

Практическая работа № 4. Автоколебания в системах различной природы: генератор Ван дер Поля, модели брюсселятора и Холлинга-Тэннера

Цель работы:

знакомство с особенностями автоколебательных режимов;
приобретение практических навыков компьютерного моделирования автоколебательных режимов в динамических системах различной природы (генератор Ван дер Поля, модели брюсселятора и Холлинга-Тэннера).

4.1. Основные понятия и общие свойства

Автоколебательные системы относятся к системам неконсервативным – в составе действующих на такие системы сил имеются силы сопротивления, и движение сопровождается расходом энергии. В этом отношении автоколебательные системы ведут себя аналогично диссипативным. Но в диссипативных системах энергия, расходуемая на преодоление сопротивления, ничем не компенсируется и колебания в таких системах затухают тогда, как в автоколебательных системах расход энергии точно компенсируется поступлениями из некоторого входящего в состав системы не колебательного источника. Дозирование этих поступлений по времени подачи и величине (когда и сколько) регулируется самой колебательной системой. Вследствие этого в системе могут возникать устойчивые периодические незатухающие колебания. Для подобных систем А.А. Андроновым был предложен специальный термин – *автоколебательные системы*. Колебания, возникающие в таких системах, стали называть *автоколебаниями*.

Автоколебания – это незатухающие колебания, которые возникают без периодической внешней возмущающей силы. Автоколебания принципиально отличаются, например, от колебаний маятника тем, что их характеристики (амплитуда, период) не зависят от начальных условий, и поддерживаются свойствами самой системы. Через некоторое время после начала движения система выходит на один и тот же цикл колебаний, называемый *предельным циклом*. На фазовой плоскости ему соответствует *изолированная замкнутая кривая*.

В случае устойчивого предельного цикла к этой замкнутой кривой асимптотически притягиваются все окрестные траектории, выходящие из различных начальных точек, как изнутри, так и снаружи предельного цикла. Иначе говоря, предельный цикл выступает в роли *притягивающего множества*. Примером таких колебаний могут служить колеба-

ния маятника часов, в которых энергия пружины или падающего груза передается через храповой механизм маятнику порциями, величина и время подачи которых определяется колебаниями самого маятника.

Характерным свойством автоколебательной системы является наличие в ее конструктивной схеме следующих четырех частей:

- постоянный (не колебательный) источник энергии;
- колебательная система;
- устройство, регулирующее поступления в колебательную систему энергии из источника энергии;
- обратная связь между колебательной системой и регулирующим устройством, осуществляющая управление подачей энергии в колебательную систему.

4.2. Пример Пуанкаре

Пример Пуанкаре позволяет получить аналитически уравнение периодической траектории и исследовать ее свойства.

4.2.1. Существование периодической траектории

Рассмотрим дифференциальную систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases} . \quad (4.1)$$

Перейдем в (4.1) к полярной системе координат (φ, r) , для этого положим

$$x = r \cdot \cos(\varphi), \quad y = r \cdot \sin(\varphi).$$

Дифференциальная система в полярных координатах принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(1 - r^2) \\ \frac{d\varphi}{dt} = -1 \end{cases} . \quad (4.2)$$

Первое уравнение системы (4.2) заменой переменных $u=(1/r)^2$ сводится к линейному дифференциальному уравнению. Его решение $r(t)$ – кривая с горизонтальной асимптотой, динамика которой при различных начальных условиях показана на рис. (4.1 а).

Имеются два стационарных полярных радиуса – положения равновесия. Одно положение совпадает с началом координат $r_1=0$, второе – с константой, равной единице, $r_2=1$. Анализ уравнения первого приближения показывает, что начало координат – неустойчивый фокус. Тогда как второе положение равновесия $r_2=1$ является на плоскости (t, r) асимптотически устойчивым и задает в координатах (t, r) прямую, параллельную оси времени. В исходных координатах (x, y) положение равновесия $r_2=1$ определяет окружность (рис. 4.1 б). Таким образом, среди решений дифференциальной системы (4.1) имеется замкнутая траектория, она и получила название *предельного цикла*.

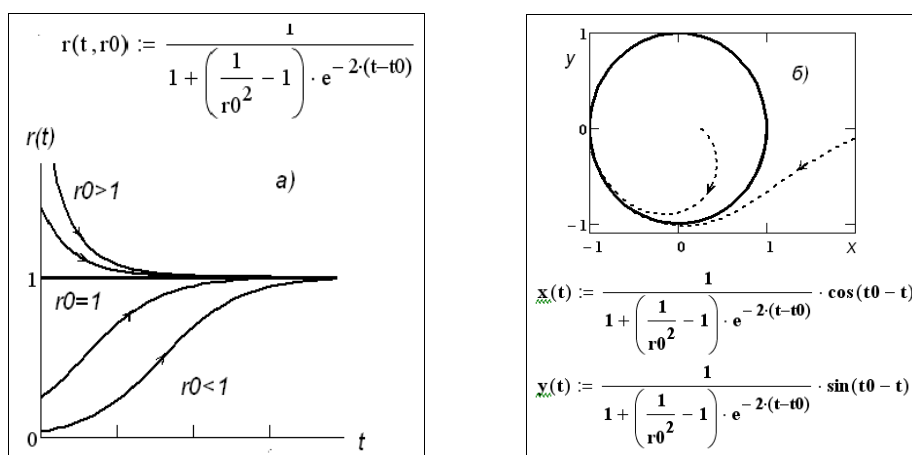


Рисунок 4.1. Аналитическое решение примера Пуанкаре: а) положение равновесия $r(t)=1$ на плоскости (t, r) является асимптотически устойчивым притягивающим множеством; б) на плоскости (x, y) траектория $r=1$ устойчивый предельный цикл

Окружность $r = 1$ является устойчивым предельным циклом. Если начальная точка лежит на окружности, то она не покинет окружность. Точки вне окружности притягиваются к ней, но никогда не смогут ее достигнуть, стремление – асимптотическое.

Таким образом, в нелинейных системах возможно существование периодического асимптотически устойчивого движения, называемого автоколебанием, математическим образом которого является предельный цикл.

А.М. Ляпунов показал, что для исследования устойчивости периодического движения $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ можно идти по пути линеа-

ризации уравнений, подобно тому, как мы это делали при исследовании устойчивости состояний равновесия.

Если положить $x=\varphi(t)+\xi$, $y=\psi(t)+\eta$, подставить эти выражения в уравнения (1.4), разложить правые части этих уравнений – функции $P(\varphi+\xi, \psi+\eta)$, $Q(\varphi+\xi, \psi+\eta)$ в ряды по степеням ξ , η и отбросить нелинейные члены, то мы получим линейные уравнения первого приближения для координат возмущения ξ и η :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = a\xi + b\eta \\ \dot{\eta} = c\xi + d\eta \end{cases}.$$

Коэффициенты a, b, c, d определяются производными от правых частей нелинейной дифференциальной системы, вычисленными вдоль периодических траекторий $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$:

$$\begin{aligned} a &= P'_x(\varphi(t), \psi(t)), \quad b = P'_y(\varphi(t), \psi(t)), \\ c &= Q'_x(\varphi(t), \psi(t)), \quad d = Q'_y(\varphi(t), \psi(t)) \end{aligned}$$

Система первого приближения есть линейная система с периодическими коэффициентами периода T , поскольку a, b, c, d суть функции от периодических функций времени φ, ψ с периодом T . Общий вид решения системы первого приближения:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= c_1 f_{11} e^{h_1 t} + c_2 f_{12} e^{h_2 t} \\ \eta(t) &= c_1 f_{21} e^{h_1 t} + c_2 f_{22} e^{h_2 t}. \end{aligned}$$

Здесь f_{ij} – некоторые периодические функции с периодом T . Динамика отклонений ξ и η зависит от показателей h_1 и h_2 , которые носят название "характеристических показателей". А именно, знаки действительных частей характеристических показателей определяют, являются ли эти отклонения ξ и η нарастающими или затухающими. Можно показать, что в силу автономности исходной системы (1.4) один из характеристических показателей принимает нулевое значение, а другой равен h :

$$h = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial P(\varphi(t), \psi(t))}{\partial x} + \frac{\partial Q(\varphi(t), \psi(t))}{\partial y} \right] dt \neq 0,$$

где $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ – любое периодическое решение, соответствующее рассматриваемому предельному циклу, T – период решения.

Таким образом, устойчивость предельного цикла (устойчивость в смысле Ляпунова соответствующих периодических движений) определяется знаком характеристического показателя. Предельный цикл устойчив, если $h < 0$ и неустойчив, если $h > 0$. Если же $h = 0$, уравнения первого приближения не решают вопроса об устойчивости периодического движения.

4.2.2. Рождение предельного цикла. Бифуркация Пуанкаре-Андронова-Хопфа

Существование предельных циклов возможно лишь в нелинейных дифференциальных системах. Необходимым условием рождения предельного цикла является бифуркация, которая сопровождается изменением знака действительной части характеристических чисел, иначе $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2})=0$, при этом $\operatorname{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0$.

В линейных дифференциальных системах "обнуление" действительных частей характеристических чисел означает возникновению особой точки типа центр. На бифуркационной диаграмме (рис.1.4) центрам соответствует ось ординат, иначе говоря, прямая $\sigma=0$ является *бифуркационной границей*, на которой происходит смена устойчивости фокусов. В нелинейной системе подобная смена устойчивости фокусов может сопровождаться рождением предельного цикла. Такой переход легко проследить в "модельной" системе, которая получается из (4.2) путем введения управляющего параметра:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(\alpha - r^2) \\ \frac{d\varphi}{dt} = -1 \end{cases} \quad (4.3)$$

При $\alpha < 0$ в системе имеется единственная особая точка, совпадающая с началом координат, она является устойчивым фокусом. Значение $\alpha = 0$ оказывается бифуркационным. При $\alpha > 0$ устойчивый фокус трансформируется в неустойчивый и при этом появляется устойчивый предельный цикл. Амплитуда автоколебаний возрастает с увеличением α . Возникновение предельного цикла в системе (4.3) схематически изображено на рисунке 4.2.

Таким образом, выполнению условия $\text{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$, при $\text{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0$, соответствует *бифуркация Пуанкаре–Андропова–Хопфа* или *бифуркация рождения (исчезновения) предельного цикла*. Бифуркация впервые была исследована А. Пуанкаре, затем А.А. Андроновым для случая $N = 2$ и обобщена Е. Хопфом на системы произвольной размерности [4.3].



Рисунок 4.2. Бифуркация Пуанкаре-Андропова-Хопфа: "мягкое возбуждение" системы при переходе через бифуркационное значение $\alpha=0$.

Мы рассмотрели *мягкое возбуждение* автоколебаний. Возможно также *жесткое возбуждение*. В этом случае при бифуркационном значении параметра устойчивый фокус теряет устойчивость из-за "влипания" в него неустойчивого предельного цикла (рис. 4.3).

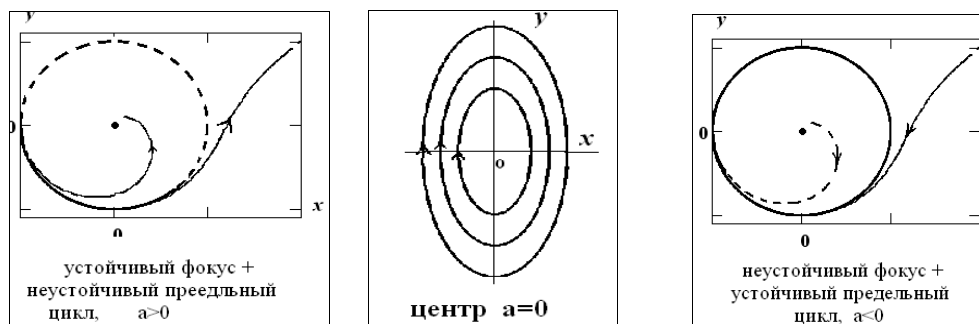


Рисунок 4.3. Бифуркация Пуанкаре-Андропова-Хопфа. Жесткое возбуждение.

При уменьшении параметра α и переходе его значения через бифуркационную границу устойчивый фокус переходит в центр, а затем в неустойчивый фокус, аттрактором при этом может стать предельный цикл.

