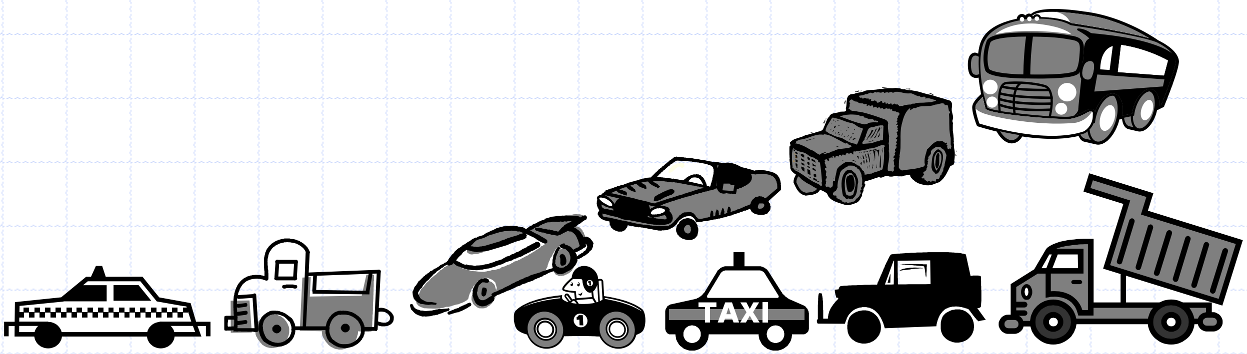
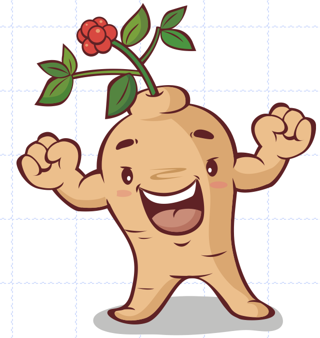
합병 정렬



Outline

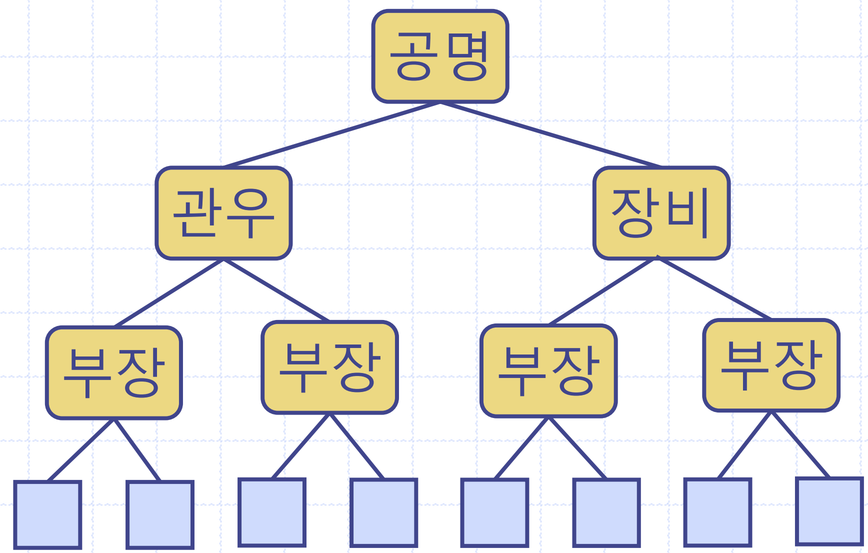
- 7.1 분할통치법
- 7.2 합병 정렬
- 7.3 응용문제

분할통치법



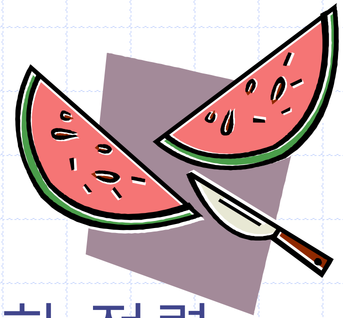
- **분할통치법**(divide-and-conquer): 일반적인 알고리즘 설계 기법(algorithm design paradigm)의 일종
  1. **분할**(divide): 입력 데이터 L을 둘 이상의 분리된 부분집합 $L_1, L_2, \ldots$ 으로 나눈다
  2. **재귀**(recur): $L_1, L_2, \ldots$ 각각에 대한 부문제를 재귀적으로 해결
  3. **통치**(conquer): 부문제들에 대한 해결을 합쳐 L을 해결
- 재귀의 **베이스 케이스:** 상수 크기의 부문제들
- **점화식**(recurrence equations)을 사용하여 분석

- **예**
  - 합병 정렬(merge-sort)
  - 퀵 정렬(quick-sort)



산삼채집 작전

합병 정렬



- **합병 정렬**(merge-sort): **분할통치법**에 기초한 정렬 알고리즘
- 힙 정렬(heap-sort)처럼,
  - 비교에 기초한 정렬
  - $\mathbf{O}(\boldsymbol{n} \log \boldsymbol{n})$ 시간에 수행
- 힙 정렬(heap-sort)과는 달리,
  - 외부의 우선순위 큐를 사용하지 않는다
  - 데이터를 **순차적** 방식으로 접근 (따라서 디스크의 데이터를 정렬하기에 적당)

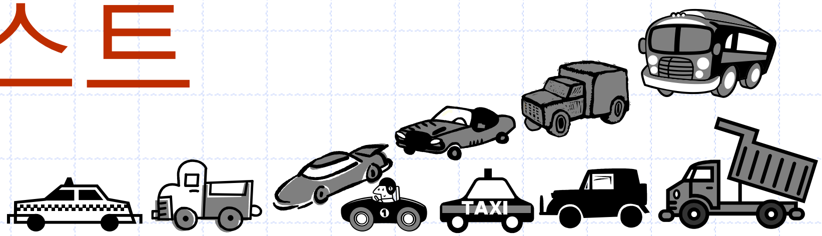
합병 정렬 (conti.)

- n개의 원소로 이루어진 입력 리스트 L에 대한 합병 정렬(merge-sort)의 세 단계
  1. **분할**(divide): 무순리스트 L을 각각 $n/2$개의 원소를 가진 두 개의 부리스트 L_1과 L_2로 분할
  2. **재귀**(recur): L_1과 L_2를 각각 재귀적으로 정렬
  3. **통치**(conquer): L_1과 L_2를 단일 순서리스트로 합병

Alg ***mergeSort(L)***
    input list L with n elements
    output sorted list L

1. **if** (L.*size*() > 1)
       $L_1, L_2 \leftarrow$ ***partition***(L, $n/2$)
       mergeSort(L_1)
       mergeSort(L_2)
       $L \leftarrow$ ***merge***(L_1, L_2)
2. **return**

두 개의 정렬 리스트 합병하기

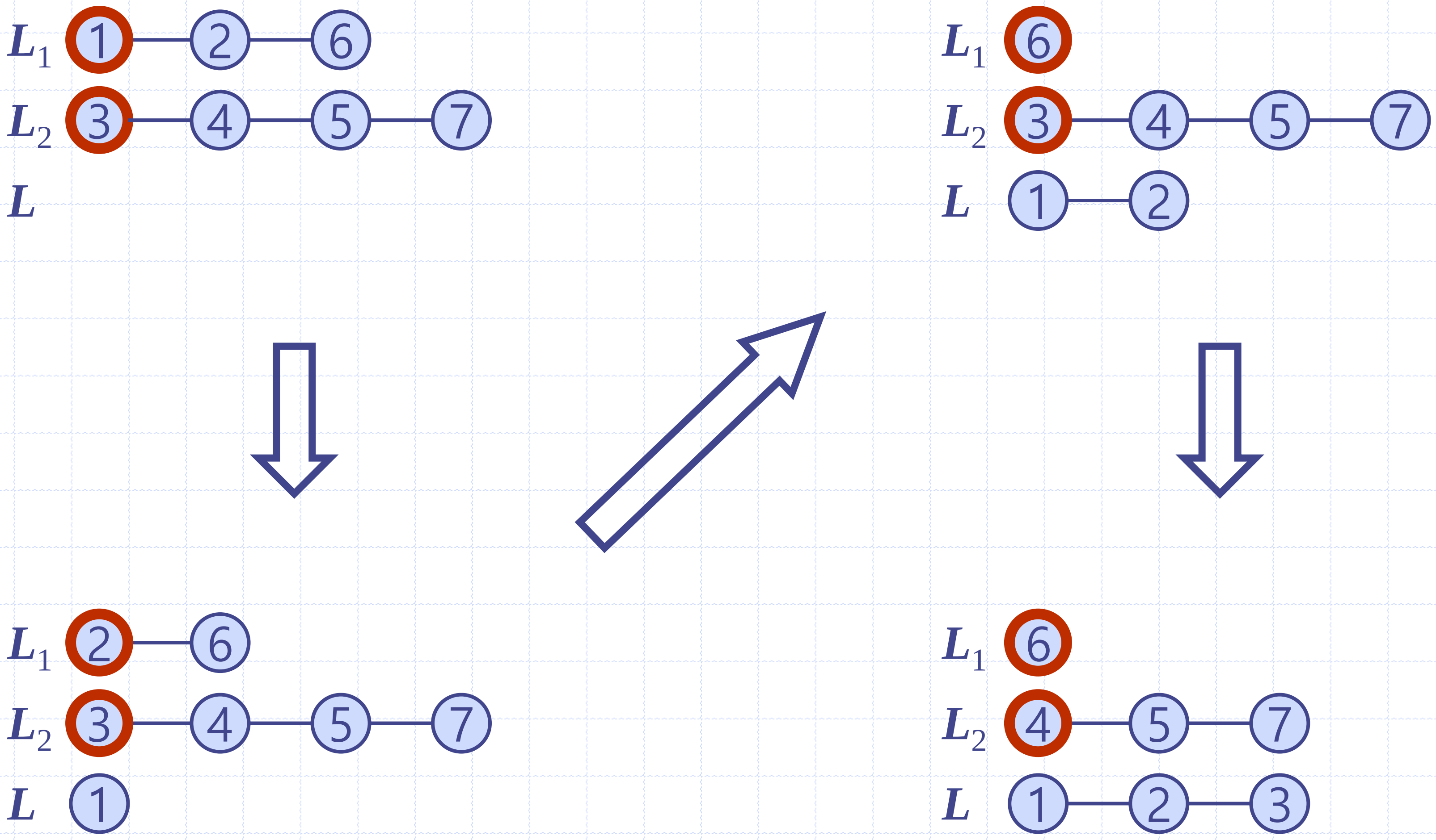


- merge-sort의 **통치** 단계
  - 두 개의 정렬된 리스트 L_1과 L_2를 L_1과 L_2의 원소들의 합을 포함하는 정렬 리스트 L로 합병하는 과정
- 각각 $n/2$개의 원소를 가지며, 이중연결리스트로 구현된 두 개의 정렬 리스트를 합병하는데 **O(n)** 시간 소요

