

подробно описываются их программные реализации в математическом пакете MathCAD.

Пособие предназначено для студентов специальностей "Прикладная математика", "Информатика и вычислительная техника", обучающихся по программе бакалавриата. Также пособие может быть использовано при написании курсовых и квалификационных работ.

## **Практическая работа № 1. Качественная теория: особенности фазового пространства динамических систем на примере механических осцилляторов**

Цель работы:

изучение основных понятий и методов качественного анализа динамических систем, таких как предельные множества, устойчивость по Ляпунову и ее линейный анализ, структурная устойчивость (грубость по Андронову), бифуркации;

приобретение практических навыков качественного анализа динамических систем на примере колебаний гармонических и ангармонических осцилляторов с трением и в его отсутствие.

### **1.1. Разбиение фазового пространства на траектории. Топологическая эквивалентность, структурная устойчивость, бифуркации**

Точный количественный анализ нелинейной динамической системы возможен в редких случаях. На практике зачастую важны не столько точные сведения о состояниях в заданные моменты времени, сколько *описание поведения системы в целом, на качественном уровне*. Например, при проектировании той или иной механической конструкции важно знать, существуют ли у нее состояния равновесия, какие из них устойчивы, а какие – нет, возможны ли в системе устойчивые колебательные режимы, когда устойчивые состояния сменяются неустойчивыми. На эти вопросы отвечает *качественная теория динамических систем*.

Если дана динамическая система, то она определяет некоторое семейство траекторий или некоторое *разбиение на траектории*. При всевозможных топологических<sup>2</sup> отображениях плоскости в себя вид траекторий системы может сильно изменяться. Но некоторые черты разбиения остаются неизменными (*топологически инвариантными*): например, замкнутая

---

<sup>2</sup> (др.-греч. *τοπος* – место и *λογος* – слово, учение) – раздел математики. **Топология** изучает в самом общем виде явление непрерывности; в частности, свойства пространств, которые остаются неизменными при непрерывных деформациях.

траектория продолжает быть замкнутой, незамкнутая — незамкнутой, остается число и взаимное расположение замкнутых траекторий, состояний равновесия, остается неизменным их характер. При этом "плавные" деформации фазового пространства не меняют качественно динамику системы. Это соображение лежит в основе определения *близости динамических систем* — речь идет о *топологической эквивалентности (топологической инвариантности) фазовых портретов*. Для близких в этом смысле систем естественно выбирать *наиболее простое математическое описание*.

Если фазовый портрет динамической системы, изображенный на рис. 1.1 *a*, путем плавной деформации фазового пространства можно перевести в фазовый портрет, изображенный на рис. 1.1 *b*, то такие системы будут *топологически эквивалентными*. На рис. 1.1 системы (*a*) и (*b*) топологически эквивалентны, тогда как системы (*b*) и (*c*) не являются эквивалентными, например, потому, что число особых точек у этих систем различно. На рис. 1.1 *d* приведены две непохожие, но топологически тождественные структуры, на рис. 1.1 *e* — две похожие, но топологически различные структуры. Эти соображения позволяют взглянуть на *поведение различных динамических систем с единой точки зрения*.

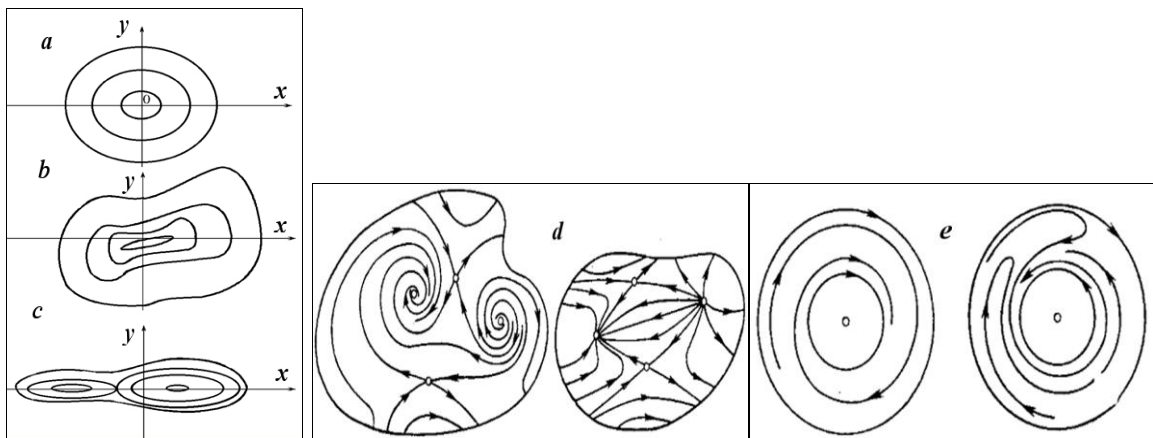


Рисунок. 1.1. Фазовые портреты.

Системы (*a*) и (*b*) топологически эквивалентны, (*b*) и (*c*) не эквивалентны, системы (*d*) топологически эквивалентны, (*e*) — не эквивалентны

На основе топологической эквивалентности множество всех динамических систем можно *разбить на классы, внутри которых системы демонстрируют качественно схожее поведение*. Для того чтобы в результате деформации фазового портрета системы, с одной стороны, не могли появиться новые особые точки, а с другой — имеющиеся особые точки не могли исчезнуть, преобразование фазовых координат должно быть *невырожденным (взаимно однозначным и взаимно непрерывным) преобразованием*. Подобное преобразование называют *топологическим*.

Представить себе топологическое преобразование можно с помощью образа «резиновой» поверхности, которую допускается сжимать, изгибать, и не допускается перекручивать. При таких деформациях все первоначальные точки будут однозначно переходить в точки трансформированной «резиновой» поверхности; незамкнутые кривые будут переходить в незамкнутые, замкнутые – в замкнутые. Не будет нарушаться и связность множеств. Недаром говорят, что топология – это "резиновая геометрия".

### ***Определение тождественности двух топологических структур***

Разбиения на траектории, заданные динамическими системами

$$\begin{cases} \dot{x} = P_1(x, y), \\ \dot{y} = Q_1(x, y); \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = P_2(x, y), \\ \dot{y} = Q_2(x, y); \end{cases} \quad (1.2)$$

в ограниченных областях  $G_1$  и  $G_2$ , имеют в этих областях одинаковую *топологическую структуру*, если существует отображение  $\Phi$  области  $G_1$  на область  $G_2$ , которое удовлетворяет следующим требованиям:

- 1)  $\Phi$  есть *топологическое отображение* (взаимно однозначное и взаимно непрерывное),
- 2) если две точки области  $G_1$  принадлежат одной и той же траектории системы (1.1), то их образы при отображении  $\Phi$  принадлежат одной и той же траектории системы (1.2);
- 3) если две точки области  $G_2$  принадлежат одной и той же траектории системы (1.2), то их образы при отображении  $\Phi^{-1}$  принадлежат одной и той же траектории системы (1.1). Формулировка определения следует монографии А.А. Андропова с соавторами [1.1].

Иначе говоря, две качественные картины разбиения фазовой плоскости на траектории, заданные двумя системами, тождественны, если существует топологическое отображение плоскости в себя, при котором траектории одной системы отображаются в траектории другой системы, как в случае прямого отображения, так и при обратном отображении. При этом под топологической структурой разбиения на траектории или под качественной картиной фазовых траекторий понимают все те свойства этого разбиения, которые остаются *инвариантными* при всевозможных топологических отображениях плоскости в себя. Полное качественное исследование динамической системы и заключается в установлении таких свойств.

Топологическая (или качественная) структура динамической системы определяется сведениями о характере и расположении *особых траекторий* (состояний равновесия, предельных циклов, сепаратрис) и других особых точек динамической системы. Сохранение структуры фазового пространства, связано с понятиями *структурной устойчивости* или *грубости по Андронову*.

*Грубыми* динамическими системами считаются такие системы, топологическая структура которых в данной области не меняется при произвольном малом изменении правых частей дифференциальных уравнений. Иначе говоря, грубые системы являются структурно устойчивыми.

Изменение топологической структуры динамической системы называется *бифуркацией*. Значение параметра  $K=K_0$  является *бифуркационным*, если существуют сколь угодно близкие к  $K_0$  значения параметра  $K$ , для которых топологическая структура динамической системы в рассматриваемой области отлична от структуры системы при  $K=K_0$ .

Бифуркации удобно исследовать путем анализа изменений фазовых траекторий в расширенном комбинированном пространстве, представляющем прямое произведение фазового пространства на пространство параметров. Множество значений параметров, соответствующих какой-либо бифуркации, задает в пространстве параметров *бифуркационную поверхность*. Эти бифуркационные поверхности являются границами, выделяющими в пространстве параметров области с различной топологической структурой динамической системы.

При изменении управляющих параметров одни устойчивые состояния системы сменяются другими. Иначе говоря, изменения параметров вызывают последовательность *фазовых переходов* динамической системы от одних грубых, структурно устойчивых, режимов к другим через негрубое состояние в точке бифуркации.

***Теорема. Необходимые и достаточные условия грубости динамической системы на плоскости [1.1]***

Для того чтобы динамическая система, определенная в некоторой области фазовой плоскости, была грубой, необходимо и достаточно, чтобы в этой области

- 1) система имела лишь конечное число состояний равновесия, причем эти состояния равновесия могут быть лишь *простыми узлами, седлами или фокусами*,
- 2) замкнутые траектории системы являлись *простыми предельными циклами*,
- 3) система не имела сепаратрис, идущих из седла в седло.

## 1.2. Зависимость фазовых траекторий от начальных условий. Устойчивость по Ляпунову

Математический анализ зависимости траекторий динамической системы от начальных условий связан с именами французского математика Анри Пуанкаре (1854-1912) и русского математика и механика Александра Михайловича Ляпунова (1857-1918).

Приводимые далее формулировки определений и теоретических положений, связанных с теорией устойчивости, следуют лекциям Б.П. Демидовича [1.5].

### 1.2.1. Устойчивость по Ляпунову

Решение  $\eta = \eta(t)$  ( $a < t < \infty$ ) дифференциальной системы

$$\frac{dS}{dt} = f(t, S) \quad (1.3)$$

где  $S, f$  – векторы, называется **устойчивым по Ляпунову** при  $t \rightarrow +\infty$ , если для любых  $\varepsilon > 0$  и  $t_0 \in (a, \infty)$  существует  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$  такое, что

1) все решения  $S = S(t)$  системы (1.3), удовлетворяющие условию  $\|S(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta$ , определены в промежутке  $t_0 < t < \infty$ ,

2) для этих решений справедливо неравенство  $\|S(t) - \eta(t)\| < \varepsilon$  при  $t_0 \leq t < \infty$ .

Здесь  $\|S(t) - \eta(t)\|$  – евклидова норма вектора.

Решение  $\eta(t)$  устойчиво, если достаточно близкие к нему в любой начальный момент  $t_0$  решения  $S(t)$  целиком погружаются в сколь угодно узкую  $\varepsilon$  - трубку, построенную вокруг решения  $\eta(t)$  (рис.1.2).

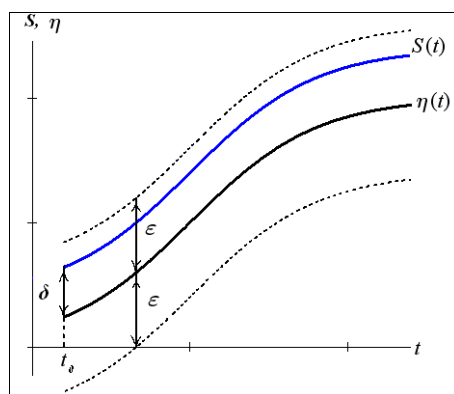


Рисунок 1.2. Поведение устойчивой траектории  $\eta(t)$  при малых изменениях начальных условий

Иначе говоря, малые изменения начальных условий не могут вызвать больших изменений решения. Если же для некоторого  $\varepsilon > 0$  такого  $\delta$  не существует, то решение называется **неустойчивым**.

### 1.2.2. Асимптотическая устойчивость

Решение  $\eta = \eta(t)$  ( $a < t < \infty$ ) системы (1.3) называется **асимптотически устойчивым** при  $t \rightarrow +\infty$ , если 1) это решение устойчиво по Ляпунову и 2) для любого  $t_0 \in (a, \infty)$  существует  $\Delta = \Delta(t_0) > 0$  такое, что все решения  $S = S(t)$ ,  $t_0 \leq t < \infty$ , удовлетворяющие условию  $\|S(t_0) - \eta(t_0)\| < \Delta$ , обладают свойством  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|S(t) - \eta(t)\| = 0$  [1.5].

**Теорема 1.** Линейная однородная дифференциальная система  $\frac{dS}{dt} = A(t)S$  асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все ее решения  $S = S(t)$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ , то есть  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = 0$ .

**Теорема 2.** Линейная однородная дифференциальная система с постоянной матрицей  $A$  асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные значения  $\lambda_j$  матрицы  $A$  имеют отрицательные вещественные части.

### 1.2.3. Устойчивость по первому приближению. Теорема Ляпунова

А.М. Ляпунов показал, что в большом числе случаев анализ устойчивости стационарного состояния нелинейной системы можно заменить анализом устойчивости системы, линеаризованной в окрестности стационарного состояния. Эту систему называют **системой первого приближения**. Для ее построения правые части нелинейной системы раскладывают в степенной ряд в окрестности равновесного состояния.

Исследование системы первого приближения дает правильный ответ на вопрос о типе устойчивости состояния равновесия нелинейной системы в следующих ситуациях, составляющих содержание *теоремы Ляпунова*:

- 1) если все собственные значения линеаризованной системы имеют отрицательную действительную часть, тогда состояния рав-

- новесия обеих дифференциальных систем – линеаризованной и нелинейной, асимптотически устойчивы;
- 2) если хотя бы одно собственное значение линеаризованной системы имеет положительную действительную часть, тогда состояния равновесия обеих систем неустойчивы;
  - 3) если среди собственных значений линеаризованной системы имеется значение с нулевой действительной частью, то система первого приближения не дает ответа на вопрос об устойчивости состояния равновесия нелинейной системы – в разложении ее правых частей необходимо рассматривать члены более высокого порядка малости.

### 1.3. Особые точки и особые траектории динамических систем. Классификация Пуанкаре

#### 1.3.1. Особые точки

Рассмотрим автономную систему с двумерным фазовым пространством:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.4)$$

Разделим первое уравнение системы (1.4) на второе, в результате получим дифференциальное уравнение на фазовой плоскости:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad (1.5)$$

В тех точках, где знаменатель в правой части (1.5) обращается в нуль, поменяем делимое и делитель местами:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (1.6)$$

Для уравнений (1.5) и (1.6) введем понятие *особых точек*. Пусть уравнение (1.5) или (1.6) рассматривается в области  $G$ , точка  $R$  принадлежит области  $G$  или ее границе. Если существует окрестность точки  $R$ , такая, что через каждую точку этой окрестности *проходит одна и только одна инте-*

гравитационная линия, и хотя бы одна из функций  $\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$  или  $\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$  непрерывна в этой точке, то  $R$  – не особая точка; в противном случае,  $R$  – особая точка.

Если  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  имеют непрерывные частные производные по  $x, y$ , то все внутренние точки области, в которых  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  не обращаются одновременно в нуль, не являются особыми.

Для *особой* точки  $R$  возможны три характерных момента:

- принадлежность границе области  $G$  (граничная точка).
- нарушение единственности решений уравнений (1.5) или (1.6),
- разрывность поля направлений в точке  $R$ .

### 1.3.2. Состояния равновесия

Рассмотрим на фазовой плоскости точку  $R(x_0, y_0)$ , в которой правые части системы (1.4) одновременно обращаются в нуль:

$$P(x_0, y_0) = 0, \quad Q(x_0, y_0) = 0.$$

Точка  $R(x_0, y_0)$  в этом случае есть *точка покоя*, *стационарная точка* или *состояние равновесия*. Являясь простейшим видом предельного движения, к которому стремится динамическая система, состояние равновесия характеризует ее поведение в течение длительных промежутков времени. Поэтому состояния равновесия играют основную роль в установлении топологической структуры фазового пространства нелинейных динамических систем.

Представим функции  $P, Q$  в виде степенного ряда Тейлора, взяв разложение, например, в окрестности точки  $x_0 = y_0 = 0$  и ограничившись линейными членами. Подставим результат разложения в (1.5):

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P'_x(0,0)x + P'_y(0,0)y + o(x^2 + y^2)}{Q'_x(0,0)x + Q'_y(0,0)y + o(x^2 + y^2)} \quad (1.7)$$

Соотношение (1.7) оставляет неопределенным значение производной  $\frac{dx}{dy}$  в точке  $R(0, 0)$ . Как бы мы не доопределили это значение, если



$$\det \begin{pmatrix} P'_x(0,0) & P'_y(0,0) \\ Q'_x(0,0) & Q'_y(0,0) \end{pmatrix} \neq 0, \quad (1.8)$$

точка  $R(0,0)$  будет точкой разрыва поля направлений. Поэтому на фазовой плоскости решение в этой точке может разветвляться.

Точки фазовой плоскости  $R(x_0, y_0)$ , в которых возможны разрывы поля направлений и нарушение единственности решения, считаются *особыми* точками дифференциального уравнения.

Выполнение условия (1.8) означает, что касательные к кривым  $P(x,y)$  и  $Q(x,y)$ , проведенные в точке  $R(x_0, y_0)$ , различны; в этом случае особая точка  $R$  называется *простой*.

### 1.3.3. Поведение фазовых траекторий вблизи особых точек [1.4]

Если окрестность особой точки достаточно мала, то на характер поведения фазовых траекторий в ее окрестности влияют лишь главные, линейные члены разложения. Поэтому вместо нелинейной системы (1.4) можно рассматривать линеаризованную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (1.9)$$

и соответствующее ей уравнение на фазовой плоскости

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}, \quad (1.10)$$

полагая при этом, что  $ad - bc \neq 0$ .

Линейным неособенным преобразованием

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y, \\ \eta = \gamma x + \delta y, \end{cases} \quad (1.11)$$

уравнение (1.10) можно привести к каноническому виду:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\eta}{\xi}, \quad (1.12)$$

где  $\lambda_{1,2}$  – корни квадратного уравнения  $\lambda^2 - (b+c)\lambda + bc - ad = 0$ , совпадающего с характеристическим уравнением системы (1.9).

Обозначим  $\sigma = -(b+c)$ ,  $\Delta = b \cdot c - a \cdot d$ , тогда

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0. \quad (1.13)$$

Рассмотрим различные соотношения между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , которые могут представиться при решении характеристического уравнения (1.13) и основанную на этих различиях классификацию особых точек, предложенную Пуанкаре.

#### 1.3.4. Простые состояния равновесия ( $\Delta \neq 0$ )

##### *Корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ – действительные и одного знака*

Интегрируя (1.12), находим траекторию на фазовой плоскости,  $\eta = c\xi^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$ . Условимся понимать под  $\lambda_1$  корень характеристического уравнения с бóльшим модулем, тогда поскольку оба корня действительные и одного знака, отношение  $\lambda_1/\lambda_2 > 1$ , и мы имеем дело с интегральными кривыми параболического типа.

Все интегральные линии (кроме оси  $\eta$ , которой отвечает  $c=\infty$ ) касаются в начале координат оси  $\xi$ , которая также является интегральной линией уравнения (1.12).

Рассмотрим характер движения изображающей точки по фазовым траекториям вблизи состояния равновесия. Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  не кратные корни уравнения (1.13), то общее решение системы (1.9) можно представить в виде линейной комбинации экспонент с показателями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

$$\begin{cases} x = c_{11}e^{\lambda_1 t} + c_{12}e^{\lambda_2 t} \\ y = c_{21}e^{\lambda_1 t} + c_{22}e^{\lambda_2 t} \end{cases}. \quad (1.14)$$

Поэтому при отрицательных значениях  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  с течением времени  $|\xi|$  и  $|\eta|$  убывают согласно (1.11), (1.14). Изображающая точка приближается к началу координат, никогда, однако, не достигая его. В противном случае это противоречило бы теореме существования и единственности. Особая точка

$R(x_0, y_0)$ , через которую проходят интегральные кривые параболического типа, называется **узел**.

Узел при  $\lambda_1 < 0$  и  $\lambda_2 < 0$  устойчив по Ляпунову, так как изображающая точка по всем интегральным кривым движется по направлению к началу координат. Это асимптотически устойчивое состояние равновесия (рис. 1.3 а). Если же  $\lambda_1 > 0$  и  $\lambda_2 > 0$ , то  $|\xi|$  и  $|\eta|$  возрастают с течением времени, и изображающая точка удаляется от начала координат. В этом случае особая точка соответствует неустойчивому узлу.

Случай с кратным корнем характеристического уравнения не приводит к качественным изменениям решения. Устойчивость *вырожденного узла* определяется знаком собственного значения, при  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$  имеется *асимптотическая устойчивость* (рис. 1.3 б).

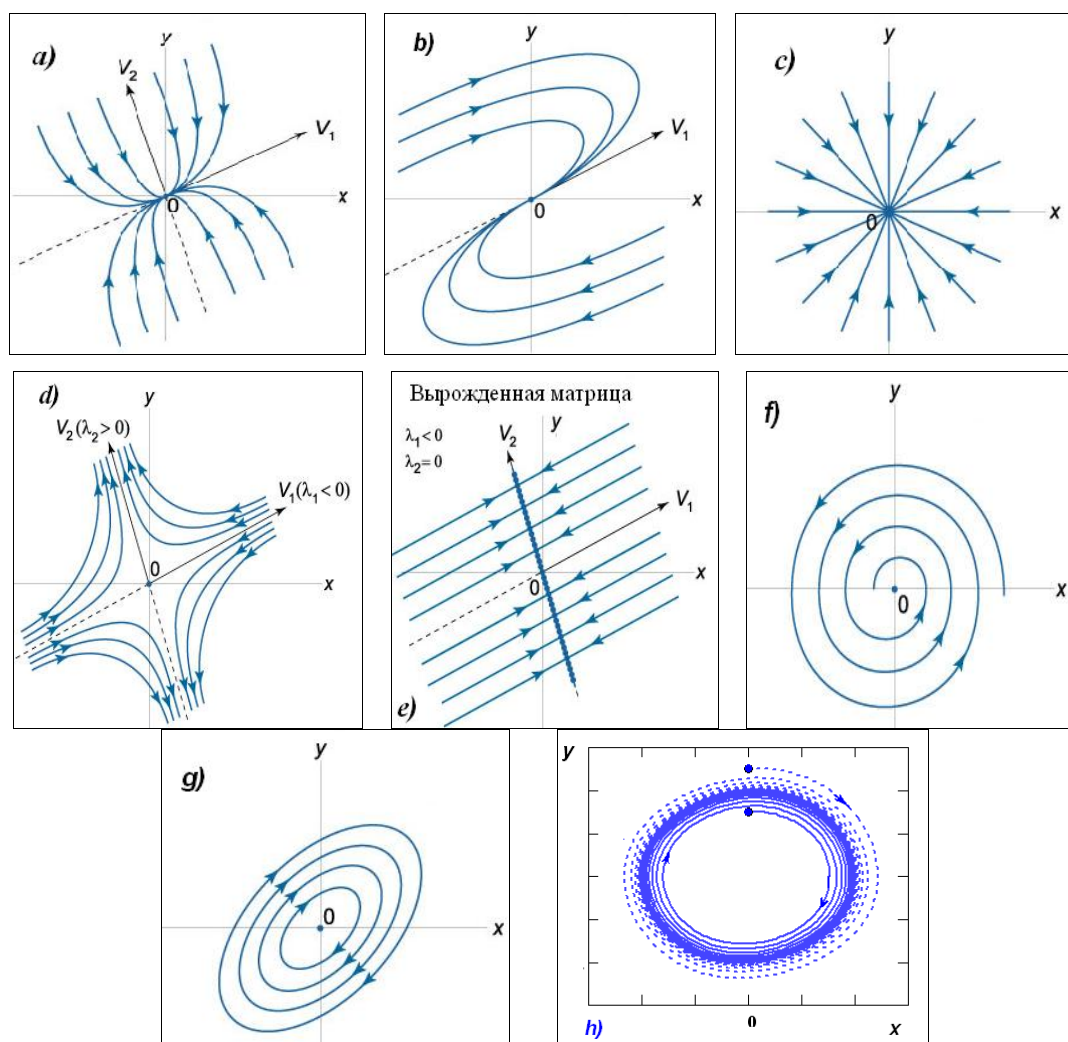


Рисунок. 1.3. Типы особых точек и траекторий в системах второго порядка. Устойчивые: (а) – узел; (б) – вырожденный узел; (с) – седловый узел, (е) – все точки прямой  $V_2$  (матрица  $A$  – вырожденная); (ф) – фокус, (г) – центр, (h) – предельный цикл; неустойчивая особая точка (д) – седло.

