\vec{v}_{CM} = 0$
3. $\vec{v}_{O'} \parallel \vec{v}_{CM}$

Vanno considerate:
- → FORZE VERE
- → REAZIONI VINCOLARI
- → FORZE APPARENTI se sistema non inerziale

Come calcolare le reazioni vincolari? esempio



$\vec{a}_1 = -a_1\vec{u}_z$
$\vec{a}_2 = 0$
$\vec{a}_3 = +a_3\vec{u}_z$

$$\Rightarrow \vec{a}_{CM} = \frac{d^2\vec{r}_{CM}}{dt^2} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3}{m_1+m_2+m_3} = \frac{-m_1a_1 + m_3a_3}{m_1+m_2+m_3}\,\vec{u}_z$$

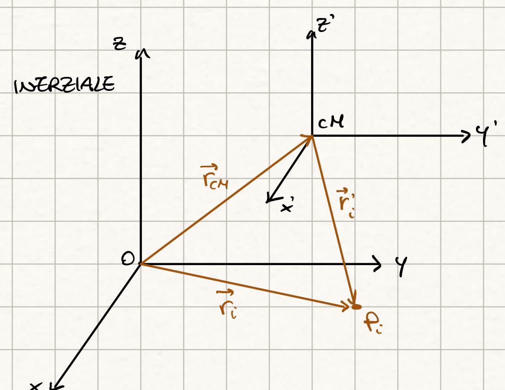
$$|\vec{F}^{(E)}| = \overset{\text{verso l'alto}}{R} - \overset{\text{verso il basso}}{(m_1+m_2+m_3)g} = Ma_{CM} = -m_1a_1 + m_3a_3$$

$$\Rightarrow R = (m_1+m_2+m_3)g - m_1a_1 + m_3a_3$$

Definire un sistema di riferimento "agganciato" al CM:

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CM

1) origine ≡ CM $\quad \Rightarrow \vec{Q} = 0$
2) assi // assi di un sistema inerziale
3) moto traslatorio rispetto al sistema inerziale
(non è detto che debba essere anche esso inerziale, ma <u>non</u> deve avere moto rotatorio → per semplificare l'analisi)
4) $\vec{v}_{CM}$ assoluta (nel sistema di riferim. inerziale) $\neq 0$, ma cost $\Rightarrow$ il sistema CM è <u>INERZIALE</u>



$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}$

$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}$ $\left[+\cancel{\vec{\omega}\times\vec{r}'}\right]$ → no moto rotatorio

$\Rightarrow \vec{r}'_{CM} = 0 \qquad \vec{v}'_{CM} = 0 \qquad (CM \equiv O')$

$$\vec{r}'_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i'}{M} = 0 \quad ; \quad \vec{v}'_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i'}{M} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{Q}' = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i' = 0$$

(QUANTITÀ DI MOTO RELATIVA DEL CM)

$\Rightarrow \vec{a}'_{CM} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}'_i = 0$ (ACCELER. RELATIVA DEL CM)

se sistema CM NON inerziale : $\vec{a}_{CM} \neq 0$

$\Rightarrow$ agirà anche $\vec{F}_{trascinamento}$

$\forall P_i$ agiranno : $\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)} - m_i \vec{a}_{CM} = m_i \vec{a}'_i$

↱ acc. relative del singolo punto

↳ interazione con gli altri punti

$\vec{F}_i^{(I)} = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \Rightarrow \vec{F}^{(E)} - \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}'_i = 0$$

si elidono perché $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_{CM} = M\vec{a}_{CM} = \vec{F}^{(E)}$

MOMENTO ANGOLARE :

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}^{(E)} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}'_i \times \vec{F}_i^{(E)} = \vec{\tau}'^{(E)}$$

$\Rightarrow$ il momento angolare rispetto a CM nel sistema inerziale = momento angolare rispetto CM nel sistema di riferimento CM

$$\vec{L}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}'_i \times m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{CM} = \vec{L}'_{CM} + \cancel{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}'_i}_{M\vec{r}'_{CM} = 0} \times \vec{v}_{CM}}$$

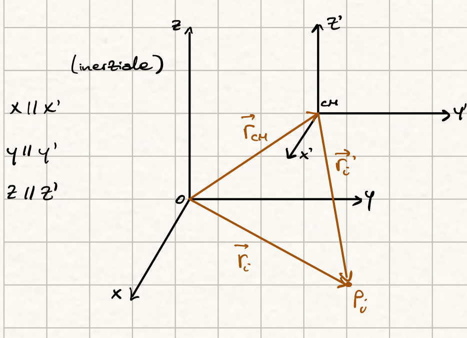
↳ momento angolare nel sistema CM

$\rightarrow$ Anche nel sistema CM vale : $\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}'^{(E)}$ (2° EQ. CARDINALE DELLA DINAMICA)

