

Федеральное агентство по образованию

---

Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет «ЛЭТИ»

---

**Комплексные числа  
и многочлены**

Методические указания  
к решению задач

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
2007

УДК 512.64(07)

Комплексные числа и многочлены: Методические указания к решению задач / Сост.: М. Н. Абрамова, Е. А. Толкачева, А. И. Куприянов. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2007. 32 с.

Содержат примеры решения основных типов задач высшей алгебры.  
Разобраны различные методы решения этих задач.  
Предназначены для студентов-заочников всех специальностей.

Утверждено  
редакционно-издательским советом университета  
в качестве методических указаний

© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2007

При изучении курса высшей математики, включающего наряду с другими разделами комплексные числа и многочлены, делается упор на умение студента самостоятельно решать задачи с использованием различных методов. В связи с этим настоящее издание призвано помочь студентам-заочникам младших курсов в их самостоятельной работе.

Несмотря на то, что студент может использовать любые источники, содержащие сведения по высшей алгебре, в данных указаниях в качестве основного выбран один из них – «Конспект лекций по высшей математике» Д.Т. Письменного [1] – издание, наиболее доступное, с точки зрения составителей. Поэтому в начале каждой темы дается ссылка на конкретные страницы названного учебного пособия.

Решение каждого примера в предлагаемых указаниях заканчивается ответом, который или подчеркнут, или записан отдельно.

## 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

### 1.1. Определение комплексных чисел и действия над ними

#### *1.1.1. Сложение и умножение комплексных чисел в алгебраической форме*

Определение комплексных чисел приведено в [1, с. 186-187]. Для решения многих задач важна алгебраическая форма записи комплексного числа  $z = x + yi$ , где  $x, y \in R$ ;

$x = \operatorname{Re} z$  – действительная часть числа  $z$ ;

$y = \operatorname{Im} z$  – мнимая часть числа  $z$ .

В дальнейшем по умолчанию под  $x$  и  $y$  будем понимать именно действительную и мнимую части комплексного числа  $z$ .

Число  $i$  – мнимая единица. Для нее верно равенство:  $i^2 = -1$ , а также верно, что  $\sqrt{-1} = i$  и  $\sqrt{-1} = -i$ .

Исходя из этого, определим на примерах результат возведения  $i$  в различные степени:

$$i^1 = i;$$

$$i^2 = -1;$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i;$$

$$i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1;$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i.$$

Обобщим результат и получим формулу для нахождения  $i^n$ :

$$i^n = \begin{cases} 1, n = 4k, k \in \mathbb{Z}; \\ i, n = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}; \\ -1, n = 4k + 2, k \in \mathbb{Z}; \\ -i, n = 4k + 3, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме производятся по правилам действия над многочленами относительно величины  $i$ , при этом важно помнить, что  $i^2 = -1$  [1, с. 188-189].

**Пример 1.** Выполнить действия:  $(5 + 3i) + (-2 - i) = 5 + 3 \cdot i - 2 - 1 \cdot i = (5 - 2) + (3 - 1)i = \underline{3 + 2i}$

**Пример 2.** Выполнить действия:  $2 \cdot (3 + 4i) + (5 - 3i)(1 + 2i)$ . Раскрываем скобки, пользуясь правилами действий над многочленами:  $2 \cdot 3 + 2 \cdot 4i + 5 \cdot 1 + 5 \cdot 2i - 3i \cdot 1 - 3i \cdot 2i = [\text{учитываем, что } i \cdot i = i^2 = -1] = 6 + 8i + 5 + 10i - 3i + 6 = 6 + 5 + 6 + (8 + 10 - 3)i = \underline{17 + 15i}$ .

**Пример 3.** Найти вещественные  $x$  и  $y$  из равенства  $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$ .

*Решение.* Раскрываем скобки, пользуясь правилами действий над многочленами:

$$x + 2ix + 3y - 5iy = 1 - 3i.$$

Группируем вещественные и мнимые части равенства  $(x + 3y) + (2x - 5y)i = 1 - 3i$ .

Используя определения равенства комплексных чисел, приравниваем вещественные и мнимые части левой и правой частей равенства:

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3y \\ 2 - 6y - 5y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3y \\ -11y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3 \cdot \frac{5}{11} \\ y = \frac{5}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{11} \\ y = \frac{5}{11} \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{-4}{11}, \quad y = \frac{5}{11}.$$

### 1.1.2. Деление комплексных чисел в алгебраической форме

#### **Определение:**

Комплексное число  $\bar{w} = x - yi$  называется сопряженным числом по отношению к  $w = x + yi$ .

Примеры сопряженных комплексных чисел:

$-1 + 5i$  и  $-1 - 5i$ ,  $2 - 3i$  и  $2 + 3i$ .

Для деления двух комплексных чисел в алгебраической форме, как правило, удобно числитель и знаменатель дроби домножать на число, сопряженное знаменателю [1, с. 190-191].

**Пример 4.** Выполнить деление:  $\frac{4-i}{1-2i}$  = [домножаем числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю] =

$= \frac{(4-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{4+8i-i-2i^2}{1+4} = \frac{6+7i}{5} = \frac{6}{5} + \frac{7}{5}i$ . Заметим, что  $\frac{6+7i}{5}$  есть выражение, а не число, поэтому его нельзя рассматривать как ответ.

**Пример 5.** Выполнить действия:  $(2+3i)(1-i) - \frac{i^{15}}{1+i} =$   
 $= \left[ i^{15} = i \cdot i^{14} = i \cdot (i^2)^7 = i \cdot (-1)^7 = -i \right] = 2 - 2i + 3i - 3i^2 + \frac{i}{1+i} =$   
 $= 5 + i + \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 5 + i + \frac{i-i^2}{1+1} = 5 + i + \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{2}\right) = \underline{5,5 + 1,5i}.$

**Пример 6.** Выполнить действия:  $\frac{(2-i)(-3+i)}{(1-i)(-1-2i)} =$  [домножаем числитель и знаменатель дроби на числа, сопряженные обоим числам знаменателя] =  
 $= \frac{(2-i)(-3+i)(1+i)(-1+2i)}{(1-i)(1+i)(-1-2i)(-1+2i)} = \frac{(-6+2i+3i-i^2)(-1+2i-i+2i^2)}{(1+1)(1+4)} =$   
 $= \frac{(-5+5i)(-3+i)}{2 \cdot 5} = \frac{5(-1+i)(-3+i)}{2 \cdot 5} = \frac{3-i-3i+i^2}{2} = \frac{2-4i}{2} = \underline{1-2i}.$

### 1.1.3. Извлечение квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме

**Определение.** Комплексное число  $w = \sqrt{z}$  называется квадратным корнем из комплексного числа  $z$ , если  $z = w^2$  [1, с. 191].

**Пример 7.** Вычислить  $\sqrt{-7-24i}$ .

*Решение.* Пусть  $\sqrt{-7-24i} = x + yi$ , тогда

$$\begin{aligned} -7-24i &= (x+yi)^2, \\ -7-24i &= x^2 - y^2 + 2xyi. \end{aligned}$$

Составляем систему, приравнивая вещественные и мнимые части левой и правой частей равенства:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -7, \\ 2xy = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{144}{x^2} = -7, \\ y = -\frac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 7x^2 - 144 = 0, \\ y = -\frac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow (\otimes)$$

Решим отдельно биквадратное уравнение:

$$x^4 + 7x^2 - 144 = 0.$$

Пусть  $x^2 = t, t > 0$ . Тогда

$$t^2 + 7t - 144 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 144 \cdot 4}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{625}}{2} = \frac{-7 \pm 25}{2};$$

$$t_1 = 9, \quad t_2 = -16 < 0 - \text{не подходит};$$

$$x^2 = 9, \quad x_{1,2} = \pm 3;$$

$$(\otimes) \Leftrightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 3, \\ y_{1,2} = \mp 4 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{-7 - 24i} = \begin{bmatrix} -3 + 4i, \\ 3 - 4i. \end{bmatrix}$$

Ответ:  $\{-3 + 4i; 3 - 4i\}$ .