Качественный характер поведения интегральных кривых на фазовой плоскости  $(x, y)$  сохранится: интегральными линиями будет семейство параболических кривых и две прямые, одна из которых является касательной параболических кривых, а вторая – осью симметрии этого семейства. Но на плоскости  $(x, y)$ , в отличие от канонических переменных  $(\xi, \eta)$ , эти прямые координатными осями уже не будут. Их направления задаются собственными векторами матрицы линеаризованной системы и определяются соотношением между коэффициентами  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  в преобразовании (1.11).

### ***Корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$ действительные, разных знаков***

Состояние равновесия  $R(x_0, y_0)$  – **седловая точка**. Фазовые траектории  $\eta = c\xi^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$  являются кривыми гиперболического типа и не проходят через точку равновесия  $(x_0, y_0)$ , за исключением двух траекторий, называемых *сепаратрисами* седла (рис. 1.3 d).

Рассмотрим характер движения изображающей точки по фазовым траекториям вблизи состояния равновесия. Пусть, например,  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ . Тогда изображающая точка, помещенная на оси  $\eta$ , будет удаляться от начала координат, а помещенная на оси  $\xi$  – будет неограниченно приближаться к началу координат, не достигая его в конечное время. Где бы ни находилась изображающая точка в начальный момент (за исключением особой точки и точек на асимптоте  $\eta=0$ ), она, в конечном счете, будет удаляться от состояния равновесия, даже если вначале она движется по одной из интегральных кривых по направлению к особой точке.

Очевидно, что особая точка типа *седла всегда неустойчива*. Только при специально выбранных начальных условиях на асимптоте  $\eta=0$  система будет приближаться к состоянию равновесия. Однако это не противоречит утверждению о неустойчивости системы. Если считать, что все начальные состояния системы на фазовой плоскости равновероятны, то вероятность такого начального состояния, которое соответствует движению по направлению к особой точке, равна нулю. Поэтому всякое реальное движение будет удалять систему от состояния равновесия.

### ***Комплексно-сопряженные корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$***

Состояние равновесия  $R(x_0, y_0)$  – **фокус**. Фазовые траектории представляют собой семейство кривых типа логарифмических спиралей, каждая из которых имеет асимптотическую точку в начале координат.

При  $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$  спирали скручиваются, что соответствует затухающим колебаниям переменных. В этом случае фокус является устойчивым: изображающая точка непрерывно приближается к началу координат, не достигая его в конечное время (рис. 1.3 f).

В случае устойчивого фокуса, как и в случае устойчивого узла, выполнено не только условие Ляпунова, но и более жесткое требование: при любых начальных отклонениях система по прошествии времени вернется как угодно близко к положению равновесия. Здесь начальные отклонения не только не нарастают, но затухают, стремясь к нулю, что соответствует асимптотической устойчивости.

Если  $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$ , изображающая точка удаляется от начала координат, и мы имеем дело с неустойчивым фокусом.

### ***Чисто мнимые корни $\lambda_1$ и $\lambda_2$***

Состояние равновесия  $R(x_0, y_0)$  – **центр**. Фазовыми траекториями на плоскости канонических переменных будут замкнутые кривые, вложенные друг в друга и охватывающие особую точку. Таким образом, при  $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2})=0$  через особую точку  $x_0=0, y_0=0$  не проходит ни одна интегральная кривая (рис. 1.3 g).

Центр является устойчивой особой точкой для линейной системы, но асимптотической устойчивости нет. Исследование устойчивости нелинейной системы по первому приближению именно в этом случае невозможно, так как на поведение системы оказывают влияние нелинейные члены разложения правых частей в степенной ряд.

Итак, возможны шесть типов состояния равновесия в зависимости от характера корней характеристического уравнения (1.13).

В монографии А.А. Андропова [1.1] доказана грубость простого узла, седла и фокуса, то есть характер (тип и устойчивость) таких состояний равновесия не изменяется при достаточно малых изменениях правых частей дифференциальной системы. При этом малыми должны быть изменения не только правых частей, но и их производных первого порядка.

Центр – негрубое состояние равновесия, его характер изменяется при сколь угодно малых изменениях параметров и не определяется уравнениями первого приближения. При этом центр может переходить в устойчивый или неустойчивый фокус.

***Сложные состояния равновесия ( $\Delta=0$ ) являются негрубыми*** [1.1], их характер изменяется при сколь угодно малых изменениях системы (1.4).

### 1.3.5. Замкнутые траектории

С замкнутыми траекториями связаны периодические движения динамических систем. Они относятся к *особым траекториям*, которые наряду с особыми точками определяют топологическую структуру фазового пространства нелинейных динамических систем.

*Определения.* Фазовая траектория  $L$ , соответствующая периодическому решению динамической системы, называется *замкнутой траекторией*.

Изолированная замкнутая траектория, то есть такая замкнутая траектория, в некоторой окрестности которой, кроме нее самой, нет больше других замкнутых траекторий, называется *предельным циклом* (рис.1.3,  $h$ ).

Замкнутая траектория системы  $x=\varphi(t)$ ,  $y=\psi(t)$ , для которой характеристический показатель  $h$  отличен от нуля:

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{\partial P(\varphi(t), \psi(t))}{\partial x} + \frac{\partial Q(\varphi(t), \psi(t))}{\partial y} \right] dt \neq 0, \quad (1.15)$$

считается *простым предельным циклом*. Здесь  $T$  – период функций  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$ . *Устойчивым циклом* соответствуют отрицательные значения показателя  $h$ .

В [1.1] доказано, что из всех замкнутых траекторий динамической системы *грубыми* являются лишь *простые предельные циклы*.

Изучению автоколебаний и связанных с ними предельных циклов динамических систем посвящено практическое занятие 4.

## 1.5. Бифуркационная диаграмма

Определим корни характеристического уравнения (1.13) линеаризованной системы (1.9):

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sigma \pm \sqrt{(\sigma^2 - 4\Delta)}}{2}.$$

Рассмотрим плоскость с прямоугольными декартовыми координатами  $(\sigma, \Delta)$ . Отметим на этой плоскости области, которые соответствуют различным типам состояний равновесия в зависимости от корней характеристического уравнения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ .

Условие устойчивости состояний равновесия состоит в отрицательности действительных частей,  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$  и  $\text{Re}(\lambda_2) < 0$ . Для его выполнения не-

обходимо и достаточно, чтобы  $\sigma$  и  $\Delta$  были положительными,  $\sigma > 0$ ,  $\Delta > 0$ . На диаграмме этому условию соответствуют точки, расположенные в первой четверти плоскости параметров (рис. 1.4).

Особая точка будет фокусом, если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  комплексно-сопряженные. Этому условию соответствуют точки, для которых  $D = \sigma^2 - 4\Delta < 0$ . На плоскости  $(\sigma, \Delta)$  они располагаются между двумя симметричными ветвями параболы  $\Delta = \sigma^2 / 4$ .

Точкам полуоси  $\sigma = 0$ ,  $\Delta > 0$  соответствуют состояния равновесия типа центр.

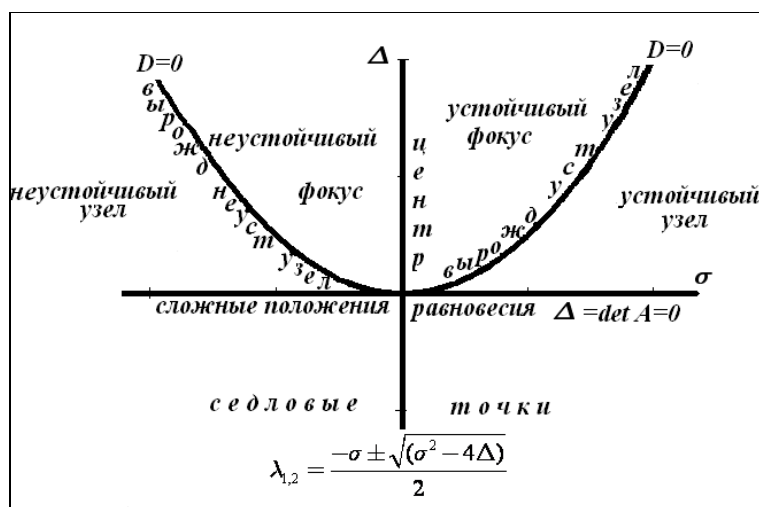


Рисунок 1.4. Бифуркационная диаграмма динамической системы 2-го порядка на плоскости  $(\sigma, \Delta)$

Аналогично, особая точка будет седлом, если  $\Delta < 0$  (здесь  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — действительные, но разных знаков).

В итоге мы получим диаграмму разбиения плоскости параметров  $(\sigma, \Delta)$  на области, соответствующие различным типам состояний равновесия.

Грубым состояниям равновесия соответствуют все точки плоскости  $(\sigma, \Delta)$ , кроме точек оси  $\Delta=0$  и полуоси  $\sigma=0$ ,  $\Delta>0$ .

Точкам на оси  $\Delta=0$  и на полуоси  $\sigma=0$ ,  $\Delta>0$  соответствуют негрубые состояния равновесия. На оси  $\Delta=0$  имеем сложные состояния равновесия.

Если коэффициенты линеаризованной системы зависят от некоторого параметра, то при изменении этого параметра будут меняться и величины  $\Delta$ ,  $\sigma$ . При переходе через границы, обозначенные на рис. 1.4, характер фазового портрета качественно меняется, это бифуркационные границы. По разные стороны от бифуркационных границ система имеет два топологически различных фазовых портрета и, соответственно два разных типа поведения. На диаграмме видно, как могут проходить такие изменения. Если исключить особый случай — начало ко-

ординат, то легко видеть, что при пересечении оси абсцисс седло может переходить в узел, устойчивый или неустойчивый. Устойчивый узел может перейти либо в седло, либо в устойчивый фокус, и т.д.

При бифуркационных переходах меняется характер устойчивости особой точки. Например, устойчивый фокус через центр может переходить в неустойчивый фокус. Эта бифуркация называется бифуркацией Пуанкаре-Андропова-Хопфа, по именам исследовавших ее ученых. При этой бифуркации в нелинейных системах происходит рождение предельного цикла, и система становится автоколебательной (занятие 4).

### 1.6. Предельные точки и предельные множества динамических систем

В современной нелинейной динамике вводится обобщающее понятие предельного множества. Пусть  $\mathbf{x}(t)$  – некоторое решение системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  и ему соответствует траектория  $l$  в фазовом пространстве. Точка  $\mathbf{x}^*$  называется *предельной точкой* траектории  $l$  при  $t \rightarrow +\infty$ , если существует последовательность моментов времени  $t_k \rightarrow +\infty$  такая, что  $\mathbf{x}(t_k) \rightarrow \mathbf{x}^*$ . Совокупность всех таких точек образует при  $t \rightarrow +\infty$  *предельное множество*  $L$ .

Очевидно, точка покоя является своей единственной предельной точкой; замкнутая траектория также является своим собственным предельным множеством. Предельные точки незамкнутых траекторий позволяют определять характер поведения траектории при больших  $t$ .

Если все начальные точки  $x_0$  из области  $V$  стремятся к  $L$  в пределе при  $t \rightarrow +\infty$ , то предельное множество  $L$  является притягивающим и называется *аттрактором*, а область  $V$  – *бассейном притяжения аттрактора*. Самые простые примеры аттрактора: устойчивые узлы, фокусы, предельные циклы.

Если же стремление к предельному множеству происходит в пределе при  $t \rightarrow -\infty$ , то предельное множество является отталкивающим и называется *репеллером*. Примеры репеллера: неустойчивые узлы, фокусы, предельные циклы. Инверсия времени переводит аттрактор в репеллер, и наоборот.

Множество  $V$  может состоять из двух подмножеств, причем точки из первого подмножества стремятся к предельному множеству  $L$  в прямом времени, тогда как точки из второго подмножества – в обратном времени. В этом случае предельное множество  $L$  называется *седловым или седлом*. Заметим, что точка типа центр не является ни аттрактором, ни репеллером, ни седловым множеством, так как отсутствует какое-либо притяжение к центру. Центр – это особый случай предельного множества, для которого  $V = L$ .



Существуют также предельные множества в форме замкнутых кривых, вблизи которых других замкнутых кривых нет. Такие предельные множества называются *предельными циклами* и соответствуют режимам *автоколебаний* динамической системы. Предельные циклы могут являться аттракторами, репеллерами или седловыми множествами: устойчивый цикл (притягивает к себе траектории снаружи и изнутри), неустойчивый (отталкивает от себя траектории снаружи и изнутри) и полуустойчивый (притягивает траектории снаружи и отталкивает изнутри, либо наоборот).

