FLUIDOSTATICA

MATERIA
- SOLIDO → volume e forma propri ⇒ legame tra molecole + forte
- LIQUIDO → volume proprio, forma del recipiente
- AERIFORME → NO volume, forma propri

LIQUIDO, AERIFORME: FLUIDI

↑ DENSITÀ

DENSITÀ: $\rho = \frac{dm}{dV}$

- Liquidi: $\rho \simeq 10^3 \ kg/m^3$
- Gas: $\rho \simeq 1 \ kg/m^3$ (molto più rarefatti)

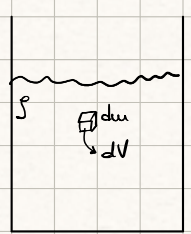
FLUIDI IDEALI (liquidi)

→ incomprimibili

→ assenza di attrito (VISCOSITÀ NULLA)

↳ sforzo di un liquido per scorrere su un'altra parte del liquido

→ omogenei ⇒ ρ non dipende dal punto del fluido

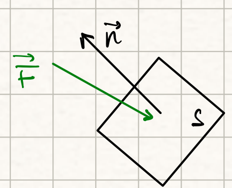


FORZE
- DI VOLUME (dovuta a cause esterne) → $\vec{F}_V \propto V$ → DENSITÀ DI FORZA $\vec{f}_V = \frac{d\vec{F}_V}{dV}$
- DI SUPERFICIE ⇒ $\propto$ superficie che racchiude dm
  ↳ PRESSIONE

- FORZA PESO ⇒ forza di volume: $d\vec{F} = dm \, \vec{g} = \rho \vec{g} \, dV$

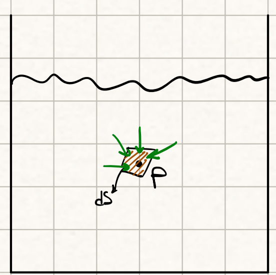
  → $\vec{f}_V = \frac{d\vec{F}}{dV} = \rho \vec{g}$

- F. DI SUPERFICIE ⇒ PRESSIONE



$p = \frac{F_n}{S}$ $\left[\frac{N}{m^2} = Pa \right]$

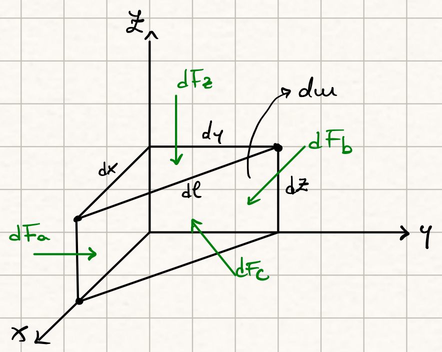
↳ scalare

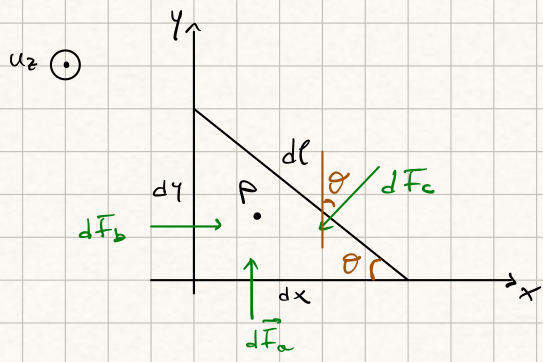


$p = \frac{dF_\perp}{dS}$

In un fluido all'equilibrio la pressione non dipende dalla direzione della superficie
↳ ΣF di $\forall$ elem. $= 0$

DIMOSTRAZIONE :





EQUILIBRIO : $d\vec{F}_s + \cancel{d\vec{F}_v} = 0$

$dV \to 0 \qquad dF_v << dF_s$

$dF_a = p_a \, dx \, dz$
$dF_b = p_b \, dy \, dz$
$dF_c = p_c \, dl \, dz$
} infinitesimi di 2° ordine

$d\vec{F}_v = \vec{f} \, \underline{dx\,dy\,dz}$ infinitesimo di 3° ordine

Perchè ci sia equilibrio : $d\vec{F}_s = 0 \qquad \begin{array}{l} x \to \\ y \to \end{array} \begin{cases} dF_b - dF_c \sin\theta = 0 \\ dF_a - dF_c \cos\theta = 0 \end{cases}$

