|  |  |
| --- | --- |
| Gerb-BMSTU_01 | **Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**  **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  **высшего образования**  **«Московский государственный технический университет**  **имени Н.Э. Баумана**  **(национальный исследовательский университет)»**  **(МГТУ им. Н.Э. Баумана)** |

ФАКУЛЬТЕТ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_Информатика и системы управления\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

КАФЕДРА \_\_\_\_\_\_\_Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии\_\_\_\_\_\_\_\_

**ОТЧЕТ**

**по Лабораторной работе №4**

**по курсу**

**«Методы вычислений»**

**Тема**

**«Метод Ньютона»**

**Вариант 9**

Студент \_\_\_ИУ7-21М\_\_\_\_  **\_\_\_**Карпухин А.С.\_\_\_

(Группа) (И.О.Фамилия)

Преподаватель  **\_\_\_\_**Власов П.А.**\_\_\_\_\_\_**

(И.О.Фамилия)

1. *г.*
2. **Постановка задачи**

Общий вид задачи оптимизации:

где , .

Если в данной задаче , то соответствующая задача называется задачей одномерной оптимизации.

Задача одномерной минимизации имеет вид:

1. **Исходные данные варианта**

Целевая функция *f*:

a = 0, b = 1.

1. **Метод Ньютона**

Если предположить, что унимодальная на отрезке [a, b] функция f(x) дважды непрерывно дифференцируема на данном отрезке, то для ее минимизации можно использовать метод Ньютона, основанный на линейной аппроксимации производной функции f(x). Производная заменяется касательной к ней в некоторой начальной точке , затем вычисляется точка пересечения этой касательной с осью абсцисс. Полученная точка берется в качестве следующего приближения искомой точки минимума функции f.

Очередное приближение точки минимума функции f вычисляется по формуле:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |

В реализуемой модификации метода Ньютона вторая производная полагается равной константе:

Алгоритм метода Ньютона:

|  |
| --- |
| Шаг 1. Выбрать .  Шаг 2. Вычислить вторую производную .  Шаг 3. Вычислить очередное приближение искомой точки минимума по формуле (1) с использованием ранее полученной второй производной .  Шаг 4. Проверка на окончание поиска: если разность между текущим и предыдущим приближением точки минимума меньше заданной точности ε, то закончить поиск, полагая , . Иначе перейти к шагу 3. |

Для аппроксимации производных в данном методе могут быть использованы их разностные аналоги:

1. **Текст программы**

Код разработанной программной реализации модифицированного метода Ньютона приведен в листинге 1.

