**Решение задачи сверхразрешения при использовании нейронной сети**

Юрченков Иван Александрович

2023-06-14

## Постановка задачи

1. Пояснения к графикам.
2. Сравнение с бергом
3. Пояснение C\_n
4. Объяснить выбор архитектуры
5. Объяснить выбор метода оптимизации
6. Пояснить функционал ошибки
7. Вырезать картинки
8. Описать в тестовой части D, k, (константы)
9. Обратная задача (ссылка)
10. Вычислить рост ошибки с ростом числа виртуальных устройств в отклонении от модельных значений
11. Во введении обозначить что метод обработки принятого сигнала подходит для широкого класса волновых процессов в задачах гидролокации, сейсмических исследований, акустики.

Одно из основных направлений совершенствования радиосистем на основе цифровых антенных решеток - повышение их информативности, основанное на новых методах обработки принимаемых сигналов. Повышение точности угловых измерений и увеличение угловой разрешающей способности – важный шаг в этом направлении. В этой связи актуальной является задача восстановления изображения исследуемого объекта с угловой разрешающей способностью, превышающей критерий Рэлея, т.е. со сверхразрешением. Эта задача является обратной и сводится к решению интегрального уравнению Фредгольма типа свёртки:

 (1)

где Ω - угловая область расположения источника, I(α) – искомое распределение амплитуды излучаемого источником (или отражённого) сигнала, равное 0 вне Ω, f(α) – ДН измерительной системы, U(α) – принимаемый при сканировании сигнал.

Во многих странах разрабатываются и внедряются методы обработки сигналов, позволяющие достигать сверхразрешения. Основная трудность реализации всех предложенных методов - неустойчивость решений, являющаяся следствием некорректности поставленной задачи (1).

Для ЦАР возможен подход к задаче, напрямую не использующий (1), что повышает устойчивость решений.

Для упрощения получаемых выражений рассмотрим большую линейную ЦАР с числом элементов 2N+1. Амплитуды токов на излучателях полагаем равными, область Ω одномерной, расположенной в пределах ширины луча. В пределах узкой области Ω значения ДН отдельных излучателей считаем независящими от α и заменяем sinα ≈α. Обобщение полученных в дальнейшем выражений на общий случай принципиальных сложностей не вызывает.

Тогда (1) преобразуется в сумму:

 (2)

 (3)

где k = 2π/λ, d – расстояние между соседними излучателями.

Несложно показать, приближённое решение (2) I(α) можно представить в виде

, (4)

повторяющем по форме U(α),где A – нормировочный коэффициент. Полученное разрешение соответствует критерию Рэлея.

Чем уже ДН, т.е. чем больше размеры АР, тем точнее получаемое решение (4). В пределе при N → ∞ получим точное решение, соответствующее ДН в виде дельта-функции, представляющее собой разложение искомой функции в ряд Фурье на соответствующем интервале.

В отличие от обычных ФАР, коэффициенты Cn в ЦАР могут быть зарегистрированы в цифровом виде и их значения использованы в дальнейшем при цифровой обработке сигналов. Рассмотрим одну из возможностей использования полученных Cn для повышения точности угловых измерений и увеличения углового разрешения.

Из (3) следует, что различия значений Cn определяются только пространственным положением отдельных излучателей ЦАР. Следовательно, проанализировав расположение большого количества излучателей и значения соответствующего им набора коэффициентов Cn, можно с хорошей точностью найти зависимость принимаемого сигнала в виде коэффициента Cj от координат j –того излучателя.

Решение этой задачи позволяет прогнозировать значения принимаемого сигнала за пределами апертуры ЦАР. Используя найденные новые значения Cj, при j = ± (N+1)… ± M, получим синтезированную ДН и решение в виде (4) с распространением суммирования до 2M +1 членов, т.е. для ЦАР с 2M +1 излучателями. В итоге, точность угловых измерений и разрешающая способность повысились в M /N раз.

Исследования показывают, что зависимость принимаемого сигнала C от расстояния до центра ЦАР описывается плавной осциллирующей кривой и хорошо поддаются экстраполяции.

## Метод экстраполяции сигнала

Экстраполяцию сигналов, принимаемых каждым элементом ЦАР будем осуществлять с помощью модели нейронной сети прямого распространения с нелинейной функцией активации в скрытых слоях. Архитектурно модель нейронной сети прямого распространения представлена на рисунке (рис.1)

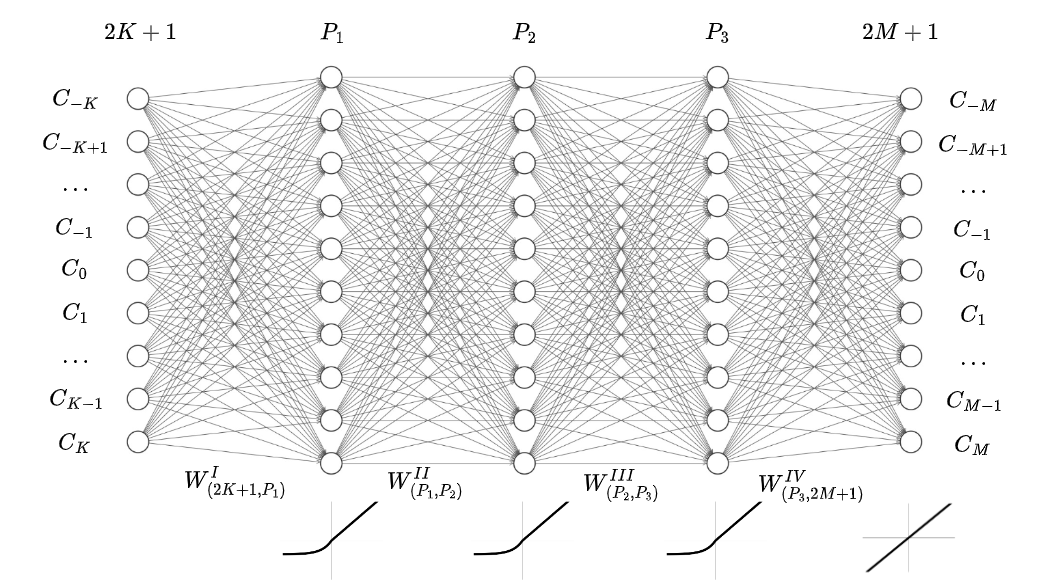


Рисунок 1 - Архитектура нейронной сети прямого распространения, решающей данную задачу

