



UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO
Red de Hopfield cuántica

Presentado por:
D. Pablo Gallardo Calleja

Curso Académico 2023/2024

Resumen

En este trabajo voy a estudiar la generalización a un modelo cuántico de la conocida red de Hopfield presentada en (5). La red de Hopfield es un modelo de memoria asociativa, diseñado para converger a los patrones o memorias almacenados en el sistema como mínimos de energía. Empleando la ecuación maestra de los sistemas cuánticos abiertos, pretendo derivar las ecuaciones del solapamiento en el límite termodinámico y comprobar que se correspondan a las obtenidas en (5). Por otro lado, mediante un análisis de estabilidad lineal a las ecuaciones del solapamiento (medida del grado de coincidencia del sistema con los patrones almacenados), pretendo estudiar las distintas fases que aparecen en función del parámetro Ω , que regula la acción de los efectos cuánticos, y la temperatura. Para comprobar la validez de dichos resultados teóricos, voy a emplear el método de las trayectorias de saltos cuánticos y la resolución numérica de la ecuación de Lindblad para estudiar el modelo en un sistema de tamaño finito con N qubits. Además, comprobaré que los resultados obtenidos mediante las simulaciones se correspondan a los de (6). Finalmente, estudiando el espectro del operador de Lindblad para sistemas finitos, pretendo determinar si aumentando la dimensión del sistema se recuperará la dinámica predicha en el límite termodinámico.

Abstract

In this final degree project, I will study the quantum generalization of the famous Hopfield network presented in (5). The Hopfield network is a associative memory model designed with the aim of converge to one of the stored patterns. The overlap equations will be derived from the thermodynamic limit by means of the quantum open system master equation. Furthermore, to obtain the phase diagram in terms of the parameters Ω , which regularize the quantum effects, and T , I will perform a linear stability analysis on the overlap equations, which measure the degree of coincidence with the memories. To verify the theoretical results, the quantum jump trajectories method and the numerical resolution of the Lindblad master equation will be used to study a finite system of N qubits. Moreover, I will verify that the simulation results coincide with those in (6). Finally, with the aim of verifying that the results obtained in the macroscopic limit are consistent, the eigenvectors of the Lindbladian will be studied.

Índice

1	Introducción	3
1.1	Modelo de Hopfield clásico	3
1.2	Sistemas cuánticos abiertos	5
1.2.1	Matriz densidad	5
1.2.2	Espacio de Fock-Liouville	6
1.2.3	Ecuación maestra de los sistemas cuánticos abiertos	7
1.3	Modelo cuántico de la red de Hopfield	9
2	Metodología	10
2.1	Trayectorias de saltos cuánticos	10
3	Resultados y discusión	14
3.1	Magnetización en el límite termodinámico	14
3.2	Límite clásico	17
3.3	Adición del término cuántico	18
3.4	Estudio de la magnetización promedio	21
4	Conclusiones	24
5	Apéndices	25
5.1	Demostración de la ecuación de Lindblad en la imagen de Heisenberg .	25
5.2	Demostración del límite clásico	27
5.3	Demostración de la evolución de σ^z	30
5.4	Demostración de la evolución de σ^\pm en el límite termodinámico	32
5.5	Demostración de la evolución temporal del overlap s^z	35
5.6	Demostración de la evolución temporal del overlap s^y	36
5.7	Análisis de estabilidad lineal en el límite termodinámico	36
5.7.1	Análisis de estabilidad lineal de la solución paramagnética	37
5.7.2	Análisis de estabilidad lineal de las soluciones no triviales	38
5.7.3	Aproximación de bajas temperaturas para la fase ferromagnética	40
Referencias		40

1. Introducción

1.1. Modelo de Hopfield clásico

El modelo de Hopfield fue introducido por John Hopfield como un modelo de red neuronal con memoria asociativa. En este sistema se pueden almacenar p patrones o memorias mediante una matriz de pesos J_{ij} que los codifica en los mínimos de la energía. Entonces si se introduce una entrada aleatoria al sistema, el estado en la salida se va a corresponder al patrón almacenado que más se parezca al suministrado, es decir, el sistema va a recordar una de las memorias. La dinámica de la red de Hopfield clásica viene descrita por:

$$E = -\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} J_{ij} \sigma^i \sigma^j \quad J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \xi_j^\mu \quad (1.1)$$

Siendo E la energía de la red, $\sigma^i \in \{-1, 1\}$ el estado de la neurona i -ésima, J_{ij} los pesos del sistema y ξ^μ los patrones que se van a almacenar. Por otro lado, se puede definir el solapamiento con el patrón μ -ésimo como:

$$m_z^\mu = \frac{1}{N} \sum_i \xi_i^\mu \sigma^i \quad (1.2)$$

Siendo este una medida del grado de coincidencia del estado del sistema con el patrón o memoria μ . Para entender el funcionamiento de la red podemos hacer la analogía con el modelo de Ising, donde cada una de las neuronas se corresponderá con un nodo. Podemos codificar el estado de las neuronas como el spin de los nodos, donde el estado correspondiente a la neurona activada ($\sigma^i = 1$) sería el equivalente a tener el spin alienado con el eje z. Mientras que en caso contrario si la neurona no está excitada se corresponderá al espín antiparalelo. Por lo tanto, el significado físico que tendría el solapamiento sería la magnetización del modelo, la cual se hará máxima cuando coincide con alguno de los patrones almacenados en la red. La idea de este modelo es estudiar la capacidad de recuperación de la memoria que muestra la red al introducir una condición inicial distinta a la almacenada. Para ello se introduce ruido mediante la temperatura, con la finalidad de ver si el sistema puede recuperar alguno de los patrones almacenados. Continuando con la analogía con el modelo de Ising podremos distinguir dos fases en función de la temperatura:

- **Paramagnética:** Fase correspondiente a altas temperaturas, debido a la energía térmica todas las configuraciones serán accesibles por lo que los espines estarán desordenados, de forma que la magnetización del sistema será $m_z^\mu \approx 0$.
- **Ferromagnética:** Región correspondiente a bajas temperaturas, donde el sistema ha sido capaz de llegar a un estado estacionario quedando atrapado en un extremo del potencial. Al contrario que antes, nuestra red tendrá una magnetización no nula $m_z^\mu \neq 0$. Este sería el resultado de la memoria asociativa, dando lugar a una dinámica que es capaz de recuperar alguno de los patrones o memorias almacenados previamente en el sistema.

Por lo tanto, al codificar los patrones en la red estamos estableciendo los mínimos de energía que va a tener el sistema, es decir, creamos los estados de equilibrio. Si enfriamos nuestro sistema, este terminará en un mínimo correspondiente a uno de los patrones que se han codificado en la red. Entonces, si comenzamos en una condición inicial suficientemente cerca de uno de los mínimos de energía, la evolución estocástica será hacia dicho extremo si la temperatura es lo suficientemente baja. Emergiendo así el comportamiento característico de la memoria asociativa como se puede ver en el ejemplo:

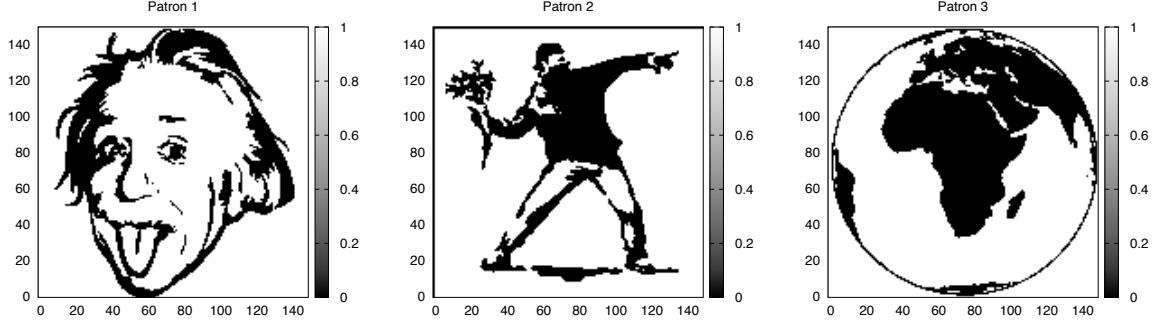


Figura 1: Memorias almacenadas en la red

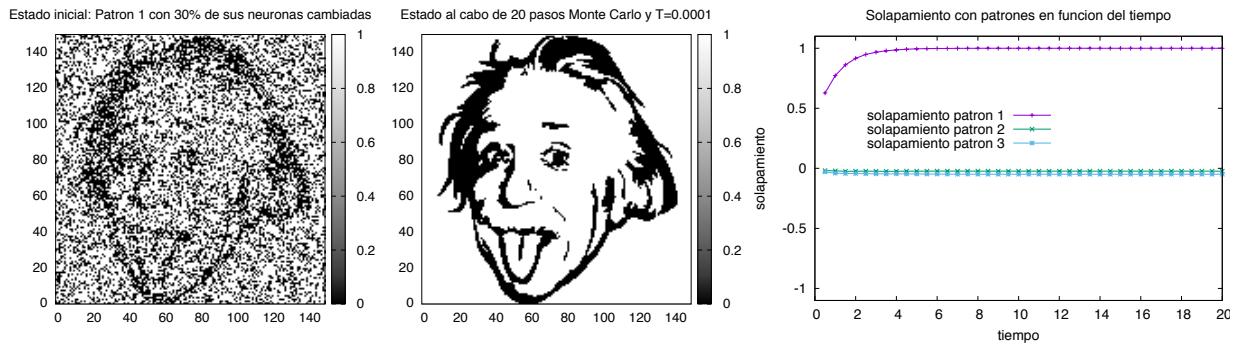


Figura 2: Solapamiento en función del tiempo

Se puede ver que la red al partir de una situación inicial cercana a una de las memorias almacenadas, es capaz de recuperar el patrón codificado en el sistema cuando está a bajas temperaturas.

1.2. Sistemas cuánticos abiertos

Para generalizar el modelo de la red de Hopfield a uno cuántico, es necesario trabajar con sistemas cuánticos abiertos. Para ello, se empleará:

1.2.1. Matriz densidad

Si tenemos un estado $|\psi\rangle$ perteneciente al espacio \mathcal{H}_A , podemos calcular el valor esperado de los observables como:

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle \quad (1.3)$$

Sin embargo, si en nuestro sistema físico se pueden dar una serie de estados $\{|\psi_i\rangle\} \in \mathcal{H}_A$, donde cada uno se da con probabilidad $p_i \geq 0$, entonces para caracterizar el sistema será necesario introducir el concepto de matriz densidad para estudiar la colectividad de estados:

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \\ \langle A \rangle &= \text{Tr}(A\rho) = \sum_i p_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle \end{aligned} \quad (1.4)$$

Cualquier estado cuántico que se pueda escribir como 1.4, se denomina matriz densidad. Este tipo de matrices forman lo que se conoce como un conjunto convexo, es decir, cualquier combinación lineal de ellos se quedará dentro del mismo conjunto. Por lo que la suma normalizada de estas matrices nos dará otra matriz densidad.

Las propiedades de este operador son:

- Trazza unidad:

$$\text{Tr}(\rho) = 1 \quad (1.5)$$

Puesto que sus autovalores se interpretan como probabilidades, entonces la suma de todos ellos debe de estar normalizada.

- Autoadjunta o hermítica: $\rho^\dagger = \rho$
- La matriz debe de ser semidefinida positiva: $\rho \geq 0 \rightarrow \langle \psi | A | \psi \rangle \geq 0$ puesto que no puede existir probabilidades con valor negativo.

La evolución de la matriz densidad vendrá dada por la ecuación de von Neumann:

$$\dot{\rho}(t) = -i [H, \rho(t)] \quad (1.6)$$

1.2.2. Espacio de Fock-Liouville

Dado que las matrices densidad forman un conjunto convexo, podemos definir un espacio de Hilbert que tenga como vectores estas matrices. Este es el correspondiente espacio de Fock-Liouville \mathcal{H}_F :

$$\mathcal{H}_F = \{\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) / \rho \rightarrow |\rho\rangle\langle\rho|\} \quad (1.7)$$

Es decir, se realiza la siguiente biyección entre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y \mathcal{H}_F :

$$f : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{H}_F$$

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & & & \rho_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{n1} & \cdot & \cdot & \rho_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \rho_{11} \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_{nn} \end{pmatrix} = |\rho\rangle\langle\rho| \quad (1.8)$$

Donde el producto escalar definido sobre este espacio:

$$\langle\langle \rho | \sigma \rangle\rangle = \text{Tr}(\rho^\dagger \sigma) \quad (1.9)$$

Podemos reescribir el producto de otros operadores con nuestra matriz densidad en \mathcal{H}_F haciendo uso del producto de Kronecker, como vemos en (9) :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & \cdots & A_{1N}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1}B & \cdots & A_{NN}B \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Podemos resumir brevemente las directrices para pasar de un espacio a otro:

Espacio original	\mathcal{H}_F
$A\rho$	$A \otimes I \rho\rangle\rangle$
ρB	$I \otimes B^T \rho\rangle\rangle$
$A\rho B$	$A \otimes B^T \rho\rangle\rangle$

Cuadro 1: Directrices para reescribir el producto de operadores sobre la matriz densidad en el espacio de Fock

1.2.3. Ecuación maestra de los sistemas cuánticos abiertos

Si trabajamos en un sistema cuántico cerrado la evolución del sistema vendrá completamente determinada por la ecuación de von Neumann 1.6 para la evolución de la matriz densidad. Las soluciones de esta ecuación para tiempos largos será en general oscilaciones que se mantienen indefinidas en el tiempo. Sin embargo, si añadimos un término disipativo, nuestro sistema podrá converger a una solución estacionaria para tiempos largos. Para llevar esto acabo, se introduce un entorno que interaccione con nuestro sistema:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_E \quad (1.11)$$

Donde nuestro sistema de interés será \mathcal{H}_A el cuál experimentará un baño térmico dado por \mathcal{H}_E , esto es lo que se conoce como un sistema cuántico abierto. La evolución de la matriz densidad para procesos de Márkov en el espacio \mathcal{H}_A vendrá determinada por la ecuación de Lindblad:

$$\dot{\rho}(t) = -i [H, \rho(t)] + \sum_i L_i \rho(t) L_i^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ L_i^\dagger L_i, \rho(t) \right\} = \mathcal{L}\rho(t) \quad (1.12)$$

Que nos describe la evolución no unitaria de un sistema cuántico sometido a un baño térmico. Podemos ver que se ha incluido un término disipativo que permitirá a nuestro sistema termalizar y alcanzar un estado estacionario. Además, se han definido los operadores de salto L_i , que permite a los qubits del sistema realizar transiciones espontáneas de un estado a otro. De igual forma podemos definir el superoperador de Lindblad o Lindbladiano como:

$$\mathcal{L}(\cdot) = -i [H, (\cdot)] + \sum_i L_i (\cdot) L_i^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ L_i^\dagger L_i, (\cdot) \right\} \quad (1.13)$$

Donde se define un superoperador como un operador que actúa sobre el espacio $\mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$ de operadores lineales sobre \mathcal{H}_A .

La ecuación de Lindblad verifica que:

- Conserva la traza la traza: $\text{Tr}(\dot{\rho}(t)) = 0$.
- Preserva la positividad: $\rho(t) \geq 0$.
- Mantiene la hermiticidad $\rho(t) = \rho(t)^\dagger$.

