

Практическое занятие №2. Интервальные оценки параметров. Доверительные интервалы точечных оценок

Юрченков Иван Александрович, ассистент кафедры ПМ

2022-09-11

Постановка задачи

1. Скачать папку с исходными данными по ссылке
2. Открыть папку соответствующую номеру своей группы
3. Открыть папку соответствующую номеру своего варианта
4. В папке **data** можете найти 4 ряда данных реализации случайной величины
5. Для каждого из четырех рядов данных необходимо провести следующие расчёты:
 - Подсчитать выборочные статистики для среднего и стандартного отклонения по следующим формулам:

Выборочное среднее:

$$\overline{X}_B = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i,$$

где N — число значений реализации случайной величины (количество значений в ряде данных),

$x_i \in \mathbb{R}, i \in \overline{1, N}$ — реализации нашей случайной величины (значения ряда данных).

Выборочное среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \overline{X}_B)^2}{N - 1}}.$$

- Для выборочного среднего \overline{X}_B подсчитать границы доверительного интервала по правилу нормального распределения, используя таблицу критических значений функции Лапласа $\Phi(x)$:

$$\hat{X}_B \in \left[\overline{X}_B - X_\gamma \cdot \frac{\sigma_B}{\sqrt{N}}, \overline{X}_B + X_\gamma \cdot \frac{\sigma_B}{\sqrt{N}} \right], \quad \Phi(X_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$$

и по правилу t-распределения Стьюдента используя таблицу критических значений $t_{\gamma, n}$ t-распределения:

$$\hat{X}_B \in \left[\overline{X}_B - t_{1-\gamma, N-1} \cdot \frac{\sigma_B}{\sqrt{N}}, \overline{X}_B + t_{1-\gamma, N-1} \cdot \frac{\sigma_B}{\sqrt{N}} \right]$$

при значении уверенности $\gamma = 0.95$

- Для выборочного среднеекватрического отклонения σ_B подсчитать границы доверительного интервала по оценке χ^2 -распределения при значении уверенности $\gamma = 0.95$:

$$\hat{\sigma}_B \in \left[\frac{\sigma_B \cdot \sqrt{N-1}}{\sqrt{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}, N-1}}}, \frac{\sigma_B \cdot \sqrt{N-1}}{\sqrt{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}, N-1}}} \right]$$

Пример расчета

Дано

Дан вещественный ряд данных реализации случайной величины:

$$X = \begin{pmatrix} 1.63, & 1.80, & 1.69, & 1.73, & 1.79, & 1.76, \\ 1.77, & 1.91, & 1.70, & 1.69, & 1.50, & 1.94, \\ 1.90, & 1.61, & 2.10, & 1.62, & 1.79, & 1.58, \\ 1.81, & 1.69, & 1.61, & 1.68, & 1.72, & 1.84, \\ 1.66, & 1.86, & 1.57, & 1.71, & 1.58, & 1.68 \end{pmatrix}$$

Для данного ряда $N = 30$.

Расчет выборочных статистик

Для ряда данных X рассчитаем выборочное среднее \overline{X}_B :

$$\overline{X}_B = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i = \frac{1.63+1.8+1.69+\dots+1.58+1.68}{30} \approx 1.731.$$

Для ряда данных X рассчитаем выборочное СКО σ_B :

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \overline{X}_B)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{(1.731-1.63)^2 + (1.731-1.8)^2 + \dots + (1.731-1.68)^2}{30-1}} \approx 0.129.$$

Расчет доверительного интервала нормального распределения

По полученным \overline{X}_B и σ_B получим следующий доверительный интервал точечной оценки \hat{X}_B со значением уверенности $\gamma = 0.95$:

$$\hat{X}_B = \hat{X}_B \in \left[1.731 - X_{0.95} \cdot \frac{0.129}{\sqrt{30}}, 1.731 + X_{0.95} \cdot \frac{0.129}{\sqrt{30}} \right], \quad \Phi(X_{0.95}) = \frac{0.95}{2} = 0.475$$