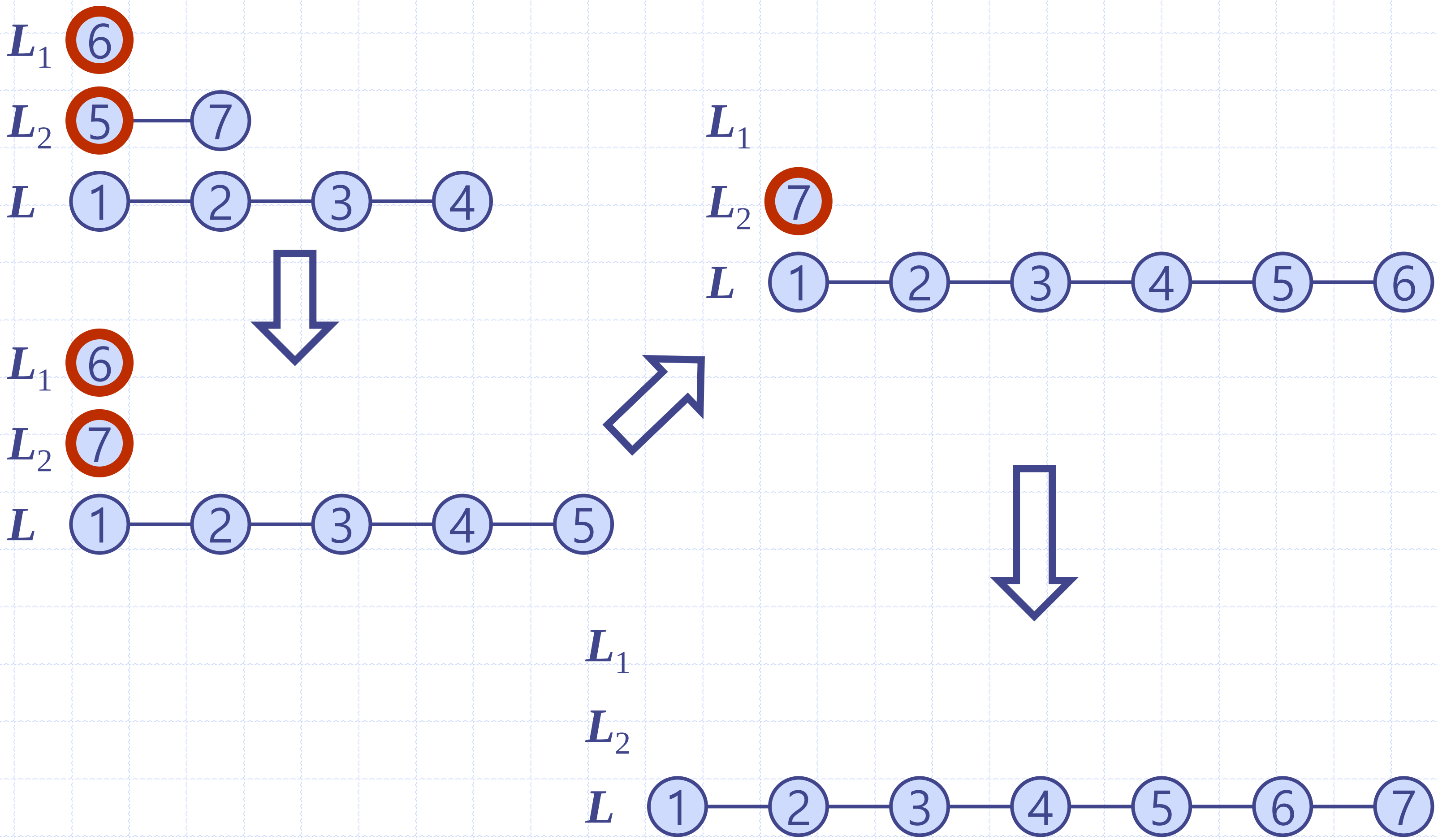
Alg ***merge***(L_1, L_2)
    input sorted list L_1 and L_2 with $n/2$ elements each
    output sorted list of $L_1 \cup L_2$

1. $L \leftarrow$ *empty list*
2. **while** (!L_1.*isEmpty*() & !L_2.*isEmpty*())
        if (L_1.*get*(1) $\leq$ L_2.*get*(1))
            L.addLast(L_1.*removeFirst*())
        else
            L.addLast(L_2.*removeFirst*())
3. **while** (!L_1.*isEmpty*())
        L.addLast(L_1.*removeFirst*())
4. **while** (!L_2.*isEmpty*())
        L.addLast(L_2.*removeFirst*())
5. **return** L

합병 예

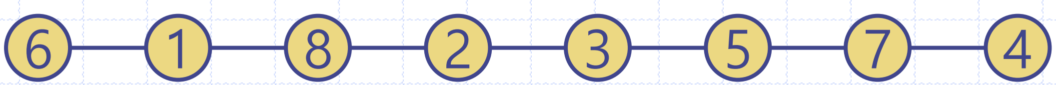


합병 예 (conti.)



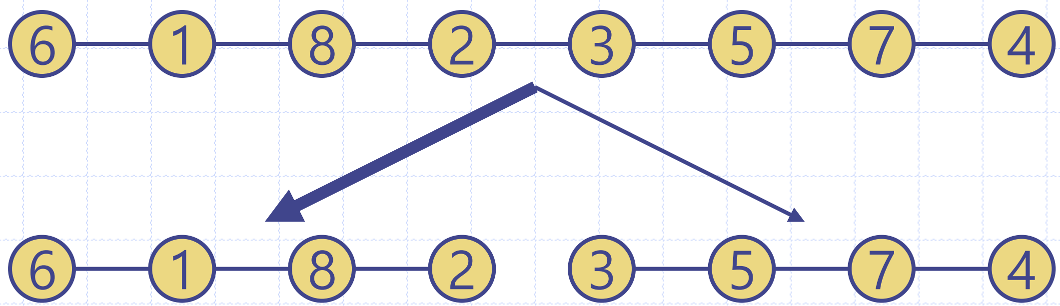
합병정렬 트리

- merge-sort의 실행을 이진트리로 보이기
  - 이진트리의 각 노드는 merge-sort의 **재귀호출**을 표현하며 다음을 저장
    - 실행 이전의 무순리스트 및 분할
    - 실행 이후의 정렬리스트
  - 루트는 **초기 호출**을 의미
  - 잎들은 크기 1의 부리스트에 대한 호출을 의미
- 실행예를 위한 입력 리스트



