Практическое занятие №6. Группы перестановок

Юрченков Иван Александрович

14 03 2022

# **Множество перестановок**

## Определение перестановки

**Определение**. Перестановками называют множество всевозможных биекций на конечном множестве натуральных чисел: .

Стоит обозначить сколько **всевозможных биекций** можно составить на множестве :

Получаем, что *перестановка* – подсчет всевозможных биекций на подмножестве натуральных чисел.

## Запись элементов множества перестановок

### Таблица перестановок

Элементы множества перестановок удобно записывать в виде табличек размером , где в верхней строчке располагаются соотвественно все числа из множества в упорядоченном виде по возрастанию, а в нижней строчке собственно одна из реализаций перетасовки данного множества:

где

**Пример**. Можно задать конкретную реализацию элемента множества перестановок для множества относительно конкретного правила :

в конкретном примере можно заметить правила биекции для перетасовки элементов, которые устанавливает , а именно:

или если формально, то

*Из примера также видно, что перестановки могут образовывать замкнутые циклы, а также независимые единицы, не меняющиеся в результате действия перестановки*.

Давайте расставим в примере выше отображения в более удобном порядке для того, чтобы увидеть эти циклы переходов:

Тогда мы можем с точностью до отображения попробовать переставить столбцы в перестановке :

Из данных рассуждений вытекает следующее **утверждение**: *элементы множества перестановок являются эквивалентными сами себе с точностью до перестановки столбцов в табличной записи*.

То есть:

и любая перестановка строго задается своим правилом отображения .

### Циклы перестановок

Из примера табличной записи перестановки можно убедиться в том, что перестановка может иметь не единственную возможную запись. Более удобным в ситуациях с исследованием перестановок может оказаться цикловая запись перестановки:

Выше показан пример цикловой записи в круглых скобках в виде вектора чисел. Такая запись мнемонически показывает как каждое предыдушее число переходит по правилу в следующее по порядку следования в векторе. Однако, возникает вопрос как записать перестановку, содержащую непересекающиеся циклы или независимые элементы.

Покажем на примере:

Правило перестановки имеет следующие переходы:

$$
v(1) = 2 \rightarrow v(2) = 1; \\
v(3) = 4 \rightarrow v(4) = 5 \rightarrow v(5) = 3; \\
v(6) = 6
$$

и цикловая запись будет выглядеть следующим образом:

Таким образом **любая перестановка конечного подмножества элементов натуральных чисел может быть записана в виде произведения непересекающихся циклов**.

Заметим, что записи в виде циклов перестановок и :

идентичны с точностью до правила перемешивания элементов подмножества. То есть, другими словами, *независимые элементы перестановки могут не являться элементами цикловой записи перестановки*.

**NB**. Цикловая запись элемента множества перестановок единственна с точностью до расстановки цикла в цикловой записи. Другими словами, **непересекающиеся циклы коммутируют относительно операции умножения**.

### Представление в виде конечного результата перестановки

Элемент множества перестановки также может быть записан в виде списка чисел в квадратных скобках, обозначая вторую строчку табличной записи или, собственно, уже результат перестановки упорядоченного подмножества натуральных чисел .

**Пример записи**:

Первый пример показывает нам как записывается конечный результат перестановки, далее уже интерпретация такой записи.

## Вывод

Таким образом, мы научились задавать элементы множества перестановок и считать количество элементов произвольного множества перестановок.

# **Группа перестановок**

## Групповая операция перестановок

**Определение**. Пусть и это две перестановки (два правила перетасовки) одного и того же подмножества натуральных чисел . Тогда операция композиции двух элементов множества перестановок дают новое правило перестановки п оследующему правилу:

$$
\pi: \forall i \in X\ \ \ \pi(i) = p\_i \in X\\
\sigma: \forall i \in X \ \ \ \sigma(p\_i) = t\_i \in X \\
\ \\
\sigma \circ \pi : \forall i \in X \ \ \ (\sigma\circ\pi) (i) = \sigma(\pi(i)) = t\_i \in X
$$

**Пример**. Проиллюстрируем пример композиции двух элементов множества перестановок:

$$
\pi = [3, 2, 1, 4]\\
\sigma = [2, 3, 4, 1]
$$

Проследуем подробно за всеми преобразованиями для того, чтобы понять как мы произвели эту операцию:

$$
\pi(1) = 3 \rightarrow \sigma(3) = 4 \rightarrow \sigma(\pi(1)) = 4 \\
\pi(2) = 2 \rightarrow \sigma(2) = 3 \rightarrow \sigma(\pi(2)) = 3 \\
\pi(3) = 1 \rightarrow \sigma(1) = 2 \rightarrow \sigma(\pi(3)) = 2 \\
\pi(4) = 4 \rightarrow \sigma(4) = 1 \rightarrow \sigma(\pi(4)) = 1
$$

## Коммутативность операции композиции

В общем случае, операция композиции элементов множества перестановок не является коммутативной. Покажем это обстоятельство на том же самом примере выше:

Для операции , где сначала к применяется правило , а затем правило :

Для операции , где сначала к применяется правило , а затем правило :

Приведение хотя бы одного примера, где нарушается коммутативность операции доказывает ее некоммутативность в общем смысле.

## Определение группы перестановок

**Определение**. Множество всех биекций подмножества натуральных чисел и заданная на данном множестве операция композиции элементов множеств образуют симметрическую группу или группу перестановок :

A1:

A2:

A3: .

Для соблюдения всех аксиом группы содержит в себе следующие элементы:

## Изоморфизм группы поворотов и отражений

, ,,

, ,

# **Порядки элементов группы**

## Порядок элемента группы

Чтобы выяснить порядок произвольного элемента группы необходимо для конкретного элемента группы исследовать его сходимость к при последовательном применении групповой операции к нему же: . Порядок элемента будет равен – количеству примененных групповых операций для достижения .

**Пример**. Рассмотрим группу . Возьмем в ней элемент

Применение 1 раз групповой операции к элементу приведет нас к следующему:

или то же самое, что и

Нам необходимо придти к виду

Исходя из процесса последовательного применения к групповой операции, видим, что цикл пришел к независимому виду за шага, а цикл пришел к независимому виду за шага. Тогда можем заметить, что .

То есть, **порядок элемента группы перестановок равен НОК длин непересекающихся циклов в цикловой записи перестановки**.

где – число непересекающихся циклов в цикловой записи перестановки.

**Пример**

Применим к групповую операцию:

Несложно заметить, что при элемент переходит в нейтральный просто исходя из определения переходов элементов в перестановках.

## Цикловая структура перестановки

Удобным в исследовании порядков элементов перестановки оказывается запись в виде **структуры перестановки**, именуемой и равной вектору с координатами, равными количествам циклов с соответсвующей длиной циклов по каждой координате.

$$
CS = (c\_1, c\_2, c\_3, \dots, c\_n) = \\
=c\_1 \cdot (1, 0, 0, \dots, 0) + c\_2 \cdot (0, 1, 0, \dots, 0) + c\_3 \cdot (0, 0, 1, \dots, 0) + \dots + c\_n \cdot (0, 0, 0, \dots, 1) = \\
=c\_1 \cdot 1 + c\_2 \cdot 2 + c\_3 \cdot 3 + \dots + c\_n \cdot n,
$$

где – число циклов длины ; – количество элементов в подмножестве , то есть в группе .

**Пример**. Разберем цикловую структуру перестановок в группе :

# Задачи

1. Определить мощность множества всех биекций подмножества натуральных чисел .
2. Примените последовательную подстановку элементов группы , , , в соответствующем порядке их объявления.
3. Составьте таблицу Кэли для полной группы перестановок симметрической группы . Найдите все её нетривиальные подгруппы. Чему соответствуют найденные нетривиальные подгруппы.
4. Найдите все возможные порядки элементов в группе перестановок .
5. Найдите количество элементов-циклов длины в группе перестановок .
6. Найдите количество элементов порядка в группе .