Другой способ решения возможен после введения тригонометрической формы записи комплексного числа (см. с. 14).

## 1.2. Решение линейных и квадратных уравнений для комплексных чисел

В области комплексных чисел верны те же формулы для решения линейных и квадратных уравнений, что и в области действительных чисел.

**Пример 8.** Решить уравнение:  $(-2 - i)z = 3 + i$ .

$$z = \frac{3 + i}{-2 - i} = \frac{(3 + i)(-2 + i)}{(-2 - i)(-2 + i)} = \frac{-6 + 3i - 2i + i^2}{4 + 1} = \frac{-7 + i}{5} = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}i$$

**Пример 9.** Решить уравнение:  $x^2 + 4x + 5 = 0$ .

*Решение.* Воспользуемся формулой для нахождения корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2};$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = [\text{так как } \sqrt{-1} = i] = \pm 2i;$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i.$$

Ответ:  $\{-2 + i; -2 - i\}$ .

**Пример 10.** Решить уравнение:  $iz^2 - (3 + 2i)z + 3 - i = 0$ .

*Решение:*

$$z_{1,2} = \frac{3 + 2i \pm \sqrt{(3 + 2i)^2 - 4i(3 - i)}}{2i} = \frac{3 + 2i \pm \sqrt{9 + 12i - 4 - 12i - 4}}{2i} = \frac{3 + 2i \pm 1}{2i};$$

$$z_1 = \frac{4 + 2i}{2i} = \frac{2 + i}{i} = \frac{(2 + i)(-i)}{i \cdot (-i)} = \frac{-2i + 1}{1} = 1 - 2i;$$

$$z_2 = \frac{2 + 2i}{2i} = \frac{1 + i}{i} = \frac{(1 + i)(-i)}{i(-i)} = \frac{-i + 1}{1} = 1 - i.$$

Ответ:  $\{1 - 2i; 1 - i\}$ .

**Пример 11.** Решить уравнение:  $z^2 - (2 + i)z + 2i = 0$ .

*Решение:*

$$z_{1,2} = \frac{2 + i \pm \sqrt{(2 + i)^2 - 4 \cdot 2i}}{2} = \frac{2 + i \pm \sqrt{4 + 4i - 1 - 8i}}{2} = \frac{2 + i \pm \sqrt{3 - 4i}}{2}.$$

Вычислим  $\sqrt{3 - 4i}$ :

$$\sqrt{3 - 4i} = x + yi;$$

$$3 - 4i = (x + yi)^2;$$

$$3 - 4i = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Составляем систему, приравняв вещественные и мнимые части левой и правой частей равенства:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \frac{4}{x^2} - 3 = 0, \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 3x^2 - 4 = 0, \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow (\otimes)$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0.$$

Пусть  $x^2 = t, t > 0$ . Тогда

$$t^2 - 3t - 4 = 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2};$$

$$t_1 = 4, \quad t_2 = -1 < 0;$$

$$x^2 = 4, \quad x = \pm 2;$$

$$(\otimes) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = \mp 1; \end{cases}$$

$$z_1 = \frac{2+i+(2-i)}{2} = 2;$$

$$z_2 = \frac{2+i+(-2+i)}{2} = i.$$

Ответ:  $\{2; i\}$ .

**Пример 12.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (3-i)x + (4+2i)y = 2+6i, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i. \end{cases}$$

*Решение.* Выражаем из первого уравнения системы переменную  $x$  через переменную  $y$ :

$$\begin{cases} x = \frac{2+6i-(4+2i)y}{3-i}, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i. \end{cases}$$

Домножаем числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю:

$$\begin{cases} x = \frac{(2+6i)(3+i)-(4+2i)(3+i)y}{(3-i)(3+i)}, \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i. \end{cases}$$

В числителе дроби раскрываем скобки и приводим подобные слагаемые:

$$\begin{cases} x = \frac{20i-10y-10iy}{10} = 2i-y-iy, \\ (4+2i)(2i-y-iy) - (2+3i)y = 5+4i. \end{cases}$$

Подставляем полученное значение переменной  $x$  во второе уравнение системы:



$$\begin{cases} x = 2i - y - iy, \\ 4i - 4y - 9iy - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2i - y - iy, \\ y = \frac{-9 + 4i}{4 + 9i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2i - y - iy, \\ y = \frac{(-9 + 4i)(4 - 9i)}{16 + 81} = \frac{97i}{97} = i; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2i - i - i^2 = i + 1, \\ y = i. \end{cases}$$

Ответ:  $\{1 + i; i\}$ .

### 1.3. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

#### 3.1.4. Геометрическое изображение комплексных чисел

При изучении свойств комплексных чисел весьма удобной является их геометрическая интерпретация [1, с. 186-187]. Поскольку комплексное число определяется как пара действительных чисел, то каждое комплексное число  $z = a + bi$  изображается точкой плоскости  $(x, y)$  с координатами  $x = a$  и  $y = b$ . Такая плоскость называется *комплексной плоскостью*, ось абсцисс - действительной ( $\text{Re } z$ ), а ось ординат - мнимой осью ( $\text{Im } z$ ).

**Пример 13.** Изобразить на плоскости точки, соответствующие числам:  $z_1 = -2$ ,  $z_2 = 3i$ ,  $z_3 = 1 - 4i$ ,  $z_4 = 1 + i$ ,  $z_5 = -3 - 2i$ .

*Решение.* У числа  $z_1$  действительная часть равна -2, а мнимая - 0. Следовательно, изображением числа  $z_1$  служит точка  $(-2, 0)$  (рис. 1.1).

У числа  $z_2$  действительная часть равна 0, а мнимая равна 3. Следовательно, изображением числа  $z_2$  служит точка  $(0, 3)$ . У числа  $z_3$  действительная часть равна 1, а мнимая -4. Следовательно, изображением числа  $z_3$  служит точка  $(1, -4)$ .

У числа  $z_4$  действительная часть равна 1 и мнимая 1. Следовательно, изображением числа  $z_4$  служит точка  $(1, 1)$ .

У числа  $z_5$  действительная

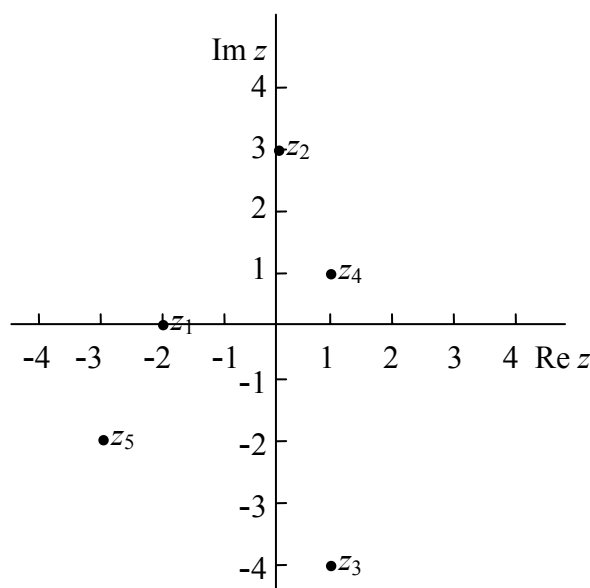


Рис. 1.1

часть равна -3, а мнимая -2. Следовательно, изображением числа  $z_5$  служит точка (-3, -2).

Сопряженные числа изображаются точками на комплексной плоскости, симметричными относительно действительной оси  $\text{Re } z$ .

### 3.1.5. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

Рассмотрим другую важную форму представления комплексных чисел

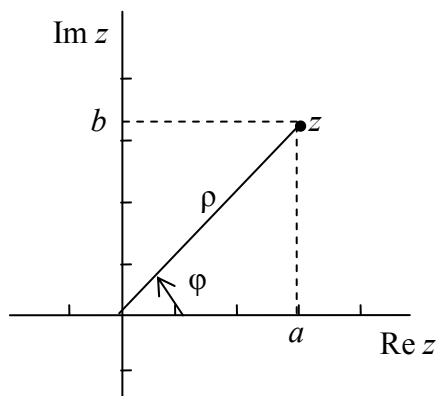


Рис. 1.2

[1, с. 187-188]:  $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , где  $\rho$  – модуль комплексного числа, а  $\varphi$  – его аргумент.