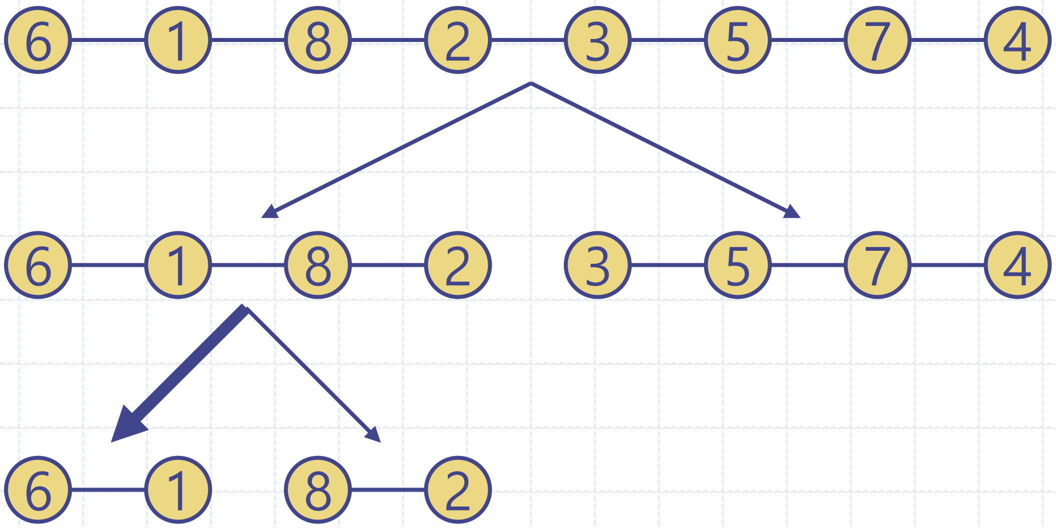
합병 정렬 수행 예

- 초기 호출, 분할, 재귀 호출



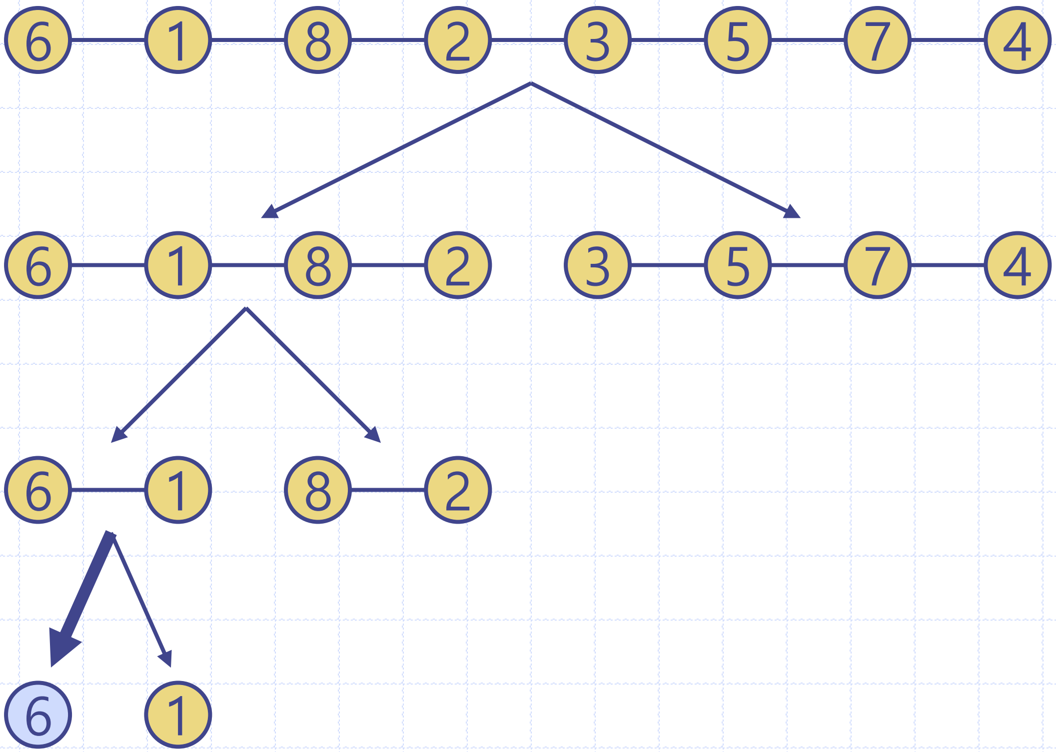
합병 정렬 수행 예 (conti.)

- 분할, 재귀호출



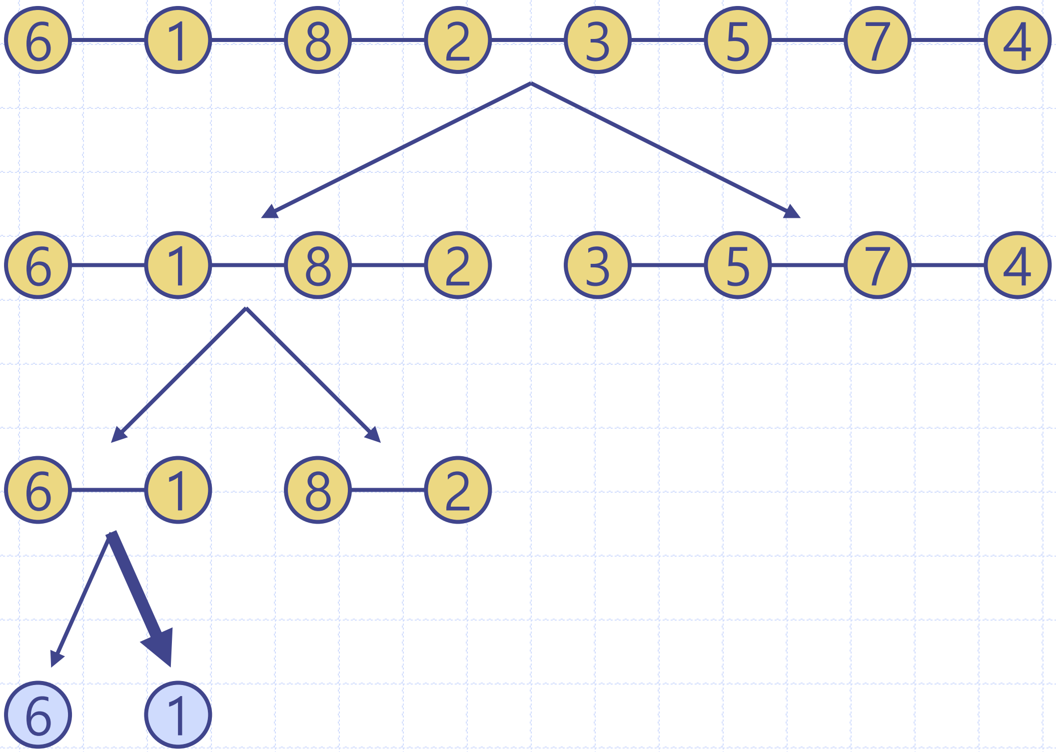
합병 정렬 수행 예 (conti.)