CONDIZIONI DI CONSERVAZIONE :

- $\vec{Q} = cost$ se $\vec{F}^{(E)} = 0$ (sistema isolato)
- $\vec{L} = cost$ se $\vec{F}^{(E)} = 0$
  scegliendo opportunamente il polo
  $\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} = \vec{\tau}_{O'}^{(E)} - \vec{v}_{O'} \times M\vec{v}_{CM}$

TEOREMI DI KÖNIG :



$\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}$

$\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$ (teorema della velocità relat.)

mom. ang. totale del sistema

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM})$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i}_{\vec{L}'_{CM}} + \cancel{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}_{CM}} + \cancel{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}'_i} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM}$$

momento angolare del sistema rispetto il centro di massa

$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}_{CM}$

$M\vec{r}'_{CM} \times \vec{v}_{CM}$

$= 0$

$= \vec{r}_{CM} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}'_i$

$= M\vec{v}'_{CM} = \vec{Q}'$

$= 0$

$\left(\vec{v}'_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}'_i}{M}\right)$

$= \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM}$

$= \vec{r}_{CM} \times \vec{Q}$

$= \vec{L}_O^{(CM)}$

mom. angolare del CM visto dall'osservatore inerziale

1) $\Rightarrow \vec{L}_O = \vec{L}'_{CM} + \vec{L}_O^{CM}$

moto dei singoli punti rispetto al loro CM

↳ moto globale del sistema rispetto sist. inerz. $\Rightarrow$ dovuto al moto del CM

OSS. · se $\vec{F}^{(E)}=0 \Rightarrow \vec{Q}=0 \Rightarrow \vec{L}_o^{CM}=0 \Rightarrow \vec{L}_o = \vec{L}'_{CM}$ (SISTEMA ISOLATO / assumendo CM come polo)

· se $\vec{L}_o = 0 \Rightarrow$ bilanciamento del moto globale del sistema e moto dei singoli punti rispetto CM $(\vec{L}'_{CM} = \vec{L}_o^{CM})$

ENERGIA CINETICA:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left|\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}\right|^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i'^2}_{E'_k \text{ rispetto sistema CM}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2}_{\frac{1}{2} M v_{CM}^2 = E_k^{CM} \text{ (del centro di massa)}} + \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i 2 \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{CM}}}_{\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i'\right) \cdot \vec{v}_{CM} = M \vec{v}'_{CM} \cdot \vec{v}_{CM} = 0}$$

(v': velocità relat.; velocità dei punti materiali all'interno del sistema CM)

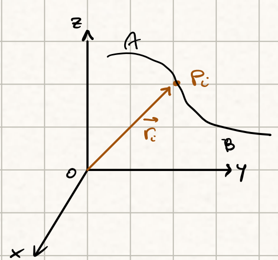
E_k relativa del sistema

2) $E_k = E'_k + E_k^{CM}$

E_k assoluta del CM (GLOBALE)

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

$\forall P_i \qquad \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}$



$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + d\vec{r}_i \qquad \delta W_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$

da A a B: $\quad W_i = \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \Delta E_{k,i} = \Delta\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right)$

$\sum_{i=1}^{n} \rightarrow \quad W_{TOT} = W^{(E)} + W^{(I)} = \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta\left(\frac{1}{2} m_i v_i^2\right) = \Delta E_k$

$\Rightarrow$! sia $\vec{F}^{(E)}$ che $\vec{F}^{(I)}$

↳ Lavoro compiuto dalle forze interne $\neq 0$!!

· FORZE CONSERVATIVE (solo) $\rightarrow W_{TOT} = \Delta E_k = -\Delta E_p$

$E_m = E_k + E_p \quad \Rightarrow \Delta E_m = 0, \quad E_m = \text{cost}$

↳ conservazione dell'en. meccanica

se FORZE CONS +

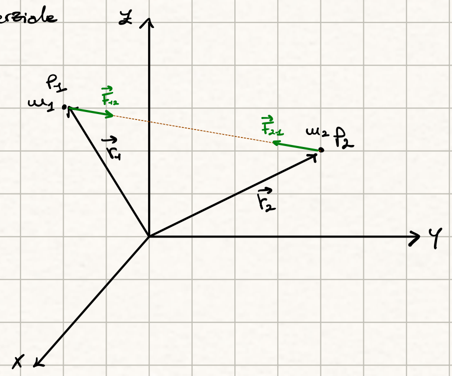
· FORZE NON CONSERVATIVE: $\quad W_{CONS} + \underset{\text{(dissip)}}{W_{N.CONS}} = \Delta E_k$

$\Rightarrow -\Delta E_p + \underset{\text{(dissip)}}{W_{NC}} = \Delta E_k \quad \Rightarrow \underset{\text{(dissip)}}{W_{NC}} = \Delta(E_k + E_p) = \Delta E_m$

INTERAZIONE TRA 2 PUNTI MATERIALI : → sistema isolato

MASSA RIDOTTA

sistema inerziale



$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (azione e reazione)

$$P_1: \quad \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} \qquad \text{(2° legge di Newton)}$$

$$P_2: \quad \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}$$

$\ominus$

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} - \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \vec{F}_{12}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}_{\text{velocità relat. di } P_1 \text{ rispetto } P_2} = \frac{d\vec{v}_{12}}{dt} = \vec{a}_{12}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{12} = \vec{F}_{12}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{12} = \frac{\vec{F}_{12}}{\mu}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = \mu \vec{a}_{12}$$

μ = MASSA RIDOTTA

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Il moto relativo di 2 particelle soggette unicamente alla mutua interazione è equivalente al moto di una particella di massa uguale alla massa ridotta soggetta a una forza equivalente alla forza di interazione osservata relativamente all'altro punto.

integrando due volte si ottiene:

$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ (posizione relativa di una particella rispetto all'altra)

Per conoscere la posizione assoluta:

$$M = m_1 + m_2 \;; \quad \begin{cases} \vec{r}_{CM} = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\vec{r}_2 \\ \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases}$$

se il sistema non è soggetto a forze esterne, CM si muove di moto rettilineo uniforme. → basta sapere la posiz. iniz. e la v_0.

$$\rightarrow \begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_{CM} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}_{12} \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_{CM} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}_{21} \end{cases}$$

se mettiamo il sistema di riferimento con centro $\equiv \vec{r}_{CM}$
→ $\vec{r}_{CM}$ è uguale a 0

OSS. Se le due masse sono molto diverse tra loro, es. $m_1 \ll m_2$, m_1 diventa trascurabile nella somma

$$\rightarrow \mu \simeq \frac{m_1 \cancel{m_2}}{\cancel{m_2}} = m_1$$ (la massa ridotta è ~ massa più piccola)

se invece $m = m_1 = m_2$ $\Rightarrow \mu = \frac{m \cdot \cancel{m}}{2\cancel{m}} = \frac{m}{2}$

URTI

- Quando due punti materiali (o due sistemi di punti materiali) si avvicinano l'uno all'altro con una mutua interazione di durata molto breve in cui si può considerare le particelle ferme.

- Quando le due particelle, prima e dopo l'urto, restano uguali, si parla anche di DIFFUSIONE

$\Rightarrow$ Durante la collisione entrano in gioco solo forze interne, in cui si può considerare il sistema come isolato

- conservazione quantità di moto $\vec{Q}$
- conservazione momento angolare $\vec{L}$
- conservazione energia totale E_{tot}

} ! agiscono solo $\vec{F}_{int}$

$\Rightarrow$ se solo forze conservative: $E_{tot} = E_{mecc}$

$\Rightarrow$ se agiscono anche $\vec{F}_{est}$ IMPULSIVE: NO conservazione $\vec{Q}$
NO conservazione $\vec{L}$ $\rightarrow$ ma dipende dal polo scelto: se si sceglie un polo rispetto al quale l'eventuale F_{est} impuls. non contribuisce al momento angolare del sistema
$\Rightarrow$ sì conservazione $\vec{L}$

il contributo della forza in un lasso di tempo molto breve è significativo

es. REAZIONI VINCOLARI

$\Rightarrow$ se agiscono forze non conservative: bisogna tenere conto anche di altri contributi oltre E_K e E_p, per es. l'energia termica

solo forze conservative:

condizioni iniziali, prima dell'urto: $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$
dopo l'urto: $\vec{q}_1'$, $\vec{q}_2'$

$$E_{tot} = E'_{tot} \Rightarrow \underbrace{E_K + E_{p,int}}_{\text{prima}} = \underbrace{E'_K + E'_{p,int}}_{\text{dopo l'urto}}$$

$$\Rightarrow E_K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{q_1^2}{2m_1} + \frac{q_2^2}{2m_2}$$

$$E'_K = \frac{1}{2}m_1' v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2' v_2'^2 = \frac{q_1'^2}{2m_1'} + \frac{q_2'^2}{2m_2'}$$

$$\Rightarrow E'_K - E_K = E_{p,int} - E'_{p,int}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \Delta E_K = -\Delta E_{p,int}$$

