

6. 균형 이진 탐색 트리

❖ AVL 트리의 개념과 유형

- AVL 트리(Adelson-Velskii, Landis Tree)는 대표적인 균형 이진 탐색 트리
 - 각 노드에서 왼쪽 서브 트리의 높이 hL (height of Left subtree)과 오른쪽 서브 트리의 높이 hR (height of Right subtree)의 차이가 1 이하인 트리
 - 특징
 - 왼쪽 서브 트리 < 부모 노드 < 오른쪽 서브 트리의 크기 관계를 가짐
 - 각 노드의 왼쪽 서브 트리 높이와 오른쪽 서브 트리 높이의 차이($hL-hR$)를 노드의 균형 인수(BF, Balance Factor)라 함
 - 각 노드의 균형 인수로 $\{-1, 0, +1\}$ 값만 가지게 함으로써 왼쪽 서브 트리와 오른쪽 서브 트리의 균형을 항상 유지함



6. 균형 이진 탐색 트리

- 균형 인수 BF는 각 노드에서 왼쪽 서브 트리의 높이 hL 과 오른쪽 서브 트리의 높이 hR 의 차이

$$BF = hL - hR$$

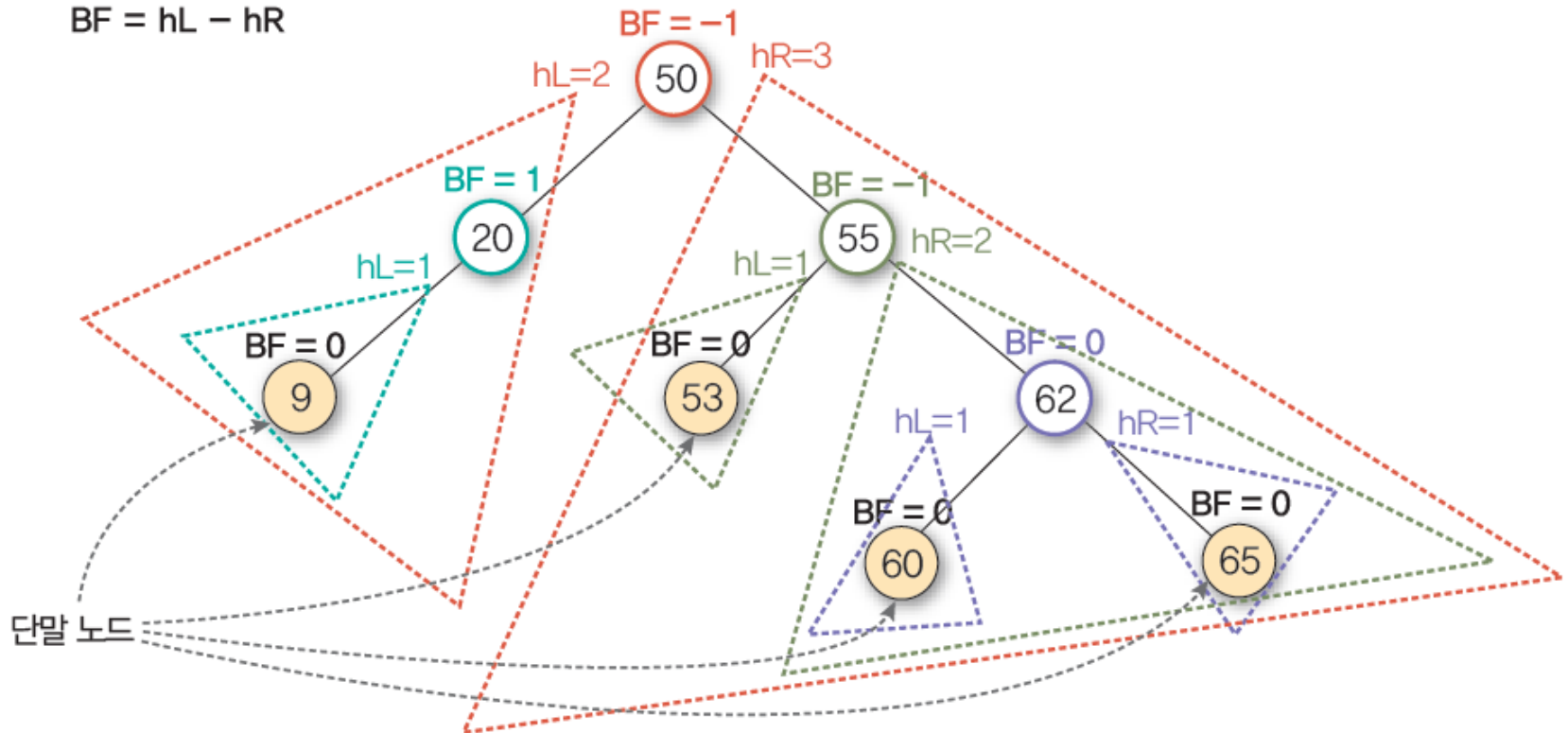


그림 7-45 AVL 트리의 균형 인수 구하기 예

6. 균형 이진 탐색 트리

- AVL 트리의 예

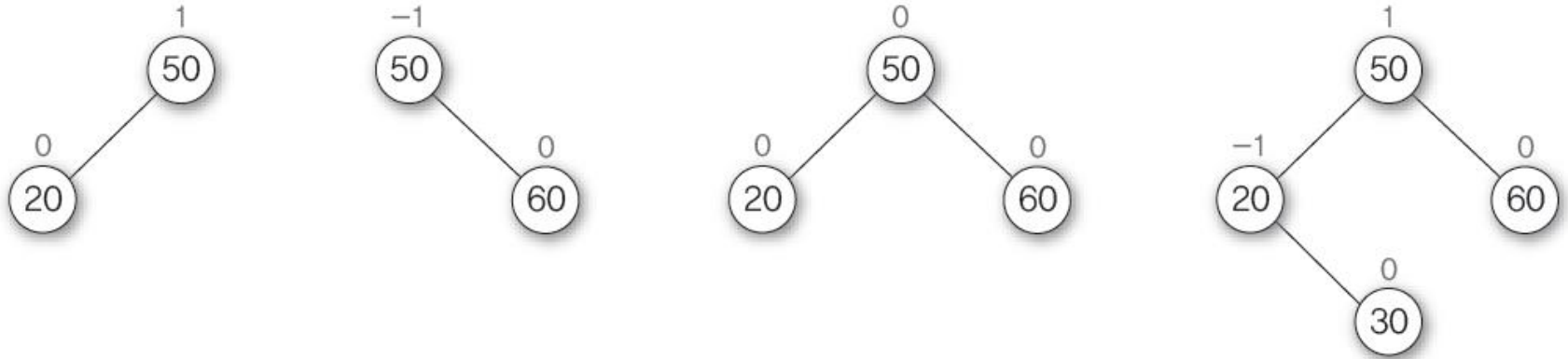


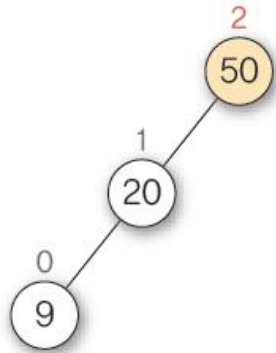
그림 7-46 AVL 트리의 예

- 모든 노드가 균형 인수로 $\{-1, 0, 1\}$ 값을 가지므로 AVL 트리임

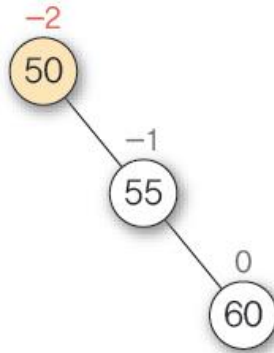


6. 균형 이진 탐색 트리

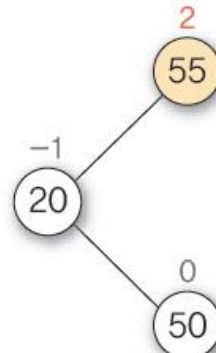
- 비AVL 트리의 예



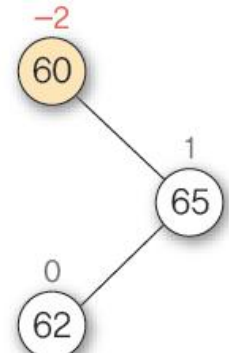
(a) LL 유형



(b) RR 유형



(c) LR 유형



(d) RL 유형

그림 7-47 비AVL 트리의 예

- 노드들이 균형 인수로 $\{-1, 0, 1\}$ 외의 값을 가지므로 균형이 깨져 한 방향으로 치우친 비AVL 트리임
(균형이 깨진 노드의 균형 인수가 +이면 왼쪽 서브 트리에 문제가 있는 것이고, 균형 인수가 -이면 오른쪽 서브 트리에 문제가 있음)



6. 균형 이진 탐색 트리

■ AVL 트리에서 발생하는 불균형

• LL 유형 (Left-Left 유형)

- (a)는 노드 50의 균형 인수가 +2로 균형이 깨진 노드인데 균형 인수가 +이므로 왼쪽 서브 트리가 문제. 그리고 노드 50의 왼쪽(L) 자식인 노드 20의 균형 인수가 +이므로 노드 20의 왼쪽(L) 자식 노드가 불균형과 관련 있음. 따라서 노드 50이 불균형 노드가 된 이유는 노드 50이 왼쪽(L) 자식 노드와 자식의 왼쪽(L) 자식 노드를 가짐으로써 왼쪽으로 치우쳤기 때문임.