- 분할, 재귀 호출, 베이스 케이스



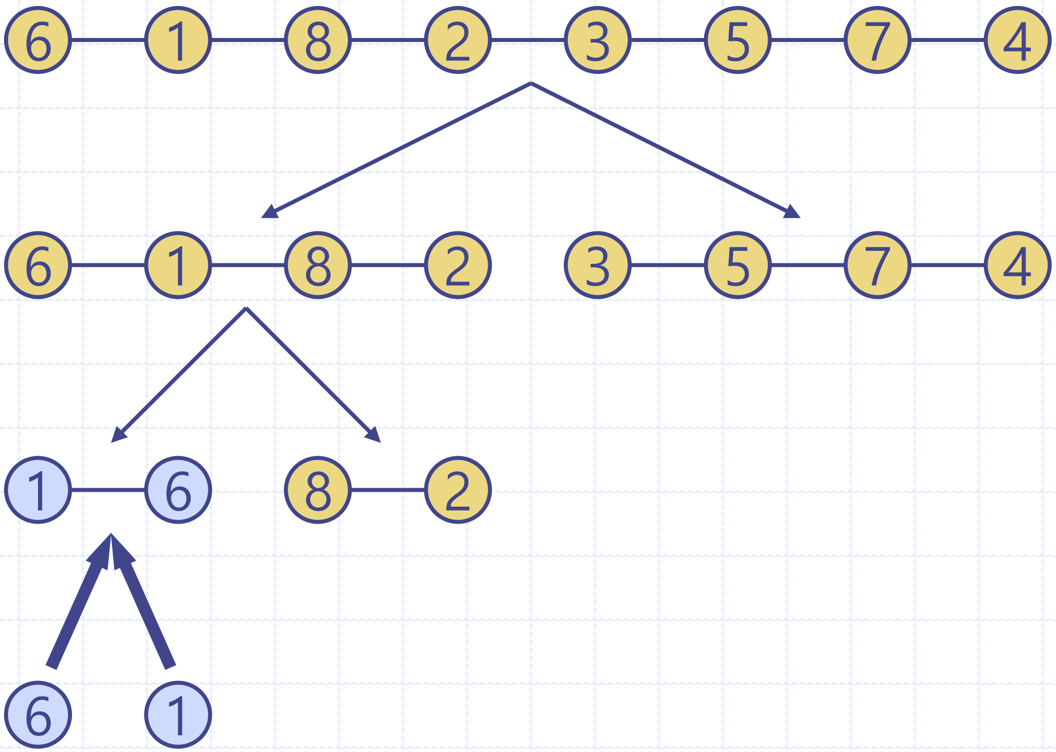
합병 정렬 수행 예 (conti.)

- 재귀 호출, 베이스 케이스



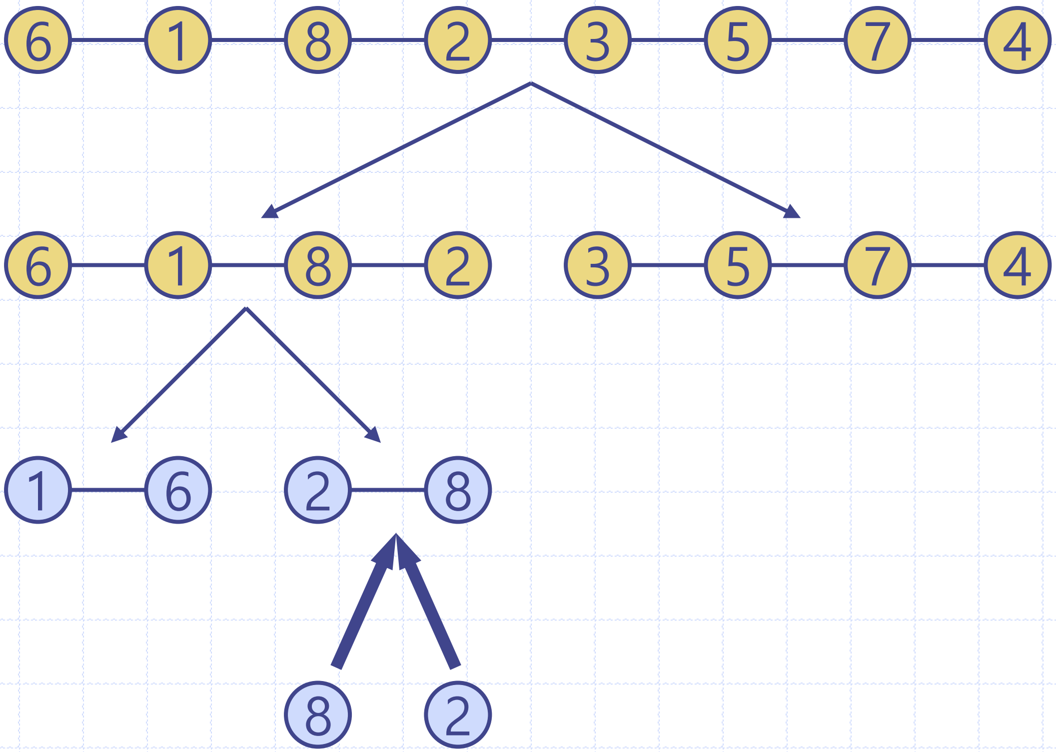
합병 정렬 수행 예 (conti.)