Полносвязная нейросетевая модель состоит из соединенных в скрытые слои линейные нейроны с нелинейной функцией активации, порождающих нелинейные преобразования над входными данными по мере прямого распространения информации от входов модели к выходу. Каждый слой нейронной сети обладает взвешивающими предыдущие входы весами для определения итогового значения линейной комбинации признаков. Веса полносвязной нейронной сети будем обозначать как вектор матриц соответствующих весам -го слоя:

В каждой матрице число строк совпадает с числом входов, а число столбцов совпадает с числом нейронов в данном скрытом слое. Последний слой нейронной сети обозначим как .

Модель нейронной сети прямого распространения основывается на линейном преобразовании входного вектора данных с помощью матрицы параметров (весов) нейронов очередного скрытого слоя. Затем к каждому элементу выходного вектора после преобразования применяется нелинейная функция активации, тем самым вводя нелинейнойсть в искомую зависимость. Преобразованный вектор, в последствии, поступает на вход следующему скрытому слою нейронной сети. Процедура прямого распространения завершается после прохождения входных данных через все скрытые слои и выходной, выбор функции активации которого зависит от конкретной решаемой задачи.

Для решения задачи построения модели экстраполяции значений сигналов приемных устройств ЦАР была выбрана архитектура полносвязной нейронной сети прямого распространения. На вход модели подаются известные реальные значения принятых сигналов для физических устройств ЦАР, рассчитанных на основе принятого распределения интенсивности отраженного сигнала от сканируемой области. Входные данные обозначены как вектор значений для физических элементов системы ЦАР c индексами в пределах , где - количество реальных физических приемных устройств одномерной системы в одну из двух сторон от центрального детектора одномерной ЦАР. Выход нейросетевой модели составляет вектор предсказываемых значений коэффициентов виртуальной приемной системы большего размера в окне экстраполяции , где - соотвественно количество применых устройств виртуальной одномерной приемной системы в одну сторону.

Тогда будем считать, что модель нейронной сети прямого распространения ставит задачу отображения входных данных одной размерности через преобразования на основе матриц весов в выходные данные другой размерности по следующему правилу:

где - оцененные с помощью модели значения искомой зависимости между и .

Размерность входных определяется апертурой решётки, а выходных - требованиями к ширине окна экстраполяции. Количество нейронов в скрытом слое определяется исходя из размеров входного и выходного слоев, а также возможностью собрать необходимое количество примеров прецедентов и откликов для обучения всех параметров модели. Число входов и выходов из нейронной сети, или размерность отображения зависит от прикладной задачи, в которой мы уже определились с количеством входов и выходов соответственно.

Обучение модели производится посредством последовательного преобразования тренировочных примеров значений принятого сигнала на физических устройствах АР и сравнения полученных тестовых предсказанных значений с модельной зависимостью значений сигнала на приемных устройствах , определенной ранее (). На графиках (рис.2) показан пример входной и выходной зависимостей, подаваемых в модель нейронной сети при обучении. В ответ на входные данные модель должна выдавать близкую к ожидаемой зависимость от номера приемного устройства.

