ЗАДАЧА 1 **1 балл**

Для множества

$$E = [0;1] \cup \{2\} \cup (3;4] \cup \{5\} \cup ([8;11] \cap \mathbb{Q})$$

найди:

а) граничные точки;

б) предельные точки;

в) точки прикосновения;

г) внутренние точки.

а) $0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ ([8;11] \cap \mathbb{Q})$

б) $[0;1] \cup [3;4] \cup [8;11]$

в) $[0;1] \cup \{2\} \cup [3;4] \cup [8;11]$

г) $(0;1) \cup (3;4)$

ЗАДАЧА 2 **0,5 балла**

Существует ли множество, состоящее только из изолированных точек, и имеющее предельную точку?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11 Точка $\mathbf{x}^*$ из множества E называется **изолированной** точкой множества E, если в некоторой её проколотой окрестности нет ни одной точки E.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9 Точка $\mathbf{x}^*$ называется **предельной точкой** множества X, если в любой её *проколотой* окрестности есть точки множества X, то есть

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathbf{x} \in \mathring{U}(\mathbf{x}^*) \cap X.$$

=> Изолир-я т-ка подраз-т, что найдется окр-ть в которой не будет ни одной точки мн. E

т.е. $\exists \varepsilon > 0: \forall \vec{x} \in \mathring{U}_\varepsilon(x^*) \rightsquigarrow \vec{x} \notin E$

это отрицание определения предельной точки => нет, не сущ-ет

ЗАДАЧА 3 **0,5 балла**

Существует ли множество, не являющееся ни замкнутым, ни открытым?

Да. Пример: $E = (a; b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ -> состоит из $\mathrm{int}(E) = (a; b)$ и $\{b\}$

=> не яв-ся открытым.

При этом не содержит точку прикосновения $\{a\}$, т. е.

$E = (a; b) \neq \bar{E} = [a; b]$

ЗАДАЧА 4 | **1 балл**

Докажи, что граница множества является замкнутым множеством, то есть что ∂E — ∂X замкнуто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10 **Границей** множества $X \subset \mathbb{R}^n$ называется множество $\partial X = \overline{X} \setminus \operatorname{int} X$. Точки множества ∂X называются **граничными точками** множества X.

ЛЕММА 7 $\mathbf{x}^* \in \partial X \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \mathbf{x}^{(1)} \in U_\varepsilon(\mathbf{x}^*) \cap X \ \wedge\ \exists \mathbf{x}^{(2)} \in U_\varepsilon(\mathbf{x}^*) \setminus X.$

Замкн. мн-во: $X = \overline{X}$

Т.к по опр. $\partial X = \overline{X} \setminus \operatorname{int} X$, то ∂X состоит из изолированных точек. $\Rightarrow \forall \vec{x} \in \partial X\ \exists \varepsilon > 0 : \forall \tilde{x} \in \mathring{U}_\varepsilon(\vec{x}) \rightsquigarrow \tilde{x} \notin \partial X$

I) Притом, $\forall x \in \partial X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \tilde{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}) \cap \partial X$ — опр. точки прикас-я.

II) Граница мн-ва — состоит из граничных точек.

Из леммы 7 $\Rightarrow$ что для граничной точки $(\hat{X})$ $\rightsquigarrow$ в любой ε окр-ти $\hat{X}$ найдется $\vec{X}^{(1)} \in \partial X$ и $\vec{X}^{(2)} \notin \partial X$

Однако, ∂X состоит только из изолированных точек $\Rightarrow$ из II) и опр. изолиров-й точки, получаем, что для произвольного $\overset{*}{x} \in \partial X \rightsquigarrow \left(\exists \vec{x}^{(1)} \in U_\varepsilon(\overset{*}{x}) \cap \partial X\right) \wedge \left(\forall \vec{x} \notin \mathring{U}_\varepsilon(\overset{*}{x})\right)$

$\Rightarrow$ любая произв-я $\overset{*}{x} \in \partial X$ яв-ся точкой прикосновения

$\Rightarrow$ ∂X является замкнутым, так как содержит все свои т. прикосновения

$$\partial X = \overline{\partial X}$$

ЗАДАЧА 5

1 балл

Может ли множество изолированных точек быть несчётным?

Пусть E – мн-во всех изол-х точек в $\mathbb{R}^n$

По опр. изол-й точки для неё существ-т изолированная ε-окр-ть.

Эта ε-окр-ть – шар с изол-ой точкой в центре. Любой набор попарно непересекающихся шаров (окрестностей) не может быть несчётным => не может быть несчётного кол-во изолированных точек.

=> Нет, не может

ЗАДАЧА 6	**1 балл**

Является ли множество, на котором определена функция $u = \sqrt{x \sin y}$

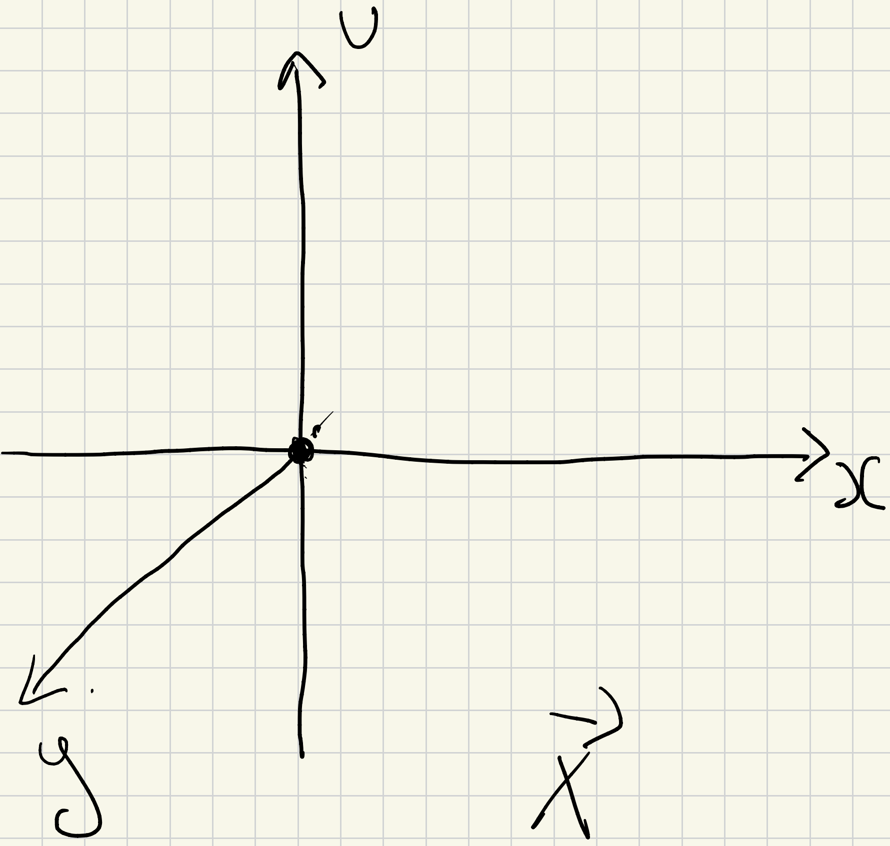
а) открытым; б) замкнутым; в) областью?

Ответ обоснуй.

а) Открыт-е – состоит из внутр-х точек

$x \sin y \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0 \\ \sin y < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ \sin y \geq 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow E = \{ ((-\infty; -\infty); (0;0)) \cup [(0;0); (+\infty; +\infty)) \}$



а) Нет. Точка $(0;0)$ не яв-ся внутр-й. Возле $(0;0)$ всегда найдется $U_\varepsilon((0;0))$ которая не содержит точек из множ-ва опред-я функции u.

б) Да, $\forall (x;y) \in ((-\infty;-\infty); (0;0)) \cup ((0;0); (+\infty;+\infty))$

$\vec{X} = (x;y)$ – будет точкой прикос-ия, и в таком случае произв-я т. прикос-я $\vec{X}$ с некоторой окрест-ю будет лежать в множ-ве обл-ти определения u. Однако, точка $(0;0)$ будет входить в мн-во обл-ти опред-я u без окр-ти, но тем не менее $(0;0)$ – т. прикос-я и входит в мн. опред-я u $\Rightarrow$ все т. прик-я входят $\Rightarrow$ замкнуто в) Нет. Оно является линейно связанным, но не яв-ся открытым

ЗАДАЧА 7

1 балл

Найди пределы функции $f(x;y) = x^4 e^{y-x^2}$ по лучам вида $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$ при $t \to +\infty$. Верно ли, что $\lim\limits_{(x;y)\to(\infty;\infty)} f(x;y) = 0$?

I) $f(x;y) = t^4\cos^4\alpha \cdot e^{t\sin\alpha - t^2\cos^2\alpha}$

При $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. : $t \to +\infty$ =>

$\cos^2\alpha > 0$ $(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z})$ =>

$t^2\cos^2\alpha$ растет быстрее $t\sin\alpha$ => $e^{-t^2\cos^2\alpha} \to 0$

$e^{-t^2\cos^2\alpha}$ стремится к 0 намного быстрее чем t^4 растет => Предел равен 0 при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

При $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$: $x = 0$ $y = t$

=> $f(x;y) = 0 \cdot e^t = 0$

II). Рас-м приближение через $y = x^2$

$\lim\limits_{(x;y)\to(\infty;\infty)} f(x;y) = x^4 \cdot e^{x^2 - x^2} = +\infty$

=> Один из пределов по направ-ю равен $+\infty$ => Не м. б. предел $f(x;y) = 0$

Ответ: не сущ-т общего предела

ЗАДАЧА 8

1 балл

Найди предел $\lim\limits_{(x;y)\to(+\infty;+\infty)} \left(x^2+3y^2\right)e^{-x-y}$.

Пусть $\begin{cases} x = \varphi\cdot\cos^2\alpha \\ y = \frac{\varphi}{\sqrt{3}}\cdot\sin^2\alpha \end{cases}$, $\varphi \geqslant 0$, $\alpha\in[0;\pi)$

$$\lim_{(x;y)\to(+\infty;+\infty)} F(x;y) = \left(\varphi^2\cdot\cos^4\alpha + 3\cdot\frac{\varphi^2}{3}\cdot\sin^4\alpha\right)\cdot e^{-\varphi\cos^2\alpha-\varphi\sin^2\alpha}$$

$$=\left(\varphi^2\cdot\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2-2\cos^2\alpha\sin^2\alpha\right)\cdot e^{-\varphi}$$

$e^{-\varphi}$ быстрее стрем-ся к 0, при $\varphi\to+\infty$

$$\Rightarrow \lim_{(x;y)\to(+\infty;+\infty)} (x^2+3y^2)e^{-x-y} = 0$$

Поиск предела с помощью перехода в полярные координаты

ЗАДАЧА 10

1 балл

Докажи, что $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{y\sin x - x\sin y}{(x^2+y^2)^2}$ не существует.

Пусть $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi\in[0;2\pi)$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{y\sin x - x\sin y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\rho\sin\varphi\cdot\sin(\rho\cos\varphi) - \rho\cos\varphi\cdot\sin(\rho\sin\varphi)}{(\rho^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi))^2}$$

$$= \frac{\rho(\sin\varphi\sin(\rho\cos\varphi) - \cos\varphi\sin(\rho\sin\varphi))}{\rho^4}$$

$$\left| \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3) \right|$$

Рас-м мн-ль: 1) $\sin(\rho\cos\varphi) = \rho\cos\varphi - \dfrac{\rho^3\cos^3\varphi}{6} + o(\rho^3\cos^3\varphi)$

2) $\sin(\rho\sin\varphi) = \rho\sin\varphi - \dfrac{\rho^3\sin^3\varphi}{6} + o(\rho^3\cos^3\varphi)$

3) $\rho(\sin\varphi\cdot(\rho\cos\varphi - \dfrac{\rho^3\cos^3\varphi}{6} + o(\rho^3)) - \cos\varphi(\rho\sin\varphi - \dfrac{\rho^3\sin^3\varphi}{6} + o(\rho^3)$

$$= \frac{\rho(\cancel{\rho\cos\varphi\sin\varphi} - \dfrac{\rho^3\sin\varphi\cos^3\varphi}{6} - \cancel{\rho\cos\varphi\sin\varphi} + \dfrac{\rho^3\cos\varphi\sin^3\varphi}{6} + o(\rho^3)}{\rho^4}$$

$$= \frac{\frac{\rho^3\cos\varphi\sin^3\varphi}{6} - \frac{\rho^3\sin\varphi\cos^3\varphi}{6} + o(\rho^3)}{\rho^3}$$

$$= \frac{\cancel{\rho^3}(\cos\varphi\sin^3\varphi - \sin\varphi\cos^3\varphi) + \cancel{o(\rho^3)}}{\cancel{\rho^3}}$$

$$= \cos\varphi\sin^3\varphi - \sin\varphi\cos^3\varphi \Rightarrow$$ зависит от $\varphi \Rightarrow$ нет предела

ЗАДАЧА 11

1 балл

Вычисли повторные пределы в точке $(0;0)$ функции

$$f(x;y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 > 0.$$

1) $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x;y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$

2) $\lim\limits_{y\to 0} \lim\limits_{x\to 0} f(x;y) = \frac{x^2}{x^2} = 1$

ЗАДАЧА 12

1 балл

Приведи пример функции, у которой существует предел по совокупности, но не существует обоих повторных пределов.

ЗАДАЧА 13

2 балла

Пусть существует двойной предел $\lim\limits_{(x;y)\to(x^*;y^*)} f(x;y) = b$, и при любом $x \in \mathring{U}_\delta(x^*)$, существует $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to y^*} f(x;y)$. Докажи, что существует повторный предел

$$\lim_{x\to x^*} \varphi(x) = b.$$

I) Док-м $\varphi(x) \to b$, $x \to x^*$

Фик-м x, при $y - y^*$: $\lim\limits_{y\to y^*} f(x,y) = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0: |y - y^*| < \delta_1\ |f(x,y) - b| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ По y предел сущ-т и равен b

II) Из усл-я: $|\varphi(x) - b| = |\lim\limits_{y\to y^*} f(x,y) - b| < \varepsilon$

Но из опр-я двойного предела $x \to x^*$, $y \to y^*$ функция стремится к b $\Rightarrow$ это верно и для $\varphi(x)$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x^*} \varphi(x) = b$