• RR 유형 (Right-Right 유형)

- (b)는 노드 50의 균형 인수가 -2로 균형이 깨진 노드인데 균형 인수가 -이므로 오른쪽 서브 트리에 문제임. 그리고 노드 50의 오른쪽(R) 자식인 노드 55의 균형 인수가 -이므로 노드 55의 오른쪽(R) 자식 노드가 불균형과 관련 있음. 따라서 노드 50이 불균형 노드가 된 이유는 노드 50이 오른쪽(R) 자식 노드와 자식의 오른쪽(R) 자식 노드를 가짐으로써 오른쪽으로 치우쳤기 때문임

• LR 유형 (Left-Right 유형)

- (c)는 노드 55의 균형 인수가 +2로 균형이 깨진 노드인데 균형 인수가 +이므로 왼쪽 서브 트리에 문제임. 그리고 노드 55의 왼쪽(L) 자식인 노드 20의 균형 인수는 -이므로 노드 20의 오른쪽(R) 자식 노드가 불균형과 관련 있음. 따라서 노드 55가 불균형 노드가 된 이유는 왼쪽(L) 자식 노드와 자식의 오른쪽(R) 자식 노드로 인해 왼쪽 서브 트리가 치우쳤기 때문임



6. 균형 이진 탐색 트리

- RL 유형 (Right-Left 유형)
 - (d)는 노드 60의 균형 인수가 -2로 균형이 깨진 노드인데 균형 인수가 -이므로 오른쪽 서브 트리에 문제임. 그리고 노드 60의 오른쪽(R) 자식인 노드 65의 균형 인수는 +이므로 노드 65의 왼쪽(L) 자식 노드가 불균형과 관련 있음. 따라서 노드 60이 불균형 노드가 된 이유는 오른쪽(R) 자식 노드와 자식의 왼쪽(L) 자식 노드로 인해 오른쪽 서브 트리가 치우쳤기 때문임



6. 균형 이진 탐색 트리

❖ AVL 트리의 회전 연산

- AVL 트리에서 수행하는 삽입·삭제 작업은 이진 탐색 트리에서의 삽입·삭제 작업과 같고, 이후에 균형을 맞추어주는 재구성 작업이 추가되는데 이 작업은 회전^{Rotation} 연산을 통해 이루어짐
 - 단순 회전^{Single Rotation}- LL 회전과 RR 회전과 같이 한 번 회전하는 것
 - 이중 회전^{Double Rotation} - LR 회전과 RL 회전과 같이 두 번 회전하는 것

표 7-2 AVL 트리에서의 불균형 유형별 해결 방법

불균형의 유형과 원인	해결 방법
LL 유형 : 불균형 발생 노드의 왼쪽 ^{Left} 자식 노드와 자식의 왼쪽 ^{Left} 자식 노드에 의해 왼쪽으로 치우침	LL 회전 : 문제 구간 중 상위 구간을 오른쪽으로 회전시킴
RR 유형 : 불균형 발생 노드의 오른쪽 ^{Right} 자식 노드와 자식의 오른쪽 ^{Right} 자식 노드에 의해 오른쪽으로 치우침	RR 회전 : 문제 구간 중 상위 구간을 왼쪽으로 회전시킴
LR 유형 : 불균형 발생 노드의 왼쪽 ^{Left} 자식 노드와 자식의 오른쪽 ^{Right} 자식 노드에 의해 왼쪽 서브 트리가 치우침	LR 회전 : 문제 구간 중 하위 구간을 왼쪽으로 1차 회전시켜 LL 유형으로 변환한 다음 LL 회전을 적용함
RL 유형 : 불균형 발생 노드의 오른쪽 ^{Right} 자식 노드와 자식의 왼쪽 ^{Left} 자식 노드에 의해 오른쪽 서브 트리가 치우침	RL 회전 : 문제 구간 중 하위 구간을 오른쪽으로 1차 회전시켜 RR 유형으로 변환한 다음 RR 회전을 적용함