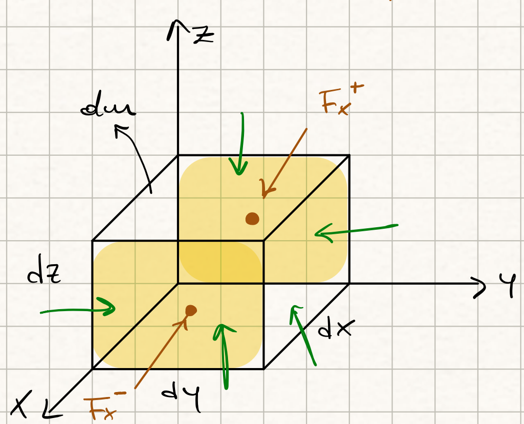
$\Rightarrow \begin{cases} p_b \, dy \cancel{dz} = p_c \underbrace{dl \cancel{dz} \sin\theta}_{dy} \\ p_a \, \cancel{dx} \cancel{dz} = p_c \underbrace{dl \cancel{dz} \cos\theta}_{\cancel{dx}} \end{cases} \Rightarrow \boxed{p_b = p_c = p_a = p}$ ✓

p non dipende dalla direzione

Equazione della fluidostatica :

⇒ quando $\forall$ elem. del fluido è fermo nella sua posizione

$p = p(x, y, z)$ → caratterizza lo STATO DI EQUILIBRIO DEL FLUIDO
↳ campo scalare
→ pressione punto per punto = incognita



$d\vec{F}_v + d\vec{F}_s = 0$

$d\vec{F}_v = \vec{f}_v \, dV = \vec{f}_v \, dx\,dy\,dz$

$\vec{u}_x$: $\quad dF_{v,x} = f_{v,x}\, dx\,dy\,dz$ → agiscono forze di superficie sulle due facce yz

$$\underbrace{p(x,y,z)\,dy\,dz}_{dF_x^+} - \underbrace{p(x+dx,y,z)\,dy\,dz}_{dF_x^-} + f_{v,x}\,dx\,dy\,dz = 0$$ CONDIZIONE DI EQUILIBRIO

sviluppi di Taylor → $p(x+dx,y,z) \simeq p(x,y,z) + \frac{\partial p}{\partial x}\,dx$ pressione nel punto incrementato di dx

↳ incremento lineare lungo x

↳ $p(x,y,z)$: pressione nell'origine

$$\Rightarrow p\,\cancel{dy\,dz} - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\cancel{dy\,dz} + f_{v,x}\,dx\,\cancel{dy\,dz} = 0$$

$$\Rightarrow \cancel{p} - \cancel{p} - \frac{\partial p}{\partial x}dx + f_{v,x}\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = f_{v,x}$$

All'equilibrio :
$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = f_{v,x} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = f_{v,y} \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = f_{v,z} \end{cases}$$

EQUAZ. SCALARI DELLA FLUIDOSTATICA

→ data una forza di volume, la pressione deve soddisfare queste equazioni : derivata parziale della pressione lungo una direzione = componente lungo quella direzione della forza di volume

operatore gradiente : $\quad \mathrm{grad}\, \varphi(x,y,z) = \vec{u}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$

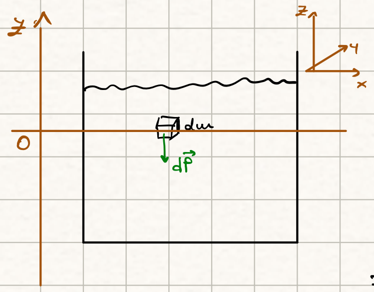
$$\Rightarrow \mathrm{grad}\, p = \vec{f}_v$$ LEGGE DI EQUILIBRIO

- se $\vec{f}_v = 0$ (NO forze di volume) ⇒ derivate di p $=0$ ⇒ PRESSIONE UNIFORME (nello spazio)

↳ uguale in ∀ punto del fluido

se invece c'è la forza di volume :

LEGGE DI STEVINO :



$$d\vec{F} = dm\,\vec{g} = \rho\,\vec{g}\,dV$$
$$\vec{f}_V = \rho\,\vec{g} = -\rho g\,\vec{u}_z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 & \rightarrow \; p \text{ non dipende da } x \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 & \rightarrow \; p \text{ non dipende da } y \\[2ex] \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho g & \rightarrow \; p = p(z) \text{ funzione di } z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g$$ equaz. da risolvere

$$\Rightarrow p(z) = -\rho g z + \underline{c}$$

↳ costante di integrazione ⇒ CONDIZIONI AL CONTORNO (pressione a una certa quota)

per $z = 0$: $p(0) = p_0 = C$

$$\Rightarrow p(z) = -\rho g z + p_0$$

- PELO LIBERO DEL FLUIDO ⇒ SUPERFICIE ISOBARA → orizzontale perché
  ↳ superficie che separa due fluidi non mischiabili tra loro