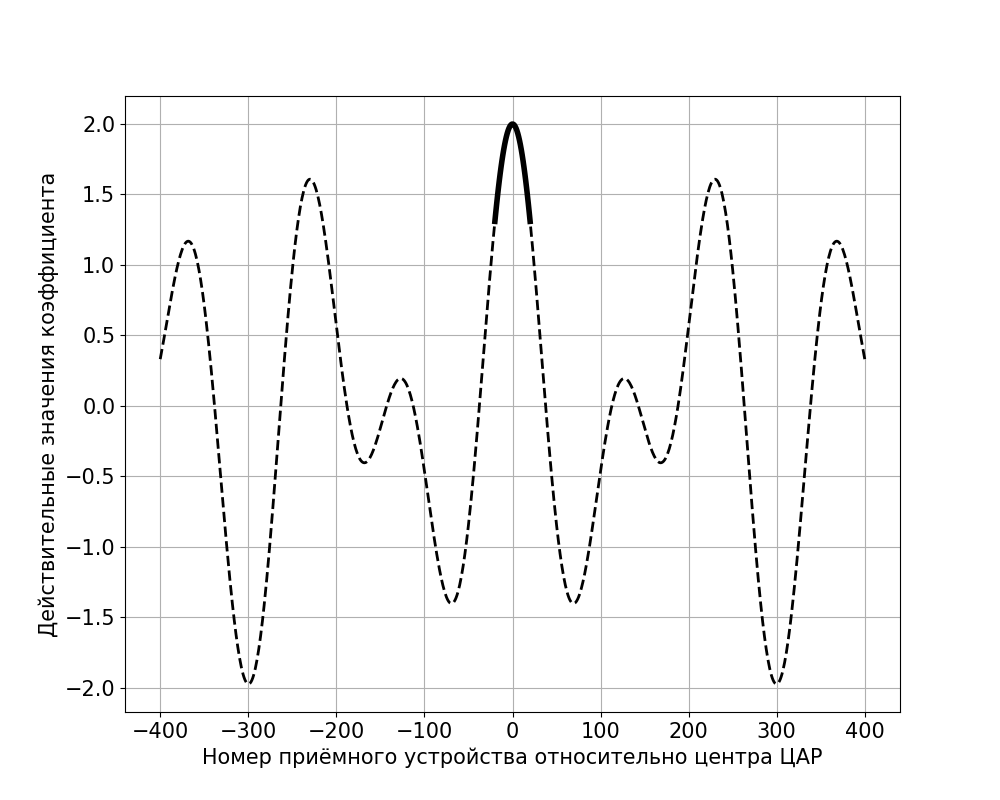


Рисунок 2а - Схематичное представление задачи для решения с использованием нейросети

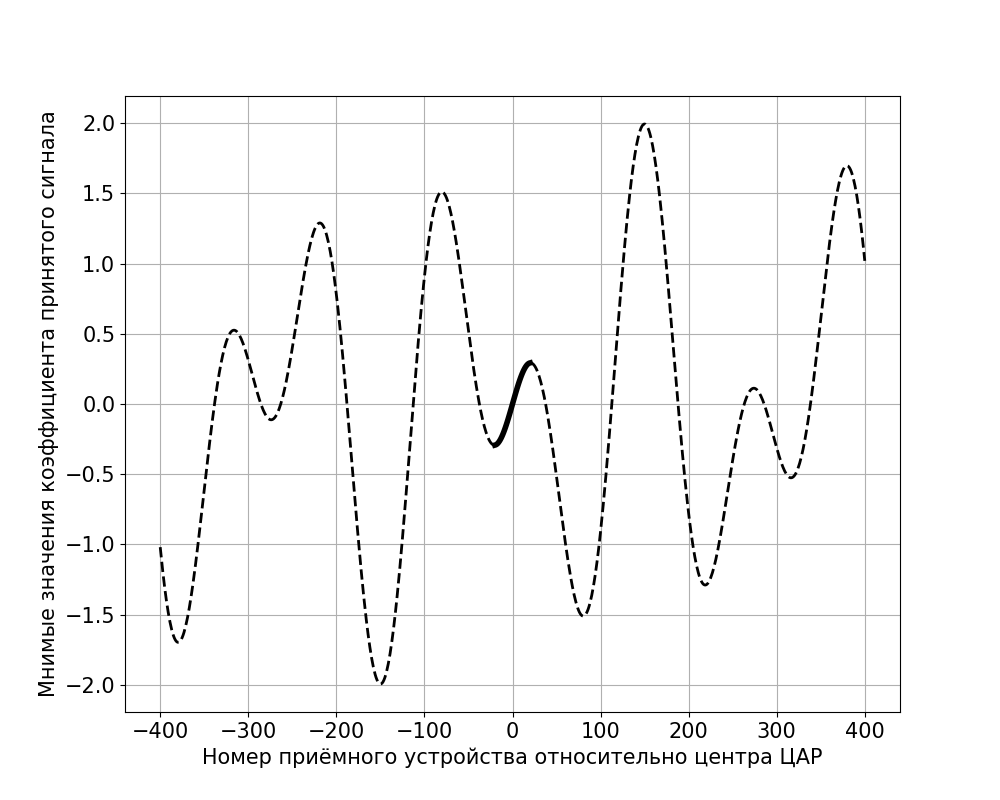


Рисунок 2б - Схематичное представление задачи для решения с использованием нейросети

Изменение параметров в скрытых слоях нейронной сети осуществляется на основе вариаций методов градиентного спуска с использованием метода обратного распространения ошибки. Минимизируемый функционал (описать функционал), используемый в процедуре оптимизации, должен отражать штрафы на высокие ошибки решения моделью задачи регрессии.

## Полученные результаты

На основе сгенерированной выборки с наборов значений коэффициентов принятого сигнала для моделируемой физической системы приемных устройств и желаемых для данного распределения сигналов, не разрешимых данной системой по критерию Рэлея, коэффициентов принятого сигнала для системы виртуальных устройств была обучена модель полносвязной нейронной сети прямого распространения с тремя скрытыми слоями по нейронов в каждом.