Resolviendo la ecuación de Lindblad podemos obtener la evolución de la matriz de la densidad:

$$\dot{\rho}(t) = \mathcal{L}\rho(t) \longrightarrow \rho(t) = e^{\mathcal{L}t}\rho(0) \quad (1.14)$$

Como para tiempos largos el sistema debe tender a un estado estacionario, entonces el espectro del superoperador debe de estar en el plano complejo con parte real negativa o igual a cero, puesto que en otro caso tendremos soluciones divergentes y ρ dejaría de ser una matriz densidad.

Pasando al espacio de Fock podemos descomponer el Lindbladiano en una base propia quedando:

$$|\rho(t)\rangle\rangle = e^{\mathcal{L}t}|\rho(0)\rangle\rangle = \sum_i e^{\lambda_i t} \langle\langle \Lambda_i^L | \rho(0) \rangle\rangle |\Lambda_i^R\rangle\rangle \quad (1.15)$$

Donde hemos descompuesto el operador \mathcal{L} en la base de los autovectores por la izquierda ($\langle\langle \Lambda_i^L |$) y por la derecha ($|\Lambda_i^R\rangle\rangle$) puesto que en general \mathcal{L} no es hermítico.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_i \lambda_i |\Lambda_i^R\rangle\rangle \langle\langle \Lambda_i^L | \\ \mathcal{L} |\Lambda_i^R\rangle\rangle &= \lambda_i |\Lambda_i^R\rangle\rangle \\ \langle\langle \Lambda_i^L | \mathcal{L} &= \lambda_i \langle\langle \Lambda_i^L | \end{aligned} \quad (1.16)$$

Por el teorema de Evan's (7) y (8), sabemos que existe al menos un autovalor que valor nulo $\lambda_i = 0$ que se corresponderá al estado estacionario del sistema.

$$\rho_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\mathcal{L}t} \rho(0) \quad (1.17)$$

Para finalizar, podemos reescribir la ecuación 1.12 en términos de un Hamiltoniano efectivo H_{eff} como se demuestra en (2):

$$\dot{\rho} = -i \left[H_{\text{eff}}\rho - \rho H_{\text{eff}}^\dagger \right] + \sum_{i,\tau} L_{i\tau} \rho L_{i\tau}^\dagger \quad (1.18)$$

Con:

$$H_{\text{eff}} = H - \frac{i}{2} \sum_{i,\tau} L_{i\tau}^\dagger L_{i\tau} \quad H_{\text{eff}} \neq H_{\text{eff}}^\dagger \quad (1.19)$$

1.3. Modelo cuántico de la red de Hopfield

El modelo cuántico de la red de Hopfield propuesto por (5) propone que la red puede generalizarse a un sistema cuántico abierto mediante la ecuación de Lindblad empleando como operadores de salto:

$$L_{i,\pm} = \Gamma_{i,\pm} \sigma_i^\pm = \frac{e^{\pm\beta\Delta E_i/2}}{\sqrt{2\cosh(\beta\Delta E_i)}} \quad (1.20)$$

Siendo $\beta = T^{-1}$, $\Delta E_i = \sum_{j \neq i} J_{ij} \sigma_j^z$ el cambio de energía al cambiar intercambiar un espín del sistema ($1 \leftrightarrow -1$) y σ^\pm las matrices de Pauli:

$$\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

Al generalizar a un caso cuántico la red, estamos interesados en estudiar los nuevos efectos que aparecen sobre el sistema, por ello introducimos un Hamiltoniano cuántico que nos saque el sistema de la base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ (ya que en caso contrario tendríamos la misma situación que en el caso clásico):

$$H = \Omega \sum_i^N \sigma_i^x \quad (1.22)$$

Siendo Ω el parámetro que nos regula los efectos cuánticos del sistema. Recuperando la analogía usada en secciones anteriores de un cristal, podemos entender la acción del Hamiltoniano como si fuera un campo magnético actuando sobre el sistema en la dirección del eje x , donde Ω será la fuerza del campo. La acción del campo magnético nos introducirá un estado de desequilibrio cuántico.

Por lo tanto la ecuación de Lindblad quedará como:

$$\dot{\rho} = -i [H, \rho] + \sum_{i,\tau} L_{i\tau} \rho L_{i\tau}^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ L_{i\tau}^\dagger L_{i\tau}, \rho \right\} \quad (1.23)$$

Como podemos comprobar en 5.2 se puede tomar el límite clásico de la ecuación 1.23 para comprobar si el modelo es correcto, para ello se considera una matriz densidad diagonal y se eliminan los efectos cuánticos del sistema, es decir, $\Omega = 0$ dando lugar a:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{k,\tau=\pm} \Gamma_{k\tau}^2 \left[\sigma_k^\tau - \frac{1}{2} (1 - \tau \sigma_k^z) \right] \mathbf{P} \quad (1.24)$$

Como podemos encontrar en (5), en el modelo de Hopfield nos interesa que el sistema recupere alguno de los patrones almacenados en la red, para ello podemos

introducir el operador cuántico correspondiente al solapamiento.

$$s_\mu^\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{(\mu)} \sigma_i^\alpha \quad \alpha = x, y, z \quad (1.25)$$

Este operador sería el equivalente a la magnetización del sistema.

2. Metodología

2.1. Trayectorias de saltos cuánticos

La evolución de ρ dada por la ecuación maestra de los sistemas cuánticos abiertos, es una evolución determinista. Sin embargo, como se presenta en (2), (3) y (4), al igual que en el caso clásico, podremos descomponer la evolución de la ecuación maestra en trayectorias cuánticas independientes. Para recuperar el resultado obtenido en el límite determinista, bastará con promediar a lo largo de todas las trayectorias estocásticas obtenidas. Por lo tanto, como se puede encontrar en (2), si nuestro estado inicial es $|\psi_0\rangle$, la evolución de nuestro sistema constará de periodos de evolución determinista dados por:

$$|\psi(t + \Delta t)\rangle = e^{-itH_{\text{eff}}} |\psi(t)\rangle \quad (2.1)$$

Donde H_{eff} actuará como operador de evolución temporal. H_{eff} no tiene por qué ser unitario o hermítico, por lo tanto, la dinámica de este procedimiento no conservará la norma del estado en general. Además, debido a la acción del entorno sobre el sistema aceptaremos que se den transiciones instantáneas de forma aleatoria entre estados por medio de los operadores de salto:

$$|\psi'(t)\rangle = L_{i,\tau} |\psi(t)\rangle \quad (2.2)$$

Siguiendo el desarrollo presentado en (3) muestro como llevar acabo la dinámica que se acaba de presentar. Si la matriz densidad verifica la ecuación de Lindblad, entonces $\rho(t)$ debe de ser una función derivable por lo que se puede aplicar la definición de derivada:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(t + \Delta t) - \rho(t)}{\Delta t} = \mathcal{L}\rho(t) \longrightarrow \rho(t + \Delta t) \approx (1 + \Delta t\mathcal{L})\rho(t) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (2.3)$$

Este desarrollo es el equivalente al hacer una expansión de Taylor de la solución a la ecuación de Lindblad 1.14 y quedarse a orden $\mathcal{O}(\Delta t^2)$. Por lo tanto, para que se verifique la aproximación Δt debe de ser lo suficientemente pequeño como para despreciar los términos cuadráticos. Ahora tengo en cuenta la definición del \mathcal{L} dada en 1.18:

$$\rho(t + \Delta t) \approx \left(\rho(t) + \Delta t \left[-i \left[H_{\text{eff}}\rho(t) - \rho(t)H_{\text{eff}}^\dagger \right] + \sum_{i,\tau} L_{i\tau} \rho(t) L_{i\tau}^\dagger \right] \right) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (2.4)$$

Como solamente estoy considerando términos hasta orden lineal en Δt , se introducen los operadores:

$$\begin{aligned} V_{i\tau} &= \sqrt{\Delta t} L_{i\tau} \\ V_0 &= 1 - i\Delta t H_{\text{eff}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Donde se ha absorbido el espaciado temporal dentro de estos operadores. Entonces la evolución queda descrita como:

$$\rho(t + \Delta t) = V_0 \rho V_0^\dagger + \sum_{i,\tau} V_{i\tau} \rho(t) V_{i\tau}^\dagger + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (2.6)$$

Es fácil ver que si se introduce la definición de V_0 y nos quedamos hasta orden $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ se recupera 2.4. La expresión obtenida se corresponde a la acción de un canal cuántico sobre la matriz densidad ρ :

$$\rho' = \rho(t + \Delta t) = T(\rho) = V_0 \rho V_0^\dagger + \sum_{i,\tau} V_{i\tau} \rho(t) V_{i\tau}^\dagger \quad (2.7)$$

Donde los operadores V_0 y $V_{i\tau}$ cumplirán el rol de los operadores de Kraus del sistema. Por lo tanto, verificarán la identidad:

$$I = V_0^\dagger V_0 + \sum_{i,\tau} V_{i\tau}^\dagger V_{i\tau} \quad (2.8)$$

Siendo I el operador identidad sobre el espacio \mathcal{H}_A . Entonces, si el estado inicial es $|\psi\rangle$, la probabilidad de que el estado de el salto $V_{i\tau}$ en el instante t vendrá dada por:

$$p_{i\tau}(t) = \langle \psi(t) | V_{i\tau}^\dagger V_{i\tau} | \psi(t) \rangle = \Delta t \langle \psi(t) | L_{i\tau}^\dagger L_{i\tau} | \psi(t) \rangle \quad (2.9)$$

Y el estado resultante será:

$$|\psi_{i\tau}(t)\rangle = \frac{V_{i\tau} |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle \psi(t) | V_{i\tau}^\dagger V_{i\tau} | \psi(t) \rangle}} \quad (2.10)$$

Por otro lado, la probabilidad de que el sistema evolucione según V_0 en el intervalo de tiempo Δt es:

$$p_0(t) = \langle \psi(t) | V_0^\dagger V_0 | \psi(t) \rangle \quad (2.11)$$

El estado tras de la evolución:

$$|\psi_0(t + \Delta t)\rangle = \frac{V_0 |\psi(t)\rangle}{\sqrt{\langle \psi(t) | V_0^\dagger V_0 | \psi(t) \rangle}} \quad (2.12)$$

Dado que $V_{i\tau}$ y V_0 son los operadores de Kraus, es trivial ver que la probabilidad está normalizada empleando 2.8:

$$1 = \sum_{i,\tau} p_{i,\tau}(t) + p_0(t) \quad (2.13)$$

Para implementar este procedimiento se sigue el siguiente algoritmo:

- Empezando en el estado $|\psi\rangle$, calculamos la probabilidad p_0 de que el sistema evolucione según el efecto del Hamiltoniano a $t + \Delta t$. Entonces se genera un número aleatorio uniforme $r \in [0, 1]$ y comparamos con el valor de $1 - p_0$, es decir, la probabilidad de que actué un operador de salto en ese paso.
- Si $r < 1 - p_0$, significa que la evolución del sistema vendrá determinada por la acción de los operadores de salto, por lo que habrá que elegir cual es el operador que produce la transición. Para ello calculamos las probabilidades $p_{i\tau}$ y generamos un número aleatorio uniforme $r_2 \in [0, 1]$. Si $r_2 < \frac{p_{i\tau}}{P}$ el operador que actuará sobre el estado será $V_{i\tau}$. Hay que destacar que $P = 1 - p_0$, es decir nos restringimos a las probabilidades referentes a las transiciones, puesto que ya sabemos que en este paso va a actuar un operador de salto.
- En este caso, $r \not< 1 - p_0$, el sistema no salta en este intervalo y el sistema evoluciona mediante la acción de V_0 .

Este procedimiento se conoce como método de las trayectorias de saltos cuánticos (QJT).

Para llevar a cabo el estudio he realizado:

- En primer lugar, empleando el modelo cuántico propuesto por (5), voy a derivar las ecuaciones de la magnetización en el límite termodinámico para la situación en la que tengamos una memoria almacenada. A partir de estas ecuaciones, voy a estudiar las fases que presenta el sistema cuántico en función de los parámetros Ω y T .
- En segundo lugar, empleando el modelo propuesto por (5) compruebo que en el límite clásico se recupera la dinámica de Hopfield ya conocida. Para ello empleo el método de las trayectorias de saltos cuánticos presentado en 2.1 para el caso particular de $\Omega = 0$, con la finalidad de ver si el sistema es capaz de recuperar el patrón almacenado. Calculando para cada temperatura una trayectoria cuántica, obtendré una gráfica de $m_z - t$ que muestre la evolución del sistema. De igual forma, promediando $|m_z|$ a lo largo de muchas trayectorias de saltos cuánticos, se calculará $|m_z|$ en función de T y determinaré la temperatura crítica (T_c) a la que se produce el cambio de la fase ferromagnética a la paramagnética. Para ello, he empleado como criterio que la transición de fase se realiza cuando $|m_z| = 0.6$.
- En tercer lugar, introduzco el término del Hamiltoniano cuántico mediante $\Omega \neq 0$, con la finalidad de ver el efecto que presenta sobre la recuperación de los patrones almacenados. De nuevo, empleo el método de QJT para una trayectoria a lo largo del tiempo, con el objetivo de ver si el sistema recupera el patrón o presenta oscilaciones patrón-antipatrón. A partir de estos resultados hago una

gráfica de $m_z - t$ y un histograma de m_z . Analizando estas figuras, podré ver si aparecen las oscilaciones esperadas mediante la aparición dos picos bien definidos, o si por el contrario se ha alcanzado ya la fase paramagnética.

- Por último, busco comprobar la validez de las ecuaciones de la magnetización 3.3 en un sistema de dimensión finita. Para ello emplearé dos enfoques distintos:
 - **Resolución numérica (RN):** A partir de la integración numérica de la ecuación de Lindblad, obtengo la magnetización m_z en función del tiempo.
 - **QJT:** Promedio el solapamiento a lo largo de 1500 trayectorias de saltos cuánticos para calcular el valor de m_z y $|m_z|$ en función del tiempo.

A partir de estos resultados calculo las trayectorias en el espacio $m_y - m_z$ y compararé con las gráficas obtenidas en 4. De igual forma, representando m_z y $|m_z|$ en función del tiempo comprobaré si se alcanza un estado estacionario. Como las ecuaciones presentadas en 3.3 han sido derivadas en el límite termodinámico no espero obtener los mismos resultados debido al tamaño finito del sistema. Por lo que llevaré a cabo un análisis de Fourier para estudiar si las frecuencias que aparecen en $m_z(t)$ se corresponden a las del modelo teórico. En concreto, confirmaré si aparece la frecuencia 2Ω característica de las oscilaciones de Rabi y predicha las ecuaciones de la magnetización. Para finalizar, mediante un análisis del espectro del Lindbladiano para distintos valores de N qubits comprobaré:

- Si aparecen nuevos autovalores en el espectro cuya parte imaginaria se corresponda a alguna de las frecuencias que compongan las trayectorias obtenidas en el límite termodinámico.
- Representaré la parte real de los autovalores normalizados (divididos entre el autovalor de mayor tamaño para cada una de las frecuencias), correspondientes a las frecuencias de oscilación que aparecen en la transformada de Fourier, frente a $1/N$. El objetivo de este análisis es comprobar si el gap entre la parte real de los autovalores y el eje imaginario disminuye al aumentar la dimensión del sistema.