В многомерном случае динамические системы могут демонстрировать значительно более сложное поведение: помимо узлов, фокусов, седел, центров и предельных циклов возможны предельные множества в виде странных аттракторов.

*Аттракторы* делят на *регулярные* (притягивающие узлы, фокусы, предельные циклы) и *странные* (нерегулярные – зачастую фрактальные и/или в каком-либо сечении устроенные как канторово множество, динамика на них обычно хаотична). *Странный аттрактор* – это притягивающее множество неустойчивых траекторий. В отличие от регулярного аттрактора, странный аттрактор не является кривой или поверхностью. Структура странного аттрактора фрактальна. Траектория такого аттрактора непериодическая (она не замыкается) и режим функционирования неустойчив, малые отклонения от режима нарастают.

Различные типы регулярных предельных множеств и поведение фазовых траекторий в окрестности особых точек показаны на рис. 1.3.

Таким образом, в современной терминологии топологическая (или качественная) структура динамической системы определяется сведениями о характере и расположении предельных множеств.

3

## 1.7. Примеры качественного анализа динамических систем

### 1.7.1. Гармонический осциллятор в отсутствие трения

Рассмотрим движение материальной точки, движущейся вдоль прямой под действием возвращающей силы упругой пружины (рис. 1.5). При малых смещениях точки из состояния равновесия  $x^* = 0$  сила упругости  $F_{упр}$  является линейной и согласно закону Гука, пропорциональна смещению,  $F_{упр} = -Kx$ .

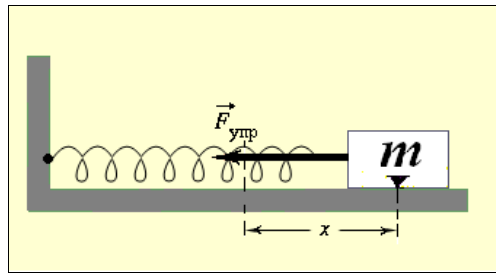


Рисунок 1.5. Пружинный маятник

Динамика материальной точки описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, для которого рассматривается начальная задача (задача Коши):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + Kx = 0; \quad x(0) = x_0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = v_0, \quad (1.16)$$

где  $m$  – масса материальной точки,  $K$  – сила упругости пружины. Задача (1.16) эквивалентна задаче Коши для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = p \\ \frac{dp}{dt} = -\omega_0^2 x \end{cases} \quad (1.17)$$

$$x(0) = x_0, \quad p(0) = v_0, \quad \omega_0^2 = K / m.$$

Координата  $x$  материальной точки и ее импульс  $p = \dot{x}$  полностью описывают состояние механической системы в момент времени  $t$ . Фазовыми координатами в этом случае является пара  $(x, p)$ . В подобных системах *число степеней свободы равняется единице* (поскольку речь идет об одномерном механическом движении), а фазовое пространство – двумерно.

Решив аналитически задачу Коши, получим описание эволюции системы в виде гармонических колебаний,

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad p(t) = a \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где  $a$  – амплитуда колебаний,  $\omega_0$  – собственная частота колебаний,  $\varphi_0$  – начальная фаза (рис.1.6).

Амплитуда и начальная фаза определяются начальными условиями: если  $x(0) = x_0$ ,  $p(0)=0$ , то из условия  $p(0) = a \omega_0 \cos(\varphi_0) = 0$  получаем фазу  $\varphi_0 = \pm \pi/2$ . Начальное условие  $x(0)=a \sin(\varphi_0)=x_0$  при положительной фазе дает амплитуду  $a = x_0$ .

В результате  $x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \pi/2)$ ,  $p(t) = x_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \pi/2)$ . Собственная частота колебаний определяется физическими свойствами системы,  $\omega_0^2 = K/m$ , период  $T = 2\pi/\omega_0$ .

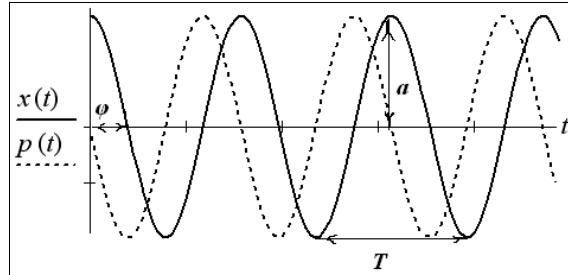


Рисунок 1.6. Гармонический осциллятор в отсутствие трения

Представим уравнение (1.16) в виде полного дифференциала, для этого умножим обе части уравнения на  $dx/dt$ , тогда

$$m \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + Kx \cdot \frac{dx}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{K \cdot x^2}{2} \right) = 0.$$

Следовательно, первый интеграл системы (1.16) равняется

$E = \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} + \frac{K \cdot x^2}{2} = const$ . Здесь  $E$  определяет полную энергию осциллятора. Следовательно, траектории, удовлетворяющие (1.16), являются траекториями постоянной энергии. Динамические системы, энергия которых в процессе движения сохраняет постоянное значение, называют *консервативными*.

Выражение полной энергии  $E$  представлено в виде суммы двух слагаемых,  $E = T + U$ , где  $T$  – кинетическая энергия,  $T = m \dot{x}^2 / 2$ ,  $U$  – потенциальная энергия,  $U = K x^2 / 2$ . Минимум полной энергии приходится на начало координат, с которым совпадает состояние равновесия  $x^* = p^* = 0$  системы (1.17). Далее мы увидим, что в этой точке система имеет устойчивое состояние равновесия типа центра.

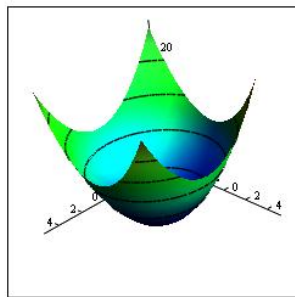
Уравнение движения на фазовой плоскости находим, исключая время из системы (1.17). Разделим первое уравнение на второе,  $\frac{dx}{dp} = -\frac{p}{\omega_0^2 x}$ ,

интегралом полученного дифференциального уравнения является семейство эллипсов  $\omega_0^2 x^2 + p^2 = const$ . Уравнения эллипсов с точностью до

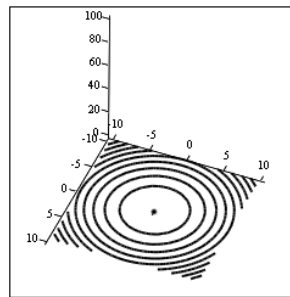
постоянного множителя совпадают с интегралом энергии. В результате всякому уровню полной энергии системы соответствует свой контур – линия уровня на фазовой плоскости. Она может быть получена проецированием поверхности энергии на фазовую плоскость. Множество траекторий на фазовой плоскости образуют фазовый портрет (рис. 1.7).

Характеристическое уравнение системы (1.17):  

$$|A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega_0^2 = 0, \text{ где } I - \text{единичная матрица.}$$
 Корни характеристического уравнения чисто мнимые,  $\lambda_{1,2} = \pm i \cdot \omega_0$ , что определяет устойчивое по Ляпунову состояние равновесия типа центра.



E



E, (0, 0)

Рисунок 1.7. Гармонический осциллятор в отсутствие трения. Поверхность полной энергии  $E(x, p) = (x^2 + p^2)/2$  и фазовый портрет на плоскости  $(x, p)$

Однако центр – структурно неустойчивая точка покоя (негрубая), характер и поведение интегральных линий в окрестности центра легко разрушается при малых изменениях дифференциальной системы.

### 1.7.2. Ангармонический осциллятор в отсутствие трения

Рассмотрим в качестве примера механического осциллятора физический маятник, совершающий под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс тела. В случае физического маятника центр тяжести  $C$  и центр качания  $O^*$  не совпадают (рис. 1.8).

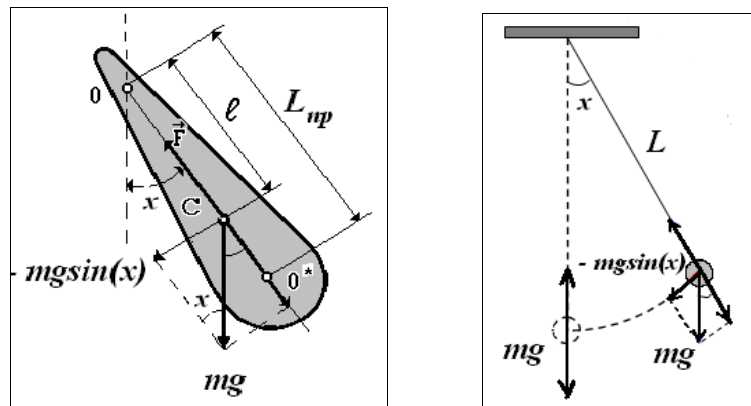


Рисунок 1.8. Механические осцилляторы: физический и математический маятники

Силу тяжести ( $mg$ ) можно разложить на две составляющие, одна из которых уравнивается реакцией опоры, другая составляющая есть возвращающая сила, под действием которой маятник приходит в движение. Обозначим через  $x$  – угол отклонения маятника от вертикали,

$J$  – момент инерции маятника относительно оси,

$M$  – момент сил, действующих на маятник относительно оси,

$l$  – расстояние от точки подвеса  $O$  до центра тяжести  $C$ ,

$g$  – ускорение силы тяжести,

$m$  – массу маятника.

На основании второго закона Ньютона колебания маятника без учета трения и сопротивления среды описываются дифференциальным уравнением

$$J \frac{d^2 x}{dt^2} = M. \quad (1.18)$$

Определим момент сил, действующих на маятник для углов произвольной величины:  $M = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin(x)$ , тогда из уравнения (1.18) следует

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 \sin(x) = 0, \quad (1.19)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{mgl}{J}$  – собственная частота колебаний маятника. В случае ма-

лых отклонений период колебаний  $T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{J / mgl}$ , его величина увеличивается с ростом момента инерции маятника. Обозначим через  $L_{пр}$  отношение момента инерции к произведению массы на длину,

$L_{np} = J / (ml)$ , тогда  $T = 2\pi\sqrt{L_{np} / g}$ . Величину  $L_{np}$  называют приведенной длиной физического маятника.

Когда масса маятника сосредоточена в точке, маятник становится идеализированным, его называют математическим. Для математического маятника момент инерции  $J=ml^2$ , период  $T_{mat} = 2\pi\sqrt{l / g}$ . Следовательно, приведенная длина физического маятника  $L_{np}$  – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Точка  $O^*$ , отстоящая от точки подвеса маятника  $O$  на расстояние приведенной длины  $L_{np}$ , называется *центром качаний* физического маятника (рис. 1.8). Точка подвеса  $O$  и центр качаний маятника  $O^*$  обладают свойством взаимозаменяемости: если точку подвеса перенести в центр качаний, то прежняя точка  $O$  подвеса станет новым центром качаний, и период колебаний физического маятника не изменится.

Итак, уравнение (1.19) есть уравнение свободных колебаний маятника. Аналитического решения уравнение (1.19) не имеет и требует применения численных методов. При малой амплитуде колебаний, когда  $x \ll 1$  можно принять  $\sin(x) \approx x$ , тогда (1.19) совпадает с (1.16), и его решение – гармонические колебания.

Нелинейное уравнение (1.19) эквивалентно дифференциальной системе:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = p \\ \frac{dp}{dt} = -\omega_0^2 \sin(x) \end{cases} \quad (1.20)$$

Состояния равновесия системы (1.20) находим из условия  $\dot{x} = \dot{p} = 0$ . Система имеет бесчисленное множество состояний равновесия. На фазовой плоскости они расположены на оси  $OX$  в точках с координатами

$$(\pi \cdot k, 0), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Четные значения  $k=2n$  определяют множество точек  $x_{2n}^* = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ , которые являются точками устойчивого равновесия (нижние положения маятника). Нечетным  $k=2n+1$  отвечает множество точек,  $x_{2n+1}^* = 0, \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ , которые являются точками неустойчивого равновесия (верхние положения). Вблизи устойчивых точек система первого приближения для (1.20) совпадает с (1.17), совпадают также характеристические уравнения и их корни,  $\lambda_{1,2} = \pm i \cdot \omega_0$ .

В случае линейной системы нижние положения  $x_{2n}^* = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$  определяют на фазовой плоскости бесчисленное множество центров. Однако распространить этот результат на нелинейную систему нельзя, поскольку, именно в случае чисто мнимых корней исследование нелинейной системы по первому приближению невозможно. В общем случае для решения вопроса об устойчивости нелинейной системы существуют два подхода: искать приближенное решение, либо попытаться определить первый интеграл.

В программном пакете MathCAD имеется вычислительный блок *Given-Odesolve*, в котором реализован алгоритм Рунге-Кутты приближенного решения дифференциальных уравнений. Результаты его применения к уравнению (1.19) показывают, что для ангармонического осциллятора характер положений равновесия и поведение траекторий вблизи них сохраняются. Фазовые траектории представляют собой замкнутые контуры эллиптической формы, окружающие центр, при этом маятник совершает колебания, близкие к гармоническим (рис 1.9).

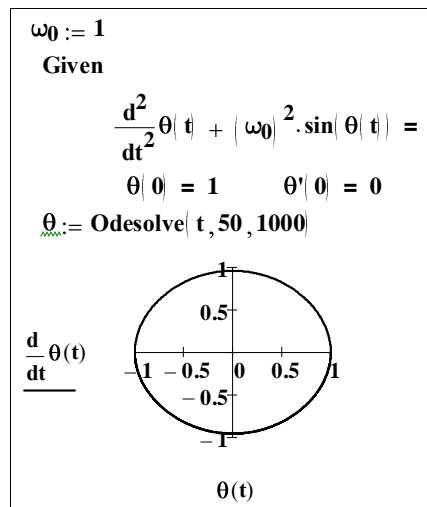


Рисунок 1.9. Ангармонический осциллятор в отсутствие трения. Приближенное решение уравнения движения в пакете MathCAD и построение фазового портрета

Когда движение начинается в окрестности верхнего положения равновесия, например, вблизи точки с координатами  $(\pi, 0)$ , система первого приближения принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = p \\ \frac{dp}{dt} = \omega_0^2(x - \pi) \end{cases}.$$

Характеристическое уравнение линеаризованной системы:

$$|A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \omega_0^2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \omega_0^2 = 0. \text{ Корни вещественные и противополож-}$$

ных знаков,  $\lambda_{1,2} = \pm \omega_0$ . Следовательно, верхние положения равновесия, являются седловыми точками, они неустойчивы. Интегральные кривые в этом случае представляют собой гиперболы. Через каждую седловую точку проходят две интегральные линии, называемые сепаратрисами; они делят фазовую плоскость на области с качественно различным поведением траекторий. По одной из них движение направлено к седловой точке, по другой – от седла.

Представим уравнение (1.19) в виде полного дифференциала,

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \sin(x) \cdot \frac{dx}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{x}^2}{2} - \omega_0^2 \cos(x) \right) = 0.$$

Первый интеграл системы (интеграл энергии) определяется выражением:  $E = \frac{\dot{x}^2}{2} - \omega_0^2 \cos(x) = const$ . Соответствующая ему 3D-поверхность и фазовый портрет показаны на рис. 1.10.

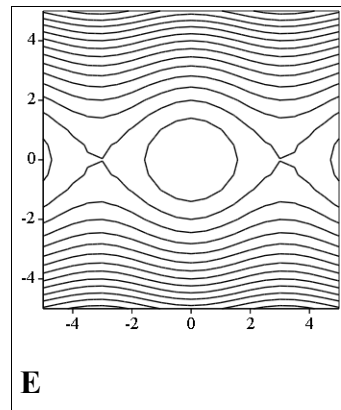
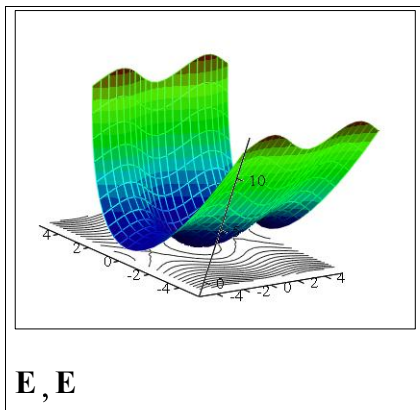


Рисунок 1.10. Анггармонический осциллятор в отсутствие трения.  
Поверхность энергии и фазовый портрет



При росте энергии система удаляется от центров и колебания переходят во вращение. Потенциальная энергия системы представлена косинусоидой,  $U(x) = -\omega_0^2 \cos(x)$ . Проекция минимумов потенциальной энергии на фазовую плоскость совпадают с положением устойчивых точек покоя, им отвечают центры, а проекции максимумов – с неустойчивыми седлами. Эта особенность ангармонического осциллятора хорошо видна на рисунке 1.11, где приводится фазовый портрет системы на фоне изменения потенциальной энергии. По существу рисунок 1.11 дает еще один способ построения фазового портрета путем многократного численного решения начальной задачи для дифференциальной системы при различных начальных условиях.

```

ORIGIN:=1    k:=1..13    u:=-10,-9.9..10
Y0:=
| 0.5 6.78 12.42 14.56 -12.7 -9.42 9.42 3.14 1 7.28 -14.56 -5.28 -6.28 |
| 0 0 -3 -2 3 0 0 0 1 1 2 1 -0.5 |

f(x,y):=
| y2 |
| -sin(y1) |

Yk:=rkfixed(Y0(k),0,50,2000,f)

```

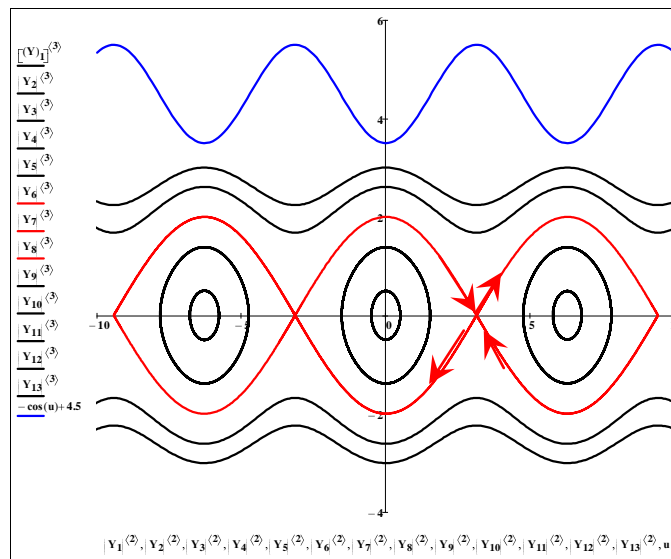


Рисунок. 1.11. Ангармонический осциллятор в отсутствие трения. Фазовый портрет. Сепаратрисы показаны красным, потенциальная энергия – синим цветом. Стрелки отвечают направлению возрастания времени.

В пакете MathCAD имеется встроенная функция *rkfixed*, которая также как и *Odesolve*, реализует численный метод Рунге-Кутты, но ориентирована главным образом на решение дифференциальных систем. С помощью этой встроенной функции получено приближенное решение системы (1.20), его динамика в трехмерном фазовом пространстве  $(t, x, p)$  пока-

зана на рис.1.12. Проекция пространственной кривой на горизонтальную плоскость  $(x,p)$  дает фазовый портрет, на боковые плоскости – графики динамики амплитуды и скорости колебаний.

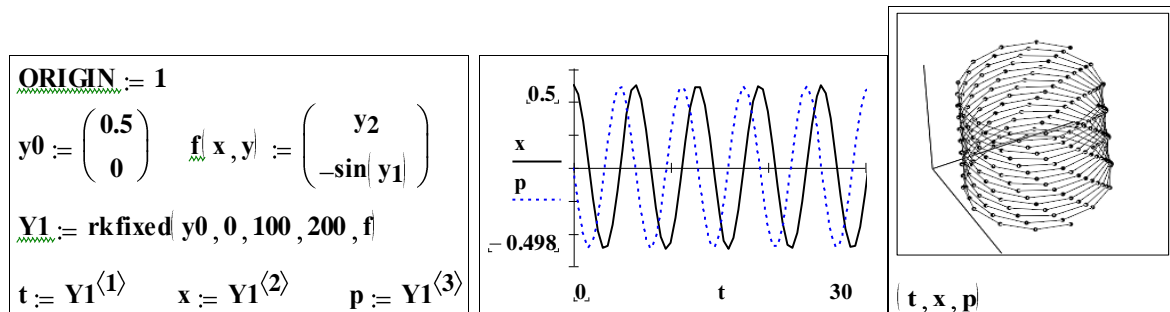


Рисунок 1.12. Анггармонический осциллятор в отсутствие трения  
Динамика системы на плоскостях  $(t,x)$ ,  $(t,p)$  и в фазовом пространстве  $(t,x,p)$

### 1.7.3. Гармонический осциллятор с трением

Уравнение движения маятника с учетом сопротивления среды имеет вид:  $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x = 0$ ,  $0 < t \leq T$ . Заменой переменных уравнение приводится к виду:  $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = 0$ ,  $0 < \tau \leq T\sqrt{\beta/m}$ , в котором  $\delta$  – коэффициент затухания, зависящий от формы и размеров тела; дифференцирование выполняется по переменной  $\tau$ . В отличие от предыдущих примеров, здесь энергия не сохраняется, это система с диссипацией, в которой "сила" равняется величине  $-(2\delta\dot{x} + x)$  и зависит не только от положения материальной точки, но и от скорости.

Полная энергия системы  $E$ , расходуемая на преодоление сил трения, не восполняется и со временем убывает.

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2} \right) = -2\delta \cdot \dot{x}^2 \leq 0.$$

Таким образом, энергия сохраняется, если  $\delta=0$  (трение отсутствует), и убывает, если  $\delta > 0$ . Состояние с нулевой энергией (состояние покоя) устойчиво, маятник с необходимостью эволюционирует к этому состоянию.

Матрица линейной дифференциальной системы  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2\delta \end{pmatrix}$ , ее собственные числа зависят от коэффициента затухания  $\delta$ :

$$\text{eigenvals}(A) \rightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{(\delta-1) \cdot (\delta+1)} - \delta \\ -\delta - \sqrt{(\delta-1) \cdot (\delta+1)} \end{bmatrix}.$$

Когда  $\delta > 0$ , наблюдаются два случая: периодическое или аperiodическое движение.

1)  $0 < \delta < 1$ , собственные числа – комплексно сопряженные с отрицательной вещественной частью; динамика амплитуды колебаний соответствует *затухающим колебаниям* (рис. 1.13 a,b) и следуют закону:

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \psi), \quad \omega = \sqrt{1 - \delta^2}.$$

На фазовой плоскости возникает асимптотически устойчивый фокус, на него спирально «навиваются» траектории системы (рис. 1.13 c).

2)  $\delta \geq 1$ , собственные числа вещественные, отрицательные, траектория описывает *аperiodическое движение без колебаний*,

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_{1,2} = (-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1}) / 2.$$

Фазовый портрет – асимптотически устойчивый узел (рис. 1.13 d).

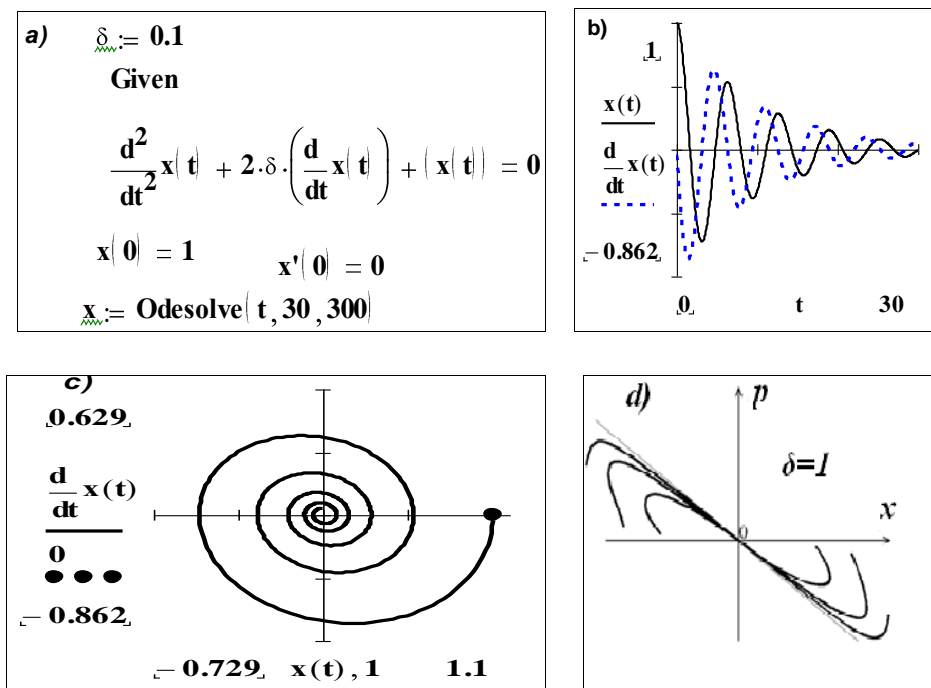


Рисунок. 1.13. Гармонический осциллятор с трением. Различные режимы демпфирования:  $0 < \delta < 1$  – затухающие колебания (a, b. c);  $\delta \geq 1$  – аperiodическое движение (d)

Итак, если  $\delta > 0$  осциллятор характеризуется единственным устойчивым состоянием равновесия в начале координат. Независимо от выбора начальных условий при  $t \rightarrow \infty$  любая изображающая точка стремится к началу координат.