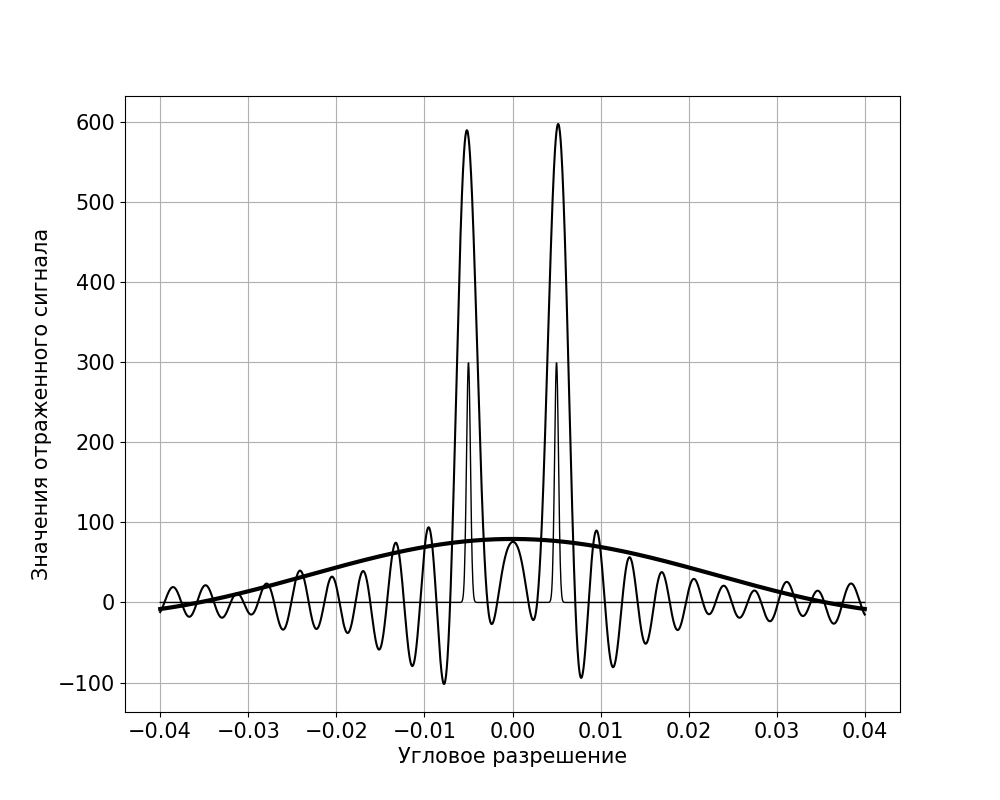
Выборка была сформирована на основе генерации случайных пар целей в пределах окна отсутсвия их разрешения в принятом сигнале по критерию Релея. Распределения коэффициентов реальной ЦАР в наборе прецедентов при подстановке в расчет итогового принятого сигнала не давала возможности получить в исследуемом угловом разрешении изображения различных источников. В матрице откликов мы имеем желаемые коэффициенты виртуальной ЦАР, полученные путем рассчета коэффицентов приемных устройств с большим их числом в системе по зависимости, показанной выше.

В рамках данной задачи тестировалась физическая система с реальных приемных устройств в одну сторону от центра одномерной ЦАР и виртуальной системой с приемных устройств, что определяет количество входных и выходных значений в одном наборе выборки данных.

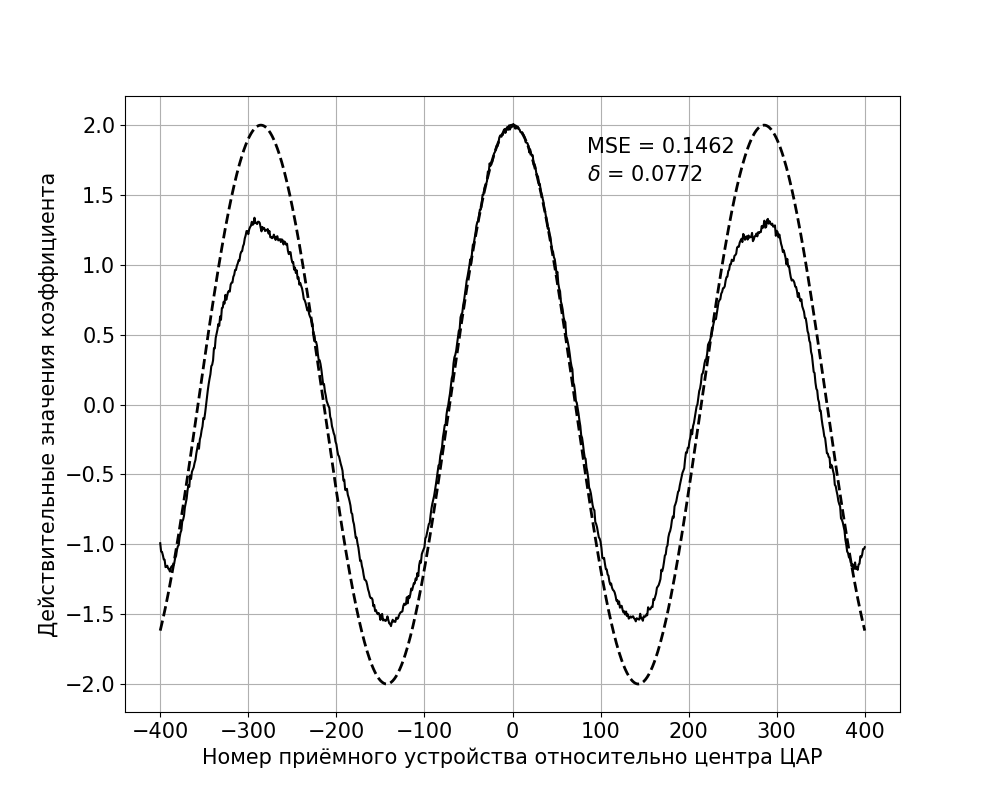
Обучение модели полносвязной нейронной сети прямого распространения происходило на случайно сгенерированных выборках с применением метода оптимизации *Adam (ссылка на объяснение почему был выбран метод)* со стандартными гиперпараметрами и , начальной скоростью обучения . Для оптимизации параметров модели применялся пакетный метод оптимизации с размером пакета наборов .В качестве минимизируемого функционала выступала среднеквадратическая ошибка . Обучение до плато на кривой обучения по метрике среднеквадратической ошибки заняло ориентировочно 2000 эпох. Полученные результаты для обученной модели представлены ниже на рисунках.

Целевой метрикой для решения задачи можно считать разрешимость выявляемых системой обнаружения положений максимумов амплитуд принятого сигнала по критерию Рэлея, а также среднеквадратическую ошибку экстраполированных значений сигналов приемных устройств в действительной и комплексной области по сравнению с желаемыми значениями коэффициентов вирутальной системы для конкретной моделируемой функции целей на валидационной отложенной выборке.