По таблице критических значений функции Лапласа значение $X_{0.95} = 1.96$. Следовательно доверительный интервал рассчитывается следующим образом:

$$\hat{X}_B = \hat{X}_B \in \left[1.731 - 1.96 \cdot \frac{0.129}{\sqrt{30}}, 1.731 + 1.96 \cdot \frac{0.129}{\sqrt{30}} \right], \quad \Phi(X_{0.95}) = \frac{0.95}{2} = 0.475.$$

И доверительный интервал равен:

$$\hat{X}_B = \hat{X}_B \in \left[1.731 - 1.96 \cdot \frac{0.129}{\sqrt{30}}, 1.731 + 1.96 \cdot \frac{0.129}{\sqrt{30}} \right],$$

или

$$\hat{X}_B = \hat{X}_B \in [1.685, 1.777].$$

Расчет доверительного интервала по t-распределению Стьюдента

По полученным \bar{X}_B и σ_B получим следующий доверительный интервал точечной оценки \hat{X}_B со значением уверенности $\gamma = 0.95$:

$$\hat{X}_B = \hat{X}_B \in \left[1.731 - t_{0.05,29} \cdot \frac{0.129}{\sqrt{30}}, 1.731 + t_{0.05,29} \cdot \frac{0.129}{\sqrt{30}} \right].$$

По таблице критических значений t-распределения Стьюдента значение $t_{0.05,29} = 2.05$. Следовательно доверительный интервал рассчитывается следующим образом:

$$\hat{X}_B = \hat{X}_B \in \left[1.731 - 2.05 \cdot \frac{0.129}{\sqrt{30}}, 1.731 + 2.05 \cdot \frac{0.129}{\sqrt{30}} \right].$$

Итоговый доверительный интервал для точечной оценки выборочного среднего равен:

$$\hat{X}_B = \hat{X}_B \in [1.683, 1.779].$$

Доверительный интервал для точечной оценки выборочного среднего по t-распределению Стьюдента оказался шире чем интервал рассчитанный по нормальному распределению, что является ожидаемым результатом поскольку распределение Стьюдента является более пологим в хвостах при малых значениях степеней свободы реализации случайной величины.

Расчет доверительного интервала среднего квадрата отклонения

Точечные оценки выборочной дисперсии являются распределенными по χ^2 -распределению, что делает возможным оценивать с помощью квантилей $\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \gamma}{2}$ доверительные интервалы как для точечной оценки дисперсии выборки с малыми степенями свободы, так и для точечной оценки СКО.

Доверительный интервал точечной оценки $\hat{\sigma}_B$ СКО по известным $\sigma_B = 0.129$ и $N = 30$ при $\gamma = 0.95$ рассчитывается следующим образом:

$$\hat{\sigma}_B \in \left[\frac{0.129 \cdot \sqrt{29}}{\sqrt{\chi_{0.975,29}^2}}, \frac{0.129 \cdot \sqrt{29}}{\sqrt{\chi_{0.025,29}^2}} \right].$$

Из таблицы квантилей χ^2 -распределения найдем значения для $\chi_{0.975,29}^2$ и $\chi_{0.025,29}^2$:

$$\chi_{0.975,29}^2 = 45.7, \quad \chi_{0.025,29}^2 = 16.0,$$

и доверительный интервал для точечной оценки СКО равен:

$$\hat{\sigma}_B \in \left[\frac{0.129 \cdot \sqrt{29}}{\sqrt{45.7}}, \frac{0.129 \cdot \sqrt{29}}{\sqrt{16.0}} \right].$$

$$\hat{\sigma}_B \in [0.103, 0.174].$$

Темы вопросов на защиту практической работы

1. Определение состоятельности, смещенности и эффективности для точечных оценок параметров выборки.
2. Понятие квантилей, квартилей и децилей в исследовании доверительных интервалов точечных оценок параметров. Распределение точечных оценок параметров.
3. Z -оценки и предпосылки для определения доверительных интервалов точечных оценок на основе нормального распределения.
4. Использование t -распределения Стьюдента в определении доверительных интервалов точечных оценок. Различия между t -распределением и нормальным распределением.
5. Предпосылки использования χ^2 -распределения в определении доверительных интервалов точечных оценок выборочного СКО.