Связь между алгебраической и тригонометрической формами записи можно получить из равенства:

$a + bi = z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Тогда

$a + bi = \rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi i$ , откуда

$$\begin{cases} a = \rho \cos \varphi \\ b = \rho \sin \varphi \end{cases}. \text{ Возведя оба равенства в квадрат и}$$

сложив их, получим  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ . А угол  $\varphi$  определяется с точностью до  $2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ , из системы:

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Для однозначного соответствия между комплексным числом и его аргументом выделим его главное значение  $\arg z$ , для которого принимаем:  $-\pi < \arg z \leq \pi$ . В дальнейшем будем придерживаться ограничений:  $-\pi < \varphi = \arg z \leq \pi$ . Для числа  $z = 0$  аргумент не определяется.

Геометрический смысл  $|z|$  и  $\arg z$  ясен из рис 1.2:  $|z|$  есть расстояние от точки до начала координат, а  $\arg z$  – угол, на который необходимо повернуть вещественную ось  $\text{Re } z$  до совпадения с числом  $z$ .

**Пример 14.** Представить в тригонометрической форме число  $z = 1$ .

Для числа  $z = 1$   $a = 1$ ,  $b = 0$ . Следовательно,  $\rho = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$  и по формуле

(1.1) находим  $\begin{cases} \cos \varphi = 1, \\ \sin \varphi = 0. \end{cases}$  Эта система имеет решение:  $\varphi = 0$ . В итоге:  
 $\underline{1 = \cos 0 + i \sin 0.}$

**Пример 15.** Представить в тригонометрической форме число  $z = -i$ .  
 Для него  $a = 0$ ,  $b = -1$ . Следовательно,  $\rho = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$  и система (1.1)

имеет вид:  $\begin{cases} \cos \varphi = 0, \\ \sin \varphi = -1 \end{cases} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$ . Отсюда  $\underline{-i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})}$ .

**Пример 16.** Представить в тригонометрической форме число  $z = -1$ .  
 Для числа  $z = -1$   $a = -1$ ,  $b = 0$ . Следовательно,  $\rho = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$  и система

(1.1) имеет вид  $\begin{cases} \cos \varphi = -1, \\ \sin \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi = \pi$ . Получаем  $\underline{-1 = \cos \pi + i \sin \pi}$ .

**Пример 17.** Представить в тригонометрической форме число  $z = 1 + i$ .  
 Для него  $a = 1$ ,  $b = 1$ . Следовательно,  $\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  и по системе (1.1)

$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$ . Значит,  $\underline{1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})}$ .

**Пример 18.** Представить в тригонометрической форме число  $z = -5 + 7i$ .  
 Для него  $a = -5$ ,  $b = 7$ . Следовательно,  $\rho = \sqrt{(-5)^2 + 7^2} = \sqrt{74}$  и система

(1.1) принимает вид  $\begin{cases} \cos \varphi = \frac{-5}{\sqrt{74}}, \\ \sin \varphi = \frac{7}{\sqrt{74}}. \end{cases}$  Решением этой системы будет

$\varphi = \pi - \arccos \frac{5}{\sqrt{74}}$ . Тогда

$\underline{-5 + 7i = \sqrt{74}(\cos(\pi - \arccos \frac{5}{\sqrt{74}}) + i \sin(\pi - \arccos \frac{5}{\sqrt{74}}))}$ .

### 3.1.6. Умножение и деление комплексных чисел. Формула Муавра

Пусть  $z = \rho_1(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ;  $w = \rho_2(\cos \psi + i \sin \psi)$ . Тогда верны формулы:

$$z \cdot w = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)),$$

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)), \quad (1.2)$$

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1.3)$$

Последняя формула называется формулой Муавра [1, с. 190]. Она верна для любого натурального  $n$ .

**Пример 19.** Вычислить:  $\left( \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}$ .

*Решение.* Переведем числитель и знаменатель дроби из алгебраической формы в тригонометрическую.

Для числа  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$   $\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ ,  $\varphi = \arctg \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$ .

Для числа  $z_2 = 1 - i$   $\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ ,  $\varphi = \arctg \frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4}$ . Таким

$$\text{образом, } \frac{z_1}{z_2} = \frac{2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))} = [\text{по формуле (1.2)}] =$$

$$= \sqrt{2}(\cos(\frac{7\pi}{12}) + i \sin(\frac{7\pi}{12})).$$

В итоге:

$$\left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{20} = [\text{по формуле (1.3)}] = (\sqrt{2})^{20} (\cos(\frac{7\pi}{12} \cdot 20) + i \sin(\frac{7\pi}{12} \cdot 20)) =$$

$$= 2^{10} (\cos \frac{35\pi}{3} + i \sin \frac{35\pi}{3}) = [\text{так как } \frac{35\pi}{3} = 12\pi - \frac{\pi}{3}] =$$

$$= 2^{10} (\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})) = 2^{10} (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \underline{2^9 (1 - \sqrt{3}i)}.$$

### 3.1.7. Задачи на построение областей на комплексной плоскости

**Пример 20.** Изобразить на комплексной плоскости числа, модуль которых равен 1, т. е.  $|z| = 1$ .

*Решение.* Запишем комплексное число в алгебраической форме  $z = x + yi$ . По условию задачи интерес представляют те числа, модуль

которых равен 1, т. е.  $|x + yi| = 1$ . По определению модуля комплексного числа  $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ . Возведя обе части равенства в квадрат, получим  $x^2 + y^2 = 1$ . Данное уравнение определяет на плоскости окружность с центром в точке с координатами (0; 0) и радиусом, равным 1.

**Пример 21.** Найти геометрическое место точек, изображающих числа  $z$ , удовлетворяющие неравенству  $|z - i| \leq 2$ .

Запишем комплексное число в общем виде  $z = x + yi$ . По условию задачи, интерес представляют те числа, модуль которых меньше или равен 2, т. е.  $|x + yi - i| \leq 2$ . Сгруппируем под знаком модуля слагаемые, содержащие  $i$ :  $|x + (y - 1)i| \leq 2$ . По определению модуля комплексного числа:  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$ .

Данное уравнение определяет на плоскости круг с центром в точке с координатами (0; 1) и радиусом равным 2 (рис. 1.3).

**Пример 22.** Найти геометрическое место точек, изображающих числа  $z$ , удовлетворяющие неравенству  $|\operatorname{Re} z| < 1$ .

$\operatorname{Re} z$  – действительная часть числа  $z$ ,  $\Rightarrow$  неравенство можно записать как  $|x| < 1$ , или  $\begin{cases} x < 1 \\ x > -1 \end{cases}$  или  $-1 < x < 1$ . Эта система определяет на плоскости полосу, ограниченную прямыми  $x = 1$  и  $x = -1$ . Причем, обе прямые нарисованы на штрихах, так как сами прямые в искомую область не входят из-за строгого знака неравенства (рис. 1.4).

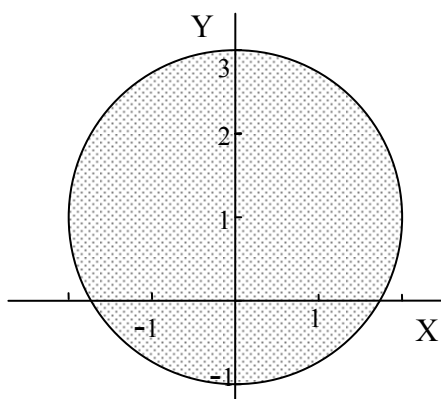


Рис. 1.3

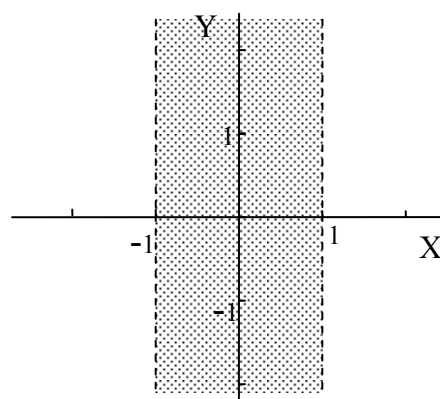


Рис. 1.4

**Пример 23.** Найти геометрическое место точек, изображающих числа  $z$ , удовлетворяющие системе неравенств  $\begin{cases} |z| \leq 2, \\ \operatorname{Re} z > 1. \end{cases}$

Как показано в примерах 20 и 21, неравенство  $|z| \leq 2$  определяет на плоскости круг с центром в точке  $(0; 0)$  и радиусом, равным 2. Неравенство  $\operatorname{Re} z > 1$ , согласно примеру 22, определяет полуплоскость, ограниченную прямой  $x = 1$  и находящуюся от нее справа. Так как неравенство  $\operatorname{Re} z > 1$  строгое, то сама прямая  $x = 1$  в область не входит и штрихами пунктиром. Обе эти области изображены на рис. 1.5. Искомая область представляет собой пересечение двух данных областей (рис. 1.6).

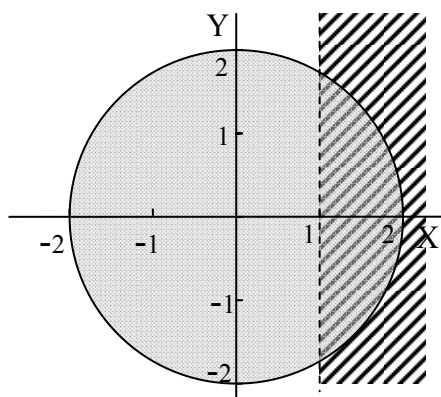


Рис. 1.5

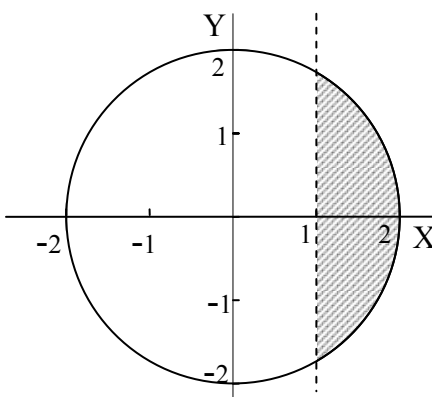


Рис. 1.6

**Пример 24.** Найти геометрическое место точек, изображающих числа  $z$ , удовлетворяющие системе неравенств

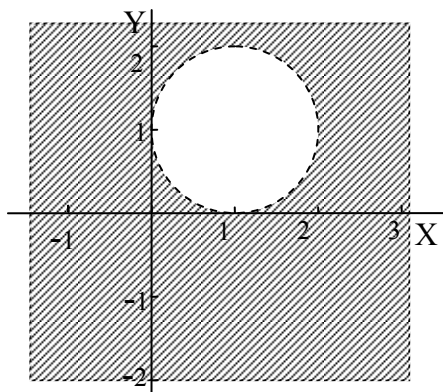


Рис. 1.7

$$\begin{cases} |z - 1 - i| > 1 \\ -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Неравенство  $|z - 1 - i| > 1$  определяет область вне круга с центром в точке  $(1; 1)$  и радиусом 1. Так как неравенство строгое, то сама окружность в область не входит и изображена штрихами (рис. 1.7).

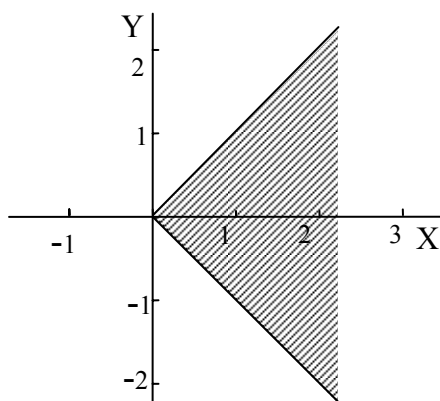


Рис. 1.8

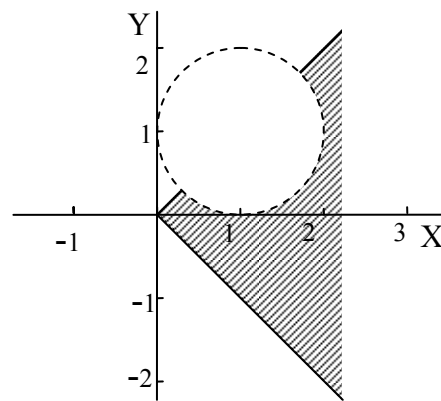


Рис. 1.9

Двойное неравенство  $-\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$  определяет на плоскости область, в которую входят комплексные числа с аргументами в интервале от  $-\frac{\pi}{4}$  до  $\frac{\pi}{4}$ .

Эта область представляет собой угол (рис. 1.8).

Искомая область представляет собой пересечение двух данных областей (рис. 1.9).

### 3.1.8. Извлечение корня из комплексных чисел в тригонометрической форме

Определения и утверждения к 3.1.8 можно найти в [1, с. 191-192].

Комплексное число  $w = \sqrt[n]{z}$  называется корнем  $n$ -й степени из комплексного числа  $z$ , если  $z = w^n$ .

*Утверждение.* При любом натуральном  $n > 1$  и любом комплексном  $z$  существует ровно  $n$  различных чисел  $w_k$ , таких, что  $w^n = z$ :

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (1.4)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

**Пример 25.** Вычислить  $\sqrt[4]{-1}$ .

*Решение.* Для того чтобы воспользоваться формулой (1.4), необходимо представить число, стоящее под знаком корня, в тригонометрической форме.

Для числа  $z = -1$  найдем его модуль и аргумент:  $\rho = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1$ ,  $\varphi = \pi$ . В итоге  $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ .

По формуле (1.4)  $w_k = \sqrt[4]{1}(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4})$ . Тогда:

$$w_0 = \cos \frac{\pi + 2\pi \cdot 0}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi \cdot 0}{4} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_1 = \cos \frac{\pi + 2\pi \cdot 1}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi \cdot 1}{4} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_2 = \cos \frac{\pi + 2\pi \cdot 2}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi \cdot 2}{4} = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_3 = \cos \frac{\pi + 2\pi \cdot 3}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi \cdot 3}{4} = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Пример 26.** Вычислить  $\sqrt[5]{-32i}$ .

*Решение.* Для числа  $z = -32i$  найдем его модуль  $\rho$  и аргумент  $\varphi$ :

$$\rho = \sqrt{0^2 + 32^2} = 32, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}, \text{ так как число } z = -32i \text{ лежит на}$$

отрицательной части мнимой оси. В итоге  $z = -32i = 32(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2})$ .

$$\text{По формуле (1.4) } w_k = \sqrt[5]{32}(\cos \frac{\frac{-\pi}{2} + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{\frac{-\pi}{2} + 2\pi k}{5}),$$

где  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ . Тогда:

$$w_0 = 2(\cos \frac{-\pi}{10} + i \sin \frac{-\pi}{10}),$$

$$w_1 = 2(\cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10}),$$

$$w_2 = 2(\cos \frac{7\pi}{10} + i \sin \frac{7\pi}{10}),$$

$$w_3 = 2(\cos \frac{11\pi}{10} + i \sin \frac{11\pi}{10}) = 2(\cos \frac{-9\pi}{10} + i \sin \frac{-9\pi}{10}),$$

$$w_4 = 2(\cos \frac{15\pi}{10} + i \sin \frac{15\pi}{10}) = 2(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2}).$$

Для  $w_3$  и  $w_4$  аргументами будут  $\frac{-9\pi}{10}$  и  $\frac{-\pi}{2}$ , а не  $\frac{11\pi}{10}$  и  $\frac{15\pi}{10}$  соответственно, так как  $\varphi \in (-\pi; \pi]$ .