"Модельной" системой, описывающей рождение предельного цикла при жестком возбуждении, является система:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x[\alpha + 2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2] - y \\ \frac{dy}{dt} = y[\alpha + 2(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2] + x \end{cases} \quad (4.4)$$

Компьютерное исследование автоколебаний, возникающих в системе (4.4), студентам предлагается провести в качестве самостоятельной работы.

4.3. Ламповый генератор Ван дер Поля

Ламповый генератор Ван дер Поля является примером реальной системы с предельным циклом. Генератор преобразует электрическую энергию постоянного тока анодной батареи в энергию переменного тока, частота которого зависит от параметров колебательного контура (индуктивности катушки и емкости конденсатора, рис. 4.4). Это преобразование в схеме генератора выполняет электронная лампа (триод). Лампа устроена таким образом, что изменение напряжения на сетке меняет силу тока в анодной цепи. Когда сетка заряжена отрицательно, то электроны не могут пролетать к аноду, ток не идет, лампа «заперта». Зарядив сетку положительно, мы «отпираем» лампу, через нее может идти ток.

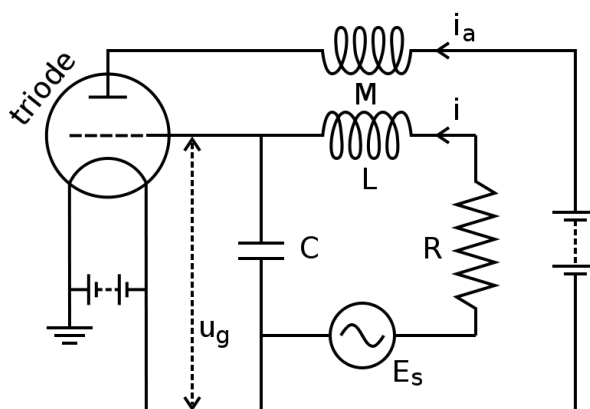


Рисунок 4.4. Схема простейшего лампового генератора

Изменения анодного тока следуют за изменениями напряжения на сетке практически мгновенно — через десятиллиардные доли секунды (время пролета электронов от сетки к аноду), в результате электронная лампа является «выключателем» с ничтожной инерцией.

Электродвижущая сила, индуцируемая в катушке током колебательного контура, периодически воздействует на сетку лампы и управляет анодным током, который, в свою очередь, с определенной частотой подза-

ряжает конденсатор, возмещая, таким образом, потери энергии в контуре. Процесс повторяется многократно в течение всего времени работы генератора. Поэтому, соединив лампу с колебательным контуром и батареей так, чтобы в нужные моменты лампа отпиралась и пропускала ток к конденсатору, мы можем получить электрическую автоколебательную систему, позволяющую генерировать незатухающие электрические колебания.

4.4. Уравнение Ван дер Поля

Простейшую модель автоколебательного процесса представляет обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\delta(1 - bx^2)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0, \quad (4.5)$$

здесь δ , b и ω_0 — параметры модели.

Модель (4.5) была введена голландским инженером Бальтазаром Ван дер Полем, работавшим в научной лаборатории по выпуску электроламп фирмы Philips, для моделирования вакуумной трубки (1927 г.).

Уравнение является нелинейным, в общем случае не интегрируется, поэтому его исследование проводится численными методами. В случае малой амплитуды колебаний, при $bx^2 \ll 1$, уравнение (4.5) можно приближенно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = 0. \quad (4.6)$$

Соотношение (4.6) аналогично уравнению линейного осциллятора с трением. Отличие состоит в замене δ на $-\delta$, в результате трение оказывается "отрицательным": оно отбрасывает точку от начала координат, вследствие чего положение равновесия $x^* = 0$ становится неустойчивым. По мере развития неустойчивости, с ростом переменной x , нелинейное слагаемое в (4.5) начинает играть все более значимую роль, создавая положительное трение. При $bx^2 > 1$ второе слагаемое в (4.5) будет определять диссипативный эффект, препятствующий росту координаты x . Когда отрицательное и положительное трения уравновесятся, устанавливается устойчивый стационарный режим — автоколебания.

Переход к безразмерным показателям $\tau = \omega_0 t$, $X = \sqrt{b} \cdot x$, $\mu = \delta / \omega_0$ позволяет сократить число параметров и приводит к уравнению с единственным параметром возбуждения μ :

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} - 2\mu(1 - X^2) \frac{dX}{d\tau} + X = 0. \quad (4.5')$$

Возможна и другая нормировка, $\frac{d^2 X}{d\tau^2} - (\mu - X^2) \frac{dX}{d\tau} + X = 0$, которую удобно использовать, поскольку при $\mu=0$ имеет место бифуркация Пуанкаре-Андропова-Хопфа.

Представим дифференциальное уравнение (4.5') в нормальной форме в виде системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = Y, \\ \frac{dY}{d\tau} = 2\mu(1 - X^2)Y - X. \end{cases} \quad (4.7)$$

Линейный анализ устойчивости системы (4.7) показывает наличие единственной особой точки $x^*=y^*=0$, которая при $\mu>1$ ($\delta^2 > \omega_0^2$) является неустойчивым узлом, а при $0<\mu<1$ ($\delta^2 < \omega_0^2$) – неустойчивым фокусом. В нелинейной системе эти особые точки оказываются внутри замкнутой траектории – устойчивого предельного цикла.

Форма автоколебаний и предельного цикла зависит от значения параметра возбуждения μ . При малых значениях, когда $\mu \approx 0$, уравнение (4.5) близко к уравнению гармонического осциллятора. Через некоторое время после начала движения в системе устанавливаются автоколебания, образом которых на фазовой плоскости является цикл эллиптической формы. Результаты численного интегрирования (4.5) при малых μ показаны на рис. 4.5. Рассматриваются две траектории, они выходят из различных начальных точек, одна расположена внутри, а другая – снаружи предельного цикла. С ростом t обе траектории асимптотически притягиваются к предельному циклу, которому соответствует периодическое движение, близкое к синусоидальным колебаниям.

С ростом значений параметра μ , при $\mu>1$, предельный цикл приобретает прямоугольную форму, что приводит к появлению двух различных масштабов времени: вслед за медленным дрейфом происходит резкое изменение амплитуды (рис. 4.6). Динамика амплитуды становится похожа на "пилообразный" сигнал. Подобная временная зависимость получила название *релаксационных колебаний*.