Листинг 1. Код программы, реализующей модифицированный метод Ньютона

|  |
| --- |
| function lab4()  f = @(x) (tan((x.^4 + 2.\*x.^2 - 2.\*x + 2^0.5 + 1) ./ 8) + ...  sin((4.\*x.^3 - 7.\*x - 9) ./ (20.\*x + 28)));    a = 0; b = 1;  X = a:0.01:b;  Y = f(X);  eps = [0.01, 0.0001, 0.000001];    NeutonMethodTable(f, a, b, X, Y, eps);  FminbndTable(f, a, b, eps);  end    % Вывод таблицы для встроенной функции fminbnd  function FminbndTable(f, a, b, eps)  fprintf("\nРезультаты вычисления точки минимума\n");  fprintf("для различных значений точности функцией fminbnd:\n\n");  fprintf(" # | Eps | N | x\* | f(x\*)\n");  fprintf("---|----------|----|---------|--------\n");  for i = 1:length(eps)  options = optimset('TolX', eps(i));  [x, fval, ~, output] = fminbnd(f, a, b, options);  fprintf("%2i | %5f | %2i | %5.5f | %5.5f\n", ...  i, eps(i), output.funcCount, x, fval);  end  end    % Вывод таблицы и графиков для результатов работы метода Ньютона  function NeutonMethodTable(f, a, b, X, Y, eps)  fprintf("\nРезультаты вычисления точки минимума\n");  fprintf("для различных значений точности методом Ньютона:\n\n");  fprintf("Eps - точность\n");  fprintf("N - число обращений к целевой функции\n");  fprintf("x\* - найденная точка минимума функции\n");  fprintf("f(x\*) - найденный минимум функции\n\n");  fprintf(" # | Eps | N | x\* | f(x\*)\n");  fprintf("---|----------|----|---------|--------\n");    figure('Units', 'normalized', 'OuterPosition', [0 0 1 1]);  title('Метод Ньютона');    for i = 1:length(eps)  % Вычисление точки минимума и минимума функции  [X0, F0, X\_S, N] = NeutonMethod(a, b, f, eps(i));    % Вывод строки таблицы результатов вычислений  fprintf("%2i | %5f | %2i | %5.5f | %5.5f\n", ...  i, eps(i), N, X0, F0);    % Вывод графика для данной точности  subplot(2, 2, i);  % Целевая функция  plot(X, Y, '-b','LineWidth',1.5);  hold on;  % Последовательность приближений  plot(X\_S, f(X\_S), '\*g','LineWidth', 2);  % Точка минимума  plot(X0, F0, '\*r','LineWidth', 4);  title(sprintf("Точность Eps = %2.0e", eps(i)));  legend('Целевая функция', 'Последовательность приближений', ...  'Точка минимума');  end  end    % Разностная аппроксимация первой производной  function df = df(f\_prev, f\_next, delta)  df = (f\_next - f\_prev) / (2\*delta);  end    % Разностная аппроксимация второй производной  function d2f = d2f(f\_prev, f\_m, f\_next, delta)  d2f = (f\_next - 2\*f\_m + f\_prev) / (delta^2);  end    % Метод Ньютона  function [X, F, X0, N] = NeutonMethod(a, b, f, eps)  x0\_prev = (a + b) / 3;  x\_prev = x0\_prev - eps;  x\_next = x0\_prev + eps;    f\_prev = f(x\_prev);  f\_next = f(x\_next);    d2ff = d2f(f\_prev, f(x0\_prev), f\_next, eps);    X0 = [x0\_prev];  N = 3; % Число обращений к целевой функции    while true  % Очередное приближение точки минимума  dff = df(f\_prev, f\_next, eps);  x0 = x0\_prev - dff / d2ff;  X0 = [X0, x0];    % Проверка условия завершения поиска  if abs(x0\_prev - x0) <= eps  break;  end    % Вычисление точек для разностной аппроксимации производной  x0\_prev = x0;  x\_prev = x0 - eps;  x\_next = x0 + eps;  f\_prev = f(x\_prev);  f\_next = f(x\_next);  N = N + 2;  end    X = x0;  F = f\_next;  end |

1. **Результаты расчётов**

Результаты расчетов модифицированным методом Ньютона для задачи одномерной минимизации в соответствии с индивидуальным вариантом для различных значений *ε* приведены ниже в таблице 1.

Таблица 1. Результаты расчетов методом Ньютона.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *№* | *ε* | *N* | *x\** | *f(x\*)* |
| 1 | 10-2 | 5 | 0.38361 | -0.06526 |
| 2 | 10-4 | 9 | 0.38379 | -0.06533 |
| 3 | 10-6 | 11 | 0.38379 | -0.06533 |

В таблице 2 приведены результаты расчётов с использованием встроенной функции fminbnd пакета MATLAB.

Таблица 2. Результаты расчетов функцией fminbnd.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *№* | *ε* | *N* | *x\** | *f(x\*)* |
| 1 | 10-2 | 6 | 0.38530 | -0.06533 |
| 2 | 10-4 | 8 | 0.38379 | -0.06533 |
| 3 | 10-6 | 9 | 0.38379 | -0.06533 |

В таблице 3 приведены сводные данные, обобщающие результаты вычислений из работ 1 – 4 всеми использованными методами для точности 10-6.

Таблица 3. Результаты вычислений из работ 1 – 4 для точности 10-6.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *№* | Метод | *N* | *x\** | *f(x\*)* |
| 1 | Поразрядного поиска | 50 | 0.38379 | -0.06533 |
| 2 | Золотого сечения | 30 | 0.38379 | -0.06533 |
| 3 | Парабол | 11 | 0.38379 | -0.06533 |
|  | Ньютона | 11 | 0.38379 | -0.06533 |
|  | Функция fminbnd | 9 | 0.38379 | -0.06533 |