6. 균형 이진 탐색 트리

■ LL 회전 연산

- 삽입, 삭제 연산 후에 AVL 트리에 LL 유형의 불균형이 발생했을 때 적용

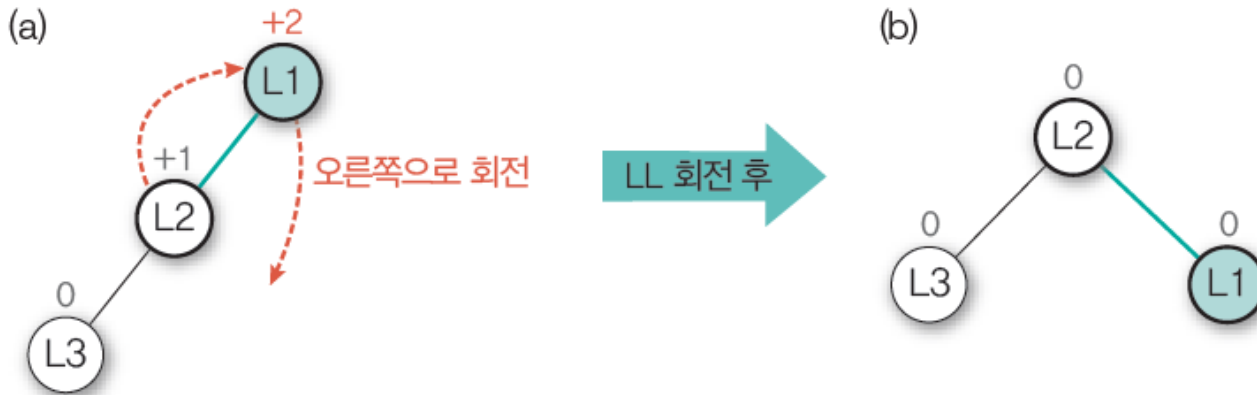


그림 7-48 LL 유형과 회전 예

알고리즘 7-7 AVL 트리의 LL 회전

LL_rotate(L1)

- 1 L2의 오른쪽 자식 노드를 L1의 왼쪽 자식 노드로 옮긴다.
- 2 L1을 L2의 오른쪽 자식 노드로 옮긴다.

end LL_rotate()



6. 균형 이진 탐색 트리

■ RR 회전 연산

- 삽입, 삭제 연산 후에 AVL 트리에 RR 유형의 불균형이 발생했을 때 적용



그림 7-49 RR 유형과 회전 예

알고리즘 7-8 AVL 트리의 RR 회전

RR_rotate(L1)

- 1 L2의 왼쪽 자식 노드를 L1의 오른쪽 자식 노드로 옮긴다.
- 2 L1을 L2의 왼쪽 자식 노드로 옮긴다.

end RR_rotate()



6. 균형 이진 탐색 트리

■ LR 회전 연산

- 삽입, 삭제 연산 후에 AVL 트리에 LR 유형의 불균형이 발생했을 때 적용

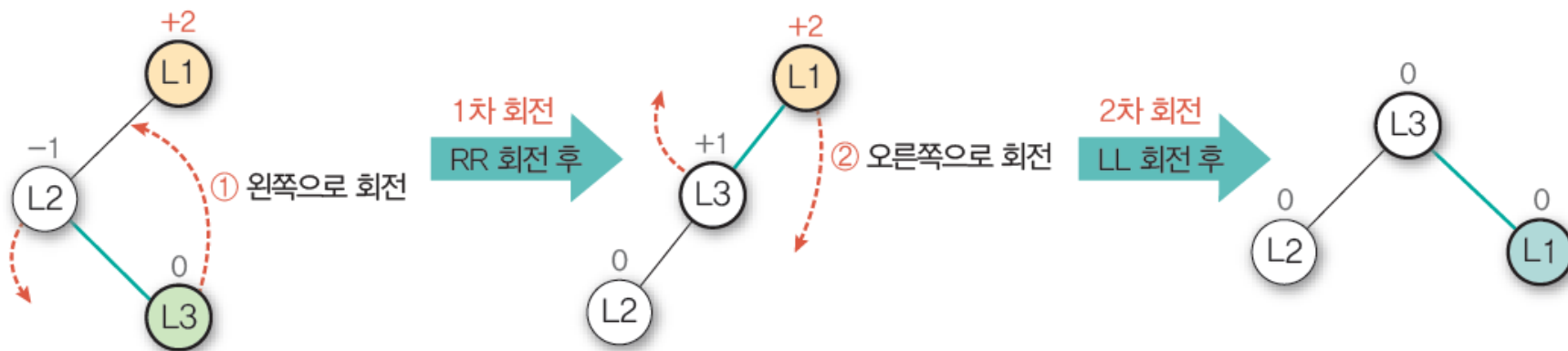


그림 7-50 LR 유형과 LR 회전 예

알고리즘 7-9 AVL 트리의 LR 회전

LR_rotate(L1)

L2와 L3 구간에 대한 RR_rotate(L2)를 수행하고 반환된 노드 L3을 L1의 왼쪽 자식 노드로 만든다.

L1에 대해서 LL_rotate(L1)을 수행한다.

end LR_rotate()