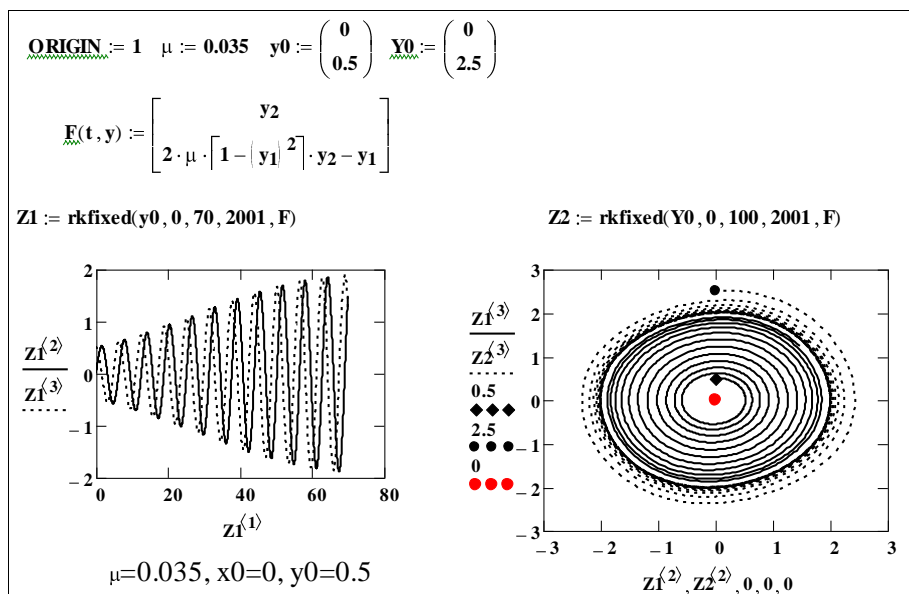


Рисунок 4.5. Генератор Ван дер Поля. Установление квазигармонических автоколебаний, $\mu < 1$.

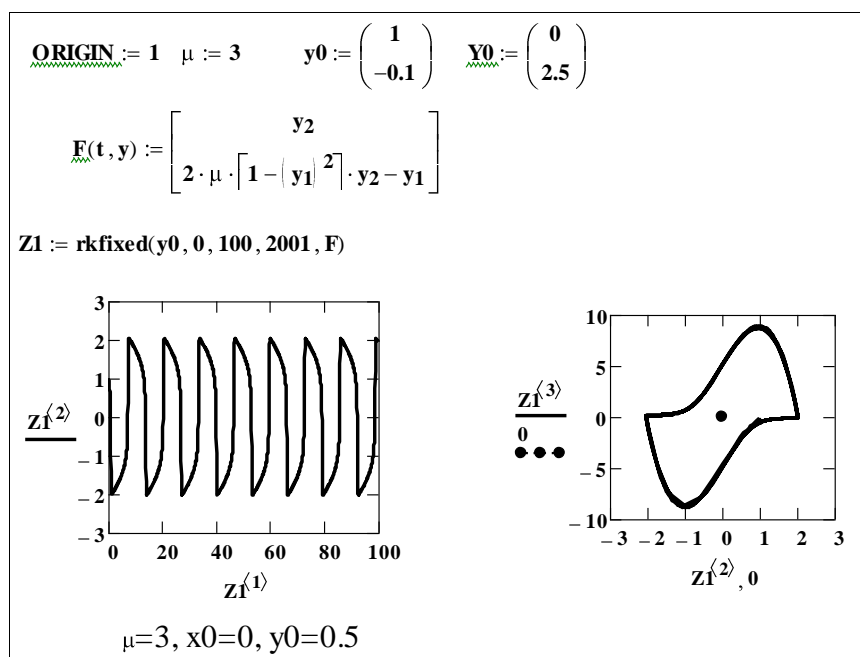


Рисунок 4.6. Генератор Ван дер Поля. Установление релаксационных автоколебаний при больших значениях μ ($\mu > 1$)

Итак, для систем с одной степенью свободы на фазовой плоскости не существует структурных элементов, кроме особых точек, сепаратрис и предельных циклов. Это обусловлено фундаментальным свойством решений дифференциальных уравнений, а именно единственностью, что ис-

ключает возможность пересечения фазовых траекторий. Поведение фазовых траекторий на плоскости определяется взаимным расположением выделенных структурных элементов. Следовательно, для динамической системы с одной степенью свободы (с размерностью фазового пространства $N=2$) существует только три возможности: совершать периодические движения; неограниченно стремиться к положению равновесия или неограниченно удаляться от положения равновесия.

4.5. Уравнение Ван дер Поля с возмущающей внешней силой

Рассмотрим неавтономное дифференциальное уравнение Ван дер Поля:

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} - 2\mu(1 - X^2) \frac{dX}{d\tau} + X = B \sin \omega\tau. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) отличается от (4.5) гармоническим возмущением с амплитудой B и частотой ω в правой части (4.8).

Введем фазовые координаты X , $Y=dX/d\tau$, $z=\omega\tau$, в новых переменных уравнение (4.8) можно представить как автономную дифференциальную систему:

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = Y \\ \frac{dY}{d\tau} = 2\mu(1 - X^2)Y - X + B \sin z \\ \frac{dz}{d\tau} = \omega. \end{cases} \quad (4.9)$$

Размерность фазового пространства возрастает до трех ($N=3$).

Наличие внешнего возмущения малой амплитуды приводит к своеобразной модуляции предельного цикла автоколебательной системы: фазовая траектория с частотой ω вращается вокруг предельного цикла и лежит на поверхности двумерного тора. Двумерность тора понимается в том смысле, что положение точки на поверхности тора можно описать с помощью двух локальных координат, одна из них определяет положение изображающей точки на параллели тора, а вторая – на меридиане. Очевидно, что минимальная размерность фазового пространства, в которое можно вместить такой тор, равняется трем.