**Пример 27.** Вычислить  $\sqrt[3]{-2 + 2\sqrt{3}i}$ .

*Решение.* Для числа  $z = -2 + 2\sqrt{3}i$  модуль  $\rho$  и аргумент  $\varphi$  есть:

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

В итоге  $z = -2 + 2\sqrt{3}i = 4(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$ . По формуле (1.4)

$$w_k = \sqrt[3]{4}(\cos \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{3}), \text{ где } k = 0, 1, 2. \text{ Тогда:}$$

$$w_0 = \sqrt[3]{4}(\cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}),$$

$$w_1 = \sqrt[3]{4}(\cos \frac{8\pi}{9} + i \sin \frac{8\pi}{9}),$$

$$w_2 = \sqrt[3]{4}(\cos \frac{14\pi}{9} + i \sin \frac{14\pi}{9}) = \sqrt[3]{4}(\cos \frac{-4\pi}{9} + i \sin \frac{-4\pi}{9}).$$

Из формулы (1.4) видно, что аргументы корней  $w_k$  отличаются на одну и ту же величину  $\frac{2\pi}{n}$ , а модули всех корней одинаковые и равны  $\sqrt[n]{\rho}$ . Значит, на комплексной плоскости все  $w_k$  лежат на окружности с центром в начале координат и радиусом  $\sqrt[n]{\rho}$  на одинаковом расстоянии друг от друга. Для примера 27 изображения самого числа  $z = -2 + 2\sqrt{3}i$  и его корней  $w_0, w_1, w_2$  можно видеть на рис. 1.10.

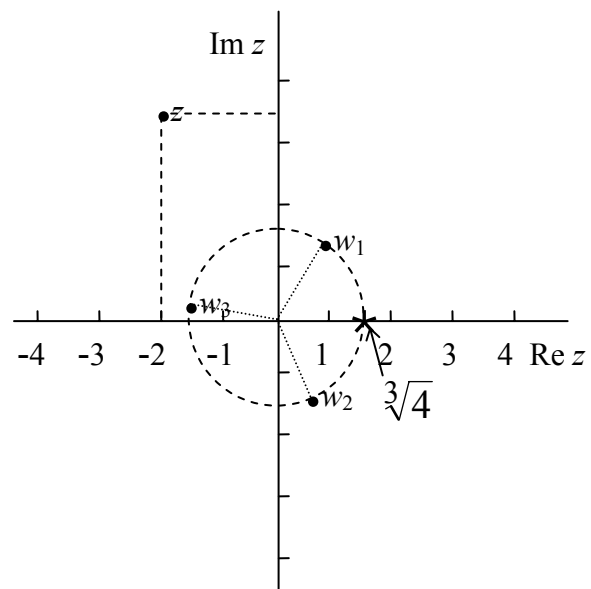


Рис. 1.10

## 2. МНОГОЧЛЕНЫ

### 2.1. Многочлены и действия над ними

Определения и утверждения к 2.1 можно найти в [1, с. 203-206].

Для действительной переменной  $x$  функция вида  $f(x) = ax^n$ , где  $a$  и  $x$  – действительные числа, а  $n$  – натуральное число или 0 (по-другому это можно записать как  $a \in R, n \in N \cup \{0\}$ ), называется одночленом с действительным коэффициентом.

Многочлен – это сумма одночленов, т.е. функция вида

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i.$$

При этом  $a_n$  называется старшим коэффициентом и  $a_n \neq 0$ ,  $a_0$  – свободным членом,  $n$  – степенью многочлена.

Многочлен тождественно равен 0 тогда и только тогда, когда все его коэффициенты равны 0.

Если в записи многочлена нет какой-либо степени неизвестного, это значит, что коэффициент при этой степени равен 0.

На множестве многочленов определены следующие действия:

1. Сложение.

**Пример 28.**  $f(x) = 3x^4 - 7x^2 + x - 3$ ;  $g(x) = 2x^3 + 5x^2 + 3x - 2$ . Найти  $f(x) + g(x)$ .

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= 3x^4 + 2x^3 + (-7 + 5)x^2 + (1 + 3)x + (-3 + (-2)) = \\ &= \underline{3x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 4x - 5}. \end{aligned}$$

2. Умножение.

**Пример 29.**  $f(x) = 2x^2 - x + 1$ ;  $g(x) = 3x - 1$ . Найти  $f(x) \cdot g(x)$ .

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (2x^2 - x + 1)(3x - 1) = \\ &= 2x^2 \cdot 3x + (-x) \cdot 3x + 1 \cdot 3x + 2x^2 \cdot (-1) + (-x) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = \\ &= 6x^3 - 3x^2 + 3x - 2x^2 + x - 1 = \underline{6x^3 - 5x^2 + 4x - 1}. \end{aligned}$$

3. Деление с остатком.

Разделить  $f(x)$  на  $g(x)$  – значит записать  $f(x)$  в виде

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x), \quad \text{или} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}. \quad \text{Последняя запись}$$

аналогична записи для чисел:  $\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$ , или  $17 = 5 \cdot 3 + 2$ .

**Теорема (о делении с остатком)** [1, с. 206]. Для любых многочленов  $f(x)$  и  $g(x) \neq 0$  существуют, и притом единственные, многочлены  $q(x)$  и  $r(x)$ , такие, что

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x). \quad (2.1)$$

При этом степень  $r(x)$  меньше степени  $g(x)$ ,  $q(x)$  - неполное частное,  $r(x)$  - остаток. Разделить  $f(x)$  на  $g(x)$  - значит записать  $f(x)$  в виде (2.1).

Для практического нахождения частного и остатка существует метод деления «уголком».

**Пример 30.** Выполнить «уголком» деление с остатком:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1 \text{ на } g(x) = x^2 - 2x + 1.$$

*Решение.* Запишем делимое  $f(x)$  и делитель  $g(x)$  как при делении многозначных чисел:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 - x - 1 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline \end{array}$$

Находим частное от деления старшего члена делимого на старший член делителя ( $x^3 / x^2 = x$ ) и записываем результат в графу частного:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 - x - 1 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline & x \end{array}$$

Умножаем делитель на результат деления и записываем под делимым:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 - x - 1 & x^2 - 2x + 1 \\ - & \\ x^3 - 2x^2 + x & x \end{array}$$

Вычитаем из делимого результат умножения:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 - x - 1 & x^2 - 2x + 1 \\ - & \\ x^3 - 2x^2 + x & x \\ \hline & -x^2 - 2x - 1 \end{array}$$

Проверяем степень получившегося в результате вычитания многочлена. Если она меньше степени делителя, то процесс деления закончен, и полученный многочлен является остатком. В противном случае деление продолжается аналогично описанному ранее:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 3x^2 - x - 1 & x^2 - 2x + 1 \\
 \underline{x^3 - 2x^2 + x} & x - 1 \\
 -x^2 - 2x - 1 & \\
 \underline{-x^2 + 2x - 1} & \\
 -4x & 
 \end{array}$$

Так как степень полученного многочлена меньше степени делителя, то процесс деления закончен. В результате:  $q(x) = x - 1$  – неполное частное, а  $r(x) = -4x$  – остаток.

Ответ:  $x^3 - 3x^2 - x - 1 = (x^2 - 2x + 1)(x - 1) + (-4x)$ , или

$$\frac{x^3 - 3x^2 - x - 1}{x^2 - 2x + 1} = x - 1 - \frac{4x}{x^2 - 2x + 1}.$$

**Пример 31.** Выполнить деление с остатком:  $3x^5 + 1$  на  $x^2 - 1$ .

*Решение.* Запишем делимое и делитель как при делении многозначных чисел. Если в записи многочлена отсутствует одна или несколько степеней, то при записи, для удобства вычислений, следует на их места записать нули:

$$\begin{array}{r|l}
 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 & x^2 - 1 \\
 \underline{3x^5} & 3x^3 + 3x \\
 3x^3 + 0x^2 + 0x & \\
 \underline{3x^3} & -3x \\
 3x + 1 & 
 \end{array}$$

Получившиеся в результате умножения многочлены удобнее записывать, располагая слагаемые в соответствии с их степенями. Так как степень полученного многочлена меньше степени делителя, то процесс деления закончен. В результате:  $q(x) = 3x^3 + 3x$  – неполное частное, а  $r(x) = 3x + 1$  – остаток.

Ответ:  $3x^5 + 1 = (x^2 - 1)(3x^3 + 3x) + (3x + 1)$ , или  $\frac{3x^5 + 1}{x^2 - 1} = 3x^3 + 3x + \frac{3x + 1}{x^2 - 1}$ .

**Пример 32.** Делится ли нацело многочлен  $x^4 + 4x^3 - 2x - 8$  на многочлен  $x^3 - 2$ ?

*Решение.* Разделим один многочлен на другой «уголком».

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + 4x^3 + 0x^2 - 2x - 8 & x^3 - 2 \\
 \hline
 x^4 & x + 4 \\
 \hline
 & -2x \\
 & \hline
 & 4x^3 - 8 \\
 & \hline
 & 4x^3 - 8 \\
 & \hline
 & 0
 \end{array}$$

В остатке от деления получился нуль, значит, многочлен  $x^4 + 4x^3 - 2x - 8$  делится на многочлен  $x^3 - 2$  нацело и возможны записи:

$$\frac{x^4 + 4x^3 - 2x - 8}{x^3 - 2} = x + 4, \text{ или } x^4 + 4x^3 - 2x - 8 = (x^3 - 2)(x + 4).$$

## 2.2. Корни многочленов

Определения и утверждения к 2.2 можно найти в [1, с. 203-206].

Корнем многочлена  $f(x)$  называется число  $\beta$  такое что  $f(\beta) = 0$ .

**Теорема Безу.** Для любой функции  $f(x)$  и числа  $\beta \in R$  верно равенство:

$$f(x) = (x - \beta)q(x) + r,$$

где  $r = f(\beta)$ .

**Следствие.** Число  $\beta$  является корнем тогда и только тогда, когда  $f(x)$  делится на  $(x - \beta)$  без остатка.

Удобной для деления на многочлены вида  $(x - \beta)$  является схема Горнера. Рисуем таблицу, в первой строке которой записываем все коэффициенты  $f(x)$  (включая нулевые).

	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$\beta$	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} =$ $= \alpha \cdot b_n + a_{n-1}$	$b_{n-3} =$ $= \alpha \cdot b_{n-1} + a_{n-2}$	$\dots$	$b_0 =$ $= \alpha \cdot b_1 + a_1$	$r =$ $= \alpha \cdot b_0 + a_0$

$b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0$  - коэффициенты неполного частного от деления  $f(x)$  на  $(x - \beta)$ ;  $r$  - остаток от деления, который по теореме Безу равен  $f(\beta)$ . Если  $b_0 = 0$ , то говорят, что  $f(x)$  делится на  $(x - \beta)$  нацело и  $\beta$  - корень многочлена  $f(x)$ .

**Пример 33.** Разделить  $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$  на  $x - 1$ .

**Решение.** Воспользуемся схемой Горнера. Нарисуем таблицу и выполним расчеты.

	1	-2	4	-6	8
1	1	$1 \cdot 1 + (-2) = -1$	$1 \cdot (-1) + 4 = 3$	$1 \cdot 3 + (-6) = -3$	$1 \cdot (-3) + 8 = 5$

Итак,  $b_0 = -3, b_1 = 3, b_2 = -1, b_3 = 1$ ;  $r = 5$ , где  $b_i$  - коэффициенты неполного частного. Следовательно,  $q(x) = 1 \cdot x^3 + (-1) \cdot x^2 + 3x + (-3)$ .

Ответ:  $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8 = (x^3 - x^2 + 3x - 3)(x - 1) + 5$ .

**Пример 34.** Найти значение функции  $f(x) = 2x^5 - 5x^3 - 8x$  в точке  $x = -2$ .

*Решение.* С помощью схемы Горнера разделим  $f(x)$  на многочлен  $(x + 2)$ . При заполнении таблицы учитываем, что коэффициенты при четвертой и второй степенях, а также свободный член в многочлене равны 0.

	2	0	-5	0	-8	0
-2	2	$-2 \cdot 2 + 0 = -4$	$-2 \cdot (-4) + (-5) = 3$	$-2 \cdot 3 + 0 = -6$	$-2 \cdot (-6) + (-8) = 4$	$-2 \cdot 4 + 0 = -8$

В результате вычислений получили остаток, равный -8. По теореме Безу он равен значению  $f(x)$  в точке  $x = -2$ .

Ответ:  $\{-8\}$ .

Алгоритм деления, рассмотренный в 2.1, применим для деления на многочлен любой степени, а схема Горнера применима только для деления на  $(x - \beta)$ .

### 2.3. Неприводимые многочлены

Определения и утверждения к 2.3 можно найти в [1, с. 204-206]. Многочлен с действительными коэффициентами  $f(x)$  является неприводимым, если не существует многочленов  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  с действительными коэффициентами степени меньшей  $f(x)$ , таких, что  $f(x) = \varphi(x)\psi(x)$ . Т. е. неприводимый многочлен нельзя разложить в произведение многочленов меньших степеней.

**Утверждение.** Неприводимыми многочленами с действительными коэффициентами являются многочлены 1-й или 2-й степени с отрицательным дискриминантом, и только они.

Разложением многочлена на множители называется представление его в виде произведения неприводимых многочленов.

Основные методы разложения многочленов на множители:

1. Вынесение общего множителя за скобки.

2. Использование формул сокращенного умножения.

**Пример 35.** Разложить на множители многочлен  $x^5 - x^2$ .

$x^5 - x^2 = x^2(x^3 - 1) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$ . При разложении воспользовались формулой  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ .

3. Метод группировки.

**Пример 36.** Разложить на множители многочлен  $x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x$ .

Группируем вместе слагаемые, содержащие множитель 5:

$$\begin{aligned} x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x &= (5x^3 - 5x) + (x^4 - x^2) = 5x(x^2 - 1) + x^2(x^2 - 1) = \\ &= [\text{вынесем общий множитель за скобки}] = \\ &= (x^2 - 1)(5x + x^2) = (x - 1)(x + 1)5x(1 + x) = \underline{5x(x - 1)(x + 1)^2}. \end{aligned}$$

**Пример 37.** Разложить на множители многочлен  $3x^3 - 8x^2 + 3x + 2$ .

Группируем слагаемые, начиная с первого:

$$\begin{aligned} 3x^3 - 8x^2 + 3x + 2 &= (3x^3 - 3x^2) + 3x^2 - 8x^2 + 3x + 2 = \\ &= 3x^2(x - 1) - (5x^2 + 5x) - 5x + 3x + 2 = 3x^2(x - 1) - 5x(x - 1) - 2x + 2 = \\ &= 3x^2(x - 1) - 5x(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(3x^2 - 5x - 2). \end{aligned}$$

Квадратный трехчлен раскладываем на множители, найдя его корни:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}; \quad x_1 = 2; \quad x_2 = -\frac{1}{3}. \text{ Тогда:}$$

$$3x^2 - 5x - 2 = 3(x - 2)(x + \frac{1}{3}). \text{ В итоге}$$

$$3x^3 - 8x^2 + 3x + 2 = \underline{(x - 1)(x - 2)(3x + 1)}.$$

4. Метод подбора корней.

Этот метод основан на следующих утверждениях:

**Утверждение 1.** Если для многочлена

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - корни, то верно равенство  $f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ .

**Утверждение 2.** У многочлена со старшим коэффициентом, равным 1, целыми корнями могут быть только делители свободного члена.

**Пример 38.** Возможными целыми корнями многочлена  $f(x) = x^5 - x^4 + 4x^3 - 4$  могут быть числа  $\pm 1; \pm 2; \pm 4$ . Методом подбора можно установить, что  $f(1) = 0$  и, следовательно, 1 - корень многочлена.

**Пример 39.** Разложить на множители многочлен  $x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 4x - 5$ .

*Решение.* Согласно утверждению 2 возможными целыми корнями многочлена могут быть только делители числа -5. Это числа  $\pm 1; \pm 5$ . Найдем значение многочлена в точке  $x = -1$ :

$f(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 + 4(-1)^2 + 4(-1) - 5 = 0$ . Следовательно, корнем многочлена  $f(x)$  является  $x = -1$ . Разделим многочлен  $f(x)$  на  $(x + 1)$ . По теореме Безу,  $f(x)$  должен делиться на  $(x + 1)$  нацело, то есть, остаток от деления должен равняться нулю. Для деления воспользуемся схемой Горнера.

	1	-4	4	4	-5
-1	1	$(-1) \cdot 1 +$ $+ (-4) = -5$	$(-1)(-5) +$ $+ 4 = 9$	$(-1) \cdot 9 +$ $+ 4 = -5$	$(-1) \cdot (-5) +$ $+ (-5) = 0$

Число, получившееся в последнем столбце, позволяет проверить правильность вычислений. Если получен нуль, значит, все вычисления верны. Если число в последнем столбце отлично от нуля, значит, или корень найден неверно, или вычисления по схеме Горнера проведены неправильно.

Итак:  $f(x) = (x + 1)(x^3 - 5x^2 + 9x - 5)$ . Поскольку получившийся в результате деления многочлен  $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$  не является неприводимым, то процесс разложения на множители необходимо продолжить. Для многочлена  $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$  возможными корнями будут числа  $\pm 1; \pm 5$ . Находим:  $f(-1) = -20; f(1) = 0$ . Следовательно, 1 - корень многочлена  $x^3 - 5x^2 + 9x - 5$ . Разделим его на  $(x - 1)$  по схеме Горнера.

	1	-5	9	-5
1	1	$1 - 5 = -4$	$-4 + 9 = 5$	$5 - 5 = 0$

В последнем столбце получился нуль. Значит, вычисления верны.

Имеем:  $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x^2 - 4x + 5)$ . Проверим, является ли многочлен  $x^2 - 4x + 5$  неприводимым. Найдем его корни по стандартной формуле:



$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 5 \cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$ . Так как дискриминант данного квадратного трехчлена отрицателен, он является неприводимым на множестве действительных чисел.

Ответ:  $f(x) = (x+1)(x-1)(x^2 - 4x + 5)$ .

#### 2.4. Нахождение наибольшего общего делителя многочленов

**Определение.** Если каждый из двух многочленов делится без остатка на третий, то он называется общим делителем первых двух.

**Наибольшим общим делителем (НОД)** двух многочленов называется их общий делитель наивысшей степени.

НОД можно находить с помощью разложения на неприводимые множители или с помощью алгоритма Евклида.

**Пример 40.** Найти НОД многочленов  $x^2 - 1$  и  $x^3 - 1$ .

*Решение.* Разложим оба многочлена на множители:

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1),$$

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Из разложения видно, что искомым НОДом будет многочлен  $(x-1)$ .

**Пример 41.** Найти НОД многочленов  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  и  $x^3 - 7x + 6$ .

*Решение.* Разложим оба многочлена на множители.

Для многочлена  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  возможными рациональными корнями будут числа  $\pm 1, \pm 2, \pm 3$  и  $\pm 6$ . С помощью подстановки убеждаемся, что  $x = 1$  является корнем. Разделим многочлен на  $(x-1)$  по схеме Горнера.

1	-6	11	-6
1	1 - 6 = -5	-5 + 11 = 6	6 - 6 = 0

Следовательно,  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3)$ , где разложение квадратного трехчлена  $x^2 - 5x + 6$  было произведено по теореме Виета.

Для многочлена  $x^3 - 7x + 6$  возможными рациональными корнями будут числа  $\pm 1, \pm 2, \pm 3$  и  $\pm 6$ . С помощью подстановки убеждаемся, что  $x = 1$  является корнем. Разделим многочлен на  $(x-1)$  по схеме Горнера.

1	0	-7	6
1	1 - 0 = 1	1 - 7 = -6	-6 + 6 = 0

Следовательно,  $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 6) = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$ , где разложение квадратного трехчлена  $x^2 + x - 6$  было произведено по теореме Виета.

Сравнив разложение многочленов на множители, находим, что искомым НОДом будет многочлен  $(x - 1)(x - 2)$ .

Аналогично можно находить и НОД для нескольких многочленов.

Тем не менее, метод нахождения НОДа путем разложения на множители доступен не всегда. Способ, позволяющий находить НОД для всех случаев, называется алгоритмом Евклида.

Схема алгоритма Евклида такова. Один из двух многочленов делят на другой, степень которого не выше степени первого. Далее, за делимое всякий раз берут тот многочлен, который служил в предшествующей операции делителем, а за делитель берут остаток, полученный при той же операции. Этот процесс прекращается, как только остаток окажется равным нулю. Покажем этот алгоритм на примерах.

Рассмотрим многочлены, использовавшиеся в двух предыдущих примерах.

**Пример 42.** Найти НОД многочленов  $x^2 - 1$  и  $x^3 - 1$ .

*Решение.* Разделим  $x^3 - 1$  на  $x^2 - 1$  «уголком»:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 + 0x - 1 & x^2 - 1 \\ \underline{x^3} & x \\ & x - 1 \end{array}$$

Теперь разделим делитель  $x^2 - 1$  на остаток  $x - 1$ :

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 0x - 1 & x - 1 \\ \underline{x^2 - x} & x + 1 \\ & x - 1 \\ \underline{x - 1} & \\ & 0 \end{array}$$

Так как последнее деление произошло без остатка, то НОДом будет  $x - 1$ , т. е. многочлен, использовавшийся в качестве делителя при этом делении.

**Пример 43.** Найти НОД многочленов  $x^3 - 7x + 6$  и  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ .

*Решение.* Для нахождения НОД воспользуемся алгоритмом Евклида.

Разделим  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  на  $x^3 - 7x + 6$  «уголком»:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x^3 - 7x + 6 \\ \hline x^3 & - 7x + 6 \\ \hline -6x^2 + 18x - 12 & \end{array}$$

Произведем второе деление. Для этого пришлось бы разделить предыдущий делитель  $x^3 - 7x + 6$  на остаток  $-6x^2 + 18x - 12$ , но так как  $-6x^2 + 18x - 12 = -6(x^2 - 3x + 2)$ , для удобства будем делить многочлен  $x^3 - 7x + 6$  не на  $-6x^2 + 18x - 12$ , а на  $x^2 - 3x + 2$ . От такой замены решение задачи не изменится, так как НОД пары многочленов определяется с точностью до постоянного множителя. Имеем:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 - 7x + 6 & x^2 - 3x + 2 \\ \hline x^3 - 3x^2 + 2x & x + 3 \\ \hline 3x^2 - 9x + 6 & \\ \hline 3x^2 - 9x + 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Остаток оказался равным нулю, значит, последний делитель, т. е. многочлен  $x^2 - 3x + 2$  и будет искомым НОДом.

## 2.5. Дробно-рациональные функции

Определения и утверждения к 2.5 можно найти в [1, с. 206-208].

Дробно-рациональной функцией с действительными коэффициентами называется выражение вида  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , где  $f(x)$  и  $g(x)$  - многочлены.

Дробно-рациональная функция (в дальнейшем будем называть ее «дробь») называется *правильной*, если степень многочлена, стоящего в числителе, строго меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе. В противном случае она называется *неправильной*.

Алгоритм приведения неправильной дроби к правильной называется «выделением целой части».