6. 균형 이진 탐색 트리

■ RL 회전 연산

- 삽입, 삭제 연산 후에 AVL 트리에 RL 유형의 불균형이 발생했을 때 적용

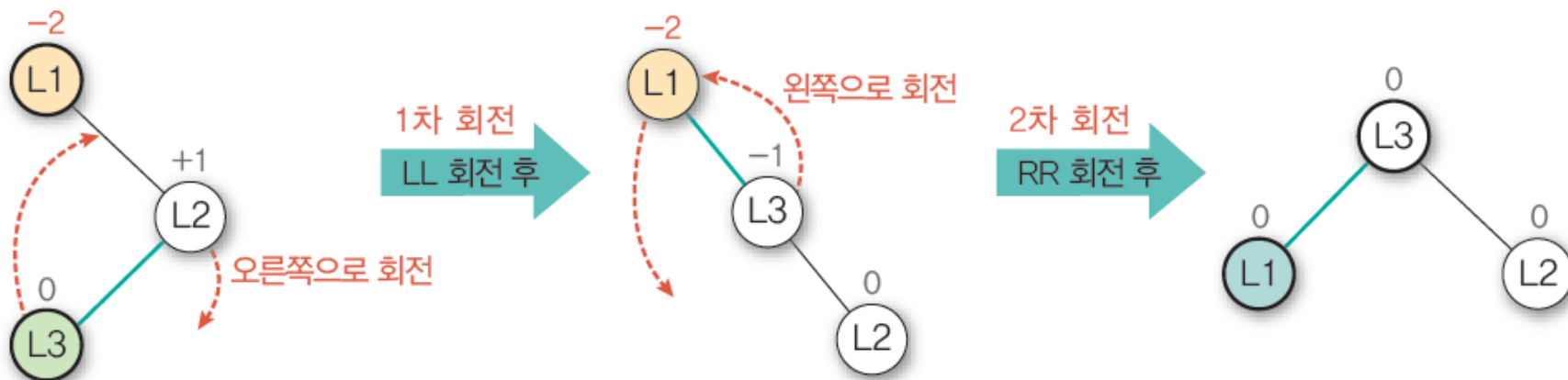


그림 7-51 RL 유형과 회전 예

알고리즘 7-10 AVL 트리의 RL 회전

RL_rotate(L1)

L2와 L3 구간에 대한 LL_rotate(L2)를 수행하고 반환된 노드 L3을 L1의 오른쪽 자식 노드로 만든다.

L1에 대해서 RR_rotate(L1)을 수행한다.

end RL_rotate()

6. 균형 이진 탐색 트리

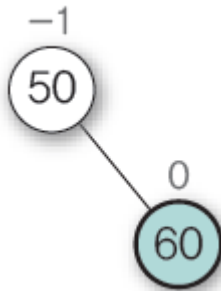
■ AVL 트리 회전 연산 예

- {50, 60, 70, 90, 80, 75, 73, 72, 78} 원소 아홉 개를 AVL 트리에 삽입하면서 불균형이 발생했을 때 회전 연산을 수행하여 균형 상태를 유지하는 예
 - (초록색 노드는 삽입 노드, 노란색 노드는 불균형 발생한 노드. 불균형 유형에 해당하는 세 개의 노드는 초록색 간선으로 표시)

① 노드 50 삽입 : 공백 AVL 트리에 노드 50을 삽입



② 노드 60 삽입 : 노드 50의 오른쪽 자식으로 노드 60을 삽입

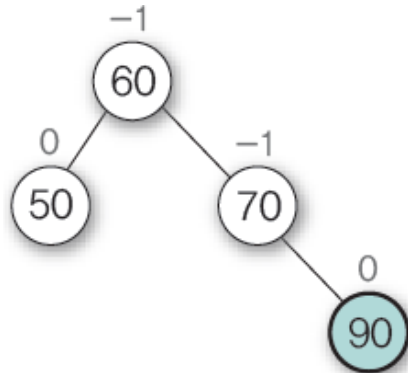


6. 균형 이진 탐색 트리

- ③ 노드 70 삽입 : 노드 60의 오른쪽 자식으로 노드 70을 삽입. 하지만 노드 50의 균형 인수가 -2가 되어 RR 유형의 불균형이 발생하므로 RR 회전을 수행하여 균형을 회복