- 합병



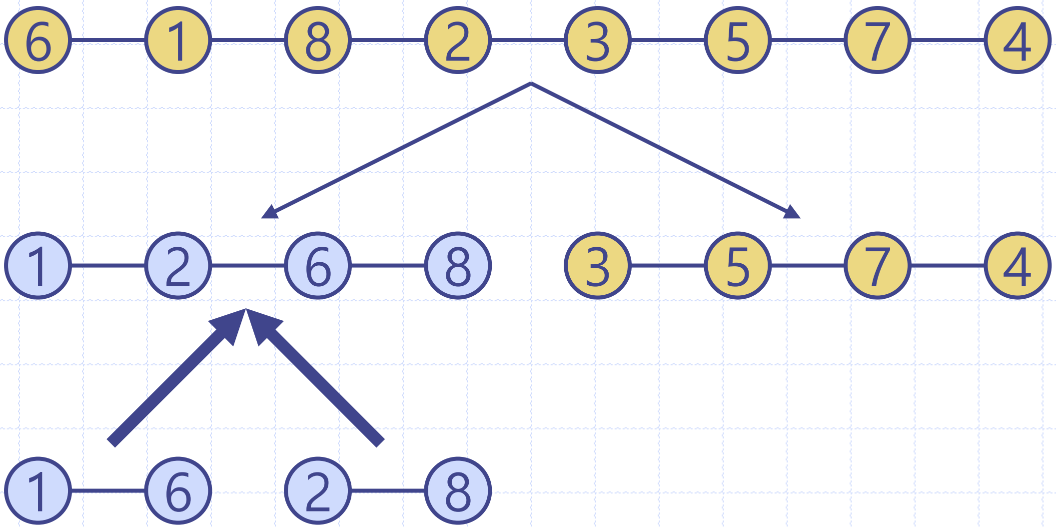
합병 정렬 수행 예 (conti.)

- 재귀 호출, … , 합병



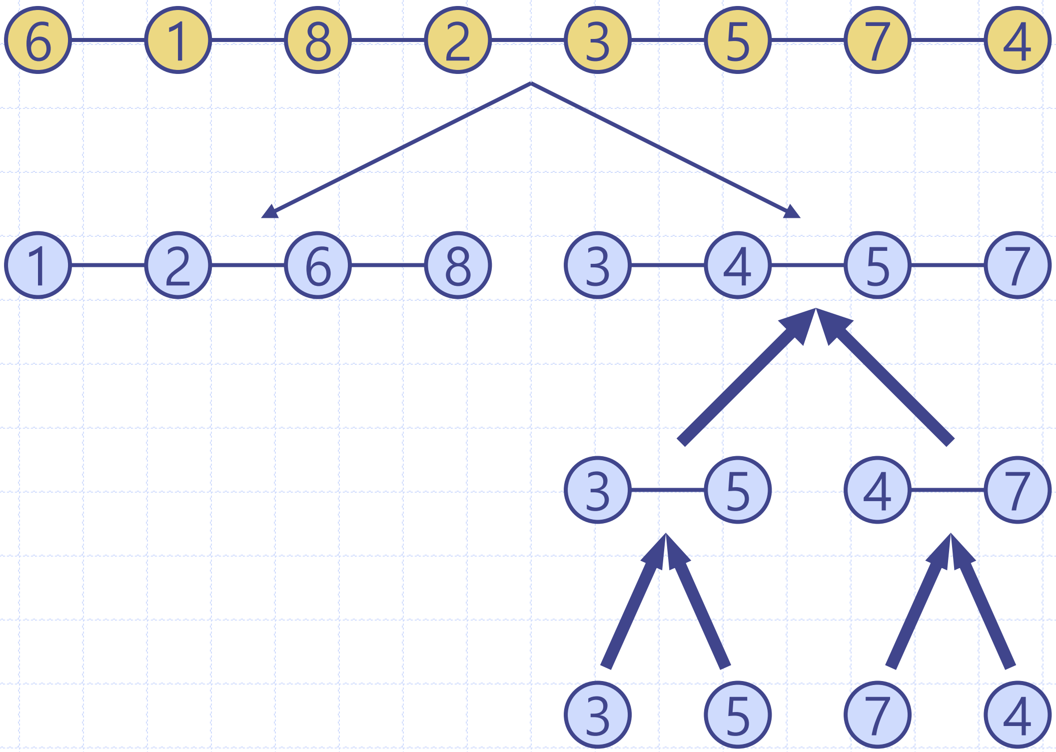
합병 정렬 수행 예 (conti.)

- 합병



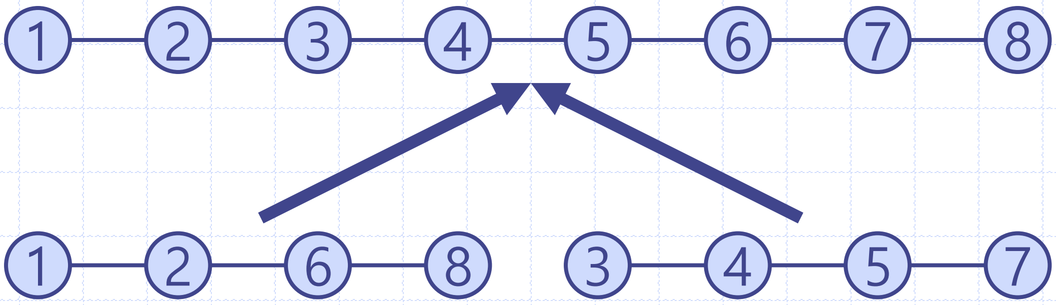
합병 정렬 수행 예 (conti.)

- 재귀 호출, … , 합병



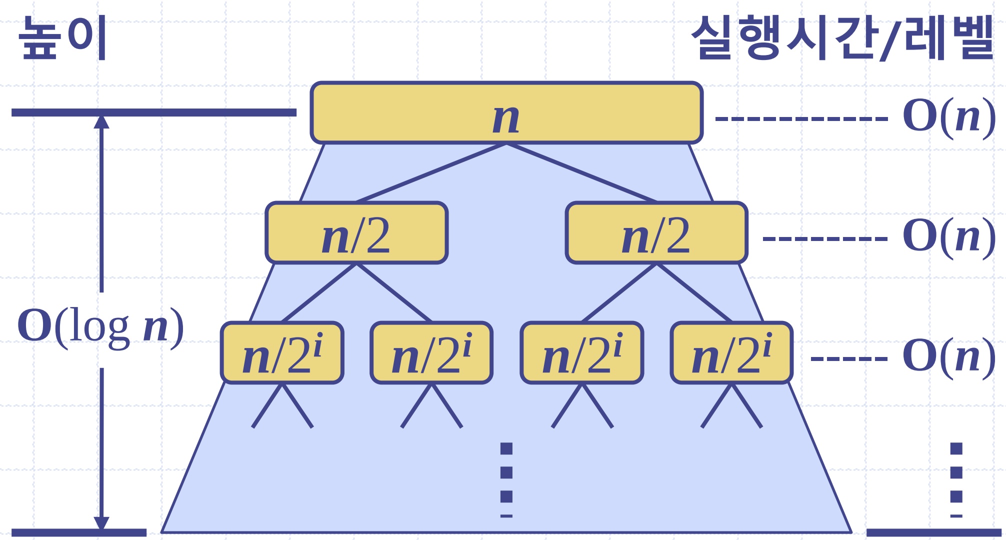
합병 정렬 수행 예 (conti.)

- 합병



합병 정렬 분석

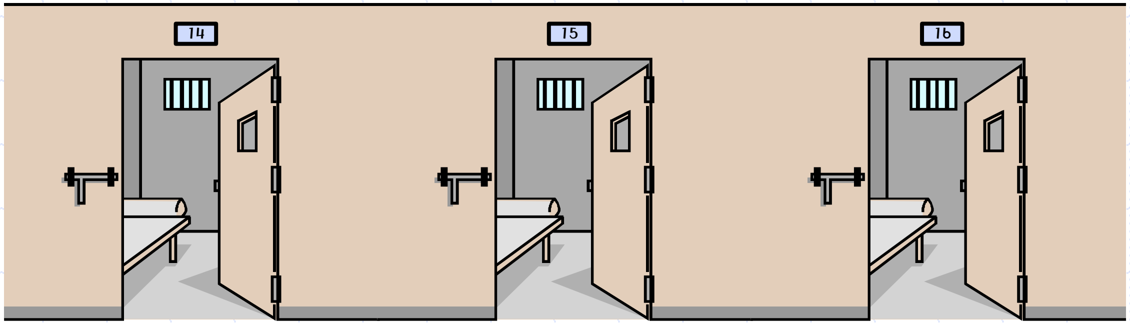
- 합병 정렬 트리의 높이 h: $\mathbf{O}(\log n)$
  - 각 재귀호출에서 리스트를 절반으로 나누기 때문
- 깊이 i의 노드들에서 이루어지는 총 작업량: $\mathbf{O}(n)$
  - 2^i개의 크기 $n/2^i$의 리스트들을 분할하고 합병하기 때문
  - 2^{i+1}번의 재귀호출
- 따라서, merge-sort의 전체 **실행시간**: $\mathbf{O}(n \log n)$
- 점화식으로도 해결 가능
  - $T(n) = c \qquad (n < 2)$
  - $T(n) = 2T(n/2) + \mathbf{O}(n) \qquad (n \geq 2)$
  - $\therefore\ T(n) = \mathbf{O}(n \log n)$



전체 실행시간: $\mathbf{O}(n \log n)$

응용문제: 배열에 대한 합병 정렬

- 일반 리스트가 아닌, **배열**에 대해 작동하는 merge-sort 알고리즘의 버전을 작성하라
  - mergeSort(A): n개의 원소로 구성된 배열 A를 합병 정렬
- **힌트:** 외부 배열을 "버퍼", 즉 임시 저장 공간으로 사용하라



해결

Alg *mergeSort(A)*
  input array $\boldsymbol{A}$ of $\boldsymbol{n}$ keys
  output sorted array $\boldsymbol{A}$

1. $\boldsymbol{rMergeSort}(\boldsymbol{A}, 0, \boldsymbol{n} - 1)$
2. **return**

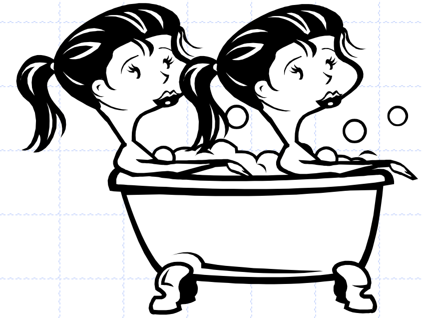
Alg *rMergeSort(A, l, r)*
  input array $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{l}..\boldsymbol{r}]$
  output sorted array $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{l}..\boldsymbol{r}]$

1. **if** $(\boldsymbol{l} < \boldsymbol{r})$
    $\boldsymbol{m} \leftarrow \lfloor(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{r})/2\rfloor$
    $\boldsymbol{rMergeSort}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m})$
    $\boldsymbol{rMergeSort}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{m} + 1, \boldsymbol{r})$
    $\boldsymbol{merge}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}, \boldsymbol{r})$
2. **return**

