Практика Юрченков Иван Александрович

Table of Contents

Исходное интегральное уравнение. Рассмотрим следующий класс задач нестационарной акустики. В ограниченной трёхмерной области , окружённой свободным пространством, материальная среда характеризуется индексом рефракции , а вне индекс рефракции равен единице. Требуется определить акустическое поле в пространстве , порождаемое внешним источником , локализованным в конечной области, причём при . В такой постановке соответствующая математическая задача формулируется следующим образом: найти функцию акустического поля в , удовлетворяющую волновому уравнению

где – скорость звука в свободном пространстве. К уравнению (1) необходимо добавить ещё условия, гарантирующие отсутствие волн, приходящих из бесконечности.

Для вывода нестационарных интегральных уравнений будем использовать прямое и обратное преобразования Фурье:

В формулах (2) исходная функция и её фурье-образ различаются указанием аргументов и соответственно.

Применяя преобразование Фурье к каждой части уравнения (1), получаем уравнение для фурье-образов поля

Фурье-образ должен удовлетворять, кроме уравнения (3), ещё и условию излучения на бесконечности

Пусть – финитная функция в относительно . Тогда интегральное представление

удовлетворяет в уравнению Гельмгольца

и условию излучения на бесконечности вида (4). В (5) – функция Грина уравнения Гельмгольца, которая в декартовой системе координат имеет вид

Запишем уравнение (3) в следующем виде:

Из соотношений (3)–(8) вытекает, что неизвестное поле имеет следующее интегральное представление:

Первый интеграл в правой части равенства (9) описывает поле , создаваемое источником в свободном пространстве. Далее, поскольку вне , из равенства (9) следует, что неизвестное поле удовлетворяет в области интегральному уравнению Фредгольма второго рода

Зная поле в области , несложно найти поле в любой точке пространства, используя равенство (9).

Имеют место следующие свойства Фурье-преобразований:

где – дельта-функция Дирака, а – некоторая постоянная. Преобразование Фурье обобщённых функций определяется для класса так называемых обобщённых функций медленного роста – линейных непрерывных функционалов на пространстве основных функций, представляющем собой линейное подпространство пространства , состоящее из функций, которые при убывают вместе со всеми производными быстрее любой степени , с заданной в нём специальной сходимостью (см. [4, гл. II, 8.1]). Именно, преобразованием Фурье обобщённой функции называется [4, гл. II, 9.2] обобщённая функция такая, что для всех . Несложно убедиться [4, гл. II, 9.2], что так определённое отображение переводит в и является линейным и непрерывным, а для обратного отображения очевидно равенство для всех .

В силу определений (2) равенство (10) очевидно. Покажем справедливость первого равенства в (11). Имеем

Применяя обратное преобразование Фурье к первому и последнему членам в цепочке равенств (12), получаем первое равенство в (11). Доказательство второго равенства в (11) следует непосредственно из определения преобразования Фурье обобщённых функций и приведено, например, в [4, гл. II, 9.2, пример].

Из представления (7) и второго равенства в (11) вытекает, что

В силу соотношений (10)–(13) получаем

Теперь, применяя обратное преобразование Фурье к уравнению (9) и используя равенство (14), приходим к следующему объёмному интегральному уравнению с запаздыванием по времени: