

Федеральное агентство по образованию

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет «ЛЭТИ»

Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Методические указания
к решению задач

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2010

УДК 514.123

Векторная алгебра: Методические указания к решению задач / Сост.: Е. А. Толкачева, М. Н. Абрамова, В. Г. Казакевич. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2010. 32 с.

Содержат основные сведения и примеры решения типовых задач векторной алгебры и аналитической геометрии.

Предназначены для студентов-заочников всех специальностей.

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний

© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2010

Настоящее издание призвано помочь студентам-заочникам младших курсов самостоятельно научиться решать задачи по темам: «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия». Как правило, освоение этих разделов математики вызывает затруднения у студентов. Поэтому первая часть методических указаний посвящена подробному обсуждению координатного метода на плоскости и в пространстве, причем все задачи сопровождаются геометрической иллюстрацией.

Данные методические указания, хотя и содержат теоретический материал, не призваны служить полной заменой учебника по рассматриваемым темам, поэтому составители рекомендуют параллельно работать с учебными пособиями, наиболее доступным в плане изложения для студентов заочного отделения авторы считают пособие: Письменный Д. Т. «Конспект лекций по высшей математике» – В 2 ч. М.: Айрис Пресс, 2006. – Ч. 1, с. 31 – 47.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1. Координаты точки на плоскости и в пространстве

В настоящих методических указаниях будет рассматриваться только прямоугольная система координат на плоскости и в пространстве.

Когда в условии задачи сказано «дана точка», то это значит, что координаты точки известны. Если в задаче необходимо «найти точку», то это означает, что следует определить её координаты. Фраза «дан отрезок прямой» означает, что известны координаты концов этого отрезка.

Координаты точки на плоскости записываются в скобках рядом с названием точки, причем всегда на первом месте в прямоугольной системе координат записывается абсцисса точки, а на втором – её ордината. Например, если x_1 – абсцисса точки A , а y_1 – её ордината, то это записывается так: $A(x_1, y_1)$. У точки, лежащей на оси абсцисс, ордината равна нулю; у точки, лежащей на оси ординат, абсцисса равна нулю. Обе координаты точки начала координат равны нулю. Для определения местоположения точки в пространстве используются три координаты – абсцисса, ордината и аппликата, это записывается так: $A(x_1, y_1, z_1)$.

Пример 1.1. Постройте на плоскости точки $A(2, 4)$ и $B(-3, -2)$, найдите длину отрезка AB .

Решение. Выберем единицу масштаба и возьмем на плоскости прямоугольную систему координат. Абсцисса точки A равна 2, а её ордината 4. Отложим на оси Ox вправо от начала координат O отрезок OA_1 длиной в 2 еди-

ницы масштаба, а по оси Oy вверх от начала координат – отрезок OA_2 длиной 4 единицы масштаба. Из точки A_1 восстановим перпендикуляр к оси Ox , а из точки A_2 – перпендикуляр к оси Oy . Пересечение этих перпендикуляров и определит искомую точку A (рис 1.1).

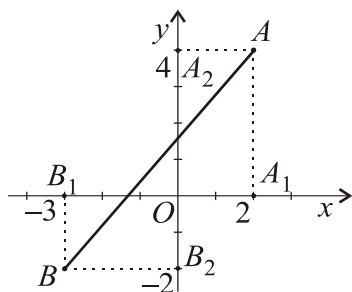


Рис. 1.1

Абсцисса точки B равна -3 , а ее ордината -2 . Отложим на оси Ox влево от начала координат O отрезок OB_1 длиной в 3 единицы масштаба, а по оси Oy вниз от начала координат – отрезок OB_2 длиной в 2 единицы. Из точки B_1 восстановим перпендикуляр к оси Ox , а из точки B_2 – перпендикуляр к оси Oy . Пересечение этих перпендикуляров и есть точка B (рис 1.1).

Расстояние d между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ плоскости определяется по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Расстояние d называется еще длиной отрезка AB . Расстояние между точками $A(2, 4)$ и $B(-3, -2)$ плоскости или длина отрезка AB равна:
 $AB = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-6)^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$ единиц масштаба.

Ответ: $AB = \sqrt{61}$.

Пример 1.2. Постройте на плоскости точки, симметричные точке $A(-2, 4)$ относительно: а) оси Ox ; б) оси Oy ; в) начала координат.

Решение. Для решения этой задачи следует помнить следующие определения. Две точки M и N называются симметричными относительно прямой, если отрезок MN перпендикулярен этой прямой, причем его середина лежит на этой прямой. Точки M и N называются симметричными относительно точки O , если точка O является серединой отрезка MN .

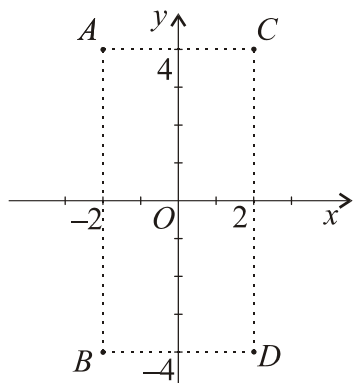


Рис. 1.2

а) Точка B , симметричная с точкой $A(-2, 4)$ относительно оси Ox , имеет абсциссу такую же, как и точка A , а ординату, равную по абсолютной величине ординате точки A , но противоположную ей по знаку (рис. 1.2). Значит, точка B имеет координаты -2 и -4 : $B(-2, -4)$.

б) Точка C , симметричная с точкой $A(-2, 4)$ относительно оси Oy , имеет ординату такую же, как и точка A , а абсциссу, равную по абсолютной

величине абсциссе точки A , но противоположную ей по знаку (рис. 1.2). Значит, точка C имеет координаты 2 и 4: $C(2, 4)$.

в) Точка D , симметричная с точкой $A(-2, 4)$ относительно начала координат, будет иметь абсциссу и ординату, равные по абсолютной величине абсциссе и ординате точки A , но противоположные им по знаку (рис. 1.2). Значит, точка D имеет координаты 2 и -4 : $D(2, -4)$.

Пример 1.3. Постройте в пространстве точки $A(2, 4, 3)$ и $B(1, -3, -2)$, найдите длину отрезка AB .

Решение. Выберем единицу масштаба и возьмем в пространстве прямоугольную систему координат. Абсцисса точки A равна 2, ее ордината равна 4, а аппликата 3. Отложим на оси Ox вперед от начала координат O отрезок OA_1 длиной в 2 единицы масштаба, по оси Oy вправо от начала координат – отрезок OA_2 длиной 4 единицы масштаба. Через точку A_1 проведем прямую, параллельную к оси Oy , а через A_2 – прямую, параллельную к оси Ox . Пересечение этих прямых определит точку A_3 (рис 1.3), через точку A_3 проведем прямую, параллельную оси Oz . Отложим на этой прямой вверх от A_3 – отрезок A_3A длиной 3 единицы масштаба. Итак, точка $A(2, 4, 3)$ построена.

Абсцисса точки B равна 1, ее ордината -3 , аппликата -2 . Отложим на оси Ox вперед от начала координат O отрезок OB_1 длиной в 1 единицу масштаба, а по оси Oy влево от начала координат – отрезок OB_2 длиной 3 единицы масштаба. Через точку B_1 проведем прямую, параллельную к оси Oy , а через B_2 – прямую, параллельную к оси Ox . Пересечение этих прямых определит точку B_3 (рис 1.3), через которую проведем прямую, параллельную оси Oz . Отложим на этой прямой вниз от B_3 – отрезок B_3B длиной 2 единицы масштаба. Итак, точка $B(1, -3, -2)$ построена.

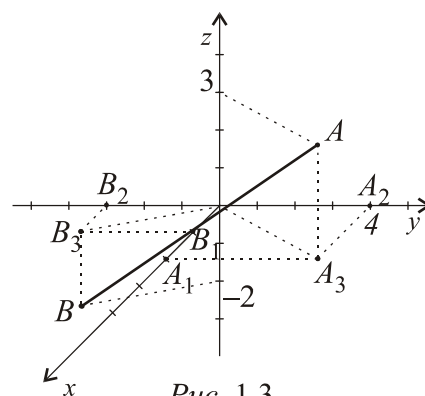


Рис. 1.3

Расстояние между точками пространства определяется по формуле, аналогичной формуле вычисления расстояния между точками плоскости. Расстояние между точками $A(2, 4, 3)$ и $B(1, -3, -2)$ и есть длина отрезка AB :

$$AB = \sqrt{(1-2)^2 + (-3-4)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2 + (-6)^2} = \sqrt{1+49+36} = \sqrt{86} \text{ единиц масштаба.}$$

Ответ: $AB = \sqrt{86}$.

Если даны точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ в пространстве, то координаты точки $C(x, y, z)$, делящей отрезок AB в отношении $\lambda = \frac{AC}{CB}$ определяется по

$$\text{формулам } x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Если $\lambda = 1$, то точка $C(x, y, z)$ делит отрезок AB пополам, и тогда координаты середины отрезка: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Пример 1.4. Найти точку C – середину отрезка, соединяющего точки $A(1, 5, 3)$ и $B(1, -3, -1)$.

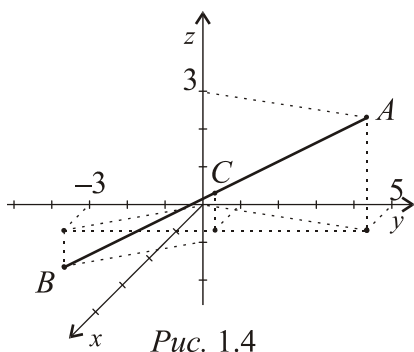


Рис. 1.4

Решение. Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов. Т. е. координаты точки C равны $x = \frac{1+1}{2} = 1, y = \frac{5+(-3)}{2} = 1, z = \frac{3+(-1)}{2} = 1$. Итак, середина отрезка AB – точка $C(1, 1, 1)$ (рис. 1.4).

Пример 1.5. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, имеющей форму треугольника с вершинами $A(1, 1), B(0, 4)$ и $C(-3, -1)$ (толщину пластинки не учитывать).

Решение. Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан. Из элементарной геометрии известно, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке, причем эта точка делит медианы в отношении 2:1, считая от вершины треугольника. Обозначим ее $M(x, y)$.

Рассмотрим медиану, проведенную из вершины A . Один ее конец известен $A(1, 1)$, а координаты другого ее конца D получим, как координаты середины отрезка BC :

$$x_D = \frac{0-3}{2} = -\frac{3}{2}, y_D = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}.$$

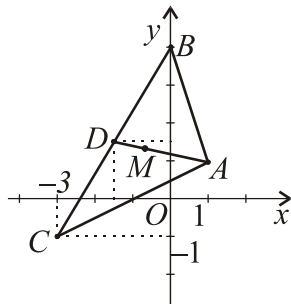


Рис. 1.5

Теперь, зная координаты начала A и конца D отрезка AD и то, что точка M делит этот отрезок в отношении

$$\lambda = 2, \text{ получаем } x = \frac{1 + 2 \cdot (-3/2)}{1 + 2} = -\frac{2}{3}, y = \frac{1 + 2 \cdot (3/2)}{1 + 2} = \frac{4}{3}.$$

Итак, центр тяжести треугольника ABC – точка $M(-2/3, 4/3)$ (рис. 1.5). Полученный результат приводит к выводу, что координаты центра тяжести однородной треугольной пластинки, если не учитывать ее толщину, равны среднему арифметическому одноименных координат ее вершин.

1.2. Векторы в прямоугольной декартовой системе координат

Различают два рода величин: скалярные и векторные. Если некоторая величина вполне определяется ее числовым значением, то ее называют скалярной (например, масса, плотность, работа, температура). Скаляры являются алгебраическими величинами и с ними можно производить любые алгебраические действия: сложение, вычитание, умножение, деление и т. д. Если при определении некоторой величины для ее полной характеристики, кроме числового значения, надо знать и ее направление, то такая величина называется векторной, или вектором (например, скорость, ускорение, сила).

Графически вектор обозначается отрезком прямой, на котором ставится стрелка, указывающая направление вектора (рис 1.6). Длина, изображающего вектор отрезка, называется длиной вектора, а также его модулем или абсолютной величиной. Обозначается вектор одной буквой с черточкой или стрелкой над ней: \vec{a} или \vec{a} , а модуль этого вектора либо той же буквой, только без черточки над ней, т.е. a , либо $|\vec{a}|$. Также вектор можно обозначать \overline{AB} , где A – начало и B – конец вектора, а его модуль – теми же буквами, но без черточки наверху. Если модуль вектора равен нулю, то такой вектор называется нулевым и обозначается $\vec{0}$.

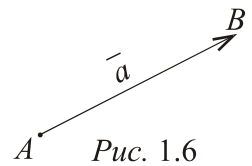


Рис. 1.6

Пример 1.6. Даны точки $A(2, 4, 1)$ и $B(-3, -2, 3)$, найдите векторы \overline{AB} , \overline{BA} и модули этих векторов.

Решение. Если в задаче необходимо «найти вектор», то это означает, что следует определить его координаты. Чтобы определить координаты вектора, надо из координат конца вектора вычесть координаты его начала. Произведем расчет координат вектора \overline{AB} : $-3 - 2 = -5$; $-2 - 4 = -6$; $3 - 1 = 2$, то есть $\overline{AB}(-5; -6; 2)$. Аналогично, \overline{BA} : $2 - (-3) = 5$; $4 - (-2) = 6$; $1 - 3 = -2$, то есть $\overline{BA}(5; 6; -2)$.

Модуль вектора \overline{AB} является длиной отрезка AB . Т.е. модуль вектора $\overline{AB}(x, y, z)$ в пространстве: $|\overline{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Подставим координаты: $|\overline{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{65}$,
 $|\overline{BA}| = \sqrt{5^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{65}$.

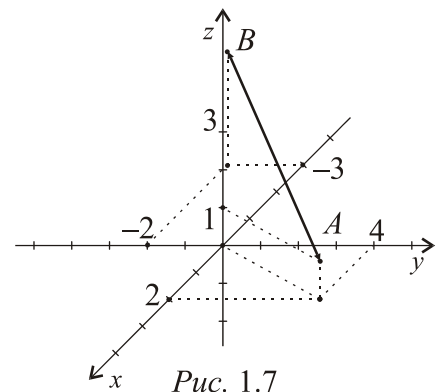
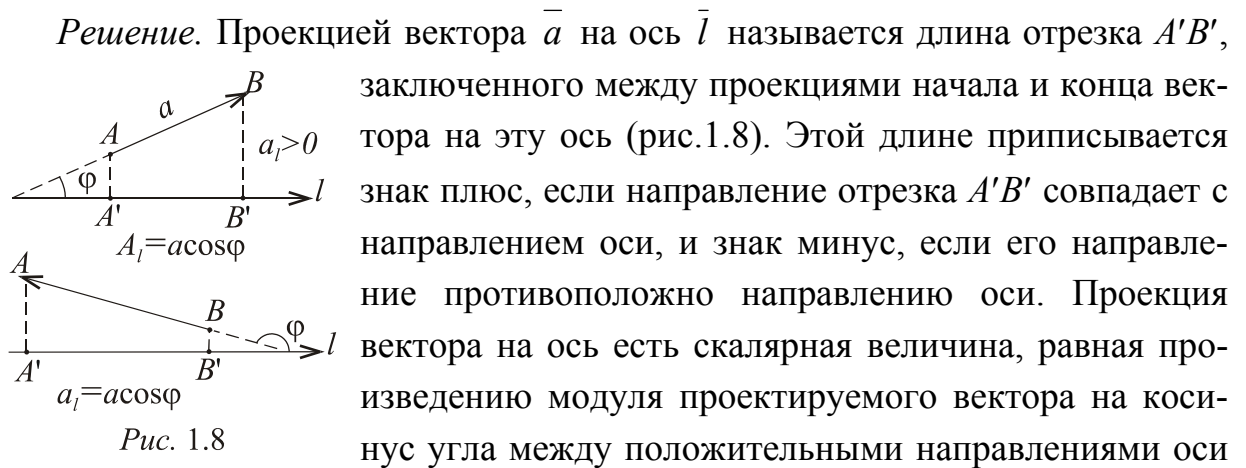


Рис. 1.7

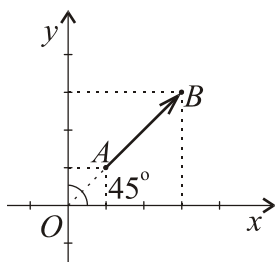
Ответ: $\overline{AB}(-5; -6; 2)$, $\overline{BA}(5; 6; -2)$, $|\overline{AB}| = |\overline{BA}| = \sqrt{65}$.

Равными называют векторы с одинаковой длиной, лежащие на параллельных прямых и направленные в одну и ту же сторону. Координаты равных векторов совпадают. Обратите внимание, что векторы \overline{AB} и \overline{BA} (рис. 1.7) имеют одинаковую длину, но направлены в разные стороны. Если векторы лежат на одной или параллельных прямых и различны по направлению, такие векторы называют противоположными и обозначают $\overline{AB} = -\overline{BA}$. Координаты противоположных векторов отличаются знаком.

Пример 1.7. Найти вектор, соединяющий точки $A(1, 1)$ и $B(3, 3)$, и его проекции на оси координат плоскости.



Рассмотрим на плоскости систему координат и изобразим в ней данные точки (рис. 1.9). Произведем расчет координат вектора \overline{AB} : $3 - 1 = 2$; $3 - 1 = 2$, то есть $\overline{AB}(2; 2)$. Модуль его равен $AB = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Видим, что вектор \overline{AB} лежит на биссектрисе первого и третьего координатных углов, следовательно, образует с каждой из осей угол в 45° . Учитывая, что $\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$, вычислим проекции на



оси координат: $\text{pr}_{Ox} \overline{AB} = 2\sqrt{2} \cos 45^\circ = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$,

$$\text{pr}_{Oy} \overline{AB} = 2\sqrt{2} \cos 45^\circ = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.$$

Обратите внимание, что проекции вектора на оси совпадают с координатами этого вектора.

Ответ: $\overline{AB}(2, 2)$, $\text{pr}_{Ox} \overline{AB} = 2$, $\text{pr}_{Oy} \overline{AB} = 2$.

1.3. Умножение вектора на число

Пример 1.8. На плоскости задан вектор \vec{a} (рис. 1.10), изобразите следующие векторы $3\vec{a}$, $-4\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$.

Решение. При умножении вектора \vec{a} на скаляр (число) k получается вектор \vec{b} , модуль которого равен произведению модуля a на число k , т.е. $|\vec{a}| = k \cdot |\vec{b}|$. Направления векторов \vec{a} и \vec{b} совпадают, если $k > 0$, и они противоположны, если $k < 0$. Обозначение: $\vec{b} = k\vec{a}$. Исходя из этого правила, изображены на рис. 1.10 векторы $3\vec{a}$, $-4\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$.

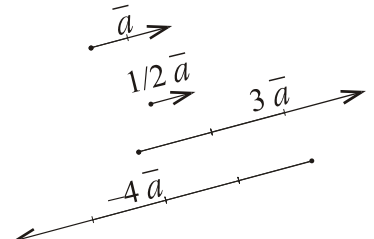


Рис. 1.10

Пример 1.9. В пространстве задан вектор \vec{a} (1, 2, -2), найдите следующие векторы: а) $3\vec{a}$; б) $-4\vec{a}$; в) $\frac{1}{2}\vec{a}$.

Решение. При умножении вектора \vec{a} (x, y, z) на число k получается вектор $\vec{b}(k \cdot x, k \cdot y, k \cdot z)$, т.е. при умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число. Таким образом, координаты векторов равны: а) $3\vec{a}(3, 6, -6)$; б) $-4\vec{a}(-4, -8, 8)$; в) $\frac{1}{2}\vec{a}(\frac{1}{2}, 1, -1)$.

Пример 1.10. При каких значениях m векторы $\vec{a}(1, 3, m)$ и $\vec{b}(2m, -12, 8)$ коллинеарны?

Решение. Векторы называются коллинеарными, если они лежат на одной или на параллельных прямых. Если при этом векторы направлены одинаково, то они называются сонаправленными, а если противоположно, то противоположно направленными. Два вектора являются коллинеарными тогда и только тогда, когда один из них является произведением другого на число, или, другими словами, их координаты пропорциональны. На математическом языке это записывается так:

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b}$. При $\vec{a}(1, 3, m)$ и $\vec{b}(2m, -12, 8)$

можно записать, что $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{1}{2m} = \frac{3}{-12} = \frac{m}{8} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cdot 2m = -12, \\ -12m = 3 \cdot 8, \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$.

Ответ: $m = -2$.

1.4. Сумма векторов

Сложение векторных величин производится по правилу параллелограмма или по правилу треугольника (рис. 1.11).

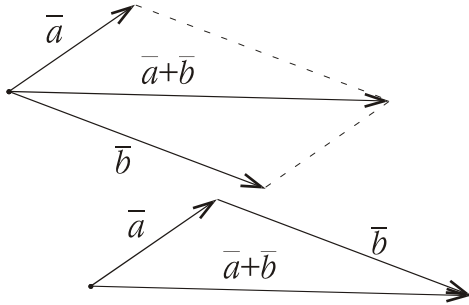


Рис. 1.11

Правило параллелограмма: Сумма двух векторов \vec{a} и \vec{b} , приведенных к общему началу, есть третий вектор, длина которого равна длине диагонали параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , он направлен от точки общего начала данных векторов.

Правило треугольника: Сумма двух векторов \vec{a} и \vec{b} , если конец первого совпадает с началом второго, есть третий вектор, длина которого равна длине третьей стороны треугольника, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , причем направлен он от начала первого в конец второго вектора (рис. 1.11).

Пример 1.11. На плоскости заданы векторы (рис. 1.12), изобразите следующие векторы: а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $2\vec{a} + 3\vec{b}$; г) $1/2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$.

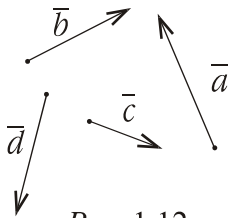


Рис. 1.12

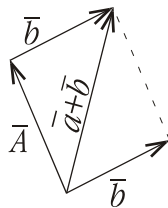


Рис. 1.13

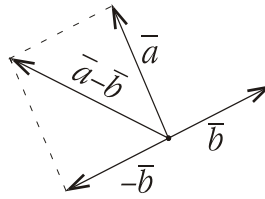


Рис. 1.14

Решение:

а) Для построения вектора $\vec{a} + \vec{b}$ можно воспользоваться как правилом параллелограмма, так и правилом треугольника (рис. 1.13).

б) Разность двух векторов \vec{a} и \vec{b} – это вектор, равный сумме векторов \vec{a} и $-\vec{b}$, где $-\vec{b}$ – вектор, противоположный к вектору \vec{b} (рис. 1.14).

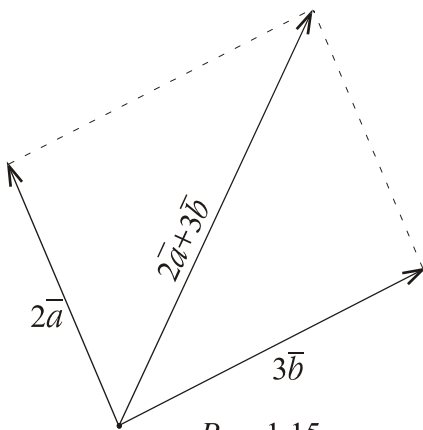


Рис. 1.15

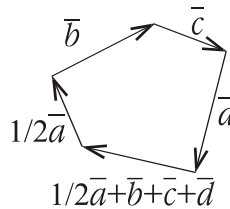


Рис. 1.16

в) Для построения вектора $2\vec{a} + 3\vec{b}$ необходимо воспользоваться определением умножения вектора на число и каким-либо правилом сложения векторов (рис. 1.15).

г) Сумму нескольких векторов строят так: берут произвольную точку O плоскости и из нее строят вектор \vec{OA} , равный первому слагаемому; из точки

А проводят вектор \overline{AB} , равный второму слагаемому, из точки В – вектор \overline{BC} , равный третьему слагаемому и т.д. Наконец, строят последний вектор с концом в точке D, вектор \overline{OD} , замыкающий полученную ломаную линию, и будет искомой суммой (рис. 1.16).

Пример 1.12. В пространстве заданы векторы \bar{a} (1, 2, -2) и \bar{b} (-3, 5, 1), найдите следующие векторы: а) $\bar{a} + \bar{b}$; б) $\bar{a} - \bar{b}$; в) $2\bar{a} + 1/3\bar{b}$.

Решение. При сложении (вычитании) векторов соответствующие их координаты складываются (вычитаются). Таким образом, координаты векторов равны: а) $\bar{a} + \bar{b}$ (-2, 7, -1); б) $\bar{a} - \bar{b}$ (4, -3, -3); в) $2\bar{a} + 1/3\bar{b}$ (1, 17/3, -11/3).

Пример 1.13. Разложите в плоскости вектор \bar{a} (1; 2) по базису.

Решение. В качестве базисных векторов на плоскости рассматривают \bar{i} и \bar{j} – векторы, по модулю равные единице и направленные по координатным осям Ox и Oy . Тогда видим, что $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}$ (рис. 1.17). Действительно, ведь координаты вектора – это и есть коэффициенты в разложении вектора по базису.

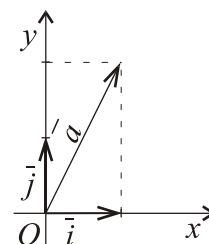


Рис. 1.17

В трехмерном случае рассматриваются базисные векторы \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} . Можно говорить о том, что записи \bar{a} (x, y, z) и $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ равнозначны, в дальнейшем будем пользоваться обеими этими записями.

Пример 1.14. Найдите α и β , если известно, что векторы $\bar{a} = \alpha\bar{i} + 7\bar{j} + 3\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + \beta\bar{j} + 2\bar{k}$ коллинеарны.

Решение. В условии задачи векторы записаны в разложении по базису пространства, в другой записи имеем: \bar{a} (α , 7, 3), \bar{b} (1, β , 2). Векторы коллинеарны, если их координаты пропорциональны, т. е. $\frac{\alpha}{1} = \frac{7}{\beta} = \frac{3}{2}$. Следовательно,

но, $\alpha = 3/2$, $\beta = 14/3$.

Ответ: $\alpha = 3/2$, $\beta = 14/3$.

1.5. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов \bar{a} и \bar{b} называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними. Обозначаться скалярное произведение может: $\bar{a}\bar{b}$, $\bar{a} \cdot \bar{b}$, или (\bar{a}, \bar{b}) .

Пример 1.15. Вычислите скалярное произведение векторов $\bar{a} = -\bar{i} + 7\bar{j} + 3\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + 8\bar{j} - 2\bar{k}$.

Решение. Известно, что скалярное произведение векторов равно сумме произведений их соответствующих координат. Следовательно,
 $\bar{a} \cdot \bar{b} = (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 8 + 3 \cdot (-2) = 49$.

Ответ: $\bar{a} \cdot \bar{b} = 49$.

Пример 1.16. Найдите косинус угла между векторами \bar{a} и \bar{b} , если:
 а) $\bar{a}(5, 4, -2)$, $\bar{b}(-2, 1, 2)$; б) $\bar{a}(3, -3, -6)$, $\bar{b}(-1, 1, 2)$; в) $\bar{a}(1, 2, -1)$, $\bar{b}(3, 4, 11)$.

Решение. По определению скалярного произведения имеем равенство
 $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos(\bar{a}, \bar{b})$, значит $\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$, т. е. $(\bar{a}, \bar{b}) = \arccos \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$.

$$\text{а) Подставим данные: } \cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{5 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2}{\sqrt{5^2 + 4^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{-10}{\sqrt{45} \sqrt{9}} = -\frac{10}{9\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{9}.$$

$$\text{б) } \cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{-3 - 3 - 12}{\sqrt{9 + 9 + 36} \cdot \sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{-18}{\sqrt{54} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{18}{\sqrt{54 \cdot 6}} = -\frac{18}{\sqrt{324}} = -\frac{18}{18} = -1.$$

В этом случае косинус угла равен -1 , значит, угол между векторами составляет 180° и они противоположно направленные. Действительно, $\bar{b} = -3\bar{a}$, т. е. векторы коллинеарные, а раз множитель отрицателен, то они противоположно направленные.

$$\text{в) } \cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{3 + 8 - 11}{\sqrt{1 + 4 + 1} \cdot \sqrt{9 + 16 + 121}} = \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{146}} = 0. \text{ В этом случае косинус}$$

угла равен 0 , т. е. угол между векторами составляет 90° , и они ортогональны.

Пример 1.17. Зная векторы, образующие треугольник ABC :
 $\overline{AB} = 2\vec{i} - 6\vec{j}$, $\overline{BC} = \vec{i} + 7\vec{j}$, $\overline{AC} = 3\vec{i} - \vec{j}$, найти углы этого треугольника.

Решение. Для того чтобы найти углы заданного треугольника надо найти косинусы углов между векторами, образующими треугольник. Это можно сделать, используя определение скалярного произведения. Но косинус угла определен для векторов, имеющих общее начало.

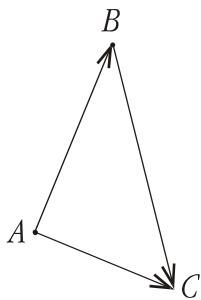


Рис. 1.18

Угол A треугольника ABC равен углу между векторами \overline{AB} и \overline{AC} . Можем найти его косинус: $\cos \hat{A} = \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) =$

$$= \frac{6 + 6}{\sqrt{4 + 36} \cdot \sqrt{9 + 1}} = \frac{12}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{10}} = \frac{6}{10} = 0,6. \text{ Значит, } \hat{A} = \arccos 0,6.$$

Чтобы найти косинус угла B треугольника ABC надо искать косинус угла между векторами \overrightarrow{BA} и \overrightarrow{BC} (рис. 1.18). Зная что $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}(-2, 6)$, имеем $\cos \hat{B} = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-2 + 42}{\sqrt{4 + 36} \cdot \sqrt{1 + 49}} = \frac{40}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{50}} = \sqrt{\frac{4}{5}}$. Значит, $\hat{B} = \arccos \sqrt{\frac{4}{5}}$.

Косинус угла C треугольника ABC есть косинус угла между векторами \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{CB} (рис. 1.18), где $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CA}(-3, 1)$, а $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}(-1, -7)$. Итак, $\cos \hat{C} = \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{3 - 7}{\sqrt{9 + 1} \cdot \sqrt{1 + 49}} = \frac{-4}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{50}} = -\frac{2}{5\sqrt{5}}$. Следовательно, $\hat{C} = \arccos(-\frac{2}{5\sqrt{5}})$.

Ответ: $\hat{A} = \arccos 0,6$, $\hat{B} = \arccos \sqrt{\frac{4}{5}}$, $\hat{C} = \arccos(-\sqrt{\frac{1}{5}})$.

Пример 1.18. При каком значении α векторы $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} + \alpha\vec{j} + 2\vec{k}$ ортогональны?

Решение. Два вектора ортогональны друг другу, если угол между ними составляет 90° . Следовательно, косинус угла между ними должен быть равен нулю и, если сами векторы не нулевые, то скалярное произведение равно нулю. Запишем на математическом языке условие ортогональности (перпендикулярности) двух векторов: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Подставим данные: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot \alpha + 1 \cdot 2 = 0$. Из уравнения $2 + 2\alpha + 2 = 0$ имеем: $\alpha = -2$.

Ответ: $\alpha = -2$.

Пример 1.19. В плоскости XOZ найти вектор \vec{a} , перпендикулярный вектору $\vec{c}(6, -3, 2)$ и имеющий одинаковую с ним длину.

Решение. Пусть вектор \vec{a} имеет координаты (x, y, z) . В плоскости XOZ лежат все такие точки и векторы, у которых вторая координата равна нулю. Т. е. $\vec{a}(x, y, z) \in XOZ \Rightarrow y = 0$.

Из того, что $\vec{a} \perp \vec{c}$ следует $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$. Можем теперь составить уравнение $x \cdot 6 + y \cdot (-3) + z \cdot 2 = 0$, зная, что $y = 0$, получим $6x + 2z = 0$.

По условию длины векторов \vec{a} и \vec{c} равны, т. е. $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = |\vec{c}|$.

Составим уравнение $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{49}$, из которого, зная что $y = 0$, получим $x^2 + z^2 = 49$.

Решим полученные уравнения вместе: $\begin{cases} 6x + 2z = 0, \\ x^2 + z^2 = 49, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -3x, \\ x^2 + (-3x)^2 = 49, \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -3x, \\ 10x^2 = 49, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -3x, \\ x = \pm \sqrt{\frac{49}{10}}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{21\sqrt{10}}{10}, \\ x = \frac{7\sqrt{10}}{10}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} z = \frac{21\sqrt{10}}{10}, \\ x = -\frac{7\sqrt{10}}{10}. \end{cases}$$

Видим, что условию удовлетворяют два вектора, являющиеся противоположно направленными: $\vec{a}_1(\frac{7\sqrt{10}}{10}, 0, -\frac{21\sqrt{10}}{10})$ и $\vec{a}_2(-\frac{7\sqrt{10}}{10}, 0, \frac{21\sqrt{10}}{10})$.

Ответ: $\vec{a}(\pm \frac{7\sqrt{10}}{10}, 0, \mp \frac{21\sqrt{10}}{10})$.

1.6. Векторное произведение векторов

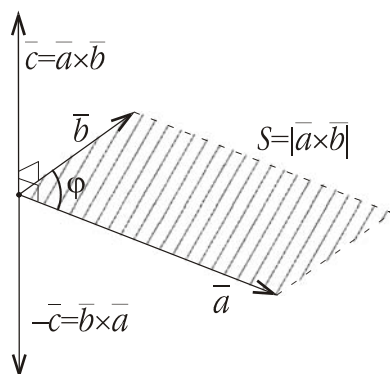


Рис. 1.19

Векторным произведением векторов \vec{a} и \vec{b} называется третий вектор \vec{c} (рис. 1.19), если верны следующие условия:

1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$;
2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;
3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначается векторное произведение: $\vec{a} \times \vec{b}$.

Векторное произведение векторов не коммутативно, т. е. нельзя переставлять сомножители векторного произведения.

Пример 1.20. Вычислите векторное произведение векторов $\vec{a} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 8\vec{j} - 2\vec{k}$.

Решение. Векторное произведение векторов вычисляется по формуле:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}, \text{ где } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} - \text{базисные вектора (орты)}, (x_a, y_a, z_a) - \text{координаты вектора } \vec{a}, (x_b, y_b, z_b) - \text{координаты вектора } \vec{b}.$$

В задаче $\bar{a} (-1, 7, 3)$, $\bar{b} (1, 8, -2)$, значит $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 7 & 3 \\ 1 & 8 & -2 \end{vmatrix}$. Вычислим

$$\text{определитель: } \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 7 & 3 \\ 1 & 8 & -2 \end{vmatrix} = -14\bar{i} - 8\bar{k} + 3\bar{j} - (7\bar{k} + 24\bar{i} + 2\bar{j}) = -38\bar{i} + \bar{j} - 15\bar{k}.$$

Таким образом, $\bar{a} \times \bar{b} = -38\bar{i} + \bar{j} - 15\bar{k}$.

Ответ: $\bar{a} \times \bar{b} (-38, 1, -15)$.

Пример 1.21. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{i} - 1\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$, как на сторонах.

Решение. Модуль векторного произведения векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, как на сторонах. Действительно, $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\bar{a}, \bar{b})$, а правая часть этого равенства есть формула площади параллелограмма, построенного на этих векторах, как на сторонах (рис. 1.19). Следовательно, искомая площадь $S = |\bar{a} \times \bar{b}|$.

В задаче $\bar{a} (1, -1, 2)$, $\bar{b} (2, -3, -1)$, значит $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$. Вычислим

$$\text{определитель: } \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i} - 3\bar{k} + 4\bar{j} - (-2\bar{k} - 6\bar{i} - \bar{j}) = 7\bar{i} + 5\bar{j} - \bar{k}.$$

Таким образом, $\bar{a} \times \bar{b} = 7\bar{i} + 5\bar{j} - \bar{k}$. Найдем модуль полученного векторного произведения: $|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{7^2 + 5^2 + (-1)^2} = \sqrt{75}$. Т. е. площадь параллелограмма равна $\sqrt{75}$ масштабных единиц в квадрате.

Ответ: $S = \sqrt{75}$ кв. ед.

Пример 1.22. Зная векторы, образующие треугольник ABC : $\overline{AB} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\overline{BC} = \vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$, $\overline{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, найти длину высоты этого треугольника, опущенной из точки B .

Решение. Для нахождения длины высоты воспользуемся формулами площади треугольника. С одной стороны площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту $S = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{BH}|$ (рис. 1.20), а с дру-

гой – половине площади параллелограмма, построенного на векторах, как на сторонах, т. е. половине модуля векторного произведения $S = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC} \times \overline{AB}|$.

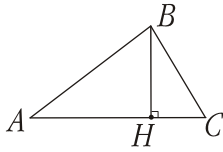


Рис. 1.20

$$\text{Вычислим } \overline{AC} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - 6\bar{k} - (-2\bar{k} + 2\bar{j}) = 2\bar{i} - 2\bar{j} - 4\bar{k}.$$

Найдем модуль полученного векторного произведения:
 $|\overline{AC} \times \overline{AB}| = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. Т. е. площадь треугольника ABC равна $\sqrt{6}$ масштабных единиц в квадрате, $S = \sqrt{6}$.

Найдем длину стороны AC , она равна модулю соответствующего вектора: $|AC| = |\overline{AC}| = \sqrt{4 + 4 + 0} = 2\sqrt{2}$. Тогда $|BH| = \frac{2S}{|AC|} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{3}$ (ед.)

Ответ: $|BH| = \sqrt{3}$.

1.7. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением трех векторов \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ на вектор \bar{c} , т. е. $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c})$.

Обозначаться смешанное произведение может: $\bar{a} \bar{b} \bar{c}$ или $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$.

Пример 1.23. Вычислите смешанное произведение векторов $\bar{a} = -\bar{i} + 7\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 8\bar{j} - 2\bar{k}$ и $\bar{c} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$.

Решение. Векторное произведение векторов $\bar{a} = -\bar{i} + 7\bar{j} + 3\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + 8\bar{j} - 2\bar{k}$ вычислено в примере 1.20: $\bar{a} \times \bar{b} = -38\bar{i} + \bar{j} - 15\bar{k}$. Значит, по определению $\bar{a} \bar{b} \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = (-38, 1, -15) \cdot (1, 1, -1) = -38 + 1 + 15 = -22$.

Можно воспользоваться формулой для вычисления смешанного произ-

ведения $\bar{a} \bar{b} \bar{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}$, где (x_a, y_a, z_a) – координаты вектора \bar{a} ,

(x_b, y_b, z_b) – координаты вектора \bar{b} , (x_c, y_c, z_c) – координаты вектора \bar{c} .

$$\bar{a} \bar{b} \bar{c} = \begin{vmatrix} -1 & 7 & 3 \\ 1 & 8 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 8 + 3 - 14 - 24 - 2 + 7 = -22.$$

Ответ: $\bar{a} \bar{b} \bar{c} = -22$.

Пример 1.24. Компланарны ли три векторы $\vec{a} = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{c} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k}$?

Решение. Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

Вычислим смешанное произведение данных трех векторов: $\vec{a} \vec{b} \vec{c} =$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & -9 \end{vmatrix} = 18 - 27 + 6 - 18 - 6 + 27 = 0. \text{ Значит, данные векторы ком-}$$

планарны, т. е. лежат в одной плоскости.

Пример 1.24. Найти объем V пирамиды $ABCD$, построенной на векторах $\overline{AB} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\overline{AC} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\overline{AD} = -2\vec{i} - 5\vec{j}$.

Решение. Модуль смешанного произведения трех векторов, выходящих из одной точки, равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах. Следовательно, объем треугольной пирамиды – это шестая часть модуля смешанного произведения векторов, на которых она построена, т. е. $V = \frac{1}{6} |\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}|$.

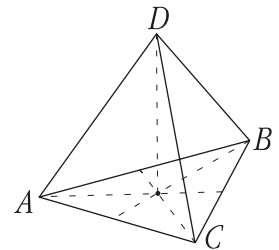


Рис. 1.21

Вычислим смешанное произведение трех данных векторов:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 5 - 6 + 4 - 5 - 0 = -12.$$

Таким образом, $V = \frac{1}{6} \cdot |-12| = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2$ (куб. ед.)

Ответ: $V = 2$.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2.1. