

Практическая работа №7. Быстрое умножение теплицевой и циркулянтной матрицы на вектор

2022-11-25

Циркулянтная матрица

Циркулянтная матрица - вид матрицы, получающаяся в результате смещения влево первой строки матрицы на один элемент с переносом крайнего элемента на первую позицию справа в вектор-строке матрицы A. Итерационный перенос всей строки в рамках матрицы для каждой строки дает нам возможность строить циркулянтную матрицу:

$$A^{CIRC} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

Данная матрица обладает свойством периодичности, в результате которой имеется несколько новых возможностей:

1. Не хранить матрицу полностью в памяти компьютера, а получать её генератором, посредством повторного переноса первой строки.
2. Умножать такую матрицу на вектор не за $O(n^2)$, а за $O(n \cdot \log_2(n))$ операций с помощью быстрого преобразования Фурье.

Во втором случае имеет место следующее равенство:

$$A^{CIRC} @ u = f, \quad F^{-1} [F[A_0^{CIRC}] \cdot F[u]] \approx f,$$

где $F[\cdot]$ — быстрое преобразование Фурье входного вектора, $F^{-1}[\cdot]$ — быстрое обратное преобразование Фурье входного вектора, $A @ b$ — матричное умножение матрицы на вектор по правилам линейной алгебры, $a \cdot b$ — поэлементное умножения векторов, A_0^{CIRC} — первая строка циркулянтной матрицы A^{CIRC} .

Полученные выше выражения для умножения матрицы на вектор являются идентичными с точностью до ошибок округления компьютерной арифметики и второй способ является эффективным методом умножения циркулянтной матрицы на вектор за короткое время.

Теплицева матрица

$$A^{TOEPL} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-n+1} & a_{-n+2} & a_{-n+3} & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

Постановка задачи