**Пример 44.** Выделить целую часть дроби:  $\frac{2x^4 + x - 1}{x^2 - 3x + 2}$ .

*Решение.* Для того, чтобы выделить целую часть дроби необходимо разделить числитель дроби на ее знаменатель. Разделим числитель данной дроби на ее знаменатель «уголком»:

$$\begin{array}{r}
- \frac{2x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + x - 1}{2x^4 - 6x^3 + 4x^2} \quad \left| \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 6x + 14} \right. \\
\hline
\phantom{-} 6x^3 - 4x^2 + x \\
- \phantom{-} 6x^3 - 18x^2 + 12x \\
\hline
\phantom{-} 14x^2 - 11x - 1 \\
- \phantom{-} 14x^2 - 42x + 28 \\
\hline
\phantom{-} 31x - 29
\end{array}$$

Так как степень получившегося многочлена меньше степени делителя, то процесс деления закончен. В итоге:

$$\frac{2x^4 + x - 1}{x^2 - 3x + 2} = 2x^2 + 6x + 14 + \frac{31x - 29}{x^2 - 3x + 2}.$$

Получившаяся в результате дробь  $\frac{31x - 29}{x^2 - 3x + 2}$  является правильной.

Дробь вида  $\frac{f(x)}{\varphi^\alpha(x)}$  называется простейшей, если  $\varphi(x)$  – неприводимый многочлен, а степень  $f(x)$  меньше степени  $\varphi(x)$ .

*Замечание.* Обратите внимание, что сравниваются степени числителя и неприводимого многочлена в знаменателе (без учета степени  $\alpha$ ).

Для дробей с действительными коэффициентами существует 4 вида простейших дробей:

1.  $\frac{A}{x - a}.$
2.  $\frac{A}{(x - a)^\alpha}.$
3.  $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}.$
4.  $\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^\alpha}.$

Любая правильная дробь  $\frac{f(x)}{g(x)}$  может быть представлена в виде суммы простейших дробей, знаменатели которых есть всевозможные делители  $g(x)$ .

Алгоритм разложения дроби на простейшие:

1. Если дробь – неправильная, то выделяем целую часть, а на простейшие раскладываем получившуюся правильную дробь.

2. Раскладываем знаменатель правильной дроби на множители.

3. Записываем правильную дробь в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами.

4. Приводим к общему знаменателю сумму дробей в правой части.

5. Находим неопределенные коэффициенты:

- либо приравняв коэффициенты при одинаковых степенях у левого и правого приведенных числителей;

- либо подставляя конкретные (как правило корни общего их знаменателя) значения  $x$ .

6. Записываем ответ с учетом целой части дроби.

**Пример 45.** Разложить на простейшие  $\frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 + 4x + 3}$ .

*Решение.* Так как данная дробно-рациональная функция является неправильной, выделим целую часть:

$$\frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 + 4x + 3} = 1 + \frac{2}{x^2 + 4x + 3}$$

$$\frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 + 4x + 3} = 1 + \frac{2}{x^2 + 4x + 3}$$

Разложим получившуюся дробь  $\frac{2}{x^2 + 4x + 3}$  на простейшие. Вначале

разложим на множители знаменатель. Для этого найдем его корни по стандартной формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2}; \quad x_1 = -3, \quad x_2 = -1.$$

Запишем разложение дробно-рациональной функции на простейшие, используя неопределенные коэффициенты:

$$\frac{2}{x^2 + 4x + 3} = \frac{2}{(x + 3)(x + 1)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x + 1}.$$

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю:

$$\frac{2}{x^2 + 4x + 3} = \frac{A(x + 1) + B(x + 3)}{(x + 3)(x + 1)} = \frac{(A + B)x + (A + 3B)}{(x + 3)(x + 1)}.$$

Составляем систему, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в числителях левой и правой дробей:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A + 3B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -B, \\ -B + 3B = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 1. \end{cases}$$

Ответ:  $\frac{x^2 + 4x + 5}{x^2 + 4x + 3} = 1 - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+1}.$

**Пример 46.** Разложить на простейшие  $\frac{x}{(x^2 - 1)^2}.$

*Решение.* Так как данная дробь является правильной (т. е. степень числителя меньше степени знаменателя), выделять целую часть не надо. Разложим знаменатель дроби на множители:

$$(x^2 - 1)^2 = (x^2 - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)(x - 1)(x + 1) = (x - 1)^2(x + 1)^2.$$

Запишем разложение данной дроби на простейшие, используя неопределенные коэффициенты:

$$\frac{x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x}{(x - 1)^2(x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 1} + \frac{D}{(x + 1)^2}.$$

По утверждению, знаменатели простейших дробей должны быть всевозможными делителями знаменателя дроби:

$$\frac{x}{(x - 1)^2(x + 1)^2} = \frac{A(x - 1)(x + 1)^2 + B(x + 1)^2 + C(x - 1)^2(x + 1) + D(x - 1)^2}{(x - 1)^2(x + 1)^2}. \quad (2.2)$$

Можно было бы составить систему уравнений, приравняв числители левой и правой дробей, но в данном примере вычисления будут слишком громоздки. Упростить их поможет следующий прием: подставим в числители по очереди корни знаменателя.

При  $x = 1$ :

$$1 = A(1 - 1)(1 + 1)^2 + B(1 + 1)^2 + C(1 - 1)^2(1 + 1) + D(1 - 1)^2,$$

$$1 = 4B \Rightarrow B = \frac{1}{4}.$$

При  $x = -1$ :

$$-1 = A(-1 - 1)(-1 + 1)^2 + B(-1 + 1)^2 + C(-1 - 1)^2(-1 + 1) + D(-1 - 1)^2,$$

$$-1 = 4D \Rightarrow D = -\frac{1}{4}.$$

Теперь для определения оставшихся коэффициентов  $A$  и  $C$  достаточно будет приравнять коэффициенты при старшей степени и свободные члены. Их можно найти, не раскрывая скобок:

$$\begin{cases} 0 = A + C, \\ 0 = -A + B + C + D. \end{cases} \quad \text{В левой части первого уравнения стоит } 0, \text{ так как в}$$

числителе левой дроби в (2.2) нет слагаемого с  $x^3$ , а в правой дроби у слагаемого с  $x^3$  коэффициент  $A + C$ . В левой части второго уравнения стоит 0, так как в числителе левой дроби в (2.2) свободный член равен нулю, а у числителя правой дроби в (2.2) свободный член равен  $(-A + B + C + D)$ . Имеем:

$$\begin{cases} 0 = A + C, \\ 0 = -A + B + C + D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -C, \\ 0 = -A + \frac{1}{4} - A - \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -C, \\ 0 = -2A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0, \\ C = 0. \end{cases}$$

Ответ:  $\frac{x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{1}{4(x - 1)^2} + \frac{-1}{4(x + 1)^2}.$

### Список литературы

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: В 2 ч. М.: Айрис Пресс, 2004. Ч. 1.
2. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2 ч. М.: Высш. шк., 1996.

## Оглавление

1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА.....	3
1.1. Определение комплексных чисел и действия над ними.....	3
1.1.1. Сложение и умножение комплексных чисел в алгебраической форме..	3
1.1.2. Деление комплексных чисел в алгебраической форме .....	4
1.1.3. Извлечение квадратного корня из комплексного числа в алгебраической форме .....	5
1.2. Решение линейных и квадратных уравнений для комплексных чисел .....	6
1.3. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел.....	9
1.3.1. Геометрическое изображение комплексных чисел.....	9
1.3.2. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел.....	10
1.3.3. Умножение и деление комплексных чисел. Формула Муавра.....	11
1.3.4. Задачи на построение областей на комплексной плоскости.....	12
1.3.5. Извлечение корня из комплексных чисел в тригонометрической форме .....	15
2. МНОГОЧЛЕНЫ.....	18
2.1. Многочлены и действия над ними.....	18
2.2. Корни многочленов.....	21
2.3. Неприводимые многочлены.....	22
2.4. Нахождение наибольшего общего делителя многочленов.....	25
2.5. Дробно-рациональные функции.....	27
Список литературы.....	

**Ошибка! Закладка не определена.**

Редактор Э. К. Долгатов

---

Подписано в печать

Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 2.0.

Гарнитура «Times». Тираж 350 экз. Заказ

---

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

197376, С.-Петербург