A partir de este resultado, podré discutir si cuando $N \rightarrow \infty$ la dinámica del sistema se corresponderá a la predicha por las ecuaciones de la magnetización en el límite termodinámico.

3. Resultados y discusión

3.1. Magnetización en el límite termodinámico

El observable que me interesa es el solapamiento con respecto a los patrones almacenados. Estas ecuaciones se pueden obtener de forma analítica considerando que el sistema está en el límite termodinámico, es decir, que el número de qubits N es suficientemente grande como para aproximarla a infinito. Haciendo estas consideraciones se obtiene la evolución de los operadores de Pauli en la imagen de Heisenberg 5.3 y 5.4, y a partir de ellos se puede calcular el operador del solapamiento con respecto a los 3 ejes cartesianos en 5.5 y 5.6:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{s}}^z &= 2\Omega\mathbf{s}^y - \gamma\mathbf{s}^z + \frac{\gamma}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k \tanh(\beta\xi_k \cdot \mathbf{s}^z) \\ \dot{\mathbf{s}}^y &= -2\Omega\mathbf{s}^z - \frac{\gamma}{2}\mathbf{s}^y \\ \dot{\mathbf{s}}^x &= -\frac{\gamma}{2}\mathbf{s}^x\end{aligned}\tag{3.1}$$

Que coinciden con las ecuaciones derivadas en (5). Calculando el valor esperado se obtiene la magnetización del sistema:

$$m_\mu^\alpha = \langle \mathbf{s}_\mu^\alpha \rangle\tag{3.2}$$

Quedando:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{m}}^z &= 2\Omega\mathbf{m}^y - \gamma\mathbf{m}^z + \frac{\gamma}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k \tanh(\beta\xi_k \cdot \mathbf{m}^z) \\ \dot{\mathbf{m}}^y &= -2\Omega\mathbf{m}^z - \frac{\gamma}{2}\mathbf{m}^y \\ \dot{\mathbf{m}}^x &= -\frac{\gamma}{2}\mathbf{m}^x\end{aligned}\tag{3.3}$$

Como se puede ver en las ecuaciones de la magnetización, existe un acoplamiento entre el espín en z e y , que vendrá regulado por la acción del campo magnético. Además si se considera el caso de $\Omega \gg \gamma$, las ecuaciones de la magnetización se reducen a:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{m}}^z &= 2\Omega\mathbf{m}^y \\ \dot{\mathbf{m}}^y &= -2\Omega\mathbf{m}^z\end{aligned}\tag{3.4}$$

Cuyas soluciones son una combinación lineal de senos y cosenos. Por lo tanto, el efecto del término cuántico será producir rotaciones en el plano $m_z - m_y$, conocidas como oscilaciones de Rabi. Donde se ha definido el vector de solapamiento como $\mathbf{m}^\alpha = (m_1^\alpha, m_2^\alpha, \dots, m_\mu^\alpha)$.

A partir de las ecuaciones derivadas para la magnetización, se puede aplicar un análisis de estabilidad lineal para encontrar los puntos fijos del sistema como se puede ver en 5.7 donde se ha derivado el resultado para el caso de un patrón almacenado.

El sistema constará de una fase donde la magnetización será nula, es decir, una fase paramagnética. En 5.7.1 analizo la estabilidad de dicho punto fijo, obteniendo un diagrama de fases como:

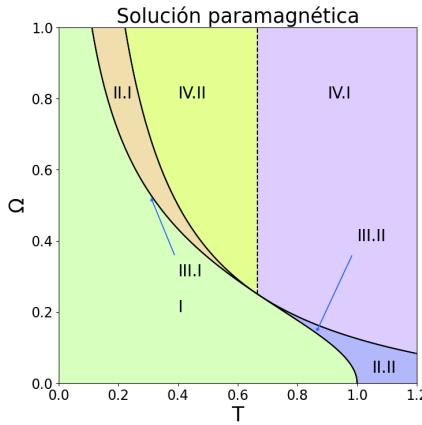


Figura 3: Diagrama de fase para las solución paramagnética para el modelo de Hopfield cuántico

A diferencia del caso clásico donde al salirnos de la fase ferromagnética había una solución paramagnética estable, ahora el término cuántico cambia la estabilidad de dicho punto permitiendo observar regiones de ciclo límite (LC) en las cuales la magnetización producirá oscilaciones en el plano $m_z - m_y$.

Por otro lado, estudiando las ecuaciones de la magnetización se puede ver que las soluciones no triviales no se obtienen tan fácilmente 5.7.2 a excepción del límite de bajas temperaturas, 5.7.3. Estas se corresponden al caso de magnetización no nula, es decir, que se ha recuperado alguno de los patrones almacenados en la red.

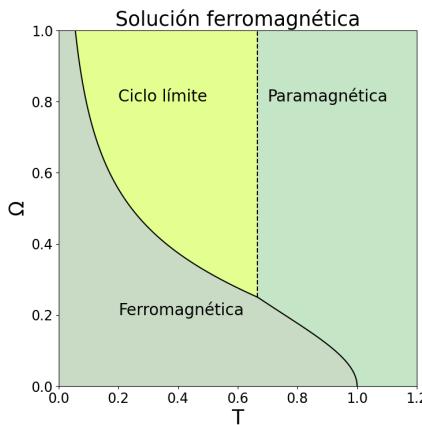
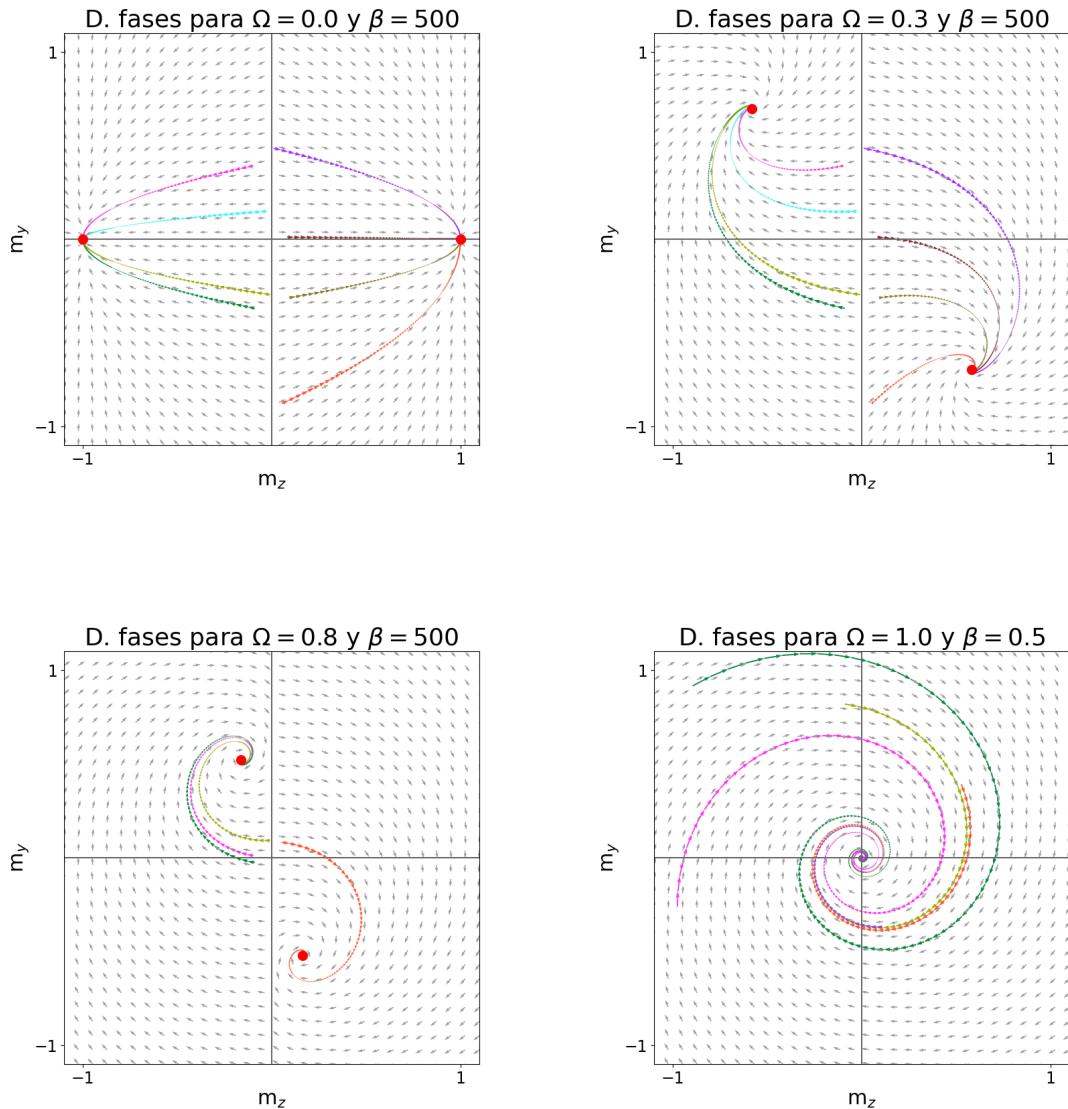


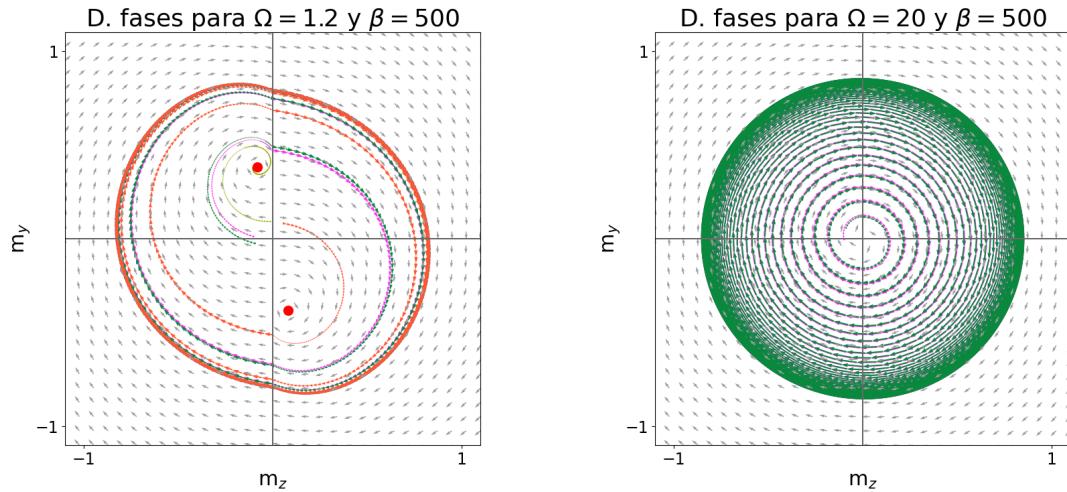
Figura 4: Diagrama de fase para las solución ferromagnética para el modelo de Hopfield cuántico

Como se puede ver en el diagrama $\Omega - T$, a bajas temperaturas habrá una fase ferro-

magnética donde el sistema recuperará los patrones almacenados, siempre y cuando la acción del campo magnético no sea lo suficientemente grande para sacar el sistema del equilibrio. Si se toma el límite clásico ($\Omega = 0$), se puede ver que en esta situación la temperatura crítica T_c a la que se producirá el cambio a la fase paramagnética será en $T = 1$. Por otro lado, si se aumenta el valor de Ω , en el régimen de temperaturas bajas, se observa que el modelo predice una fase de ciclo límite donde el sistema presentará oscilaciones patrón-antipatrón que se sostendrá en el tiempo.

Resolviendo numéricamente las ecuaciones de la magnetización se obtiene la trayectoria que sigue el solapamiento en el plano:



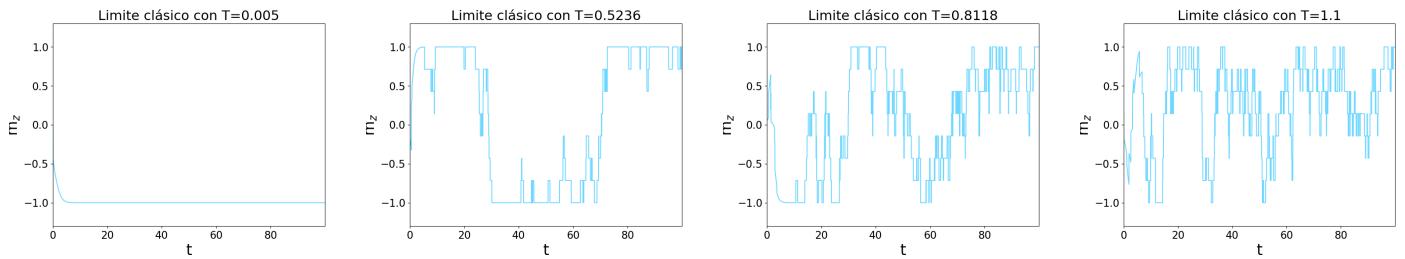


Cuadro 4: Trayectorias en el plano $m_z - m_y$ con un único patrón almacenado en la red.

La acción del término cuántico nos saca de la solución clásica, esto se puede interpretar como que tras la acción del campo magnético transversal los puntos de equilibrio dejan de ser los paralelos al eje z, dando lugar a que se produzca una rotación en el plano. Cuando se está cerca de la fase de ciclo límite aparece una región de convivencia entre la fase ferromagnética y la de LC, sin embargo al seguir aumentando Ω , desaparece la fase ferromagnética quedando solo oscilaciones en el plano.

3.2. Límite clásico

En primer lugar he comprobado que la dinámica derivada de 1.3 se corresponda a la del modelo de Hopfield clásico. Para ello he estudiado la magnetización en función del tiempo para distintos valores de la temperatura:



Cuadro 5: $m_z - t$ en el límite clásico ($\Omega = 0.0$) para $N = 7$ qubits y $T \in \{0.005, 0.5236, 0.8118, 1.1\}$

Como se puede observar, a bajas temperaturas el sistema converge perfectamente a un patrón o antipatrón almacenado en el sistema con máximo solapamiento. Sin embargo, el efecto de aumentar la temperatura es equivalente (como era de esperar) a introducir ruido. Al ganar los qubits energía térmica pueden acceder a un mayor número de transiciones, permitiendo que el sistema tras alcanzar un patrón almacenado salga de este estado. Como se ve en la segunda imagen de la izquierda en

5, aparecen fluctuaciones que rápidamente son amortiguadas llevando el sistema de nuevo a alguno de los atractores. Sin embargo, al seguir aumentando la temperatura se observa que el sistema una vez que sale del patrón recuperado debido a las fluctuaciones, tarda cada vez más tiempo en volver a alcanzar el punto de equilibrio del sistema como se muestra en la segunda imagen de la derecha en 5. Finalmente, para temperaturas superiores a $T > 1.0$ los qubits tienen suficiente energía térmica para realizar cualquier transición, siendo posible todas las configuraciones.