Если отношение частоты внешнего воздействия ω и частоты автоколебаний системы есть рациональное число, то фазовая траектория – замкнутая линия – через конечное число оборотов на торе траектория замыкается. Если же это отношение есть иррациональное число, то траектория не замыкается и плотно заполняет всю поверхность тора. Аналогично случаю предельного цикла *поверхность тора будет устойчивым предельным множеством*, к которому стягиваются со временем все траектории системы (4.9) из некоторой окрестности тора, как изнутри, так и снаружи.

На рисунках 4.7 - 4.8 показана динамика траекторий уравнения (4.8), полученных численным интегрированием при различных значениях параметров. Графики на рис. 4.7 построены для квазигармонических колебаний, возбуждаемых при малых значениях параметра $\mu=0,035$; амплитуда внешней вынуждающей силы здесь также не значительная, $B=3$, частота $\omega=20$.

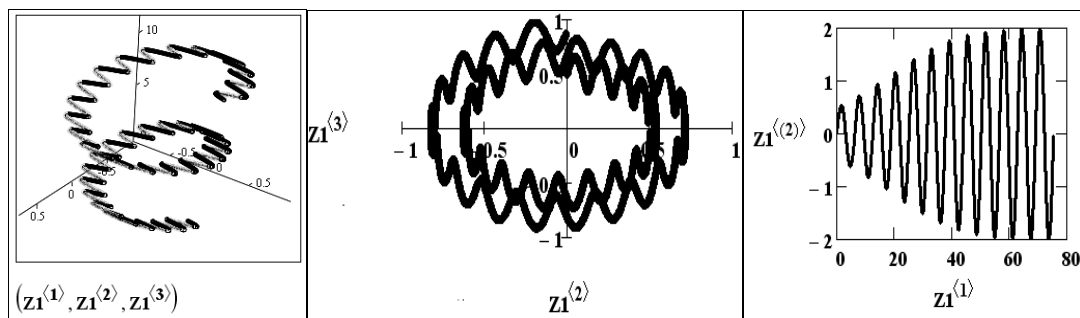


Рисунок 4.7. Генератор Ван дер Поля с вынуждающей внешней гармонической силой.

Установление квазигармонических колебаний: траектория в трехмерном фазовом пространстве $(t, X, dX/dt)$ и ее проекции на горизонтальную и вертикальную плоскости

Рисунок 4.8 дает представление о возникновении динамического хаоса в детерминированной системе с непрерывным временем.

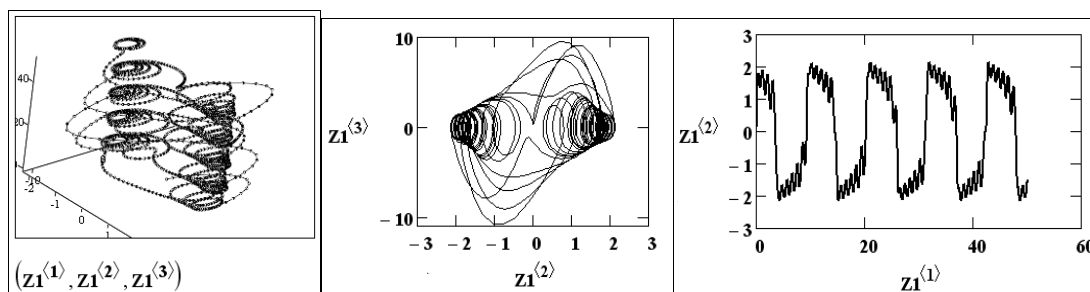


Рисунок 4.8. Генератор Ван дер Поля с вынуждающей внешней гармонической силой.

Переход от релаксационных колебаний к хаотическим с ростом амплитуды внешней силы, $B=25$, $\mu=3$, $\omega=\sqrt{48}$

Возможность реализации динамического хаоса в нелинейных системах с непрерывным временем возникает в общем случае, начиная с размерности фазового пространства $N=3$. В модели автоколебаний Ван дер Поля необходимая размерность достигается, благодаря введению внешней вынуждающей силы. Изменение параметров уравнения (4.8), прежде всего, рост амплитуды внешних колебаний, приводит к разрушению предельного цикла и переходу регулярных автоколебаний в хаотические.

4.6. Модель брюсселятора

В настоящее время известен целый класс колебательных химических реакций, при которых некоторые параметры реакции, такие как цвет, концентрация компонентов, температура и др. изменяются периодически, образуя сложную пространственно-временную структуру реакционной среды.

Первооткрывателем химической колебательной реакции является российский ученый, химик-экспериментатор Б.П. Белоусов. Исследуя окисление лимонной кислоты броматом калия в присутствии катализатора – ионов церия, Б.П.Белоусов обнаружил концентрационные колебания реагентов (1951 г.). В ходе реакции ионы церия изменяют свою валентность: если в трёхвалентном состоянии ионы церия (Ce^{+3}) бесцветны, то в четырёхвалентном (Ce^{+4}) состоянии они жёлтые. Это означает, что изменение валентности ионов церия будет сопровождаться периодическим изменением цвета раствора от бесцветного (Ce^{+3}) к жёлтому (Ce^{+4}) и обратно, что можно будет непосредственно наблюдать своими глазами [4.1]. Возникают как бы химические часы.

Эффект ещё более заметен в присутствии железа с фенантролином, в этом случае окраска изменяется на ярко-красную и синюю (рис. 4.9).

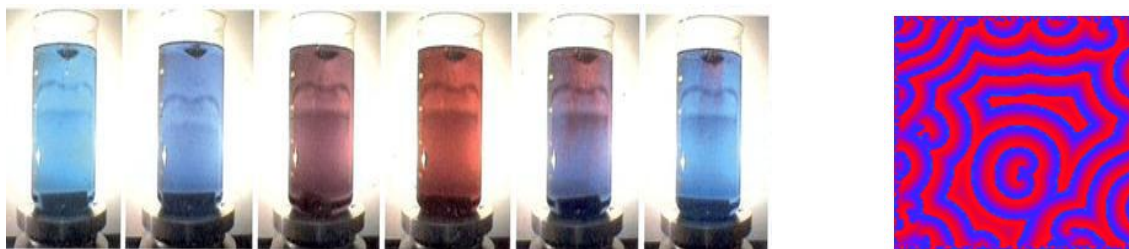
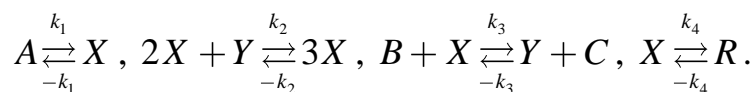


Рисунок 4.9. Изменение цвета реакционной смеси в реакции Белоусова в пробирке и концентрационные волны в чашке Петри

С целью объяснения механизма реакции были разработаны различные математические модели, демонстрирующие колебательное поведение. Простейшая модель, предложенная в 1968 году руководителями брюс-

сельской научной школы, Лефевром и Пригожиным, получила название брюсселятор. Основной целью изучения брюсселятора является установление качественных типов поведения, совместимых с фундаментальными законами химической кинетики. В этом смысле *брюсселятор* играет роль *базовой модели*, такую же как *гармонический осциллятор* и *генератор Ван дер Поля в физике* или *модель Лотки-Вольтерры в динамике биологических популяций*.

Брюсселятор представляет собой следующую схему гипотетических химических реакций:



Здесь A, B – концентрации исходных веществ, C, R – продукты реакции, X, Y – концентрации промежуточных веществ реакции. Пусть конечные продукты C и R немедленно удаляются из реакционного пространства. Это означает, что обратные константы $k_{-3}=k_{-4}=0$. Если субстрат A находится в избытке, $k_{-1}=0$. Предположим также, что $k_{-2}=0$. Значения остальных констант положим равными единице. В уравнениях химической кинетики считается, что скорость реакции пропорциональна произведению концентраций реагирующих компонентов. Тогда схема реакций описывается дифференциальной системой:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A + x^2 y - (B + 1)x \\ \frac{dy}{dt} = Bx - x^2 y \end{cases} \quad (A > 0, B > 0, x > 0, y > 0) \quad (4.10)$$

Модель (4.10) имеет одну особую точку с координатами: $x^* = A, y^* = B/A$. Для исследования устойчивости системы (4.10) введем отклонения от положения равновесия: $\xi = x - x^*, \eta = y - y^*$. Линеаризованная система в отклонениях примет вид:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = (B - 1)\xi + A^2\eta \\ \frac{d\eta}{dt} = -B\xi - A^2\eta \end{cases} \quad (4.11)$$

Характеристическое уравнение системы (4.11):

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} B - 1 - \lambda & A^2 \\ -B & -A^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или $\lambda^2 + (A^2 + 1 - B)\lambda + A^2 = 0$.

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(A^2 + 1 - B) \pm \sqrt{(A^2 + 1 - B)^2 - 4A^2}}{2} \quad (4.12)$$

На рисунке 4.10 показана бифуркационная диаграмма дифференциальной системы (4.10), построенная в плоскости положительных значений параметров (A, B) .

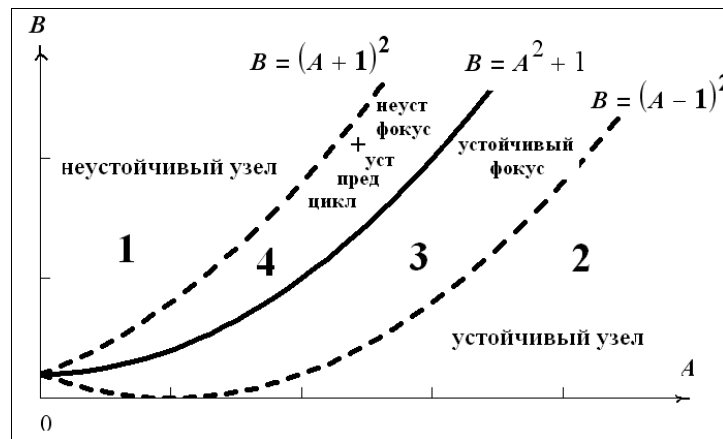


Рисунок 4.10. Брюсселятор. Бифуркационная диаграмма

Сплошной линией на диаграмме выделена парабола $B = A^2 + 1$, которая является бифуркационной границей и разрезает первый квадрант на две части. Ниже бифуркационной границы действительные части корней характеристического уравнения отрицательны, следовательно, особая точка здесь является устойчивой, тогда как выше границы – действительные части корней положительные и особая точка неустойчивая.

На плоскости (A, B) имеется еще две границы, с переходом через которые изменяется характер стационарных точек и поведение траекторий в их окрестности. Для определения этих границ рассмотрим дискриминант характеристического уравнения:

$$D = (A^2 + 1 - B)^2 - 4A^2 = [(A-1)^2 - B] \cdot [(A+1)^2 - B].$$

Знак дискриминанта D определяется расположением точки (A, B) относительно двух парабол: $B=(A+1)^2$ и $B=(A-1)^2$.

В области, обозначенной цифрой 1 на диаграмме, $B > (A+1)^2 > (A-1)^2$, поэтому дискриминант $D > 0$, следовательно, стационарная точка – неустойчивый узел.

В области 2 справедливы неравенства $B < (A-1)^2 < A^2 + 1 < (A+1)^2$, здесь дискриминант по-прежнему положителен, $D > 0$, но корни характеристического уравнения отрицательны: стационарная точка – асимптотически устойчивый узел.

В области 3 дискриминант становится отрицательным, $D < 0$, поскольку $(A-1)^2 < B < A^2 + 1 < (A+1)^2$; стационарная точка – устойчивый фокус.

Необходимым условием рождения устойчивого предельного цикла является бифуркация, состоящая в переходе от устойчивого фокуса к неустойчивому, когда действительная часть характеристических чисел $\text{Re}(\lambda_{1,2})$ переходит через ноль, от отрицательных значений к положительным, при этом $\text{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0$. В системе (4.10) подобная бифуркация возникает при переходе управляющего параметра через границу $B = A^2 + 1$. Таким образом, в области 4, при выполнении условия $A^2 + 1 < B < (A+1)^2$ брюсселятор является автоколебательной системой. Возможность существования устойчивого предельного цикла сохраняется до тех пор, пока $\text{Re}(\lambda_{1,2})$ сохраняют положительные значения.

Седловых точек в рассматриваемой модели нет.

Листинг программы MathCAD численного решения дифференциальной системы брюсселятора приведен на рис. 4.10.

a) $\text{ORIGIN} := 1$	
$V := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2.5 & 1.5 & 0.5 & 1 & 1 & 1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$	задание вектора начальных условий (начальных концентраций, $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$)
$A := 1.1$	
$B := A^2 + 1.1$	задание исходной концентрации катализатора В
$D(t, x) := \begin{bmatrix} -(B+1) \cdot x_1 + (x_1)^2 \cdot x_2 + A \\ B \cdot x_1 - (x_1)^2 \cdot x_2 \end{bmatrix}$	задание дифференциальной системы в виде двумерной вектор-функции D
$t_0 := 0 \quad t_1 := 50 \quad M := 500$	задание граничных условий
$k := 1..10$	
$Z_k := \text{rkfixed}(V^{(k)}, t_0, t_1, M, D)$	приближенное решение множества задач Коши для различных начальных условий V

Рисунок 4.10. Брюсселятор. Листинг программы численного решения

Эволюцию фазового портрета брюсселятора можно наблюдать, проводя расчеты траекторий с различными значениями управляющих параметров.

Апериодический режим показан на рис. 4.11 *а*. На фазовой плоскости все траектории, вышедшие из разных начальных точек, асимптотически стремятся к стационарной точке $(A, B/A)$, которая является *устойчивым узлом*.

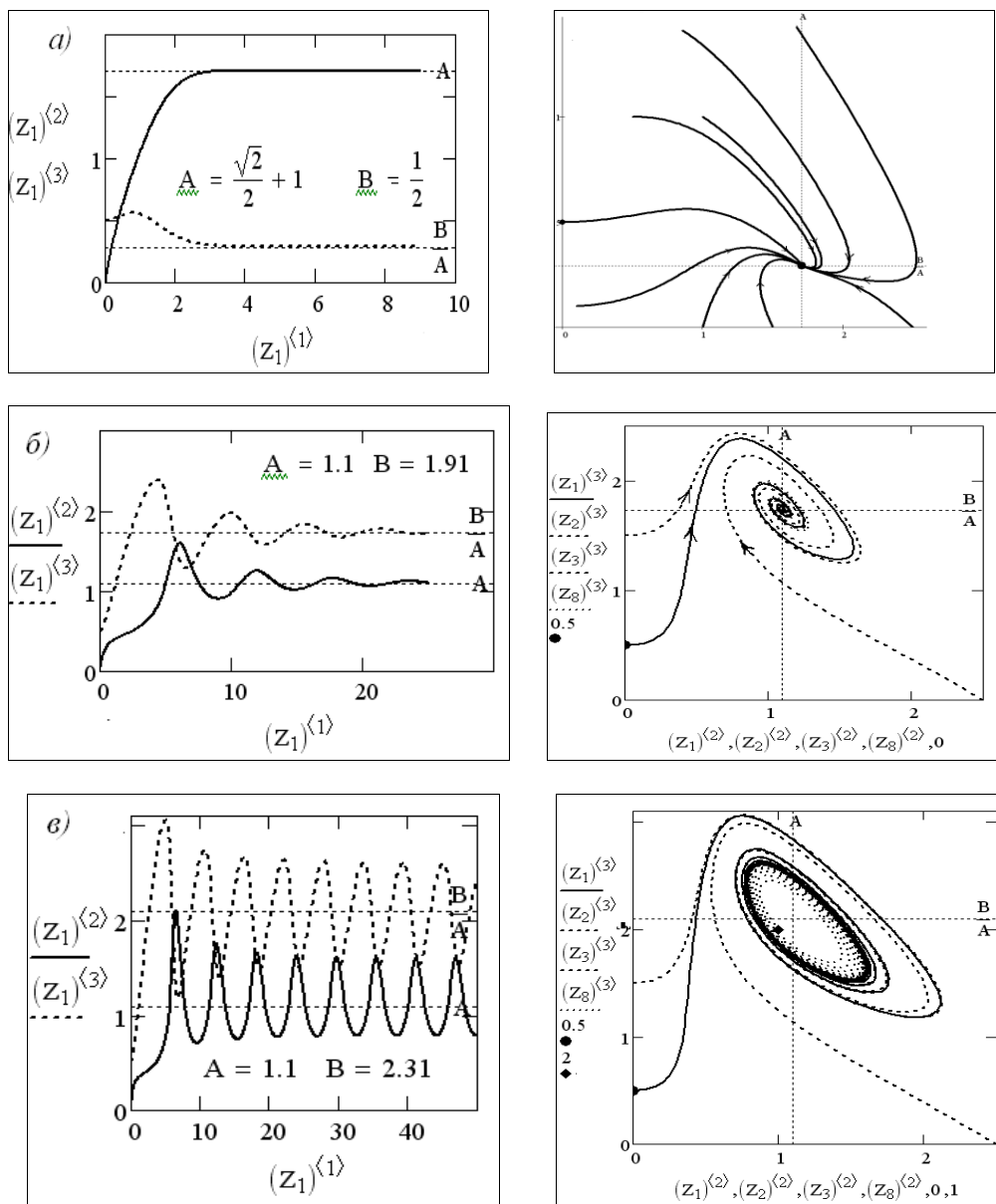


Рисунок 4.11. Брюсселятор. Динамика концентраций веществ и фазовые портреты: *а* – устойчивый узел (апериодический режим), *б* – устойчивый фокус, *в* – неустойчивый фокус + устойчивый предельный цикл

Изменение значений управляющего параметра и переход из области 2 в область 3 при $B > (A-1)^2$ приводят к превращению устойчивого узла в устойчивый фокус (рис. 4.11 б). Появляются затухающие колебания, они сохраняются до тех пор, пока концентрация катализатора не достигнет бифуркационной границы, $B = A^2 + 1$. Здесь меняется качественный характер колебаний, рождается предельный цикл, образом которого на фазовой плоскости является замкнутый контур. Но в отличие от колебаний, например, математического маятника или численности популяций в модели Лотки-Вольтерры, с характерными для них стационарными точками типа центров, предельному циклу на фазовой плоскости отвечает изолированная замкнутая линия. В ее окрестности других замкнутых траекторий нет. Все траектории, начинающиеся как внутри, так и снаружи предельного цикла, асимптотически к нему притягиваются, что характерно для устойчивого по Ляпунову цикла (рис. 4.11 в). Однако структурная устойчивость режима автоколебаний сохраняется в достаточно узком диапазоне изменения параметров, при $A^2 + 1 < B < (A+1)^2$. Когда управляющий параметр выходит на бифуркационную границу $B = (A+1)^2$, предельный цикл легко разрушается и в области 1 точка покоя становится неустойчивым узлом.