В случае «отрицательного» трения ( $\delta < 0$ ) энергия неограниченно возрастает, исключая ситуацию, в которой исходным является состояние покоя. Но при  $\delta < 0$  состояние покоя неустойчиво, малейшие смещения маятника из состояния покоя со временем только усиливаются.

Таким образом, введение диссипации энергии в колебательную систему привело к качественной перестройке структуры фазового портрета: при  $\delta > 0$  появилась притягивающая точка (аттрактор) типа устойчивого равновесия (фокуса или узла).

#### 1.7.4. Ангармонический осциллятор с трением

Ангармонический осциллятор с трением это еще один пример диссипативной системы, его уравнение:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \sin(x) = 0 \quad (1.21)$$

Уравнению (1.21) соответствует дифференциальная система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = p \\ \frac{dp}{dt} = -\omega_0^2 \sin(x) - 2\delta \cdot p \end{cases} \quad (1.22)$$

Система (1.22) имеет бесчисленное множество состояний равновесия. На фазовой плоскости им отвечают точки оси  $OX$  с координатами

$(\pi \cdot k, 0)$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Вблизи нижних положений равновесия с четными значениями  $k$  система первого приближения имеет матрицу

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\delta \end{pmatrix}$ . Собственные значения  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$  определяют при

$\delta \geq \omega_0$  асимптотически устойчивые узлы, как для линеаризованной системы, так и для ангармонического осциллятора с трением. Колебаний в системе нет, реализуется апериодический процесс. Траектории системы являются параболическими, их динамика и профиль на фазовой плоскости показаны на рис. 1.14.

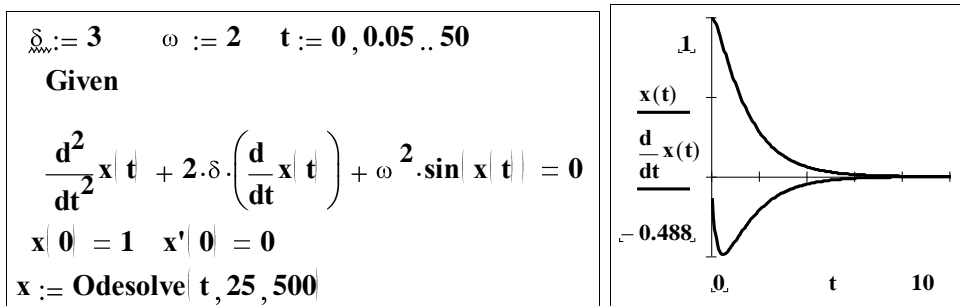


Рисунок 1.14. Анггармонический осциллятор с трением. Аперриодический процесс

При малых коэффициентах затухания, когда  $\delta < \omega_0$ , собственные значения матрицы  $A$  являются комплексно-сопряженными и определяют асимптотически устойчивые фокусы. Траектории системы имеют вид спиралей, навивающихся на положение равновесия (рис. 1.15). Таким образом, нижние положения маятника  $x_{2n}^* = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ , являются точками устойчивого равновесия.

Вблизи верхних положений равновесия, с нечетными  $k$ , матрица системы первого приближения  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & -2\delta \end{pmatrix}$ , собственные значения  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}$  — вещественные, различных знаков. Следовательно, точки,  $x_{2n+1}^* = 0, \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$  являются неустойчивыми, седловыми точками.

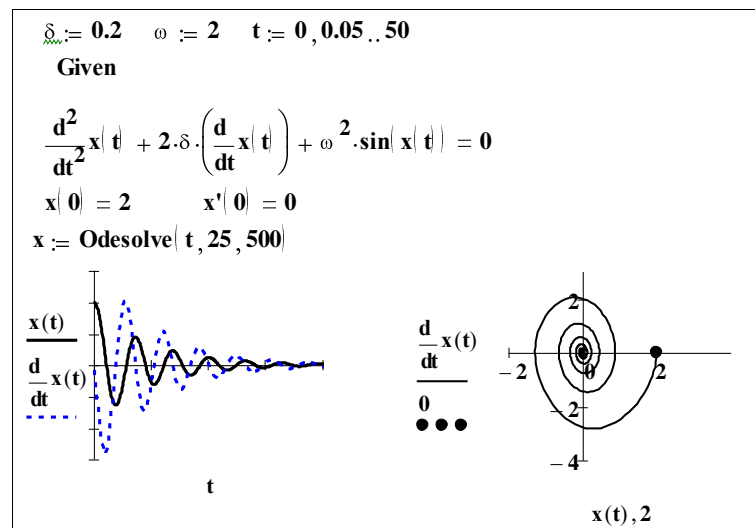


Рисунок 1.15. Анггармонический осциллятор с трением.  
Затухающие колебания,  $\delta < \omega_0$

Фазовый портрет анггармонического осциллятора с трением показан на рисунке 1.16.

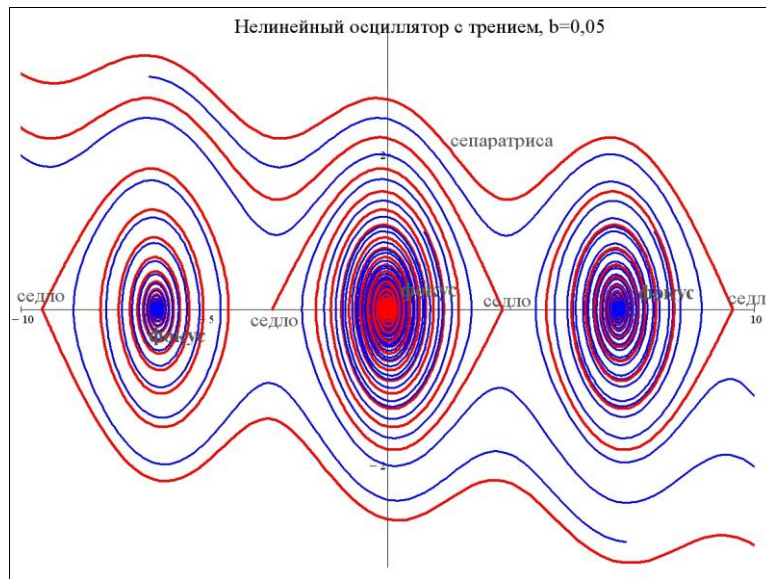


Рисунок 1.16. Ангармонический осциллятор с трением.  
Фазовый портрет, Сепаратрисы седел выделены красным цветом.

Итак, можно заметить, что в консервативных системах не существует притягивающих множеств, т.е. таких подмножеств фазового пространства  $R_N$ , к которым с течением времени стремятся траектории, начинающиеся в некоторой их окрестности. Если в консервативной системе существует периодическое движение, то таких движений бесконечно много, и определяются они уровнем энергии в начальный момент. Эти особенности являются общими для всех консервативных систем. В диссипативных же системах могут существовать так называемые притягивающие множества, например, типа устойчивых положений равновесия (узлов или фокусов).

#### 1.7.5. Модельная динамическая система

Модель движения некоторой динамической системы представлена обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = a \sin(y) \\ \dot{y} = b \cos(x) \end{cases}, \quad (1.23)$$

где  $a$  и  $b$  — заданные управляющие параметры.

### ***Состояния равновесия***

В силу периодического характера правых частей системы (1.23), имеется бесчисленное множество положений равновесия, координаты которых находятся из условий:  $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{(x^*, y^*)} = a \sin(y^*) = 0$ ,  $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{(x^*, y^*)} = b \cos(x^*) = 0$

или  $x^* = (\pi/2) + \pi k$ ,  $y^* = \pi k$ , где  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Различные комбинации четных и нечетных  $k$  дают четыре последовательности особых точек:

$$\left( \frac{\pi}{2} + 2\pi n, 2\pi n \right), \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi + 2\pi n \right), \left( -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, 2\pi n \right), \left( -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi + 2\pi n \right)$$

где  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

### ***Анализ устойчивости системы по первому приближению***

Составим систему первого приближения вблизи особых точек каждой из четырех последовательностей. Для первой последовательности точек с координатами  $\left( \frac{\pi}{2} + 2\pi n, 2\pi n \right)$  система первого приближения имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - y^*) \\ \dot{y} = b(x^* - x) \end{cases} \quad (1.24)$$

Характеристическое уравнение соответствующей однородной системы  $\begin{vmatrix} -\lambda & a \\ -b & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + ab = 0$ , его корни при  $c=ab>0$  являются чисто мнимыми,  $\lambda_{1,2} = \pm i \cdot \sqrt{c}$ . В этом случае исследование системы по первому приближению невозможно, так как на поведение траекторий вблизи особых точек влияют нелинейные члены разложения правых частей (1.23). Однако фазовый портрет, который будет построен далее ( $c=1$ ), демонстрирует сохранение характера точек покоя, они также как и в случае линейной системы будут центрами.

Если  $c<0$ , корни вещественные и противоположных знаков,  $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{c}$ , стационарные точки – седловые, исходная нелинейная система (1.23) в этих точках неустойчива.

Вблизи второй последовательности точек покоя характеристическое уравнение  $\lambda^2 - c = 0$  имеет при  $c>0$  вещественные корни противополож-

ных знаков, поэтому положения равновесия – седла. Когда же  $c < 0$ , точки покоя – центры.

Для третьей последовательности точек покоя полностью повторяется ситуация второй последовательности, тогда как четвертая последовательность точек покоя ведет себя аналогично первой последовательности. Таким образом, динамическая система имеет бесчисленное множество "центров" и "седел", тип конкретного состояния равновесия зависит от знака управляющего параметра  $c = ab$ .

### ***Консервативный характер системы, сохранение энергии***

Определим первый интеграл системы (1.23). Перейдем на фазовую плоскость,  $\frac{dx}{dy} = \frac{a \sin(y)}{b \cos(x)}$ . Полученное уравнение – с разделяющимися переменными:  $b \cos(x) dx = a \sin(y) dy$ ; его интеграл  $b \sin(x) = -a \cos(y) + E$ , где  $E = \text{const}$  – произвольная константа интегрирования.

Выражение  $E = b \sin(x) + a \cos(y)$  является первым интегралом (1.23) и имеет смысл полной энергии системы. Поскольку  $E = \text{const}$ , система является консервативной. График поверхности  $E(x, y)$  в трехмерном пространстве показан на рис. 1.17.

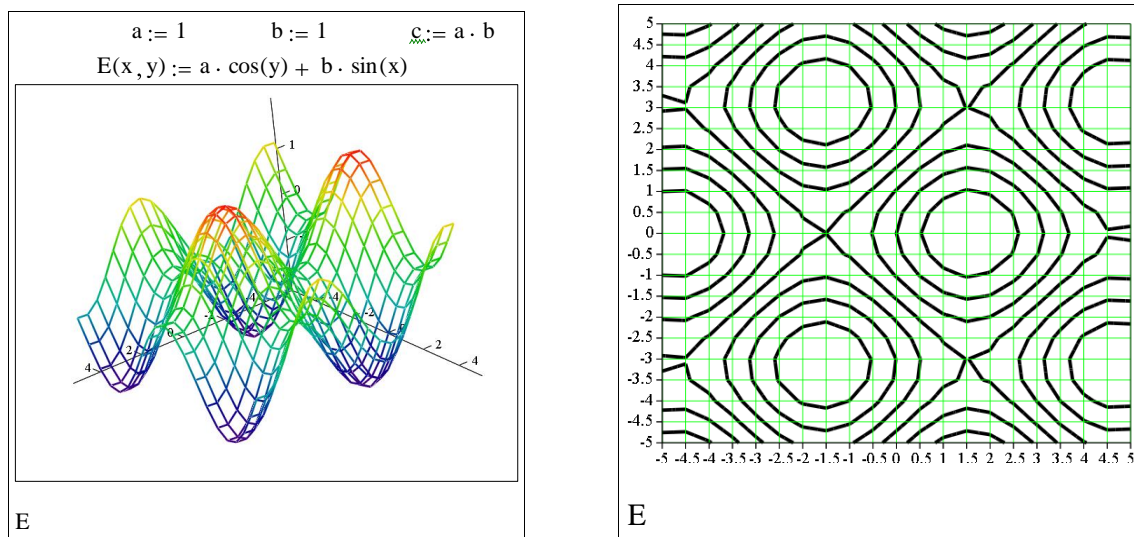


Рисунок 1.17. Поверхность энергии и фазовый портрет

### ***Уравнения сепаратрис на фазовой плоскости***

Определим уровень полной энергии системы в седловых точках, например при  $c > 0$ :



$$E(\pi/2, \pi) = c[\sin(\pi/2) + \cos(\pi)] = 0, \quad E(-\pi/2, 0) = 0.$$

Следовательно, произвольная константа в интеграле энергии равняется нулю, поэтому уравнение сепаратрисы на фазовой плоскости определяется соотношением  $\sin(x) + \cos(y) = 0$ . Разрешая его относительно  $y$ , находим два семейства прямых:  $y = x + (\pi/2) + 2\pi n$  и  $y = -x - (\pi/2) + 2\pi n$ .