Para estudiar la la temperatura crítica T_c a partir de la cual se produce el cambio de fase, represento $|m_z|$ en función de T :

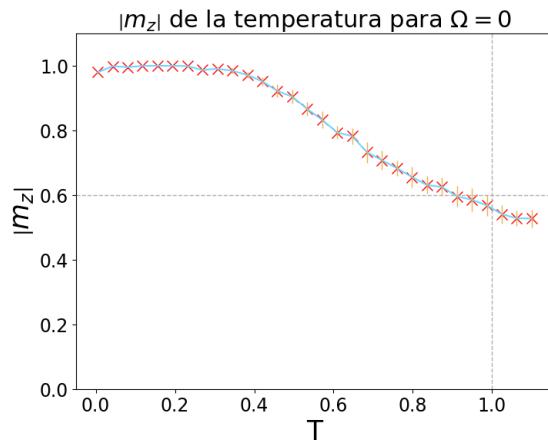
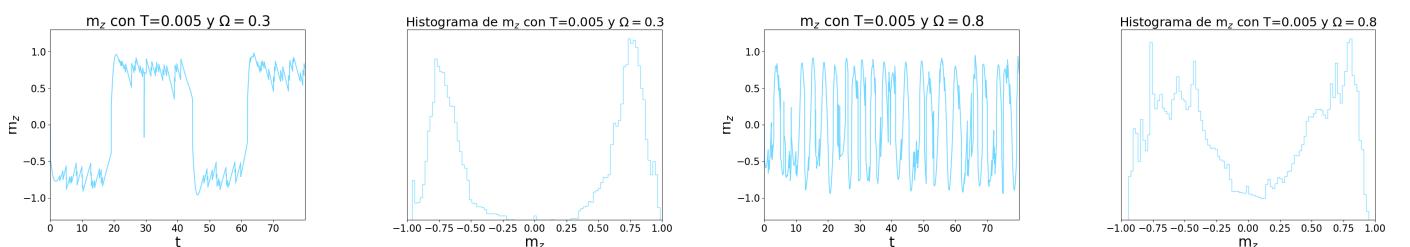


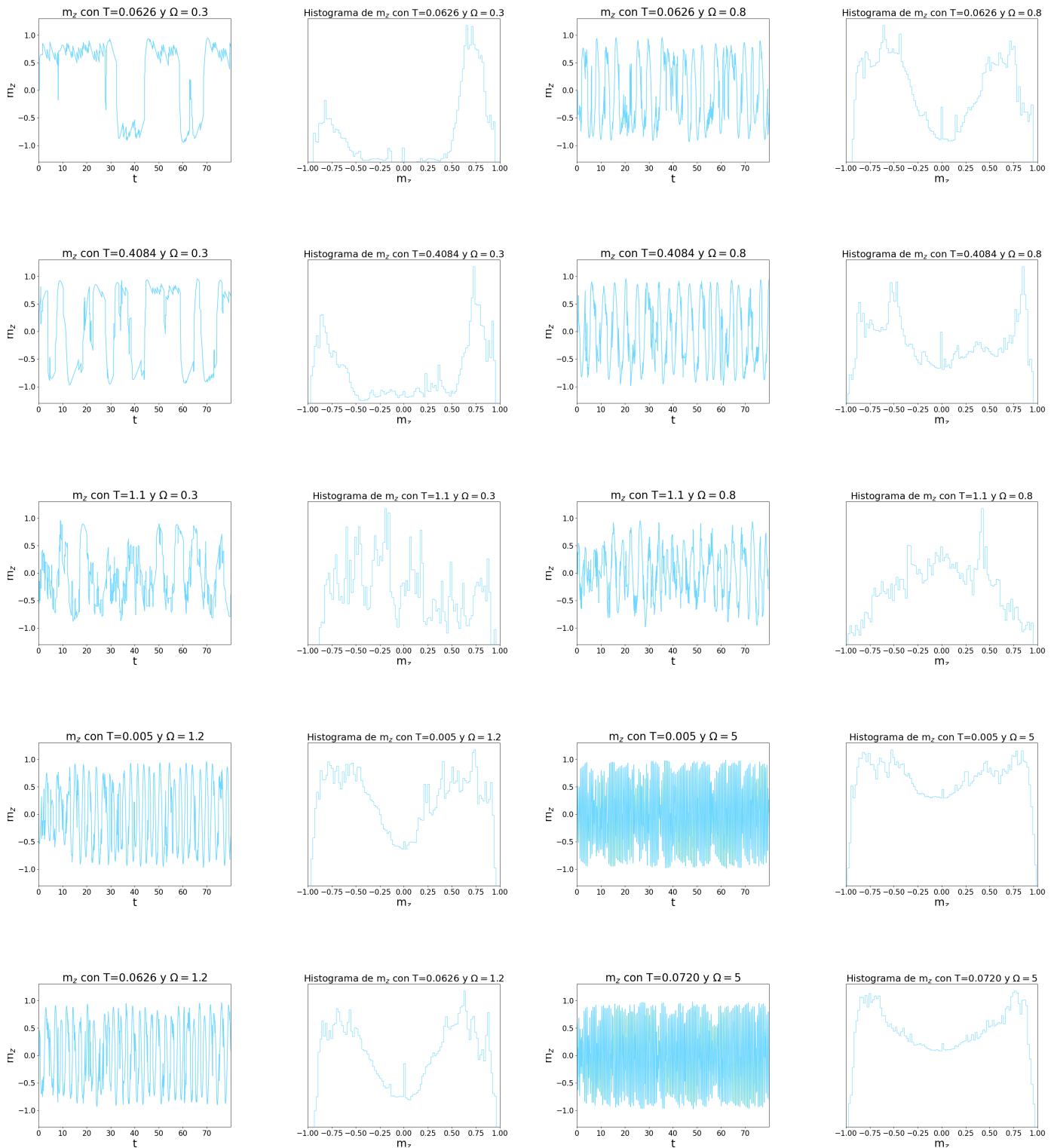
Figura 5: Magnetización en función de la temperatura para $N = 7$ qubits

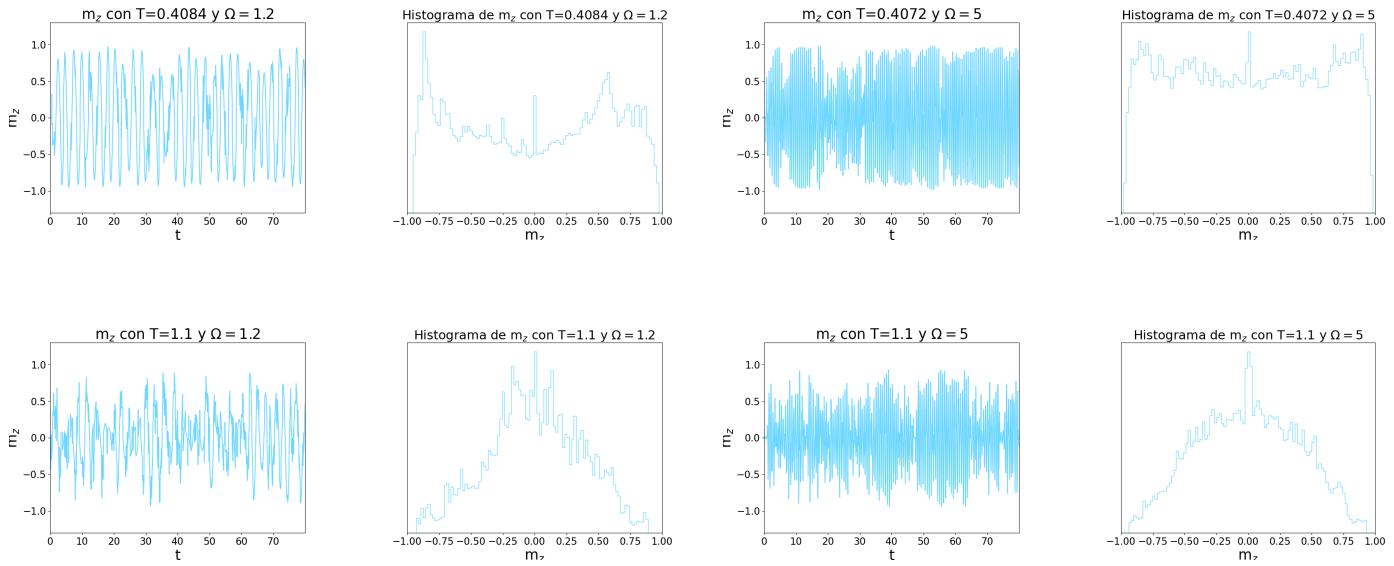
Se observa partir de $T_c = 0.86$ la magnetización cae por debajo de 0.6, este resultado difiere del obtenido en el diagrama de fases 4, el cual predice que $T_c = 1.0$. Sin embargo, hay que tener en cuenta que las ecuaciones con las que se han obtenido dicha temperatura crítica son deducidas en el límite termodinámico, mientras que en las simulaciones se trabaja con un tamaño finito. Siendo esta la posible causa de la discrepancia entre los resultados.

3.3. Adición del término cuántico

Los resultados obtenidos para una trayectoria cuántica con 7 qubits y distintos valores de T y Ω :





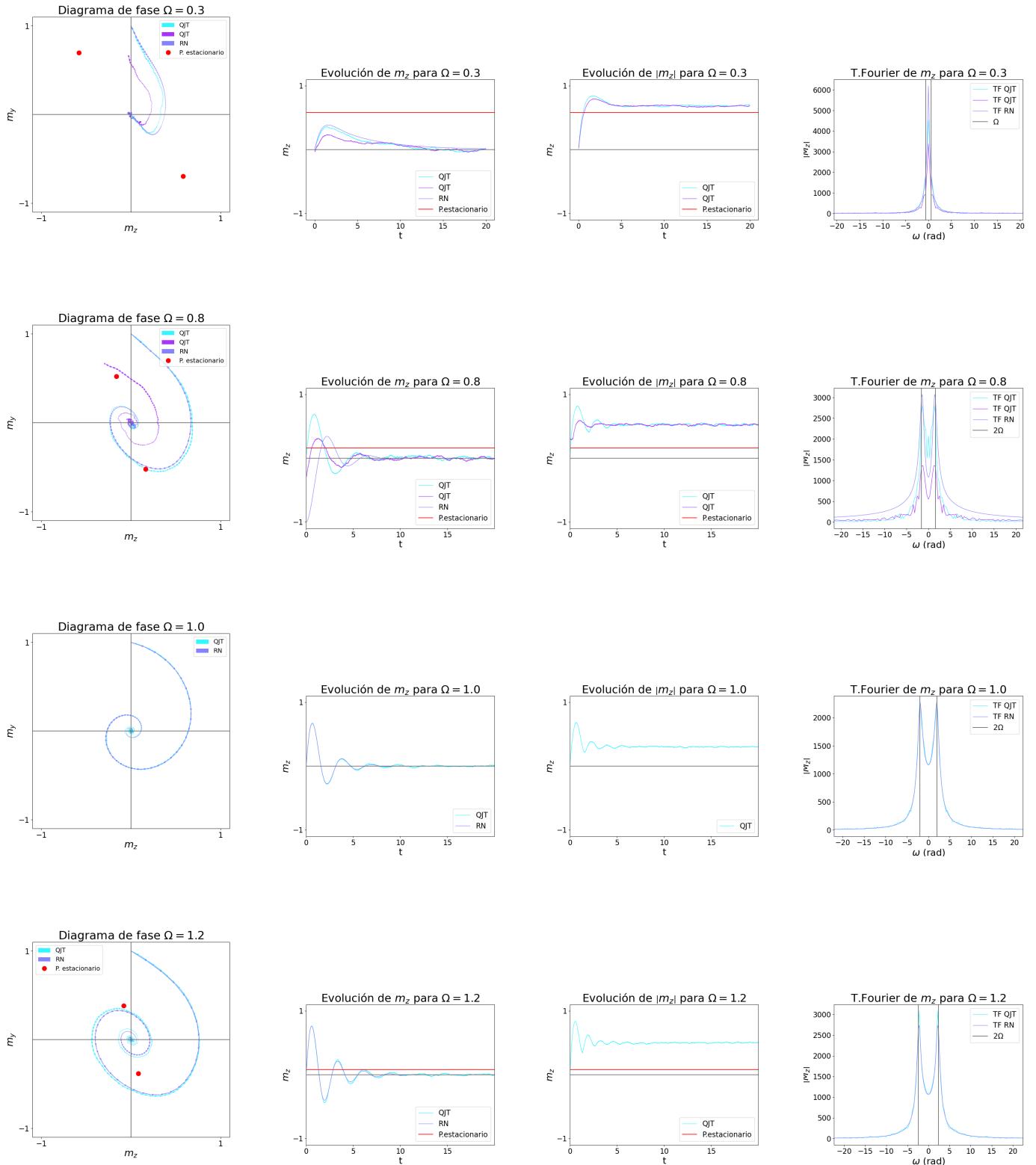


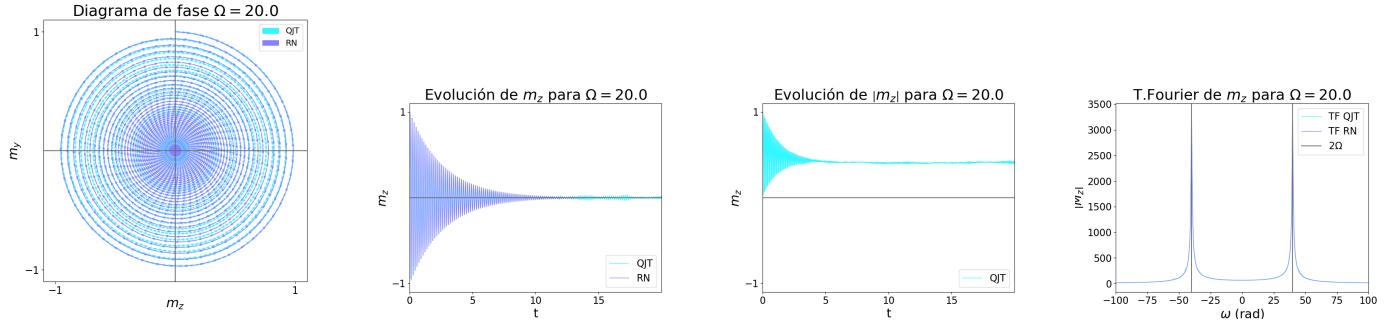
Cuadro 13: Estudio del efecto de la adición del Hamiltoniano cuántico sobre una trayectoria para distintas temperaturas con $N = 7$ qubits

Como era de esperar debido a las ecuaciones de la magnetización, el término cuántico introduce oscilaciones patrón-antipatrón en la trayectoria, provocando que para Ω y T pequeños el sistema tienda a recuperar el patrón almacenado sin quedarse atrapado. Para $T = 0.005$ con $\Omega = 0.3, 0.8$ se obtiene un histograma que muestra claramente que el sistema tiende a oscilar entre los estados correspondientes al patrón y antipatrón. Sin embargo, los correspondientes picos que aparecen en el histograma no se corresponden a $m_z = \pm 1$ como sería de esperar en el caso clásico, si no que cumplen que $m_z \approx 0.75$. Este resultado no es una sorpresa puesto que como mencionamos en 5.7.3, al añadir el término cuántico la posición de los puntos estacionarios se verán desplazados hacia el eje de m_y disminuyendo consigo el valor de m_z . Además, al aumentar ligeramente el valor de Ω se observa un crecimiento considerable en las oscilaciones de la trayectoria entre el patrón y su espurio. A diferencia del caso $\Omega = 0.3$, cuando estamos en $\Omega = 0.8$ y $T = 0.4084$, el sistema aun que sigue presentando las oscilaciones entre los dos estados, mediante el histograma se puede ver que la parte central de este ha aumentado considerablemente que su correspondiente contraparte de $\Omega = 0.3$. Sin embargo, esto es justificado considerando que Ω es la principal frecuencia de oscilación de la trayectoria. Por lo tanto, al aumentar el valor de Ω el tiempo que se encuentra el sistema con una magnetización cercana a la del patrón o antipatrón disminuye experimentando así un incremento en la zona intermedia del histograma. Observando ahora las gráficas correspondientes a $\Omega = 1.2$ y $\Omega = 5.0$, se ve que a bajas temperaturas se obtiene la misma dinámica que en los casos anteriores. Sin embargo, para $T \approx 0.4$ en el caso de $\Omega = 1.2$ el histograma se ha vuelto aproximadamente homogéneo a excepción de dos leves picos en los extremos y para $\Omega = 5.0$ es prácticamente plano. Este resultado choca con lo observado en los casos previos, mostrando que para una misma temperatura en efecto del campo magnético tendrá un efecto negativo a la hora de recuperar los patrones almacenados. Finalmente, como se ve para temperaturas altas en todas las situaciones tendremos un histograma centrado en 0 resultado análogo al caso clásico.