Nel caso della **FORZA PESO**: superfici isobare = piani $\perp \vec{g}$ (yz) — orizzontale
$(p = \text{cost})$

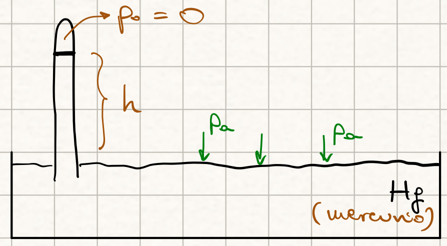
$z = -h \Rightarrow p(h) = \underline{\rho g h} + p_0$

→ pressione sopra il fluido

pressione del fluido sopra P

BAROMETRO DI TORRICELLI

→ per pressione dell'atmosfera



$h = 760 \text{ mm}$

$p_a = \rho_{Hg}\, g\, h \simeq 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm} = 760 \text{ torr (mmHg)}$

$(\rho_{Hg} = 13{,}6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3)$

! $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

PRINCIPIO DI PASCAL

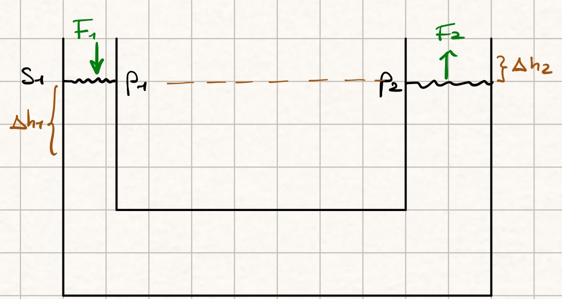
Δp creato in un punto del fluido si ritrova in tutti i punti. ⇒ Ogni cambiamento della pressione esterno dà luogo a un'eguale variazione di p

Dalla legge di Stevino : $\underbrace{p(z) - p_0}_{\Delta p} = -\rho g z$

→ cambiare Δp significa modificare le condiz. di contorno (p_0)

TORCHIO IDRAULICO

→ fluido = unico



$p_1 = \dfrac{F_1}{S_1}$

$p_2 = p_1$

$p_2 = \dfrac{F_2}{S_2} = \dfrac{F_1}{S_1}$

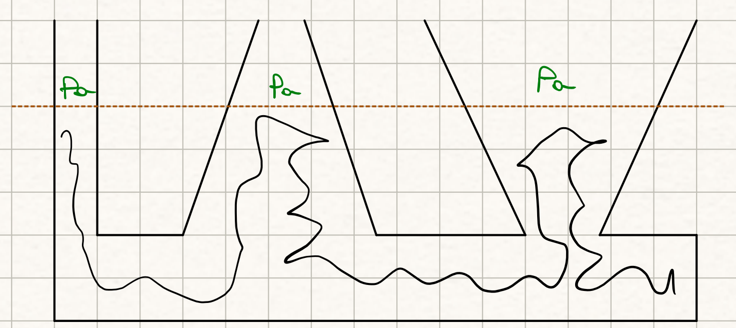
$F_2 = F_1 \dfrac{S_2}{S_1}$

$F_1 \Delta h_1 = F_2 \Delta h_2$

PRINCIPIO DEI VASI COMUNICANTI :

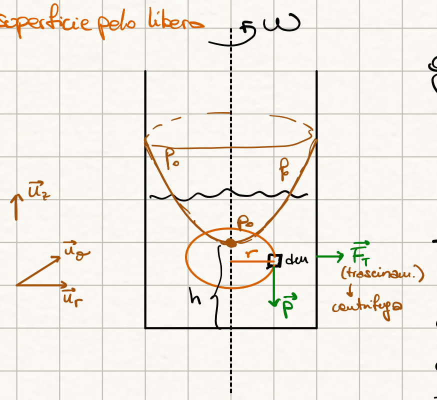
punti con la stessa pressione stanno alla stessa altezza indipendentemente dalla forma dei contenitori

↳ < Legge di Stevino :
In condizioni di quiete, alla stessa profondità le pressioni sono identiche