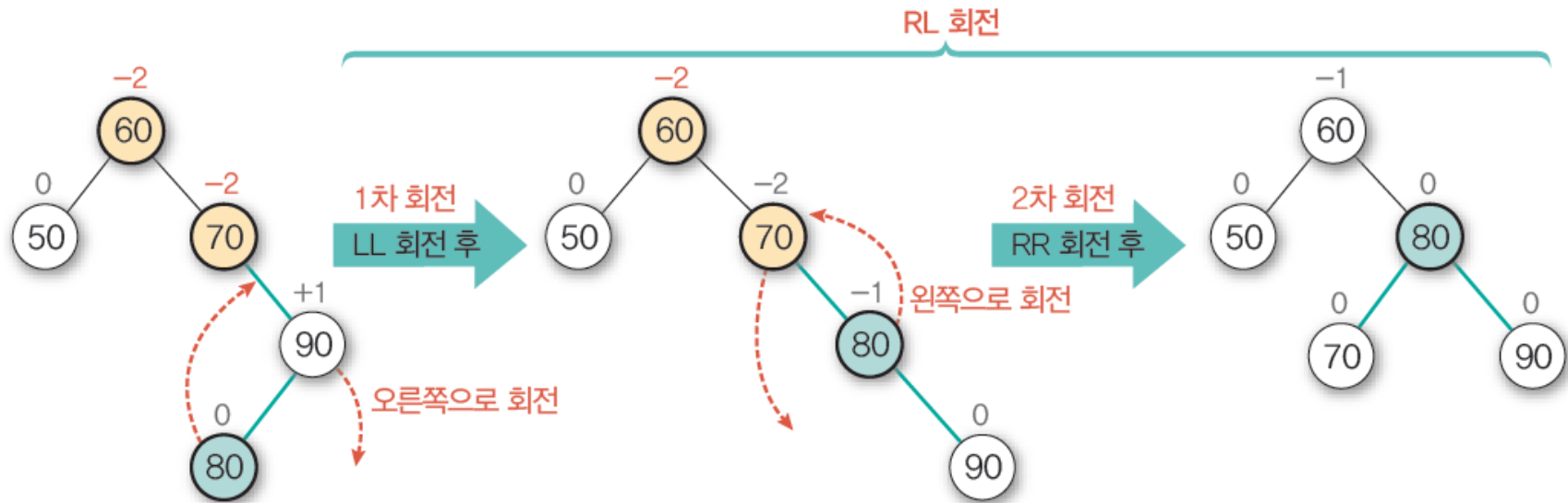


- ④ 노드 90 삽입 : 노드 70의 오른쪽 자식으로 노드 90을 삽입



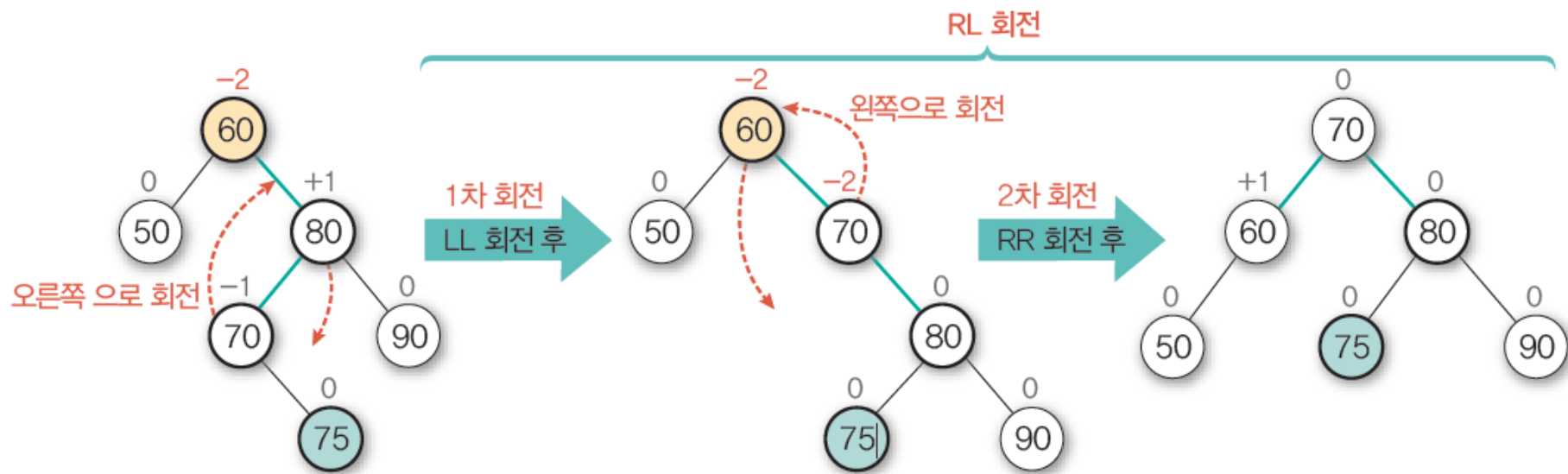
6. 균형 이진 탐색 트리

- ⑤ 노드 80 삽입 : 노드 90의 왼쪽 자식으로 노드 80을 삽입. 노드 70의 균형 인수가 -2가 되어 RL유형의 불균형이 발생하므로 1차 회전에서 LL 회전을 하고 2차 회전에서 RR 회전을 하는 RL 회전을 수행하여 균형을 회복



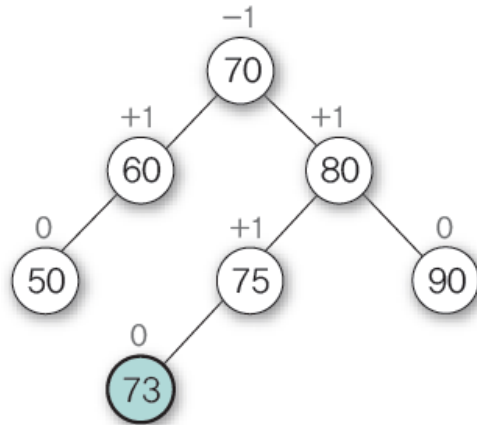
6. 균형 이진 탐색 트리

- ⑥ 노드 75 삽입 : 노드 70의 오른쪽 자식으로 노드 75를 삽입. 노드 60의 균형 인수가 -2가 되었고, RL 유형의 불균형이 발생하였으므로 1차 회전에서 LL 회전을 하고 2차 회전에서 RR 회전을 하는 RL회전을 수행하여 균형을 회복