3.4. Estudio de la magnetización promedio

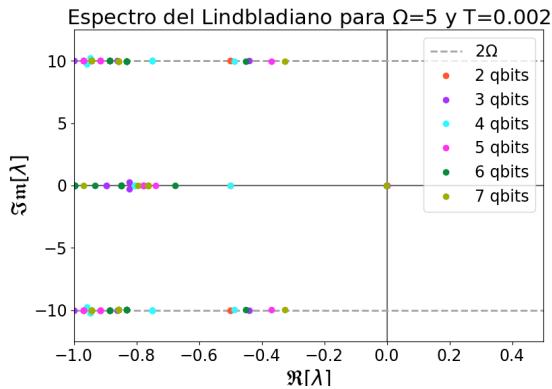
Los resultados obtenidos son:



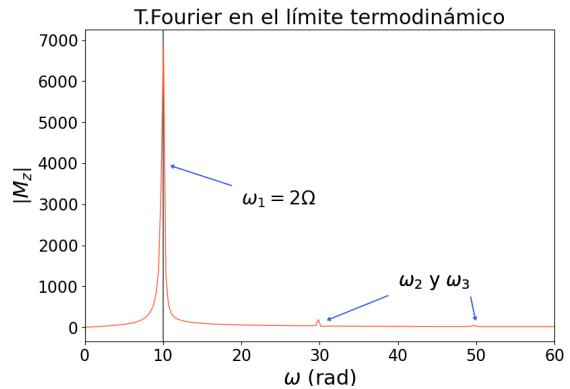


Cuadro 18: Magnetización en función del tiempo promediando sobre trayectorias de saltos cuánticos y resolución numérica de la ecuación de Lindblad para un sistema de $N = 6$ qubits

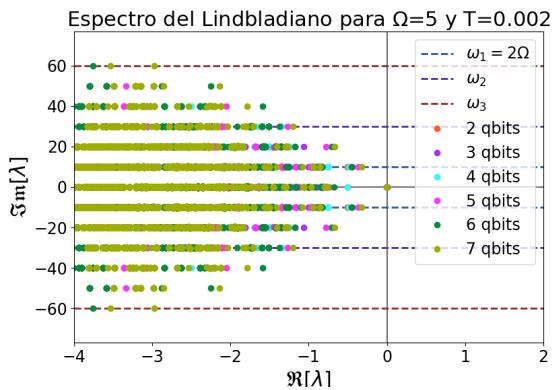
En primer lugar, se observa que los resultados obtenidos de la resolución numérica de la ecuación 1.23 coinciden con los correspondientes al promedio sobre trayectorias de saltos cuánticos. Como se puede ver, al hacer el promedio sobre muchas trayectorias se produce una interferencia entre las que van al patrón o al antipatrón, provocando que el solapamiento promedio se anule. Sin embargo, observando el promedio del valor absoluto del solapamiento (al haber cogido el valor absoluto se elimina el problema de la interferencia entre las trayectorias) se ve que el sistema alcanza un estado estacionario de magnetización no nula para tiempos largos sin presencia de oscilaciones que se mantengan en el tiempo. Resultado que difiere de lo derivado a partir de las ecuaciones del solapamiento en el límite termodinámico. Por otro lado, a diferencia de los puntos estacionarios teóricos que se acercan a una magnetización nula con $\mathcal{O}(\Omega^{-2})$, los resultados obtenidos mediante la resolución numérica y QJT no cumplen dicha propiedad como se ve comparando la trayectorias en el plano $m_z - m_y$ para $\Omega = 1.2$ y $\Omega = 0.8$. Sin embargo, si se toma la transformada de Fourier del solapamiento, se observa que presenta un pico correspondiente a la frecuencia 2Ω , que es la frecuencia esperada a partir de las ecuaciones de la magnetización. Esto indica que la diferencia entre el resultado teórico y experimental está relacionada con la dimensión de sistema. Para comprobar esto se analiza el espectro del operador de Liouville:



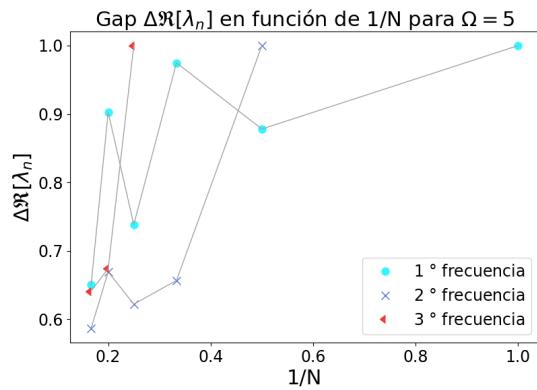
Espectro parcial del operador de Liouville con zoom en el eje imaginario.



Transformada de Fourier para la magnetización en el límite termodinámico.



Espectro parcial del operador de Liouville.



Gap normalizado de las 3 primeras frecuencias de oscilación del sistema.

En la imagen superior izquierda se observa fácilmente el autovalor $\lambda = 0$, que se corresponde al término estacionario predicho por el teorema de Evan's (7) y (8). Sin embargo, no se ve ningún otro autovalor que tenga parte real nula. Esto justifica la ausencia de oscilaciones que se mantengan en el tiempo. Como podemos observar en 1.15, puesto que se verán rápidamente atenuadas por el comportamiento exponencial. Lo cual entra en desacuerdo con las ecuaciones del solapamiento presentadas en el fundamento teórico.

Además, en la imagen superior derecha se presenta la transformada de Fourier de la

magnetización en el límite termodinámico. Aunque en la figura solo se muestren las 3 primeras frecuencias, puesto que son las que tienen un mayor peso, el movimiento está compuesto por infinitas de ellas. Sin embargo, en los resultados obtenidos mediante la resolución numérica y trayectorias de saltos cuánticos solo aparece una frecuencia correspondiente a $\omega_1 = 2\Omega$ mediante la transformada de Fourier.

Estos dos problemas son consecuencia del tamaño finito del sistema. Al Lindbladiano en el espacio de Fock se le corresponde una matriz de dimensiones $2^{2N} \times 2^{2N}$, por lo tanto, el número máximo de frecuencias que se podrá obtener corresponde a $2^{2N} - 1$ (se ha substraído 1 debido a que siempre habrá un autovalor correspondiente a $\lambda = 0$). Por lo tanto, debido a que el límite termodinámico se obtiene un solapamiento compuesto por infinitas frecuencias, queda claro que las trayectorias obtenidas mediante simulaciones en el espacio $m_z - m_y$ no se van a corresponder al caso de $N \rightarrow \infty$. Sin embargo, se puede ver en la figura inferior izquierda, que al aumentar la dimensión del sistema van apareciendo nuevos autovalores cuya parte imaginaria se corresponde a $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Por lo tanto, se puede esperar que cuando $N \rightarrow \infty$ se obtengan todas las frecuencias que componen el sistema en el límite termodinámico. Por último, para comprobar que realmente se recupere la dinámica propuesta en las ecuaciones 3.3, se ha comprobado en la figura inferior derecha que la parte real de los autovalores con $\text{Im}[\lambda] = \omega_i$ disminuya al aumentar la dimensión del sistema. Como se puede observar en la figura, para los autovalores correspondientes a las 3 frecuencias, la parte real va disminuyendo. Dado que $\Re[\lambda]$ es el causante de la atenuación del movimiento oscilatorio, se puede esperar que en el límite termodinámico se cierre dicho gap pasando a tener oscilaciones que se mantengan en el tiempo. Además, hay que destacar que se ha observado un comportamiento anómalo a la hora de incrementar el tamaño del sistema, viendo como el gap no se reduce a la misma velocidad para tamaños pares que impares. Resultado que difiere del obtenido en (6).

4. Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos en este estudio:

- Gracias a los resultados de las simulaciones por trayectorias de saltos cuánticos, he podido comprobar que el modelo propuesto para la red cuántica de Hopfield por (5) contiene el caso clásico al tomar el límite cuando $\Omega = 0$. Sin embargo, debido a que el modelo está construido bajo la acción de operadores de salto, resulta más ineficiente debido a que la dimensión de los operadores crece de forma exponencial con el número de qubits N . Dando lugar a un modelo correcto pero con más limitaciones que su contraparte clásica basada en el algoritmo de Metropolis.
- El resultado de la temperatura crítica obtenido en 3.2, no se corresponde con el predicho por las ecuaciones de la magnetización derivadas en 5.5. Aun así, el resultado está cerca de $T = 1.0$, por lo que puedo considerar que la discrepancia se debe al tamaño finito del sistema. Para comprobar realmente esta hipótesis

sería necesario realizar simulaciones con un número mayor de qubits.

- El efecto del Hamiltoniano cuántico es introducir oscilaciones patrón-antipatrón, tal y como predecían las ecuaciones en el límite termodinámico. Sin embargo, este término tiene un efecto negativo sobre la capacidad de recuperación de las soluciones por parte de nuestro sistema, puesto que impiden que se alcance una solución estacionaria incluso a temperaturas bajas.
- Gracias a la comparación de los resultados obtenidos mediante la resolución numérica de la ecuación de Lindblad con el promedio sobre trayectorias de saltos cuánticos. Puedo afirmar que los resultados obtenidos por QJT son correctos y que es un buen algoritmo para simular de los sistemas cuánticos abiertos. Además, dichos resultados coinciden con los obtenidos en las simulaciones realizadas en (6).
- La resolución numérica de la ecuación de Lindblad, aun que sea un procedimiento más rápido que el QJT, no es apropiado para el estudio de este tipo de sistemas que presenten interferencias patrón antipatrón. Por otro lado, el método de trayectoria de saltos cuánticos, aun que presente un mayor coste computacional, para este problema es más versátil. Esto es debido a la posibilidad de calcular $|m_z|$, permitiéndome comprobar que las oscilaciones son amortiguadas en el tiempo y tienden a un estado estacionario donde el sistema se quedará atrapado en promedio.
- Aunque los resultados presentados en este estudio no se correspondan con los esperados predichos en (5), tras el análisis del espectro del operador de Lindblad puedo afirmar que en el límite termodinámico la parte real de los autovalores se anulará dando lugar a una dinámica que presente oscilaciones mantenidas en el tiempo.

5. Apéndices

5.1. Demostración de la ecuación de Lindblad en la imagen de Heisenberg

Los valores esperados en la imagen de Heisenberg debe coincidir con la de Schrödinger, por lo tanto:

$$\langle A \rangle_S = \langle A \rangle_H \quad (5.1)$$

Se busca obtener la evolución temporal de los operadores, para ello se deriva respecto al tiempo en ambos lados de la igualdad anterior:

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_H = \frac{d}{dt} \text{Tr}(A(t)\rho) = \text{Tr}(\dot{A}(t)\rho) = \frac{d}{dt} \langle A \rangle_S \quad (5.2)$$

Estudiando ahora con el valor esperado en la imagen Schrödinger:

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle_S = \frac{d}{dt} \text{Tr}(A\rho(t)) = \frac{d}{dt} \sum_k \langle k(t) | A\rho(t) | k(t) \rangle = \sum_k \frac{d}{dt} \langle k | e^{iHt} A\rho(t) e^{-iHt} | k \rangle \quad (5.3)$$

Al haber extraído la evolución temporal de los autoestados $|k(t)\rangle$ mediante el operador evolución temporal $U(t) = e^{-iHt}$, los kets ya no dependen del tiempo y se puede pasar dentro la derivada.

$$\frac{d}{dt} \left(e^{iHt} A\rho(t) e^{-iHt} \right) = iHe^{iHt} A\rho(t) e^{-iHt} - ie^{iHt} A\rho(t) e^{-iHt} H + e^{iHt} A\dot{\rho}(t) e^{-iHt} \quad (5.4)$$

Se tiene en cuenta la ecuación de Lindblad:

$$\dot{\rho}(t) = -i [H, \rho(t)] + \sum_n L_n \rho(t) L_n^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ L_n^\dagger L_n, \rho(t) \right\} \quad (5.5)$$

Sin perder generalidad considero que solo hay un operador de salto $L_n \rightarrow L$ y se sustituye en la ecuación 5.4:

$$e^{iHt} \left[iHA\rho(t) - iA\rho(t)H + A \left(-i [H, \rho(t)] + L\rho(t)L^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ L^\dagger L, \rho(t) \right\} \right) \right] e^{-iHt} \quad (5.6)$$

Se divide la expresión anterior en 3 términos para desarrollarlos cada uno por separado:

■ **1º Término:**

$$\begin{aligned} iHe^{iHt} A\rho(t) e^{-iHt} - ie^{iHt} A\rho(t) e^{-iHt} H - ie^{iHt} A [H, \rho(t)] e^{-iHt} = \\ i [H, e^{iHt} A\rho(t) e^{-iHt}] - ie^{iHt} A [H, \rho(t)] e^{-iHt} \end{aligned} \quad (5.7)$$

La evolución temporal de la matriz densidad:

$$\rho(t) = e^{-iHt} \rho(0) e^{iHt} = e^{-iHt} \rho e^{iHt} \quad (5.8)$$

Por otro lado, los operadores en la imagen de Heisenberg evolucionan según:

$$A(t) = e^{iHt} A e^{-iHt} \quad (5.9)$$

Sustituyendo en 5.7:

$$\begin{aligned} i [H, e^{iHt} A\rho(t) e^{-iHt}] - ie^{iHt} A [H, \rho(t)] e^{-iHt} = \\ i [H, A(t)\rho] + iA(t) [\rho, H] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Se usa las propiedades de los conmutadores para reescribir este término:

$$[x, yz] = [x, y]z + y[x, z] \quad (5.11)$$

Donde tomo $x = H$, $y = A(t)$ y $z = \rho$ permitiendo reescribir la ecuación anterior como:

$$i[H, A(t)\rho] + iA(t)[\rho, H] = i[H, A(t)]\rho \quad (5.12)$$

■ **2º Término:**

$$e^{iHt} AL\rho(t) L^\dagger e^{-iHt} \quad (5.13)$$

Uso las expresiones anteriores para la evolución temporal:

$$e^{iHt} AL\rho(t) L^\dagger e^{-iHt} = e^{iHt} Ae^{-iHt} e^{iHt} Le^{-iHt} \rho e^{iHt} L^\dagger e^{-iHt} = A(t)L(t)\rho L(t)^\dagger \quad (5.14)$$

■ **3º Término:** De igual forma desarrollando el anticonmutador:

$$e^{iHt} A \{L^\dagger L, \rho(t)\} e^{-iHt} = A(t) \{L^\dagger(t)L(t), \rho\} \quad (5.15)$$

Por lo tanto, reescribo la expresión 5.3 como:

$$\frac{d}{dt} \text{Tr}(A\rho(t)) = \text{Tr} \left(i[H, A]\rho + A(t)L(t)\rho L^\dagger(t) - \frac{1}{2} A(t) \{L^\dagger(t)L(t), \rho\} \right) \quad (5.16)$$

Empleando en los dos últimos términos la propiedad cíclica de la traza y la igualdad 5.2, se obtiene como resultado:

$$\text{Tr}(\dot{A}(t)\rho) = \text{Tr} \left(i[H, A]\rho + L^\dagger(t)A(t)L(t)\rho - \frac{1}{2} \{L^\dagger(t)L(t), A(t)\}\rho \right) \quad (5.17)$$

Por último, comparando ambos lados de ecuación se llega a la expresión para la ecuación de Lindblad en la imagen de Heisenberg:

$$\dot{A}(t) = i[H, A] + L^\dagger(t)A(t)L(t) - \frac{1}{2} \{L^\dagger(t)L(t), A(t)\} \quad (5.18)$$

5.2. Demostración del límite clásico

Parto de la ecuación:

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_{k, \tau=\pm} L_{k\tau}\rho L_{k\tau}^\dagger - \frac{1}{2} \{L_{k\tau}^\dagger L_{k\tau}, \rho\} \quad (5.19)$$

Para recuperar el caso clásico hay que hacer cero el Hamiltoniano, por lo que el término del conmutador se cancela:

$$[H, \rho] = 0 \quad (5.20)$$

Por otro lado, se debe considerar que la matriz densidad es diagonal en la base propia de σ^z , donde cada uno de los autovalores nos dará la probabilidad de encontrar el sistema en ese estado. Por consiguiente, busco obtener una expresión para ver como evoluciona en el tiempo dicho vector. Para ello empiezo teniendo en cuenta el valor de los operadores de salto $L_{k\tau} = \Gamma_{k\tau}\sigma_k^\tau$:

$$\Gamma_{k\tau} = \sqrt{\gamma} \frac{e^{\tau\beta\Delta E_k/2}}{\sqrt{2 \cosh(\beta\Delta E_k)}}$$

Donde la diferencia de energía se calcula como:

$$\Delta E_k = \sum_{i \neq k} J_{ik} \sigma_i^z$$

Como se puede ver la diferencia de energía al cambiar el spin k no involucra la matriz de Pauli σ_k^z , por lo tanto, los operadores $\Gamma_{k\tau}$ satisfacen $[\Gamma_{k\tau}, \sigma_k^\pm] = 0$. Al mismo tiempo, las matrices σ_k^z son diagonales, de forma que $\Gamma_{k\tau}$ es también diagonal en esa base. Por otro lado, estoy trabajando con una matriz densidad que es diagonal de modo que $[\Gamma_{k\tau}, \rho] = 0$. Haciendo estas consideraciones, se puede reescribir la ecuación 5.19 como:

$$\dot{\rho} = \sum_{k,\tau=\pm} \Gamma_{k\tau}^2 \left[\sigma_k^\tau \rho (\sigma_k^\tau)^\dagger - \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_k^\tau)^\dagger \sigma_k^\tau, \rho \right\} \right] \quad (5.21)$$

Estudio ahora el término del anticonmutador, para ello tengo en cuenta que:

$$\sigma^\pm = (\sigma^\mp)^\dagger$$

Por otro lado, se usan las relaciones del momento angular:

$$\begin{aligned} J^+ J^- &= J^2 - J_z^2 + J_z \\ J^- J^+ &= J^2 - J_z^2 - J_z \end{aligned}$$

Utilizando la definición de las matrices de Pauli uso que $J = \frac{1}{2}\sigma$:

$$\begin{aligned} \sigma^+ \sigma^- &= \frac{1}{4} \vec{\sigma}^2 - \frac{1}{4} (\sigma^z)^2 + \frac{1}{2} \sigma^z \\ \sigma^- \sigma^+ &= \frac{1}{4} \vec{\sigma}^2 - \frac{1}{4} (\sigma^z)^2 - \frac{1}{2} \sigma^z \end{aligned}$$

Usando que $\sigma_k^2 = 1$:

$$\begin{aligned} \sigma^+ \sigma^- &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sigma^z \\ \sigma^- \sigma^+ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sigma^z \end{aligned}$$

De forma más general:

$$(\sigma^\tau)^\dagger \sigma^\tau = \frac{1}{2} (1 - \tau \sigma^z)$$

Como el resultado del producto es una matriz diagonal, entonces conmutará con la matriz densidad. Desarrollo ahora en el anticonmutador:

$$\{(\sigma^\tau)^\dagger \sigma^\tau, \rho\} = (\sigma^\tau)^\dagger \sigma^\tau \rho + \rho (\sigma^\tau)^\dagger \sigma^\tau = 2 (\sigma^\tau)^\dagger \sigma^\tau \rho = (1 - \tau \sigma^z) \rho \quad (5.22)$$

De forma que:

$$\dot{\rho} = \sum_{k,\tau=\pm} \Gamma_{k\tau}^2 \left[\sigma_k^\tau \rho (\sigma_k^\tau)^\dagger - \frac{1}{2} (1 - \tau \sigma_k^z) \rho \right] \quad (5.23)$$

Nos fijamos ahora en el primer término de la ecuación 5.23, para ello estudiamos el caso de un qbit. Para ese término actuando sobre una matriz diagonal es de la forma:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \sigma_k^+ \rho \sigma_k^- &= \begin{pmatrix} \rho_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_k^- \rho \sigma_k^+ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, si se extrae la diagonal de la matriz densidad en forma de vector, el resultado de la operación anterior es equivalente a aplicar el operador escalera sobre el vector:

$$\begin{aligned} \sigma_k^+ \rho \sigma_k^- &\longleftrightarrow \sigma_k^+ \mathbf{P} \\ \sigma_k^- \rho \sigma_k^+ &\longleftrightarrow \sigma_k^- \mathbf{P} \end{aligned}$$

Donde se ha definido el vector de probabilidad como:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \rho_n \end{pmatrix}$$

Como el operador que actúa sobre el segundo término es diagonal, entonces la acción sobre la matriz densidad será la misma que sobre el vector de probabilidad sin necesidad de cambiar la expresión. Con ello se puede recuperar el caso clásico:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_{k,\tau=\pm} \Gamma_{k\tau}^2 \left[\sigma_k^\tau - \frac{1}{2} (1 - \tau \sigma_k^z) \right] \mathbf{P} \quad (5.24)$$

5.3. Demostración de la evolución de σ^z

Se parte de la ecuación:

$$\dot{A}(t) = i [H, A] + \sum_n L_n^\dagger(t) A(t) L_n(t) - \frac{1}{2} \left\{ L_n^\dagger(t) L_n(t), A(t) \right\} \quad (5.25)$$

Para encontrar la evolución temporal de σ_k^z se tiene en cuenta las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\sigma_k^z, \sigma_k^\pm] &= \pm 2\sigma_k^\pm \\ [\sigma_k^+, \sigma_k^-] &= \sigma_k^z \end{aligned} \quad (5.26)$$

Sustituyendo el operador en la ecuación de Lindblad usando la imagen de Heisenberg:

$$\dot{\sigma}_k^z = i [H, \sigma_k^z] + \sum_{i,\tau} L_{i\tau}^\dagger \sigma_k^z L_{i\tau} - \frac{1}{2} \left\{ L_{i\tau}^\dagger L_{i\tau}, \sigma_k^z \right\} \quad (5.27)$$

Se tiene ahora en cuenta que $L_{i\tau} = \Gamma_{i\tau} \sigma_i^\tau$ junto con $[\Gamma_{i\tau}, \sigma_i^\pm] = 0$. Haciendo esto se reescribe la parte disipativa de la ecuación de Lindblad como:

$$\Gamma_{k\tau}^2 \left((\sigma_k^\tau)^\dagger \sigma_k^z \sigma_k^\tau - \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_k^\tau)^\dagger \sigma_k^\tau, \sigma_k^z \right\} \right) + \sum_{i \neq k, \tau} \Gamma_{i\tau}^2 \left((\sigma_i^\tau)^\dagger \sigma_k^z \sigma_i^\tau - \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_i^\tau)^\dagger \sigma_i^\tau, \sigma_k^z \right\} \right) \quad (5.28)$$

Reescribo la parte correspondiente al anticonmutador de 5.28 para el caso $\tau = +$ y tengo en cuenta que el adjunto de σ^+ es σ^- . Desarrollando el anticonmutador:

$$\left\{ (\sigma_i^\tau)^\dagger \sigma_i^\tau, \sigma_k^z \right\} = \sigma_i^- \sigma_i^+ \sigma_k^z + \sigma_k^z \sigma_i^- \sigma_i^+ \quad (5.29)$$

Es fácil ver que la suma se anula cuando $i \neq k$ por lo tanto:

$$\left\{ (\sigma_k^\tau)^\dagger \sigma_k^\tau, \sigma_k^z \right\} = \sigma_k^- \sigma_k^+ \sigma_k^z + \sigma_k^z \sigma_k^- \sigma_k^+ \quad (5.30)$$

Empleo la primera relación de conmutación de 5.26:

$$\sigma_k^- \sigma_k^+ \sigma_k^z + \sigma_k^z \sigma_k^- \sigma_k^+ = \sigma_k^- (\sigma_k^z \sigma_k^+ - 2\sigma_k^+) + (\sigma_k^- \sigma_k^z - 2\sigma_k^-) \sigma_k^+ \quad (5.31)$$

Teniendo en cuenta el resto de la parte disipativa se llega a una expresión de la forma:

$$2\Gamma_{k+}^2 \sigma_k^- \sigma_k^+ \quad (5.32)$$

Se repite el razonamiento para $\tau = -$ llegamos a:

$$-2\Gamma_{k-}^2 \sigma_k^+ \sigma_k^- \quad (5.33)$$

Reescribiendo toda la parte disipativa se obtiene:

$$2\Gamma_{k+}^2 \sigma_k^- \sigma_k^+ - 2\Gamma_{k-}^2 \sigma_k^+ \sigma_k^- \quad (5.34)$$

Haciendo uso del valor de $\Gamma_{k\tau}$:

$$\Gamma_{k\tau}^2 = \gamma \frac{e^{\tau\beta\Delta E_k}}{2 \cosh(\beta\Delta E_k)}$$

Sustituyendo en 5.34:

$$\frac{\gamma}{\cosh(\beta\Delta E_k)} \left(e^{\beta\Delta E_k} \sigma_k^- \sigma_k^+ - e^{-\beta\Delta E_k} \sigma_k^+ \sigma_k^- \right) \quad (5.35)$$

Usando ahora que:

$$\begin{aligned} \sigma^+ \sigma^- &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sigma^z \\ \sigma^- \sigma^+ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sigma^z \end{aligned}$$

$$\frac{\gamma}{2 \cosh(\beta\Delta E_k)} \left(e^{\beta\Delta E_k} (1 - \sigma_k^z) - e^{-\beta\Delta E_k} (1 + \sigma_k^z) \right) \quad (5.36)$$

Finalmente, usando las definiciones de las funciones hiperbólicas se llega a que el término disipativo puede ser reescrito como:

$$-\gamma \sigma_k^z + \gamma \tanh \beta \Delta E_k \quad (5.37)$$

Trabajo ahora el término del Hamiltoniano, para ello empleo las siguientes relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned} [\sigma_l^q, \sigma_n^w] &= 0 \iff l \neq n \\ [\sigma_k^n, \sigma_k^j] &= 2i\epsilon^{njl} \sigma_k^l \end{aligned} \quad (5.38)$$

De forma que el conmutador del Hamiltoniano pude ser reescrito como:

$$i\Omega \sum_l [\sigma_l^x, \sigma_k^z] = 2\Omega \sigma_k^y \quad (5.39)$$

Por lo tanto, la ecuación de evolución del operador σ_k^z :

$$\dot{\sigma}_k^z = 2\Omega \sigma_k^y - \gamma \sigma_k^z + \gamma \tanh(\beta \Delta E_k) \quad (5.40)$$

Resultado que coincide con el obtenido en (5).

5.4. Demostración de la evolución de σ^\pm en el límite termodinámico

Se parte de la ecuación 5.25 con la finalidad de encontrar la evolución temporal de σ^\pm . Empiezo estudiando el caso de σ^+ :

$$\dot{\sigma}_k^+ = i [H, \sigma_k^+] + \sum_{i,\tau} L_{i\tau}^\dagger \sigma_k^+ L_{i\tau} - \frac{1}{2} \left\{ L_{i\tau}^\dagger L_{i\tau}, \sigma_k^+ \right\} \quad (5.41)$$

Al igual que con σ^z la parte disipativa es reescrita como:

$$\sum_{i,\tau} \Gamma_{i\tau} (\sigma_i^\tau)^\dagger \sigma_k^+ \Gamma_{i\tau} \sigma_i^\tau - \frac{1}{2} \left\{ \Gamma_{i\tau} (\sigma_i^\tau)^\dagger \Gamma_{i\tau} \sigma_i^\tau, \sigma_k^+ \right\} \quad (5.42)$$

Se estudia primero el caso en el que $k = i$ con $\tau = +$ por simplicidad, puesto que la solución para $\tau = -$ consistirá en tomar el adjunto del todo el término disipativo a excepción del operador que estamos evaluando. Desarrollando el anticomutador:

$$\left\{ \sigma_k^- \sigma_k^+, \sigma_k^+ \right\} = \sigma_k^- \sigma_k^+ \sigma_k^+ + \sigma_k^+ \sigma_k^- \sigma_k^+ \quad (5.43)$$

Teniendo ahora en cuenta todo el término de disipación:

$$\Gamma_{k+}^2 \left(\sigma_k^- \sigma_k^+ \sigma_k^+ - \frac{1}{2} (\sigma_k^- \sigma_k^+ \sigma_k^+ + \sigma_k^+ \sigma_k^- \sigma_k^+) \right) = \frac{1}{2} \Gamma_{k+}^2 (\sigma_k^- \sigma_k^+ \sigma_k^+ - \sigma_k^+ \sigma_k^- \sigma_k^+) \quad (5.44)$$

De igual forma para el caso $\tau = -$:

$$\frac{1}{2} \Gamma_{k-}^2 (\sigma_k^+ \sigma_k^+ \sigma_k^- - \sigma_k^+ \sigma_k^- \sigma_k^+) \quad (5.45)$$

Como el espacio de trabajo se corresponde al del momento angular $j = 1/2$ la dimensión es $\dim \mathcal{H} = 2$. Por lo que la acción consecutiva del mismo operador escalera σ^τ debe dar un operador nulo ya que en caso contrario se saldría del espacio:

$$\sigma^\tau \sigma^\tau = 0$$

Esto permite reescribir 5.42 como:

$$\sum_\tau \Gamma_{k\tau}^2 \left((\sigma_k^\tau)^\dagger \sigma_k^+ \sigma_k^\tau - \frac{1}{2} \left\{ (\sigma_k^\tau)^\dagger \sigma_k^\tau, \sigma_k^+ \right\} \right) = -\frac{1}{2} (\Gamma_{k+}^2 + \Gamma_{k-}^2) \sigma_k^+ \sigma_k^- \sigma_k^+ \quad (5.46)$$

Teniendo en cuenta la definición de $\Gamma_{k\tau}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{k+}^2 + \Gamma_{k-}^2 &= \gamma \\ -\frac{1}{2} (\Gamma_{k+}^2 + \Gamma_{k-}^2) \sigma_k^+ \sigma_k^- \sigma_k^+ &= -\frac{1}{2} \gamma \sigma_k^+ \sigma_k^- \sigma_k^+ \end{aligned} \quad (5.47)$$

Finalmente se usa:

$$\sigma^+ \sigma^- = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sigma^z \quad \sigma^- \sigma^+ = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sigma^z \quad [\sigma^z, \sigma^\pm] = \pm 2\sigma^\pm$$

Dando lugar a:

$$-\frac{1}{2} \gamma \sigma_k^+ \sigma_k^- \sigma_k^+ = -\frac{\gamma}{4} (1 + \sigma_k^z) \sigma_k^+ = -\frac{\gamma}{2} \sigma_k^+ \quad (5.48)$$

Por lo tanto, la parte disipativa queda como:

$$-\frac{\gamma}{2} \sigma_k^+ + \sum_{i \neq k, \tau} \Gamma_{i\tau} (\sigma_i^\tau)^\dagger \sigma_k^+ \Gamma_{i\tau} \sigma_i^\tau - \frac{1}{2} \left\{ \Gamma_{i\tau} (\sigma_i^\tau)^\dagger \Gamma_{i\tau} \sigma_i^\tau, \sigma_k^+ \right\} \quad (5.49)$$

Analizo ahora el caso $i \neq k$, para ello hago uso de las relaciones de commutación y anticonmutación:

$$[\sigma^z, \sigma^\pm] = \pm 2\sigma^\pm \quad \{\sigma^z, \sigma^\pm\} = 0 \quad (5.50)$$

Se pasan todas las matrices de Pauli a la izquierda del término disipativo restante:

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq k, \tau} \Gamma_{i\tau} (\sigma_i^\tau)^\dagger \sigma_k^+ \Gamma_{i\tau} \sigma_i^\tau - \frac{1}{2} \left\{ \Gamma_{i\tau} (\sigma_i^\tau)^\dagger \Gamma_{i\tau} \sigma_i^\tau, \sigma_k^+ \right\} = \\ \sum_{i \neq k, \tau} (\sigma_i^\tau)^\dagger \sigma_i^\tau \left(\Gamma_{i\tau} \sigma_k^+ \Gamma_{i\tau} - \frac{1}{2} \left\{ \Gamma_{i\tau} \Gamma_{i\tau}, \sigma_k^+ \right\} \right) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Donde se ha usado que $[\sigma_k^a, \sigma_i^\pm] = 0 \leftrightarrow i \neq k$, junto a $[\Gamma_{k\tau}, \sigma_k] = 0$. Para extraer las matrices de Pauli restante empleo 5.50:

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq k, \tau} (\sigma_i^\tau)^\dagger \sigma_i^\tau \left(\Gamma_{i\tau} \sigma_k^+ \Gamma_{i\tau} - \frac{1}{2} (\Gamma_{i\tau} \Gamma_{i\tau} \sigma_k^+ + \sigma_k^+ \Gamma_{i\tau} \Gamma_{i\tau}) \right) = \\ \sum_{i \neq k, \tau} (\sigma_i^\tau)^\dagger \sigma_i^\tau \sigma_k^+ \left(\Gamma_{i\tau}^{(k)} \Gamma_{i\tau} - \frac{1}{2} (\Gamma_{i\tau}^{(k)} \Gamma_{i\tau}^{(k)} + \Gamma_{i\tau} \Gamma_{i\tau}) \right) \end{aligned} \quad (5.52)$$

Teniendo cuenta que:

$$\sigma^- \sigma^+ = (1 - \sigma^z) \quad \sigma^+ \sigma^- = (1 + \sigma^z) \quad (5.53)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \sigma_k^+ \sum_{i \neq k, \tau} (\sigma_i^\tau)^\dagger \sigma_i^\tau \left(\Gamma_{i\tau}^{(k)} \Gamma_{i\tau} - \frac{1}{2} (\Gamma_{i\tau}^{(k)} \Gamma_{i\tau}^{(k)} + \Gamma_{i\tau} \Gamma_{i\tau}) \right) = \\ \sigma_k^+ \sum_{i \neq k} (1 - \sigma_i^z) \left(\Gamma_{i+}^{(k)} \Gamma_{i+} - \frac{1}{2} (\Gamma_{i+}^{(k)} \Gamma_{i+}^{(k)} + \Gamma_{i+} \Gamma_{i+}) \right) + \\ (1 + \sigma_i^z) \left(\Gamma_{i-}^{(k)} \Gamma_{i-} - \frac{1}{2} (\Gamma_{i-}^{(k)} \Gamma_{i-}^{(k)} + \Gamma_{i-} \Gamma_{i-}) \right) \end{aligned} \quad (5.54)$$

Se define:

$$\Gamma_{i\tau}^{(k)} (\sigma_1^z, \dots, \sigma_k^z, \dots, \sigma_N^z) = \Gamma_{i\tau} (\sigma_1^z, \dots, -\sigma_k^z, \dots, \sigma_N^z) \quad (5.55)$$

Teniendo en cuenta ahora la definición de Γ :

$$\Gamma_{i\tau} = \sqrt{\gamma} \frac{e^{\tau\beta\Delta E_i/2}}{\sqrt{2\cosh(\beta\Delta E_i)}} \quad \Delta E_i = \sum_{n \neq i} J_{in}\sigma_n^z \quad J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^{(\mu)} \xi_j^{(\mu)} \quad (5.56)$$

La función $f(x) = \cosh x$ es una función positiva en todo su dominio, lo que implica que en el denominador habrá la raíz cuadrada de un operador positivo, por lo que estará bien definida la operación. Además la función $f(x) = e^x / \sqrt{\cosh(x)}$, es una función continua y derivable, de forma que se le puede aplicar el teorema de Taylor. A la hora de hacer la expansión en serie desarrollo respecto a $\tau\beta J_{ik}\sigma_k^z = \lambda$ y entorno a 0 para Γ . Por otro lado, para Γ^k hago lo mismo respecto a $-\tau\beta J_{ik}\sigma_k^z = -\lambda$

$$\Gamma_{i,\tau} = \sum_l \frac{c_l}{l!} \lambda^l \quad \Gamma_{i,\tau}^{(k)} = \sum_m (-1)^m \frac{c_m}{m!} (\lambda)^m \quad (5.57)$$

Sustituyendo en el término disipativo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i+}^{(k)} \Gamma_{i+} - \frac{1}{2} \left(\Gamma_{i+}^{(k)} \Gamma_{i+}^{(k)} + \Gamma_{i+} \Gamma_{i+} \right) + (+ \leftrightarrow -) = \\ \sum_{l,m} \frac{c_l c_m}{l! m!} \left((-1)^l - \frac{1}{2} ((-1)^{l+m} + 1) \right) (\lambda)^{l+m} \end{aligned} \quad (5.58)$$

Como se ha visto en 5.56, $\lambda = O\left(\frac{1}{N}\right)$ debido a que depende de los pesos J_{ij} , por lo que si se considera el límite termodinámico:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lambda \rightarrow 0 \quad (5.59)$$

Entonces, el término disipativo es cancelado para $i \neq k$ puesto que no hay orden 0 en la expansión:

$$\sum_{i \neq k, \tau} (\sigma_i^\tau)^\dagger \sigma_i^\tau \sigma_k^+ \left(\Gamma_{i\tau}^{(k)} \Gamma_{i\tau} - \frac{1}{2} \left(\Gamma_{i\tau}^{(k)} \Gamma_{i\tau}^{(k)} + \Gamma_{i\tau} \Gamma_{i\tau} \right) \right) = 0 \quad (5.60)$$

Desarrollando la parte del conmutador del Hamiltoniano:

$$\Omega \sum_l [\sigma_l^x, \sigma_k^+] = \Omega [\sigma_k^x, \sigma_k^+] \quad (5.61)$$

Usando la definición de $\sigma^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$ junto con las relaciones de conmutación de las matrices de Pauli $[\sigma_k^n, \sigma_k^j] = 2i\epsilon^{njl}\sigma_k^l$:

$$\Omega [\sigma_k^x, \sigma_k^+] = -i\Omega \sigma_k^z \quad (5.62)$$

Por lo tanto, la evolución del operador σ^+ vendrá dada por:

$$\dot{\sigma}_k^+ = -i\Omega \sigma_k^z - \frac{\gamma}{2} \sigma_k^+ \quad (5.63)$$

Haciendo el mismo desarrollo para σ^- :

$$\dot{\sigma}_k^- = i\Omega\sigma_k^z - \frac{\gamma}{2}\sigma_k^- \quad (5.64)$$

5.5. Demostración de la evolución temporal del overlap s^z

El overlap entre la μ -ésima memoria y la componente z del spin viene dado por la expresión:

$$s_\mu^\alpha = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{(\mu)} \sigma_i^\alpha \quad (5.65)$$

Donde $\mu = 1, \dots, p$ y $\alpha = x, y, z$. Busco la evolución de temporal del vector overlap \mathbf{s}^α donde cada elemento se corresponderá al solapamiento con una de las memorias:

$$\mathbf{s}^\alpha = \begin{pmatrix} s_1^\alpha \\ \vdots \\ s_p^\alpha \end{pmatrix} \quad (5.66)$$

Derivando con respecto al tiempo el vector de probabilidad para $\alpha = z$ y teniendo en cuenta 5.40:

$$\dot{\mathbf{s}}^z = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k \dot{\sigma}_k^z = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k (2\Omega\sigma_k^y - \gamma\sigma_k^z + \gamma \tanh(\beta\Delta E_k)) \quad (5.67)$$

Se pueden relacionar los dos primeros sumandos fácilmente con \mathbf{s}^y y \mathbf{s}^z respectivamente:

$$\dot{\mathbf{s}}^z = 2\Omega\mathbf{s}^y - \gamma\mathbf{s}^z + \frac{\gamma}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k \tanh(\beta\Delta E_k) \quad (5.68)$$

Usando que los pesos son calculados como:

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^{(\mu)} \xi_j^{(\mu)} \quad (5.69)$$

Reescribo la diferencia de energía:

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= \sum_{i \neq k}^N J_{ik} \sigma_i^z = \sum_{i \neq k}^N \left(\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^{(\mu)} \xi_k^{(\mu)} \right) \sigma_i^z = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \sum_{i \neq k}^N \xi_i^{(\mu)} \xi_k^{(\mu)} \sigma_i^z \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_k^{(\mu)} \left(\sum_{i \neq k}^N \xi_i^{(\mu)} \sigma_i^z \right) = \sum_{\mu=1}^p \xi_k^{(\mu)} s_\mu^z \end{aligned} \quad (5.70)$$

Teniendo en cuenta que los vectores de solapamiento tienen en cada una de sus componentes el overlap correspondiente a cada uno de los patrones, se puede ver entonces la expresión 5.70 como un producto escalar:

$$\sum_{\mu=1}^p \xi_k^{(\mu)} s_{\mu}^z = \xi_k \cdot \mathbf{s}^z \quad (5.71)$$

Por lo tanto la evolución temporal del vector overlap para $\alpha = z$:

$$\dot{\mathbf{s}}^z = 2\Omega \mathbf{s}^y - \gamma \mathbf{s}^z + \frac{\gamma}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k \tanh(\beta \xi_k \cdot \mathbf{s}^z) \quad (5.72)$$

5.6. Demostración de la evolución temporal del overlap \mathbf{s}^y

Realizando el mismo razonamiento seguido en la sección anterior y teniendo en cuenta 5.63 y 5.64:

$$\dot{\mathbf{s}}^y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \dot{\sigma}_i^y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \left(-2\Omega \sigma_i^z - \frac{\gamma}{2} \sigma_i^y \right) = -2\Omega \mathbf{s}^z - \frac{\gamma}{2} \mathbf{s}^y \quad (5.73)$$

5.7. Análisis de estabilidad lineal en el límite termodinámico

Se busca estudiar cuales son los puntos estables en el diagrama $m_z - m_y$. Para ello igualo a cero las ecuaciones 5.72 y 5.73:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{m}}^z &= 0 = 2\Omega \mathbf{m}^y - \gamma \mathbf{m}^z + \frac{\gamma}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k \tanh(\beta \xi_k \cdot \mathbf{m}^z) \\ \dot{\mathbf{m}}^y &= 0 = -2\Omega \mathbf{m}^z - \frac{\gamma}{2} \mathbf{m}^y \end{aligned} \quad (5.74)$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones para obtener una expresión para el punto de equilibrio correspondiente a \mathbf{m}^z . Para llevar acabo la resolución tengo en cuenta que al tener solo un patrón en la red, los vectores ξ_k y \mathbf{m}^z pasan a ser escalares, además tomo $\gamma = 1$:

$$-4\Omega m^z = m^y \quad (5.75)$$

Sustituyendo en la ecuación correspondiente a m^z :

$$0 = -8\Omega^2 m^z - m^z + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k \tanh(\beta \xi_k m^z) \quad (5.76)$$

Donde se obtiene:

$$(1 + 8\Omega^2) m^z = \beta_c m^z = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k \tanh(\beta \xi_k m^z) \quad (5.77)$$

Las soluciones a esta ecuación nos darán los puntos de equilibrio. A simple vista, se observa la solución trivial correspondiente a la fase paramagnética ($m^z = 0$). Sin embargo, en las condiciones adecuadas se encontrarán dos soluciones más a la ecuación, correspondientes a una fase ferromagnética de la red.