FLUIDO IN ROTAZIONE

? superficie pelo libero



$\operatorname{grad} p = \vec{f}_v$ (vale se fluido fermo)

↳ scegliere un sistema di riferim. solidale alla rotaz. del fluido (non inerziale)

S' ruota insieme al fluido : in S' il fluido è fermo

$d\vec{P} = -dm\, g\, \vec{u}_z = -\rho\, dV\, g\, \vec{u}_z$ $\quad = r\omega^2 dm\, \vec{u}_r = r\omega^2 \rho\, dV\, \vec{u}_r$ (FORZA DI VOLUME)

$d\vec{F}_T = -dm\, \vec{a}_T$

$\vec{a}_T = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = -r\omega\, \vec{u}_r$

$$\vec{f}_v = \frac{-\rho g \cancel{dV}\, \vec{u}_z + r\omega^2 \rho \cancel{dV}\, \vec{u}_r}{\cancel{dV}} = -\rho g\, \vec{u}_z + r\omega^2 \rho\, \vec{u}_r$$

usando le coordinate cilindriche : $\quad p(x,y,z) = p(r,\theta,z)$ $\quad \operatorname{grad} p \cdot \vec{u}_\theta = \frac{dp}{dl_\theta} = \frac{dp}{r d\theta}$, $\quad dl = r\, d\theta\, \vec{u}_\theta$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} p = \frac{\partial p}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{u}_z = \vec{f}_v$$

$$\begin{cases} \vec{u}_r: & \frac{\partial p}{\partial r} = r\omega^2 \rho \\ \vec{u}_\theta: & \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \\ \vec{u}_z: & \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

$\Rightarrow$ p non dipende da θ $\Rightarrow p = p(r,z)$

$$\Rightarrow p(r,z) = \frac{1}{2}\omega^2 \rho r^2 - \rho g z + C$$

condiz. al contorno

per $r = 0$, $z = h$ $\Rightarrow p = p_0$: $\quad p(0,h) = -\rho g h + C$

$$\Rightarrow C = p_0 + \rho g h$$

$$\Rightarrow p(r,z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g (z-h) + p_0$$

$p(r,z) = p_0$: $\quad \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g (z-h) + \cancel{p_0} = \cancel{p_0}$

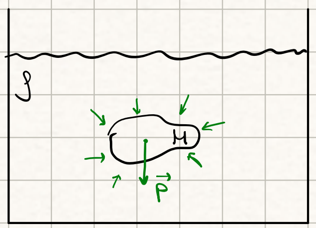
$$z = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g} r^2 + h$$

PARABOLOIDE DI ROTAZIONE

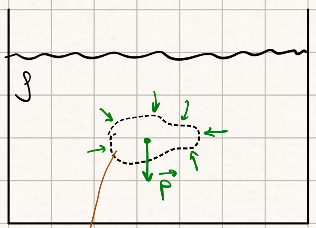
Punti isobari si dispongono lungo una paraboloide di rotazione

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

$\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_s$ — forza di superficie = SPINTA DI ARCHIMEDE



? $\vec{F}_s$



porzione di fluido con stesso volume di M

→ è in equilibrio

equilibrio: $\vec{F}_v + \vec{F}_s = 0$

$\vec{F}_v = \vec{P} = \rho V \vec{g}$

$\vec{F}_s$ sono le stesse del caso con M

$\Rightarrow \vec{F}_s = -\vec{F}_v = -\rho V \vec{g}$ la spinta che M riceve è pari alla porzione di liquido spostato $\cdot \vec{g}$ (verso l'alto)

su M agiscono: $\vec{F} = \vec{P} - \rho V \vec{g} = \rho' V \vec{g} - \rho V \vec{g} = (\rho' - \rho) V \vec{g}$

ρ' di M : $\vec{P} = \rho' V \vec{g}$

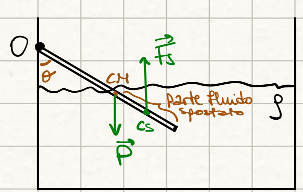
- se $\rho' > \rho$: M affonda (forza risultante verso basso)
- se $\rho' < \rho$: M galleggia
- se $\rho' = \rho$: M è in equilibrio (sta dov'è)

Dove agisce la spinta di Archimede ? Nel C.M. del fluido spostato → CENTRO DI SPINTA

≠ C.M. di M (in generale)

(tranne se M è omogeneo)

CASO ASTA CON UN ESTREMO FISSATO



Per trovare la posizione di equilibrio fare equilibrio tra i momenti