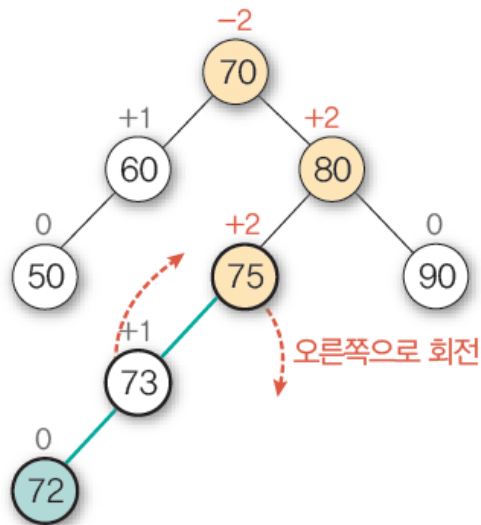


6. 균형 이진 탐색 트리

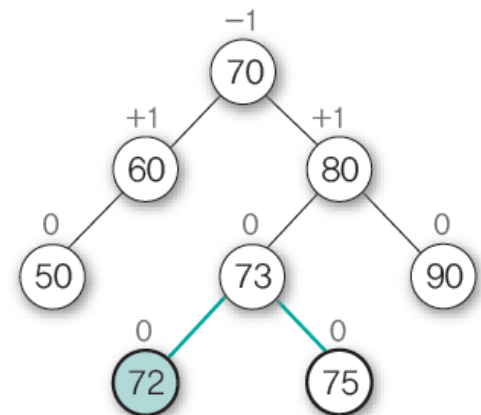
⑦ 노드 73 삽입 : 노드 75의 왼쪽 자식으로 노드 73을 삽입



⑧ 72 삽입 : 노드 75의 균형 인수가 +2가 되면서 LL 유형의 불균형이 발생.
LL 회전 연산을 수행하여 균형을 회복

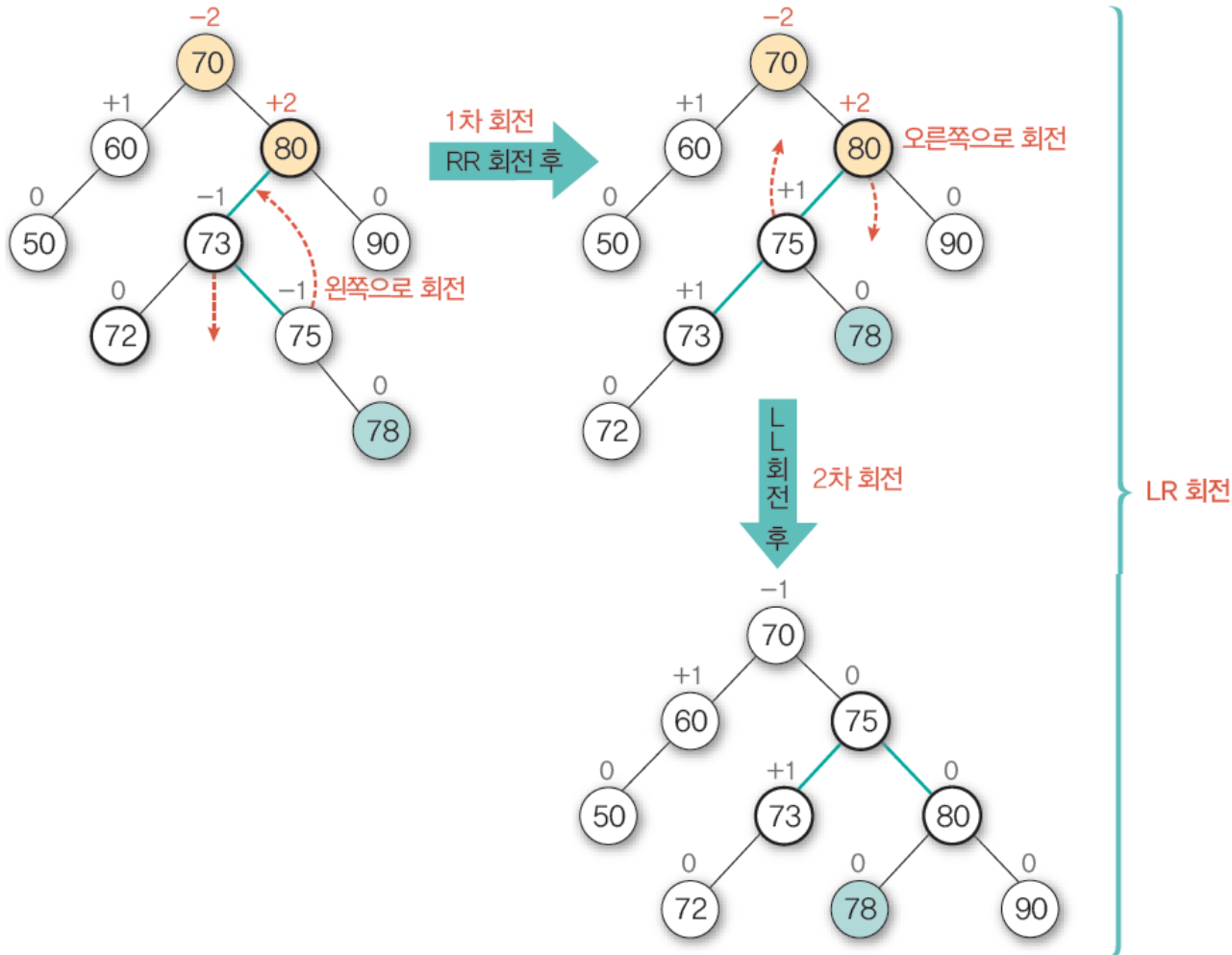


LL 회전 후



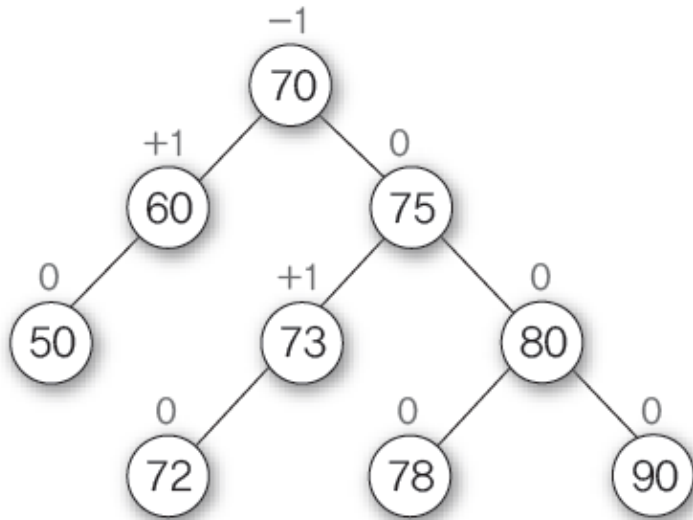
6. 균형 이진 탐색 트리