$\rightarrow$ se $\mathcal{E} = 0$: $\Delta E_K = 0$ $\Rightarrow$ conservazione E_K (URTO ELASTICO)

$\rightarrow$ se $\mathcal{E} \neq 0$: URTO ANAELASTICO

$\rightarrow$ $\mathcal{E} < 0$: ENDOTERMICO ($E_K \downarrow$, $E_{p,int} \uparrow$) 1° tipo

$\rightarrow$ $\mathcal{E} > 0$: ESOTERMICO ($E_K \uparrow$, $E_{p,int} \downarrow$) 2° tipo

$$\Rightarrow \frac{q_1'^2}{2m_1'^2} + \frac{q_2'^2}{2m_2'^2} = \frac{q_1^2}{2m_1} + \frac{q_2^2}{2m_2} + \mathcal{E}$$

Se riferiamo l'urto al centro di massa:

$$\vec{Q} = M\vec{v}_{CM} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = 0 \quad \text{perché } \vec{v}_{CM} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{q}_1 = -\vec{q}_2 \quad ; \quad \vec{q}\,'_1 = -\vec{q}\,'_2$$

(durante l'urto, tempo infinitesimo)
↳ NO spostamento

$$\Rightarrow q_1^2 = q_2^2 \quad ; \quad q_1'^2 = q_2'^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1'} + \frac{1}{m_2'}\right) q_1'^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) q_1^2 + E$$

$$\Rightarrow \frac{q_1'^2}{2\mu'} = \underbrace{\frac{q_1^2}{2\mu}}_{\text{massa ridotta}} + E$$

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CM.

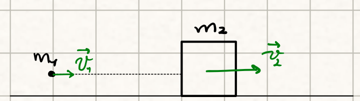
- CASO URTO ELASTICO: $E = 0 \Rightarrow \dfrac{q_1'^2}{2\mu'} = \dfrac{q_1^2}{2\mu}$

→ se $m_1' = m_1$, $m_2' = m_2$ $\Rightarrow \mu' = \mu$
$\Rightarrow q_1'^2 = q_1^2$

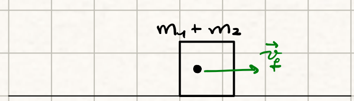
$*!$ $|\vec{q}\,'_i| = |\vec{q}_i|$ $\quad i=1,2$
$|\vec{v}\,'_i| = |\vec{v}_i|$ sono uguali solo in modulo

* L'energia cinetica si conserva, ma comunque c'è scambio di quantità di moto perché la velocità delle particelle tipicamente cambiano direzione dopo l'urto.

- CASO URTO PERFETTAMENTE ANAELASTICO: (dopo l'urto le due particelle proseguono insieme)



prima



dopo

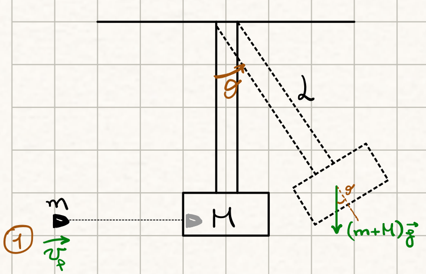
$$\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{v}_f$$

se urto monodimensionale: $\quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_f$

$$v_f = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

massima variazione di E_K

pendolo balistico: ⇒ urto perfettamente anaelastico



velocità iniziale con cui parte l'oscillazione

$$② \quad (m+M)V = m v_p \quad \Rightarrow V = \frac{m}{m+M} v_p$$

Agisce solo la forza peso (la tensione non compie lavoro) ③
↳ conservativa $\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}(m+M)V^2}_{E_p = 0} = \underbrace{(m+M)g\,l(1-\cos\theta)}_{E_K' = 0}$

$$V = \sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$

$$v_p = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$$

Supponiamo che il proiettile sia lanciato da abbastanza vicino da poter assumere che la traiettoria compiuta sia rettilinea orizzontale e che la velocità con cui si conficca nel pendolo sia uguale alla velocità iniziale.

① pre-urto ② urto ③ post-urto