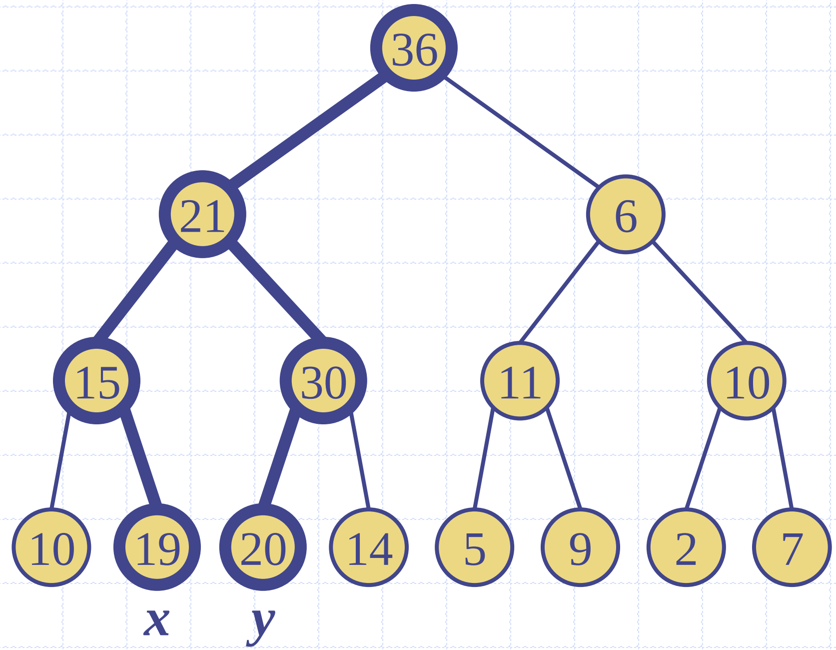
Alg *merge(A, l, m, r)*
  input sorted array $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{l}..\boldsymbol{m}]$, $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{m}+1..\boldsymbol{r}]$
  output sorted array $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{l}..\boldsymbol{r}]$ merged from
   $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{l}..\boldsymbol{m}]$ and $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{m}+1..\boldsymbol{r}]$

1. $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{k} \leftarrow \boldsymbol{l}$
2. $\boldsymbol{j} \leftarrow \boldsymbol{m} + 1$
3. **while** $(\boldsymbol{i} \le \boldsymbol{m}$ & $\boldsymbol{j} \le \boldsymbol{r})$
    if $(\boldsymbol{A}[\boldsymbol{i}] \le \boldsymbol{A}[\boldsymbol{j}])$
      $\boldsymbol{B}[\boldsymbol{k}{+}{+}] \leftarrow \boldsymbol{A}[\boldsymbol{i}{+}{+}]$
    else
      $\boldsymbol{B}[\boldsymbol{k}{+}{+}] \leftarrow \boldsymbol{A}[\boldsymbol{j}{+}{+}]$
4. **while** $(\boldsymbol{i} \le \boldsymbol{m})$
    $\boldsymbol{B}[\boldsymbol{k}{+}{+}] \leftarrow \boldsymbol{A}[\boldsymbol{i}{+}{+}]$
5. **while** $(\boldsymbol{j} \le \boldsymbol{r})$
    $\boldsymbol{B}[\boldsymbol{k}{+}{+}] \leftarrow \boldsymbol{A}[\boldsymbol{j}{+}{+}]$
6. **for** $\boldsymbol{k} \leftarrow \boldsymbol{l}$ to $\boldsymbol{r}$
    $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{k}] \leftarrow \boldsymbol{B}[\boldsymbol{k}]$
7. **return**

응용문제: 포화이진트리



- 높이 h의, $n = 2^h$ 개의 외부노드로 이루어진 **포화이진트리**(full binary tree)가 있다
- 트리의 각 노드 v는 임의의 실수값 $value(v) = k$를 저장
- v가 외부노드라면, $A(v)$는 v의 **조상**들의 집합을 나타낸다 (v의 조상에는 v 자신도 포함)
- a와 b가 서로 다른 외부노드라면, $A(a, b)$는 a 또는 b의 조상들의 집합을 나타낸다
  – 즉, $A(a, b) = A(a) \cup A(b)$
- $f(a, b)$를 $A(a, b)$에 포함된 노드 v의 $value(v)$ 값의 합이라 정의
- $f(x, y)$를 **최대**로 하는 두 개의 외부노드 x와 y를 찾는 **효율적인** 알고리즘을 작성하고 **분석**하라



- **예:** $f(x, y)$
  $= 19 + 15 + 21 + 36 + 20 + 30$
  $= 141$
- **힌트: 분할통치법**으로 해결

해결: 포화이진트리

- **분할통치법**으로 해결 가능한 문제
- 단순성을 위해, 여기서 제시하는 알고리즘은 최대값을 계산하기만 할 뿐 두 개의 외부노드를 반환하지는 않는다 – 이 값을 주는 두 개의 노드를 반환하도록 수정하는 것은 어렵지 않다
- max1(v)는 노드 v를 루트로 하는 부트리 내의 모든 외부노드 x의 조상 노드들의 $value(x)$의 합 $f(x)$ 중 최대값을 $O(n)$ 시간에 계산
  - $T_{\max1}(n) = c \qquad (n < 2)$
  - $T_{\max1}(n) = 2T_{\max1}(n/2) + c \qquad (n \geq 2)$
  - $\therefore\ T_{\max1}(n) = O(n)$
- max2(v)는 노드 v를 루트로 하는 부트리 내의 모든 외부노드 x, y 쌍에 대한 $f(x, y)$ 중 최대값을 $O(n \log n)$ 시간에 계산
  - $T_{\max2}(n) = c \qquad (n < 4)$
  - $T_{\max2}(n) = 2T_{\max2}(n/2) + 2T_{\max1}(n/2) + c = 2T_{\max2}(n/2) + O(n) \qquad (n \geq 4)$
  - $\therefore\ T_{\max2}(n) = O(n \log n)$

해결: 포화이진트리 (conti.)

Alg ***max1(v)***
  input node ***v***
  output maximum value of $f(x)$, i.e. the sum of the ancestors of all leaves x in v's subree

1. **if** (***isExternal***(v))
    return ***value***(v)
2. **return** ***value***(v) + ***max***(***max1***(***leftChild***(v)), ***max1***(***rightChild***(v)))
    {Total **O**(n)}

Alg ***max2(v)***
  input node ***v***
  output maximum $f(x, y)$ over all pairs of leaves x, y in v's subree

1. **if** (***isInternal***(v) & ***isExternal***(***leftChild***(v)) & ***isExternal***(***rightChild***(v)))
    return ***value***(v) + ***value***(***leftChild***(v)) + ***value***(***rightChild***(v))
2. **return** ***value***(v) + ***max***(***max2***(***leftChild***(v)),
    max2(***rightChild***(v)),
    max1(***leftChild***(v)) + ***max1***(***rightChild***(v)))
    {Total **O**(n log n)}