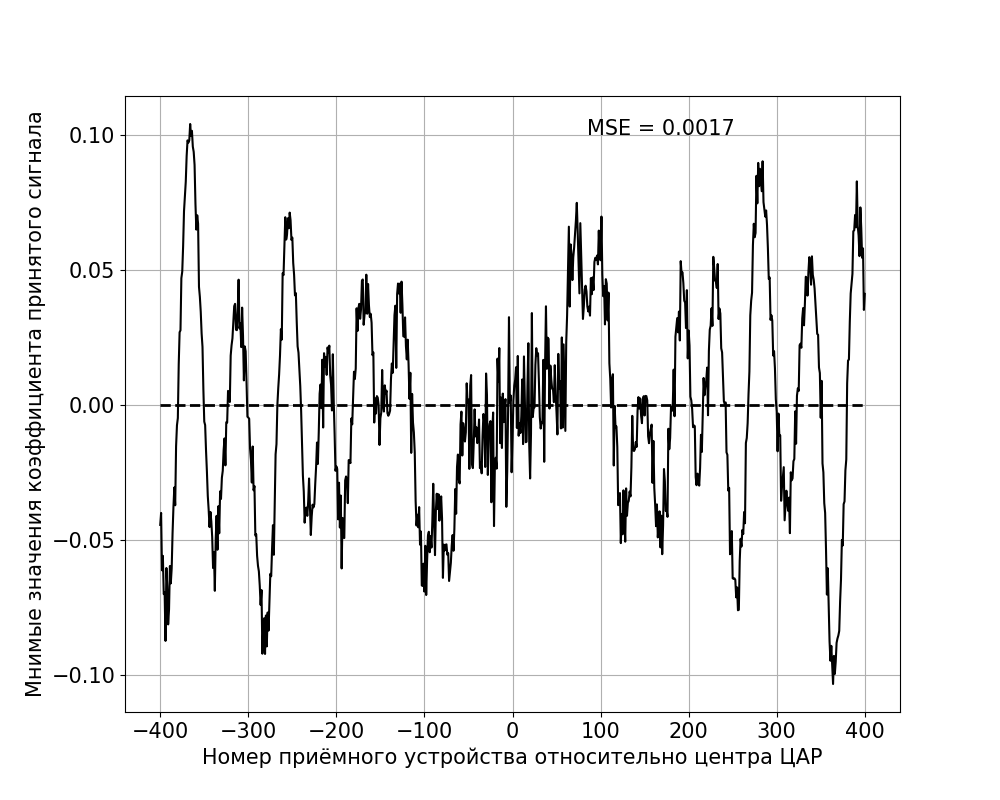
В первом эксперименте были взяты симметричные (чётные) цели относительно начала координат в выбранном угловом разрешении, не позволяющем распознать данные цели реальной физической системой. С помощью обученной модели экстраполяции значений коэффициентов приемных устройств получаем разрешимую картину принятого сигнала (рис.1а). По графикам значений коэффициентов применых устройств наблюдаем слабую ошибку экстраполяции для первых приемных устройств и ухудшение качества при переходе через минимум экстраполируемой зависимости в действительной области (рис.1б). Для симметричных целей относительно центра ЦАР мнимые значения должны быть равны 0 (рис. 1в).



а - принятый сигнал виртуальной системой с симметричными целями



б - действительные значения коэффициентов приемных устройств для выбранного сигнала

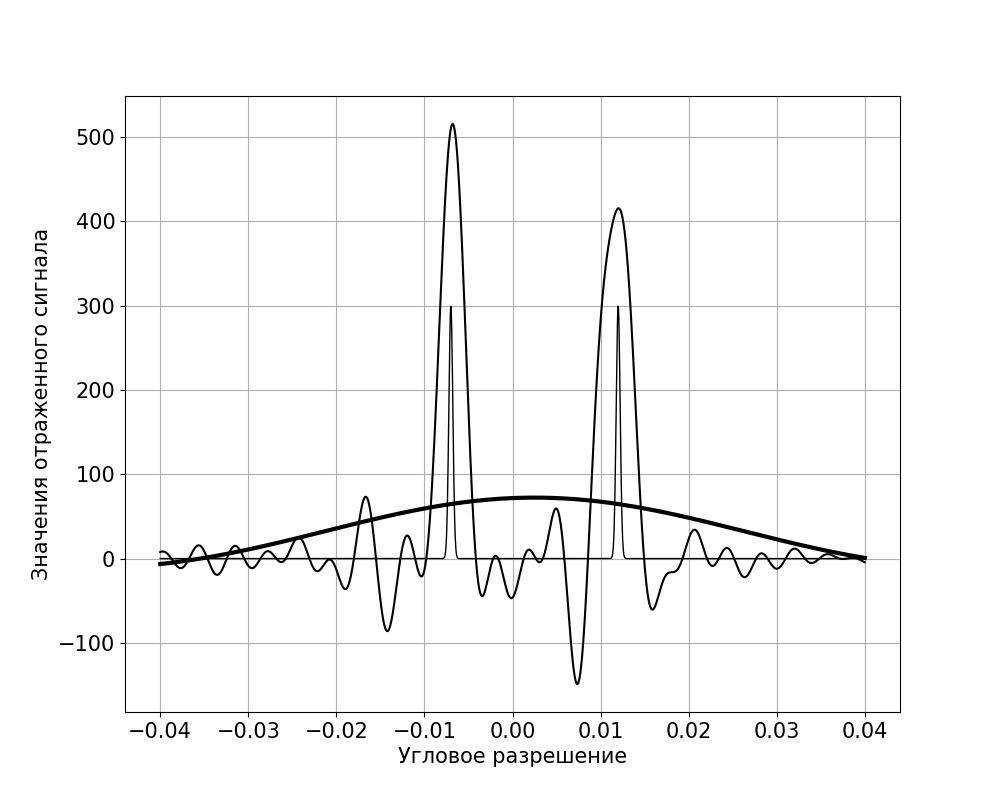


в - мнимые значения коэффициентов приемных устройств для выбранного сигнала

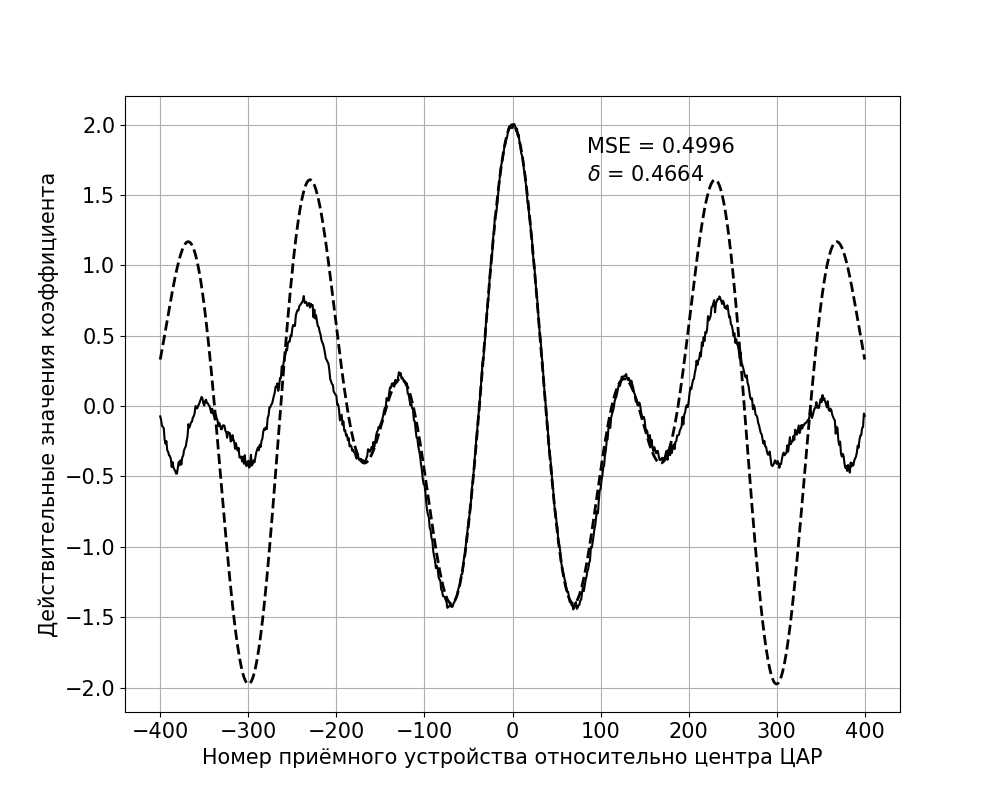
Сплошная тонкая линия - функции моделируемых целей; сплошная жирная линия - прием сигнала и коэффициенты реальной физической моделируемой системы; штриховая линия - идеальные (целевые) значения вирутальной системы обнаружения с большим числом приемных устройств; сплошная линия - прогнозирование моделью нейронной сети.

Отметим для симметричных целей высокую точность выявления целей и маленькую ошибку экстраполяции на ближайшие 200 виртуальных устройств.

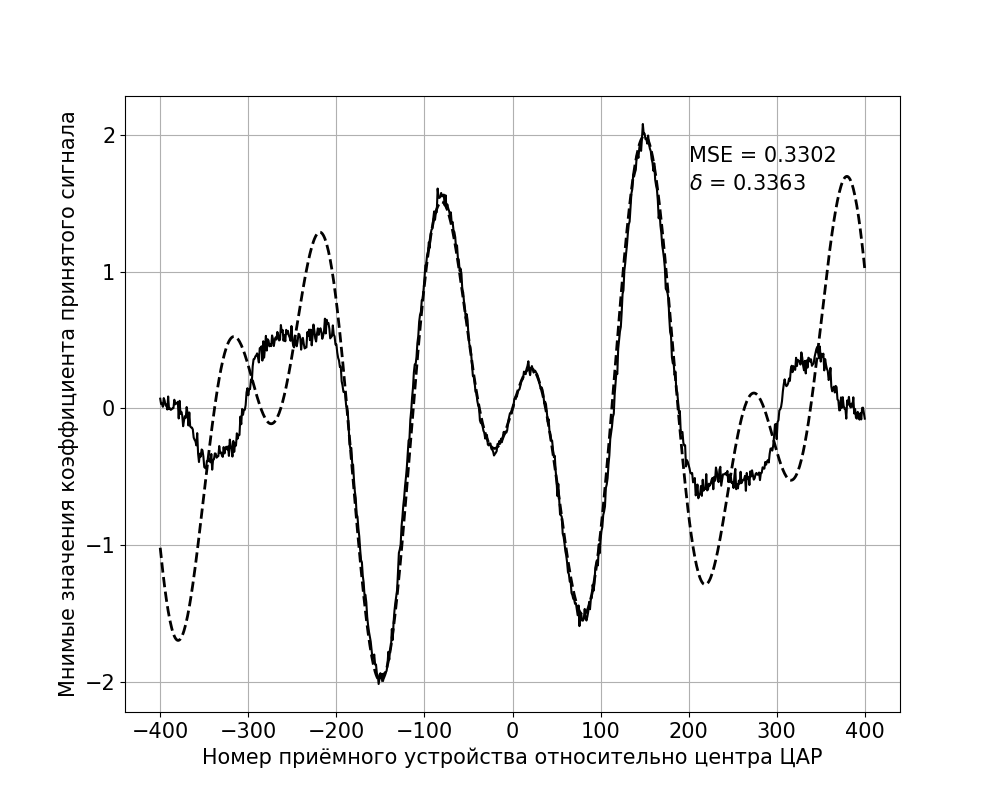
Во втором эксперименте были взяты несимметричные цели относительно центра ЦАР. Полученная визуализация работы модели представлена на рисунке (рис.2а). Также на визуализации значений принятых сигналов приемной системой заметим, что модель также хорошо экстраполирует значения вплоть до 200 элемента системы.



а - принятый сигнал виртуальной системой с несимметричными целями

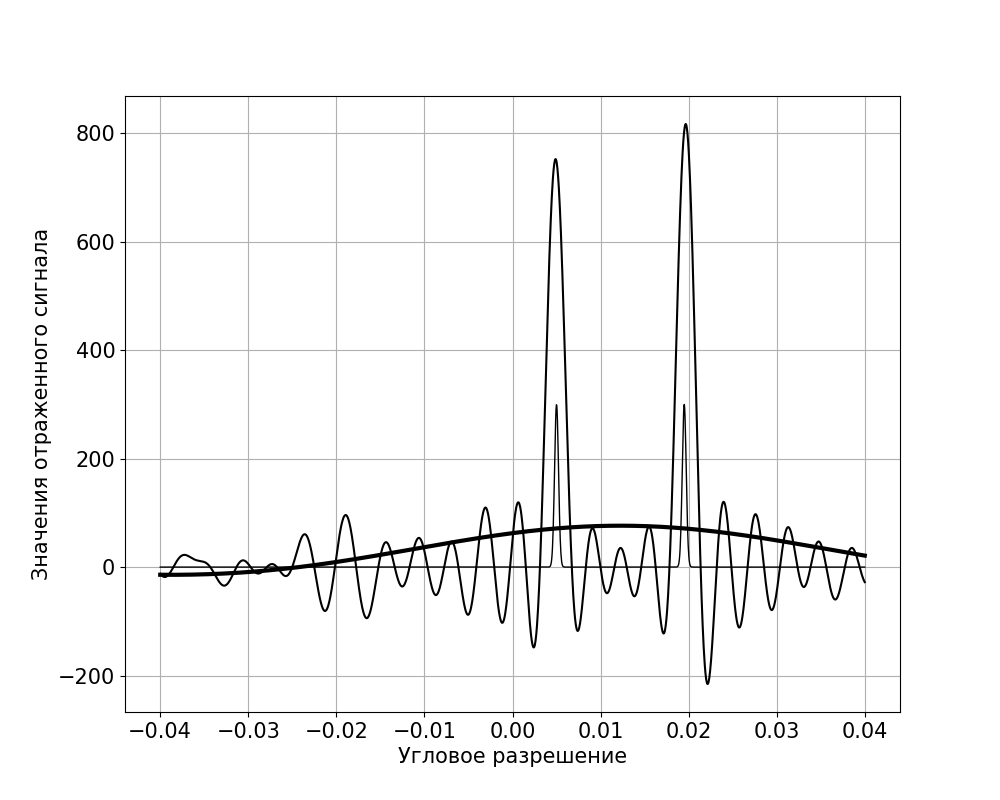


б - действительные значения коэффициентов приемных устройств для выбранного сигнала

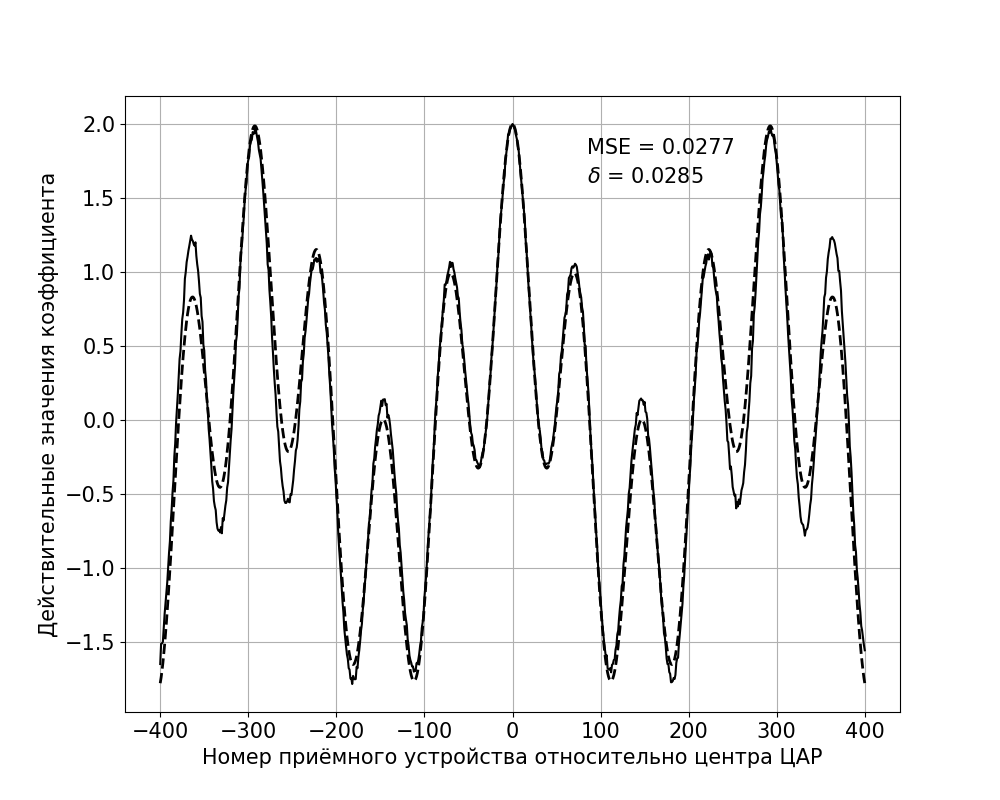


в - мнимые значения коэффициентов приемных устройств для выбранного сигнала

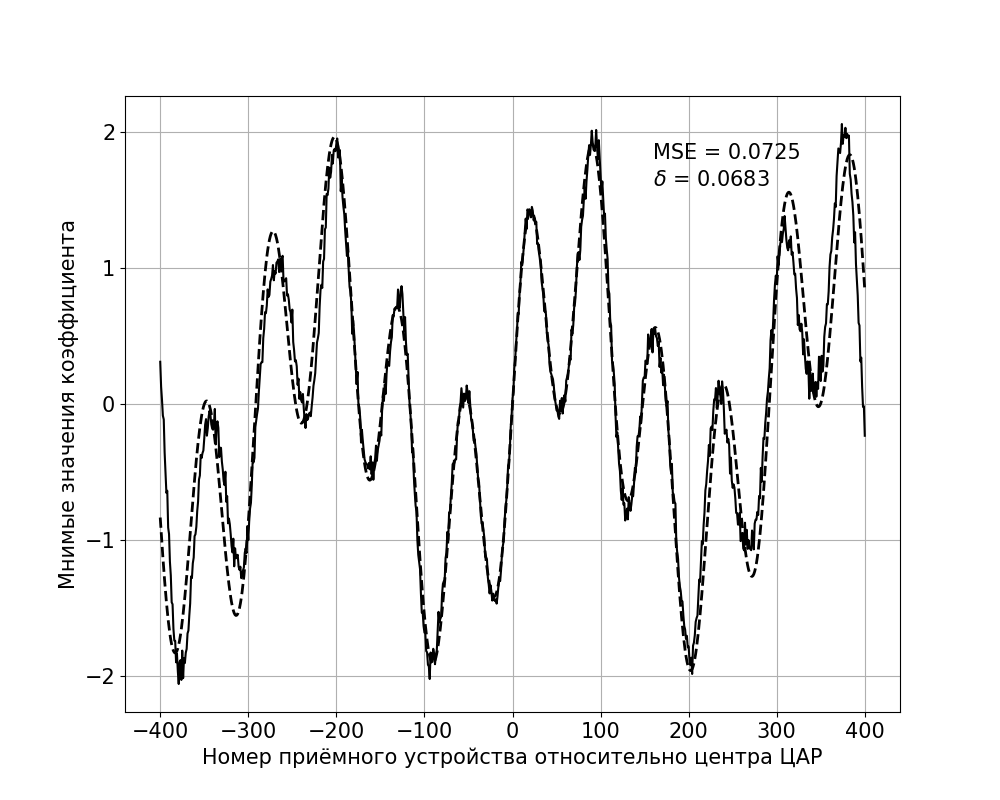
В третьем эксперименте были взяты цели по одну сторону от центра ЦАР.



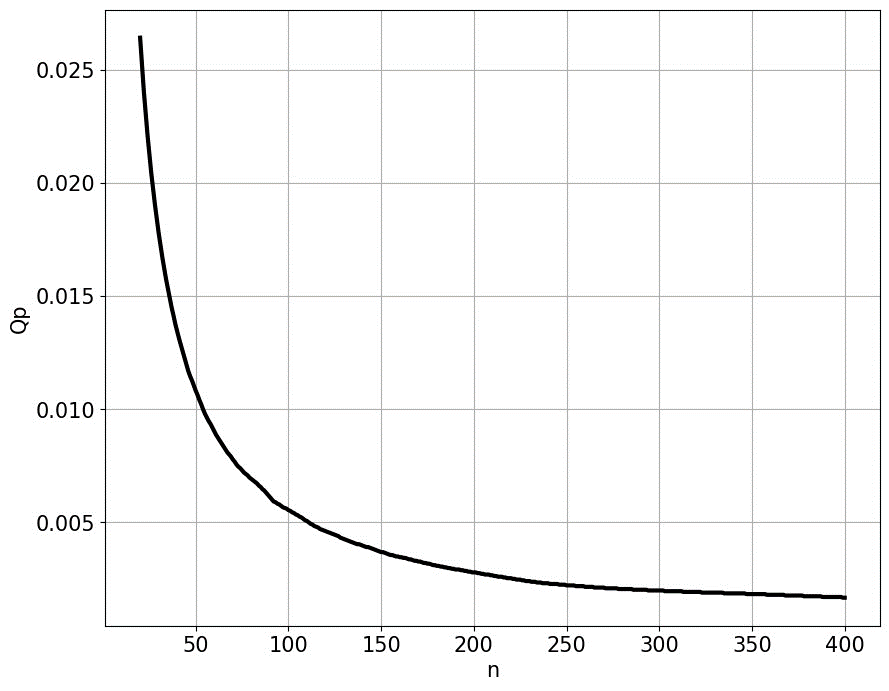
а - принятый сигнал виртуальной системой с односторонними целями



б - действительные значения коэффициентов приемных устройств для выбранного сигнала



в - мнимые значения коэффициентов приемных устройств для выбранного сигнала



Минимальное расстояние между целями, разрешимыми по критерию Рэлея в зависимости от числа излучателей