5.7.1. Análisis de estabilidad lineal de la solución paramagnética

A partir de la ecuación 5.77, se puede ver que la solución trivial es $m^z = m^y = 0$. Por lo que hago un análisis de estabilidad lineal en torno a este punto en función de la temperatura. Para ello, introduzco una perturbación de la forma $m^i = m^i(0) + \delta m^i = \delta m^i$ en el sistema y me quedo hasta primer orden:

$$\begin{aligned}\delta \dot{\mathbf{m}}^z &= 2\Omega \delta \mathbf{m}^y - \delta \mathbf{m}^z + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k \tanh(\beta \xi_k \cdot \delta \mathbf{m}^z) \\ \delta \dot{\mathbf{m}}^y &= -2\Omega \delta \mathbf{m}^z - \frac{1}{2} \delta \mathbf{m}^y\end{aligned}\tag{5.78}$$

Teniendo en cuenta que solo hay almacenado un patrón y haciendo una expansión de Taylor a tanh:

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{\mathbf{m}}^z \\ \delta \dot{\mathbf{m}}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta - 1 & 2\Omega \\ -2\Omega & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \mathbf{m}^z \\ \delta \mathbf{m}^y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \delta \mathbf{m}^z \\ \delta \mathbf{m}^y \end{pmatrix}\tag{5.79}$$

Para estudiar la estabilidad del punto $(0, 0)$ se diagonaliza A para estudiar los autovalores en función de β y Ω . El resultado obtenido es:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left(\beta - \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\beta - \frac{3}{2} \right)^2 + 2(\beta - \beta_c)} \right) = \frac{1}{2} \left(\beta - \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\beta - \frac{1}{2} \right)^2 - 16\Omega^2} \right)\tag{5.80}$$

Donde se ha definido el parámetro $\beta_c = 1 + 8\Omega^2$. Los autovalores en función de los parámetros:

- (I) $\beta > \beta_c$: Le corresponderán autovalores reales y con signo opuesto ($\lambda_+ > 0$ y $\lambda_- < 0$), es decir, un punto de silla. Esta región se corresponde a la fase ferromagnética donde el patrón tiende al máximo solapamiento $|m^z| = 1$, por lo que la dirección de m^y será inestable.
- (II) $\beta_c > \left| \beta - \frac{1}{2} \right| > 4\Omega$: En esta región habrá dos autovalores reales y con el mismo signo. Se pueden diferenciar dos situaciones:
 - (II.I) $\beta_c > \frac{3}{2}, \lambda_i > 0$: Es un punto inestable o fuente. Además, para este punto se verificará siempre que $\beta > \frac{3}{2}$.
 - (II.II) $\frac{3}{2} > \beta_c, \lambda_i < 0$: Se corresponde a un punto estable.
- (III) $\beta = \beta_c$:

- **(III.I)** $\beta > \frac{3}{2} \rightarrow \lambda_+ > 0$ y $\lambda_- = 0$: El eje correspondiente a m^z es inestable mientras que el correspondiente al m^y no se ve afectado por la perturbación a primer orden.
- **(III.II)** $\beta < \frac{3}{2} \rightarrow \lambda_+ = 0$ y $\lambda_- < 0$: En este caso el que no experimenta la perturbación a primer orden es m^z mientras que en m^y habrá un punto estable.
- **(IV)** $\beta_c > \frac{1}{2} + |4\Omega| > \beta > \frac{1}{2} - |4\Omega|$: Se pueden distinguir 3 regiones en esta situación:
 - **(IV.I)** $\frac{3}{2} > \beta > \frac{1}{2} - 4\Omega$: Las soluciones son complejo conjugadas con parte real negativa. Por lo que el atractor se corresponderá a una espiral absorbente.
 - **(IV.II)** $\frac{1}{2} + 4\Omega > \beta > \frac{3}{2}$: Los autovalores son complejo conjugados con parte real positiva, es decir, el atractor será una fuente espiral.
 - **(IV.III)** $\beta = \frac{3}{2}$: Las soluciones son números imaginarios puros, por lo que el atractor será centrado.

Estos resultados coinciden con los obtenidos en (5).

5.7.2. Análisis de estabilidad lineal de las soluciones no triviales

Ahora, busco encontrar las soluciones no triviales a la ecuación 5.73. Como la dinámica del sistema tiene una fuerte dependencia con la temperatura, en primera instancia, calculo la condición de existencia de dichas soluciones. Para ello se define la función $f(m^z)$ como:

$$f(m^z) = \beta_c m^z - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k \tanh(\beta \xi_k m^z) \quad (5.81)$$

Se buscan las soluciones no triviales que verifiquen $f(m^z) = 0$ siendo $m^z \neq 0$, donde se puede ver que la función f verifica las condiciones necesarias para aplicar el teorema de los ceros de Bolzano. Puesto que no estoy interesado en la solución paramagnética, tomo como puntos del intervalo:

- $a = \delta m^z$
- $b = m^z \gg 1 \rightarrow \beta_c m^z - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k \tanh(\beta \xi_k m^z) \approx \beta_c m^z > 0$

El punto a nos asegura que no obtenemos la solución trivial, y al ser $\delta m^z \rightarrow 0$, nos permite hacer una expansión de Taylor a la tanh. Por otro lado, b soluciona los posibles problemas que pueda dar la tanh y asegura que el signo de ese punto va a ser positivo. Aplicando Bolzano:

$$f(a)f(b) = (\beta_c \delta m^z - \beta \delta m^z) \beta_c m^z < 0 \quad (5.82)$$

Por lo tanto, para que exista una solución no trivial debe cumplirse siempre que

$$\beta > \beta_c.$$

Para estudiar la estabilidad de estas soluciones aplico otra perturbación al sistema entorno a m_0^z (punto donde se verifica 5.73) donde se obtiene como resultado:

$$\begin{pmatrix} \delta^z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta' - 1 & 2\Omega \\ -2\Omega & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \quad (5.83)$$

Se puede observar, que al definir $\beta' = \frac{\beta}{\cosh(\beta m_0^z)}$ como una temperatura efectiva, se ha reducido el estudio de estabilidad de las soluciones ferromagnéticas al llevado acabo en 5.7.1. Actualmente, se conocen las fronteras de las fases en función de β' , pero nos interesa tenerlas en función de β pues es el parámetro que nos regula el sistema. Me centro en estudiar las fronteras de las regiones estables puesto que son las zonas donde podremos encontrar la recuperación del patrón almacenado en la red.

- $\frac{3}{2} > \beta_c > \beta' > \frac{1}{2} + 4\Omega$: En esta región habrá estabilidad si $\frac{1}{4} > \Omega$. Impongo la condición de frontera:

$$\beta_c = \beta' = \frac{\beta}{\cosh(\beta m_0^z)^2} = \beta \left(1 - \tanh(\beta m_0^z)^2\right) \xrightarrow{z=0} \arctanh\left(\sqrt{1 - \frac{\beta_c}{\beta}}\right) \quad (5.84)$$

Usando ahora la condición de punto estacionario 5.77, se llega a la ecuación:

$$\frac{\beta_c}{\beta} \arctanh\left(\sqrt{1 - \frac{\beta_c}{\beta}}\right) = \sqrt{1 - \frac{\beta_c}{\beta}} \quad (5.85)$$

Como era de esperar la solución solo existe para el caso $\beta_c > \beta$, puesto que en el caso contrario no existen soluciones ferromagnéticas.

- Estudio ahora la frontera con la región $\beta_c > \frac{1}{2} + |4\Omega| > \beta' > \frac{1}{2} - |4\Omega|$ y $\frac{3}{2} > \beta'$:

$$\frac{3}{2} = \beta' = \beta(1 - \tanh(\beta m_0^z)) \quad (5.86)$$

Siguiendo el mismo razonamiento de antes se llega a:

$$\beta_c = \beta \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{2\beta}}}{\arctanh\left(\sqrt{1 - \frac{3}{2\beta}}\right)} \rightarrow \Omega_{\text{Frontera}}^2 = \frac{1}{8} \left(\beta \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{2\beta}}}{\arctanh\left(\sqrt{1 - \frac{3}{2\beta}}\right)} - 1 \right) \quad (5.87)$$

Por lo tanto, la región que tenga $\Omega^2 < \Omega_{\text{Frontera}}^2$ corresponderá al régimen ferromagnético, sin embargo, si se da la situación $\Omega^2 > \Omega_{\text{Frontera}}^2$ las soluciones correspondientes a la recuperación del patrón dejarán de ser estables.

5.7.3. Aproximación de bajas temperaturas para la fase ferromagnética

La ecuación 5.73 es trascendente por lo que para obtener soluciones debe resolverse de forma numérica en general, a excepción de la solución trivial $m^z = 0$. Sin embargo, en el límite de bajas temperaturas ($T \rightarrow 0$ o $\beta \rightarrow \infty$) se puede obtener una expresión analítica a la ecuación. Para ello, uso los cambios de variable:

$$\begin{aligned} (1 + 8\Omega^2) m^z &= z \\ \frac{\beta}{(1+8\Omega^2)} &= \beta_{\text{eff}} \end{aligned} \tag{5.88}$$

Por lo tanto:

$$z = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k \tanh(\beta_{\text{eff}} \xi_k z) \tag{5.89}$$

Ahora, teniendo en cuenta que la función \tanh , es una función acotada en infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \tanh x = \pm 1$$

Como en el caso de bajas temperaturas $\beta_{\text{eff}} \rightarrow \infty$, el valor de la \tanh se puede aproximar a ± 1 dependiendo del signo de ξ_k . Sin embargo, teniendo cuenta que $\tanh(-x) = -\tanh x$ y $\xi_k = \pm 1$, entonces cada uno de los sumandos se pueden aproximar a:

$$\xi_k \tanh(\beta_{\text{eff}} \xi_k z) \approx 1 \tag{5.90}$$

Entonces el resultado de la sumatoria $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k \tanh(\beta_{\text{eff}} \xi_k z) \approx 1$ dando como punto de estabilidad para z :

$$\begin{aligned} z = 1 &\longrightarrow m^z = \frac{1}{1+8\Omega^2} \\ m^y &= \frac{-4\Omega}{1+8\Omega^2} \end{aligned} \tag{5.91}$$

Referencias

- [1] Garrahan, J. P.,
Aspects of non-equilibrium in classical and quantum systems: Slow relaxation and glasses, dynamical large deviations, quantum non-ergodicity, and open quantum dynamics. p. 146,
Physica (2018). A, 504, 130-154. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.12.149>.
- [2] Garrahan, J. P.,
Aspects of non-equilibrium in classical and quantum systems: Slow relaxation and glasses, dynamical large deviations, quantum non-ergodicity, and open quantum dynamics. p. 148,
Physica (2018). A, 504, 130-154. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.12.149>.

- [3] López, M. R.,
Study of non-equilibrium phenomena in Open Quantum Systems. p. 10,
Bachelor Thesis (2021).
- [4] Konyik, M., Vukics, A.,
The Monte Carlo wave-function method: A robust adaptive algorithm and a study in convergence . p. 89,
Computer Physics Communications (2019), 238, 88-101.
<https://doi.org/10.1016/j.cpc.2018.12.015>
- [5] Rotondo, P., Marcuzzi, M., Garrahan, J. P., Lesanovsky, I., Müller, M.,
Open quantum generalisation of Hopfield neural networks,
Journal Of Physics (2018). A, Mathematical And Theoretical, 51(11), 115301.
<https://doi.org/10.1088/1751-8121/aaabcb>.
- [6] Torres, J. J., Manzano, D.,
Dissipative Quantum Hopfield Network: A numerical analysis,
arXiv.org (2023, 4 mayo). <https://arxiv.org/abs/2305.02681>.
- [7] D. E. Evans,
Irreducible quantum dynamical semigroups,
Commun. Math. Phys. 54, 293 (1977).
- [8] D. E. Evans y H. Hance-Olsen,
The generators of positive semigroups,
J. Funct. Anal. 32, 207 (1979).
- [9] Fujii, K.,
Quantum Damped Harmonic Oscillator. p 7,
(2012, 7 septiembre). arXiv.org. <https://arxiv.org/abs/1209.1437>
- [10] Breuer, H., Petruccione, F.,
The Theory of Open Quantum Systems,
En Oxford University Press eBooks (2007).
- [11] Manzano, D.,
A short introduction to the Lindblad master equation,
AIP Advances (2020), 10(2). <https://doi.org/10.1063/1.5115323>.



Propuesta de Trabajo Fin de Grado en Física

Tutor/a: Carlos Pérez Espigares

Departamento y Área de Conocimiento: Electromagnetismo y Física de la Materia Condensada

Cotutor/a:

Departamento y Área de Conocimiento:

Título del Trabajo: Generalización cuántica de la red neuronal de Hopfield

Tipología del Trabajo:
(Según punto 3 de las
Directrices del TFG
aprobadas por Comisión
Docente el 10/12/14)

(Marcar
con X)

1. Revisión bibliográfica	X	4. Elaboración de nuevas prácticas de laboratorio
2. Estudio de casos teórico-prácticos	X	5. Elaboración de un proyecto
3. Trabajos experimentales		6. Trabajo relacionado con prácticas externas

Breve descripción del trabajo:

La red neuronal de Hopfield es uno de los modelos paradigmáticos de memoria asociativa. Propuesta por John Hopfield en 1982, esta red neuronal de unidades binarias (que representan la actividad de las neuronas: activa o inactiva) está diseñada para que un número dado de patrones, o configuraciones del sistema, sean recordados. Esto se logra construyendo una función de energía tal que los patrones sean un mínimo de la misma. De esta manera la red neuronal ‘recordará’ un patrón si se le da una proporcional versión distorsionada de dicho patrón, o dicho en términos físicos, la red convergerá al mínimo de energía si empezamos cerca del mismo. A pesar de ser tremadamente útil en el reconocimiento de patrones y recuperación de la información, la red de Hopfield presenta importantes limitaciones, como la capacidad limitada de almacenamiento y la sensibilidad al ruido en los patrones de entrada. Por este motivo, en los últimos años se ha intentado mejorar su rendimiento considerando su extensión al mundo cuántico, donde las unidades binarias pasan a ser estados cuánticos (qubits), o donde la regla de aprendizaje (regla Hebbiana) pasa a ser cuántica. Estas generalizaciones cuánticas de la red neuronal de Hopfield apuntan a una mejora significativa de su capacidad de almacenamiento entre otras ventajas. Con este trabajo se pretende por tanto estudiar los avances más recientes en esta línea de investigación.

Objetivos planteados:

- Inicialmente se estudiará el modelo de Hopfield y se hará un análisis del número de patrones almacenados para diferentes valores de la temperatura.
- Se hará una primera extensión cuántica del problema considerando la ecuación maestra cuántica abierta, a través de la cual se incluye el efecto de un campo magnético uniforme aplicado en la dirección x que, en ausencia de disipación, daría lugar a las oscilaciones de Rabi. De esta manera estudiaremos la competición de la dinámica disipativa de la red de Hopfield y la dinámica coherente introducida con el campo uniforme.
- Se derivará y se obtendrá la solución de campo medio de la dinámica resultante en el límite termodinámico. De esta manera podremos representar el diagrama de las fases correspondiente.
- Como objetivo más ambicioso, se intentará aplicar una regla Hebbiana cuántica para estudiar el aumento en el tiempo de recuperación de los patrones.



Metodología:

Para abordar el estudio que aquí se propone, se hará uso tanto de simulaciones por ordenador como de herramientas analíticas clásicas y cuánticas. Las simulaciones de la dinámica clásica de la red neuronal de Hopfield se realizará a partir de los métodos Monte Carlo en tiempo discreto aplicados a gases reticulares. Desde el punto de vista cuántico, se simulará la dinámica con el método de Monte Carlo de salto cuántico. A nivel analítico, se estudiará la ecuación de Lindblad, que describe la evolución de los sistemas cuánticos abiertos, así como su límite en campo medio. Su resolución numérica se llevará a cabo haciendo uso del análisis de estabilidad lineal de Lyapunov.

Bibliografía:

- 1) Hopfield J. J., 1982 Proc. Natl Acad. Sci. 79 2554
- 2) Amit D. J., Gutfreund H. and Sompolinsky H., 1985 Phys. Rev. A 32 1007
- 3) Breuer H. P. and Petruccione F., 2002 The Theory of Open Quantum Systems (Oxford: Oxford University Press)
- 4) Rotondo P. et al, 2018 J. Phys. A: Math. Theor. 51 115301
- 5) Rebentrost P. et al, 2018 Phys. Rev. A 98, 042308
- 6) Manzano D. and Torres J. J., 2023 arXiv:2305.02681

A llenar sólo en el caso que el alumno sea quien realice la propuesta de TFG

Alumno/a propuesto/a: Pablo Gallardo Calleja

Granada, 19 de Mayo 2023