- ⑨ 노드 78 삽입 : 노드 75의 오른쪽 자식 노드로 노드 78을 삽입. 노드 80의 균형 인수가 +2가 되면서 LR 유형의 불균형이 발생. 1차 회전에서 RR 회전을 하고 2차 회전에서 LL 회전을 하는 LR 회전을 수행하여 균형을 회복

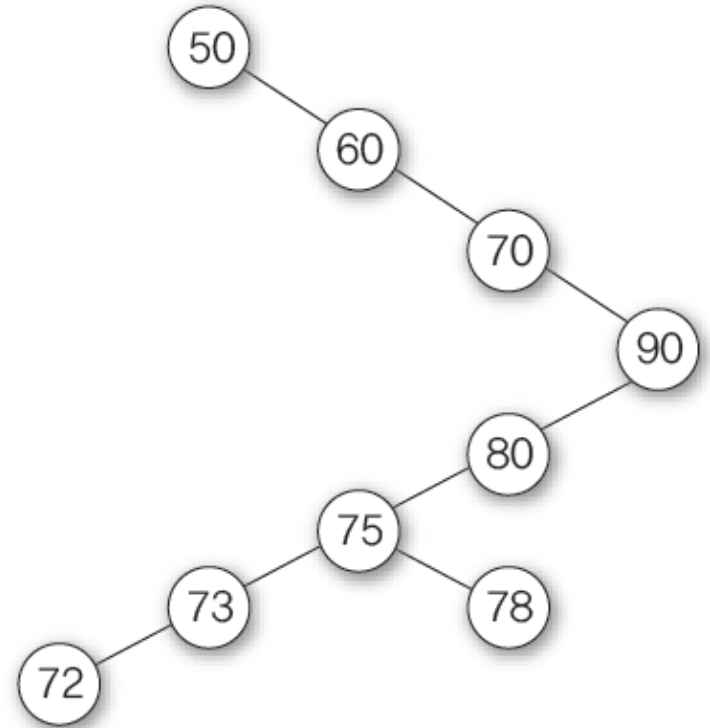


6. 균형 이진 탐색 트리

- 같은 원소를 같은 순서로 삽입한 경우의 AVL 트리와 이진 탐색 트리 비교



(a) AVL 트리



(b) 이진 탐색 트리

그림 7-52 같은 원소를 같은 순서로 삽입한 경우의 AVL 트리와 이진 탐색 트리 비교