4.7. Модель Холлинга-Тэннера

Для описания взаимодействия конкурирующих видов в условиях ограниченных ресурсов Холлингом и Тэннером предложена модификация модели "хищник-жертва":

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r \cdot \left(1 - \frac{N_1}{K}\right) \cdot N_1 - w \cdot \frac{N_1 \cdot N_2}{D + N_1} \\ \frac{dN_2}{dt} = s \cdot \left(1 - \frac{J \cdot N_2}{N_1}\right) \cdot N_2 \end{cases} \quad (4.13)$$

Скорость роста популяции жертв dN_1/dt представлена в модели (4.13) тремя слагаемыми:

$r_1 N_1$ – скорость размножения в отсутствие хищников;

$\frac{r_1 \cdot N_1^2}{K}$ – влияние межвидовой конкуренции при ограниченных ресурсах;

в сумме эти два слагаемых дают логистическую модель с постоянным пределом роста, равным K ;

$w \cdot \frac{N_1 \cdot N_2}{D + N_1}$ – влияние хищников, здесь, в отличие от модели Лотки-

Вольтерры, хищники перестают "убивать", когда насыщаются.

Скорость роста популяции хищников соответствует логистической модели с переменным пределом роста: если для поддержания жизни одного хищника нужно J жертв, то популяция из N_1 особей сможет обеспечить пищей N_1/J хищников, эта величина и есть переменный предел роста численности популяции хищников.

Когда параметры модели удовлетворяют условию $s < \frac{r}{K} \cdot \frac{K - D - 2}{1 + D}$, взаимодействие выходит на автоколебательный режим.

Подобные модели могут описывать не только взаимодействие популяций, но и поведение конкурирующих фирм, динамику численности воюющих армий, изменение экологической ситуации, динамику количества абонентов средств связи, средств радиоэлектронной безопасности и др.

Задание 1

1. Проведите качественный анализ дифференциальной системы Ван дер Поля:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = 2\mu(1 - x^2)y - x \end{cases}.$$

Выполните исследование системы по первому приближению. Определив бифуркационные значения параметра возбуждения автоколебаний μ , постройте параметрическую диаграмму. Укажите на диаграмме, какие режимы работы генератора возникают в каждом из полученных диапазонов изменения μ .

2. Выполните компьютерное моделирование различных режимов работы генератора: апериодического режима, затухающих колебаний, квазигармонических и релаксационных автоколебаний. С этой целью получите для различных начальных условий и значений параметра μ приближенные решения уравнения Ван дер Поля, применив встроенные функции программного пакета MathCad.

3. Постройте графики динамики амплитуды колебаний $x(t)$, ее скорости $y(t)$ и фазовые портреты различных режимов работы генератора. Покажите, что нелинейная система Ван дер Поля имеет предельный цикл.

Определите графически его характеристики (устойчивый, неустойчивый, полуустойчивый).

Задание 2

1. Проведите качественный анализ модели "брюсселятор" при $A=1$. По системе первого приближения исследуйте тип и характер устойчивости положения равновесия в зависимости от управляющего параметра B .
2. Выполните компьютерное моделирование динамической системы. Постройте по его результатам графики динамики концентраций $x(t)$, $y(t)$ и фазовые портреты, отвечающие качественно различным режимам протекания химической реакции.
3. Покажите рождение предельного цикла, определите его устойчивость непосредственно по фазовому портрету.

Задание 3

1. Проведите качественный анализ системы Холлинга-Тэннера, моделирующей взаимодействие конкурирующих видов в условиях ограниченных ресурсов. Покажите, что система имеет одну стационарную точку с положительными значениями координат. Исследуйте ее устойчивость.
2. Получите для своего варианта задания приближенные решения системы. Постройте по ним графики динамики численностей популяций и фазовый портрет.
3. Найдите предельный цикл, определите его устойчивость. Как влияет изменение параметров модели на поведение решения?

Варианты

№	r	K	w	s	J	D	№	r	K	w	s	J	D
1	1	7	0.2	0.1	0.1	1.5	11	1	7	0.2	0.1	0.1	1.2
2	1	7	0.2	0.1	0.15	1.7	12	1	7	0.2	0.1	0.2	1.1
3	1	7	0.2	0.1	0.1	1.9	13	1	7	0.2	0.1	0.15	1.5
4	1	7	0.2	0.1	0.2	1	14	1	7	0.2	0.1	0.04	1.4
5	1	7	0.2	0.1	0.12	1	15	1	8	0.2	0.1	0.05	1.3
6	1	7	0.2	0.1	0.05	1.5	16	1	8	0.25	0.1	0.05	1.2
7	1	7	0.2	0.1	0.07	1.5	17	1	8	0.3	0.1	0.07	1.1
8	1	7	0.2	0.1	0.14	1.5	18	1	8	0.15	0.1	0.09	1.7
9	1	7	0.2	0.1	0.17	1.5	19	1	8	0.15	0.1	0.11	1.6
10	1	7	0.2	0.1	0.18	1.3	20	1	8	0.25	0.1	0.1	1.1

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение автоколебательной системы. В чем состоит отличие автоколебаний от вынужденных колебаний, например, математического маятника, находящегося под воздействием внешней периодической силы?
2. Какими отличительными чертами обладает режим релаксационных колебаний, что его отличает от квазигармонических колебаний?
3. Сформулируйте необходимое условие рождения предельного цикла в нелинейной динамической системе с размерностью фазового пространства $N=2$.
4. Возможен ли режим динамического хаоса в нелинейной дифференциальной системе второго порядка? Приведите пример.
5. Какое значение управляющего параметра B в модели брюсселятора (при $A=1$) является бифуркационным?
6. При каких значениях управляющего параметра B предельный цикл разрушается?
7. Является ли предельный цикл в модели брюсселятора структурно устойчивым и почему?
8. Возможны ли колебания концентраций $x(t)$, $y(t)$, когда значения управляющего параметра $B < 2$ (если $A=1$)?