Таким образом, имеется бесчисленное множество прямолинейных сепаратрис, идущих из седла в седло и образующих прямоугольную сетку на фазовой плоскости. Внутри каждой клетки этой сетки расположены точки покоя типа центров. При другом соотношении параметров  $a$  и  $b$  профиль сепаратрис искривляется, они образуют петли и расщепляются.

### ***Построение фазового портрета с использованием поверхности энергии***

Фазовый портрет системы (1.23) является проекцией трехмерной поверхности энергии на плоскость  $(x, y)$ , рис. 1.17. Для его построения можно использовать графическую панель пакета MathCAD в формате "линии уровня". Вдоль замкнутых траекторий с центрами на оси абсцисс *направление движения – по часовой стрелке*. На соседних замкнутых траекториях с центрами на линиях  $y = \pm\pi$ , направление движения против часовой стрелки; на линиях  $y = \pm 2\pi$  – снова по часовой.

### ***Трехмерная потенциальная функция***

Запишем уравнение движения Ньютона для тела с единичной массой, на которое действует сила  $F(z)$ :  $\frac{d^2 z}{dt^2} = F(z)$ . Учитывая, что сила равняется градиенту потенциальной функции с противоположным знаком,  $F(z) = -\frac{dU(z)}{dz}$ , уравнение движения можно переписать в виде:  $\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{dU(z)}{dz}$ . Иначе, движение динамической системы второго порядка происходит в *поле потенциальных сил*, а сама система является *потенциальной*, когда ее динамика описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = F(z) = -\frac{dU}{dz}.$$

здесь  $U(z)$  – потенциальная функция.

Исходную систему (1.23) сведем к одному дифференциальному уравнению второго порядка, такую процедуру выполним для каждой фазовой переменной:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = ab \cos(y) \cos(x) \equiv - \frac{\partial (-ab \cos(y) \sin(x))}{\partial x},$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -ab \sin(x) \sin(y) \equiv - \frac{\partial (-ab \sin(x) \cos(y))}{\partial y}.$$

Таким образом, потенциальная функция системы (1.23) зависит от двух аргументов,  $U(x, y) = -c \sin(x) \cos(y)$ , где  $c = ab$  – заданный параметр.

На рис. 1.18 показана трехмерная поверхность потенциальной функции  $U(x, y)$  и фазовый портрет системы (при совместном построении на одном чертеже двух графиков – один график форматируется в пакете MathCAD как поверхность, а второй – как линии уровня).

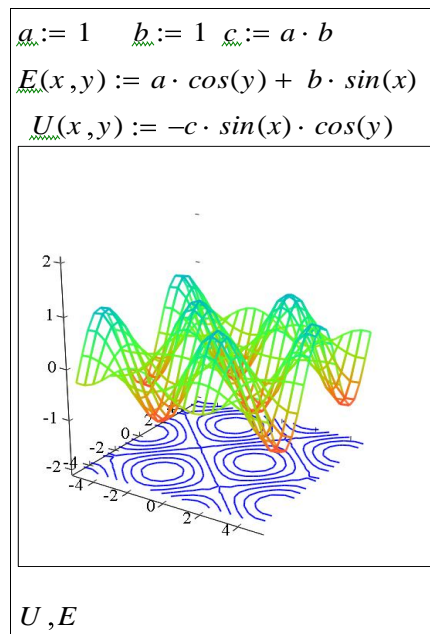


Рисунок 1.18. Взаимосвязь положения особых точек на фазовой плоскости и экстремумов потенциальной функции

Все точки покоя динамической системы располагаются вдоль линий, которые являются проекциями на фазовую плоскость экстремумов потенциальной функции  $U(x, y)$ . Они разделяются на две группы – центры и седловые точки. Центры располагаются на линиях-проекциях минимумов, а

седловые точки – на линиях-проекциях максимумов потенциальной функции  $U(x,y)$ .

### **Численное интегрирование уравнений движения**

Выберем на фазовой плоскости две точки: одну точку возьмем на сепаратрисе, другую точку – вне сепаратрисы, на одной из замкнутых траекторий. Принимая последовательно координаты каждой из двух выбранных точек в качестве начальных условий в задаче Коши, найдем приближенное решение дифференциальной системы (1.23).

Различные начальные условия соответствуют различным начальным уровням энергии, поэтому и траектории системы принципиально различаются по характеру движения (рис. 1.19).

Замкнутый контур на фазовой плоскости соответствует движению, которое близко к гармоническим колебаниям. Тогда как движение вблизи сепаратрисы, не имеет ничего общего с гармоническими колебаниями, здесь траектории напоминают скорее импульсный режим, с характерными для него релейными переключениями (рис. 1.20). Те же траектории движения в трехмерном пространстве показаны на рис. 1.21.

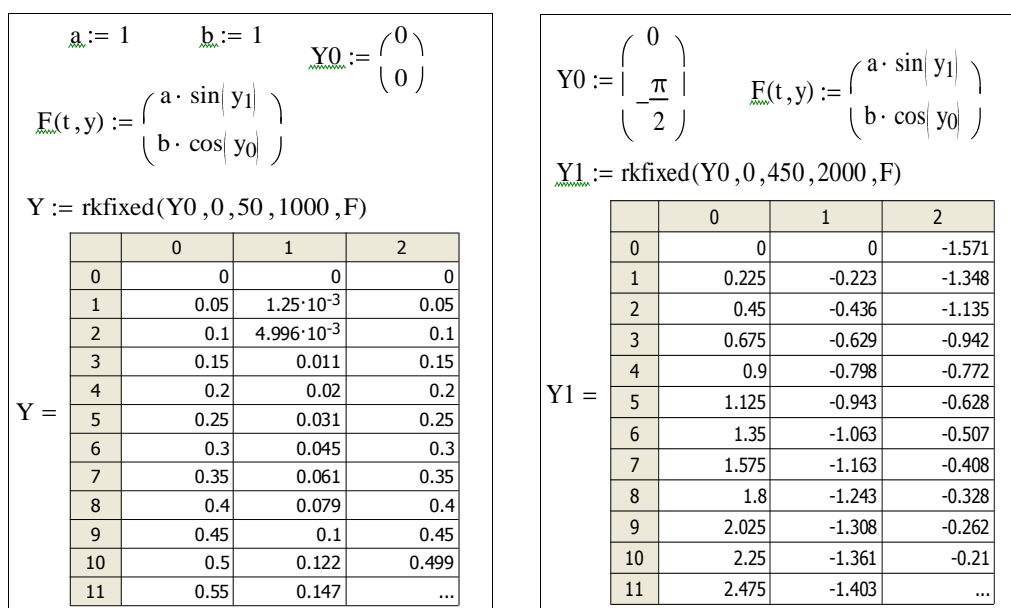


Рисунок 1.19. Листинги программного пакета MathCAD при выполнении численного интегрирования

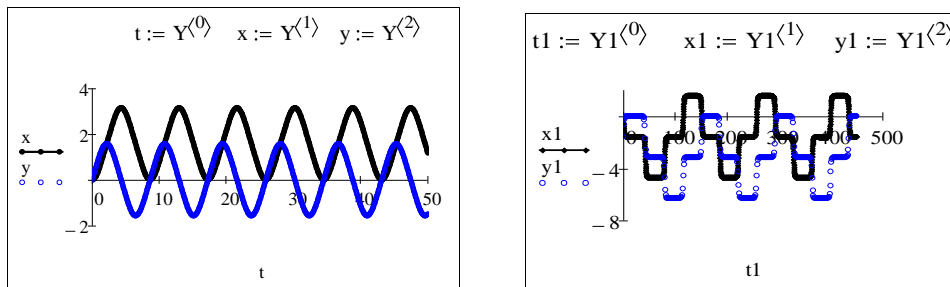


Рисунок 1.20. Результаты численного интегрирования: слева – квазигармонический режим, справа – режим на сепаратрисе

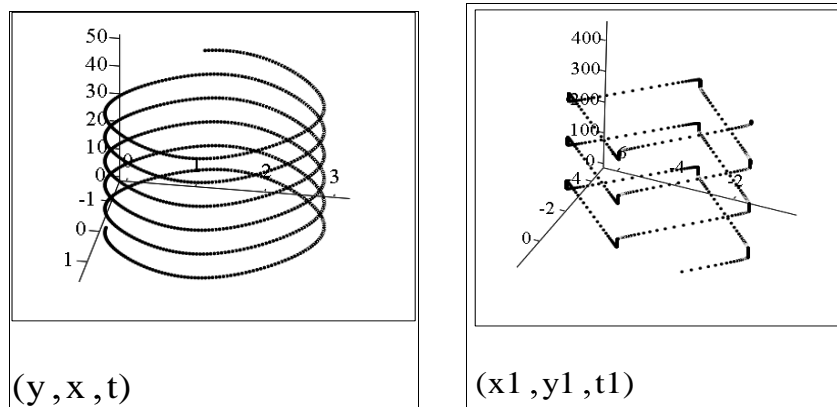


Рисунок 1.21. Траектории движения в трехмерном пространстве  $(x, y, t)$ : слева – квазигармонический режим, справа – движение на сепаратрисе

### Структурная неустойчивость системы

Анализируемая динамическая система структурно неустойчива, так как среди точек покоя имеются центры. Не смотря на то, что центр – устойчивая по Ляпунову стационарная точка, он легко разрушается и при незначительных изменениях правых частей дифференциальной системы переходит в фокус.

Система имеет также сепаратрисы, идущие из седла в седло – согласно необходимым и достаточным условиям грубости динамических систем, подобная особенность делает систему структурно неустойчивой.

Предельных множеств система не имеет: нет положений равновесия или предельных циклов, к которым с ростом  $t$  асимптотически приближались бы траектории системы.

### Взаимосвязь модельной динамической системы с колебаниями физического пружинного маятника

Восстановим потенциальную функцию системы (1.23),  $U(x, y) = -c \sin(x) \cos(y)$ , и выполним элементарные преобразования:

$U(x, y) = -\frac{c}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)]$ . В результате естественно возникают сумма  $z=(x+y)$  и разность  $w=(x-y)$  исходных фазовых переменных. Для каждой из них определим вторую производную в силу системы (1.23):  $\frac{d^2 z}{dt^2} = c \cos(z)$ ,  $\frac{d^2 w}{dt^2} = c \cos(w)$ . Правые части полученных дифференциальных уравнений совпадают, значит, динамика  $z(t)$  и  $w(t)$  следует одному и тому же закону – закону колебаний ангармонического осциллятора в отсутствие трения. Изменение во времени  $z(t)$  может отличаться от динамики  $w(t)$  только начальными условиями, которые задают амплитуду и фазу, тогда как периоды колебаний переменных  $z(t)$  и  $w(t)$  совпадают, и определяются физическими свойствами системы, а именно, управляющим параметром модели  $c=ab$ .

Исходные фазовые переменные модельной системы  $x(t)$ ,  $y(t)$  и переменные  $z(t)$  и  $w(t)$  могут быть интерпретированы в терминах колебаний физического пружинного маятника (рис. 1.22).

Отличие физического маятника от маятника математического состоит в том, что центр тяжести физического маятника  $C$  не совпадает с центром колебаний  $O^*$ . Введенное для физического маятника понятие *приведенной длины* позволяет компенсировать несовпадение двух центров и, по сути, свести задачу физического маятника к маятнику математическому в случае круговых маятников. Однако для пружинного маятника, показанного на рисунке 1.22, «правое» и «левое» отклонения центра тяжести от положения равновесия различаются.

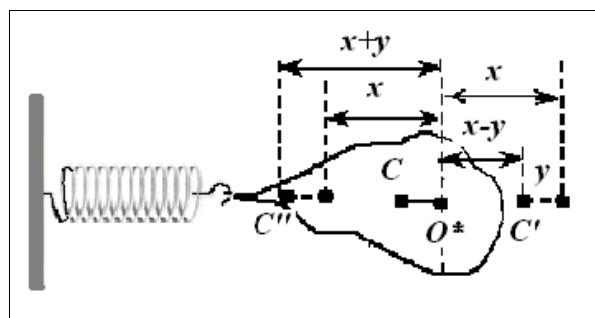


Рисунок 1.22. Пружинный физический маятник

Отклонение маятника вправо создает между положением равновесия  $O^*$  и новым положением центра тяжести  $C'$  расстояние, равное  $(x-y)$ , где  $x$  – величина смещения от положения равновесия,  $y$  – расстояние между центрами.

При отклонении влево на ту же величину  $x$ , расстояние между новым положением центра тяжести  $C''$  и положением равновесия  $O^*$  становится равным  $(x+y)$ .

Итак,  $x$  – величина смещения маятника от положения равновесия,  
 $y$  – расстояние между центрами тяжести и колебаний,  
 $w$  – расстояние между центрами  $C'$  и  $O^*$ , правое отклонение,  
 $z$  – расстояние между центрами  $C''$  и  $O^*$ , левое отклонение.

Динамику подобного осциллятора можно описать различными способами, один из них – дифференциальная система для пары показателей, второй – уравнение второго порядка для любой фазовой переменной  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  или  $w(t)$ . Очевидно, что результаты будут эквивалентными.

Квазигармонические колебания для  $z(t)$  и  $w(t)$  показаны на рис. 1.23. Смещение по времени переменной  $w(t)=(x-y)$  на величину, равную 6,5 единиц, приводит к совпадению обоих графиков (рис. 1.23 б).

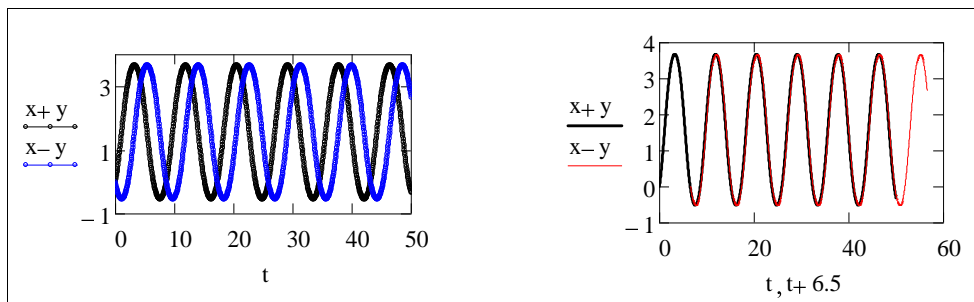


Рисунок 1.23. Квазигармонические колебания  $z(t)$  и  $w(t)$

Движение вдоль сепаратрисы показано на рис. 1.24. Здесь совпадают частота колебаний и размах по амплитуде, поэтому линейным преобразованием одного из графиков также удастся добиться их совмещения (рис. 1.24, б).

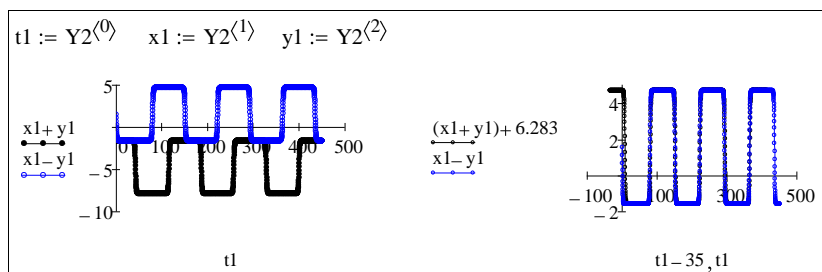


Рисунок 1.24. Движение вдоль сепаратрисы, динамика  $z(t)$  и  $w(t)$

## Выводы

Модельный осциллятор содержательно интерпретируется в терминах физического пружинного маятника в отсутствие трения.

Различные начальные условия (начальные уровни энергии) порождают движения осциллятора, принципиально различающиеся по своему характеру.

Качественные изменения и переход от одного вида движения к другому зависят не только от начальных условий, изменение внешних управляющих параметров  $a$ ,  $b$  также может приводить к структурной перестройке фазовых траекторий.

В комбинированном фазовом пространстве рассмотренной выше динамической системы *прямая  $a=b$  определяет бифуркационную границу*, на которой система является структурно неустойчивой. Отклонение от этой границы вызывает на фазовой плоскости расщепление сепаратрис, в результате которого между сепаратрисными петлями возникает область с траекториями синусоидального типа, они соответствуют вращательному движению. При изменении параметров в обратном направлении сепаратрисы сливаются, и указанная область исчезает, а вместе с ней исчезает и вращательное движение.

### Задание 1

Проведите качественный анализ динамики: гармонического осциллятора в отсутствие трения; гармонического осциллятора с трением; ангармонического осциллятора в отсутствие трения; ангармонического осциллятора с трением. Значения параметров  $\omega$  и  $\delta$  задаются преподавателем.

1. Определите аналитически особые точки.
2. Выполните анализ устойчивости по Ляпунову. Определите характер особых точек и поведение траекторий системы в их окрестности.
3. Для консервативных осцилляторов аналитически определите первый интеграл – интеграл энергии. Постройте 3D - поверхности энергии и фазовые портреты анализируемых динамических систем. Определите на фазовой плоскости *направление* движения, отвечающее возрастанию времени.
4. Для консервативных осцилляторов определите *потенциальную функцию* системы. Проанализируйте *взаимосвязь* особенностей фазового портрета системы и локальных экстремумов потенциальной функции.
5. Получите с помощью встроенных функций *Odesolve* или *rkfixed* пакета MathCAD приближенные решения дифференциальных систем, принципиально различающиеся по характеру движения и отвечающие различным начальным условиям. Проанализируйте их поведение.
6. Постройте графики динамики  $x(t)$ ,  $dx(t)/dt$  и соответствующие им контуры на фазовой плоскости.
7. Сделайте содержательные выводы.

## Задание 2

Проведите качественный анализ модельной динамической системы, описание которой дается дифференциальными уравнениями, согласно варианту.

1. Определите аналитически *особые точки и особые траектории* динамической системы, выполните *анализ устойчивости по первому приближению*.

2. Определите *первый интеграл* динамической системы. Какой *физический смысл* имеет первый интеграл?

Запишите уравнение сепаратрис в фазовых координатах.

3. Постройте *фазовый портрет* динамической системы. Определите на фазовой плоскости *направление* движения, отвечающее *возрастанию* времени.

4. Покажите на графике *потенциальную функцию* системы. Проанализируйте *взаимосвязь* особенностей фазового портрета системы и локальных экстремумов потенциальной функции.

5. Выберите на фазовой плоскости две точки, соответствующие типовым траекториям, принципиально различающимся по характеру движения, например, одну точку на сепаратрисной петле, другую – на одной из замкнутых кривых, вне сепаратрисы. Используя координаты выбранных точек в качестве начальных условий в задаче Коши, получите с помощью встроенной функции *rkfixed* пакета MathCAD *приближенные решения дифференциальной системы*.

6. Постройте графики *динамики*  $x(t)$  и  $y(t)$ . Проанализируйте характер изменения траекторий, различающихся начальными условиями. Каким образом изменяется значение первого интеграла системы при переходе от одной траектории к другой?

7. Постройте траектории движения в *трехмерном пространстве*  $(t, x, y)$ .

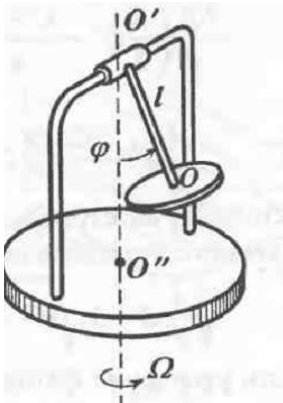
8. Имеет ли динамическая система *предельные множества*? Является ли система структурно устойчивой?



*Варианты к заданию 2*

- |  |  |   |  |
|--|--|---|--|
| 1. $\begin{cases} \dot{x} = \sin(y) \\ \dot{y} = -\sin(x) \end{cases}$   | 2. $\begin{cases} \dot{x} = \cos(y) \\ \dot{y} = -\cos(x) \end{cases}$   | 3. $\begin{cases} \dot{x} = \sin(y) \\ \dot{y} = -\cos(x) \end{cases}$    | 4. $\begin{cases} \dot{x} = \cos(y) \\ \dot{y} = -\sin(x) \end{cases}$   |
| 5. $\begin{cases} \dot{x} = 2\sin(y) \\ \dot{y} = -\sin(x) \end{cases}$  | 6. $\begin{cases} \dot{x} = \sin(y) \\ \dot{y} = -2\sin(x) \end{cases}$  | 7. $\begin{cases} \dot{x} = 2\sin(y) \\ \dot{y} = -2\sin(x) \end{cases}$  | 8. $\begin{cases} \dot{x} = 3\sin(y) \\ \dot{y} = -2\sin(x) \end{cases}$ |
| 9. $\begin{cases} \dot{x} = \cos(y) \\ \dot{y} = -2\cos(x) \end{cases}$  | 10. $\begin{cases} \dot{x} = 2\cos(y) \\ \dot{y} = -\cos(x) \end{cases}$ | 11. $\begin{cases} \dot{x} = 2\cos(y) \\ \dot{y} = -2\cos(x) \end{cases}$ | 12. $\begin{cases} \dot{x} = 3\cos(y) \\ \dot{y} = -\cos(x) \end{cases}$ |
| 13. $\begin{cases} \dot{x} = 2\sin(y) \\ \dot{y} = -\cos(x) \end{cases}$ | 14. $\begin{cases} \dot{x} = \sin(y) \\ \dot{y} = -2\cos(x) \end{cases}$ | 15. $\begin{cases} \dot{x} = 3\sin(y) \\ \dot{y} = -3\cos(x) \end{cases}$ | 16. $\begin{cases} \dot{x} = 4\sin(y) \\ \dot{y} = -\cos(x) \end{cases}$ |
| 17. $\begin{cases} \dot{x} = 7\cos(y) \\ \dot{y} = -\sin(x) \end{cases}$ | 18. $\begin{cases} \dot{x} = \cos(y) \\ \dot{y} = -7\sin(x) \end{cases}$ | 19. $\begin{cases} \dot{x} = 8\cos(y) \\ \dot{y} = -\sin(x) \end{cases}$  | 20. $\begin{cases} \dot{x} = \cos(y) \\ \dot{y} = -8\sin(x) \end{cases}$ |

## Задание 3



Рассматривается физический маятник на основании, вращающемся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\Omega$ . В качестве состояния маятника примем его угол отклонения от вертикали  $\varphi$  и его угловую скорость  $\omega = \dot{\varphi}$ . Согласно учебнику Неймарка<sup>3</sup>, дифференциальное уравнение движения маятника имеет вид:

$$A\ddot{\varphi} + \frac{C-A}{2}\Omega^2 \sin(2\varphi) + Mgl \sin(\varphi) = 0$$

Очевидно, что при  $\Omega=0$  это уравнение переходит в уравнение движения обычного физического маятника на неподвижном основании.

Центр масс маятника находится на расстоянии  $l$  от оси подвеса. Сам маятник имеет массу  $M$ .  $C$  – момент инерции относительно линии подвеса.  $A$  – момент инерции относительно осей, перпендикулярных линии подвеса и проходящих через точку подвеса.

Для тела, вытянутого вдоль оси подвеса справедливо  $C < A$ . Для маятника в виде диска достаточно большого радиуса по сравнению с его длиной, наоборот,  $C > A$ .

Проведите качественный анализ динамики маятника на вращающемся основании: исследуйте положения равновесия, их устойчивость, получите первый интеграл дифференциального уравнения, постройте с его помощью фазовые портреты системы для различных значений  $\Omega$ .

Сделайте содержательные выводы.

---

<sup>3</sup> Неймарк Ю.И. Математические модели в естествознании и технике: Учебник. Н.Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета им. Н.И.Лобачевского: 2004. – 401 с.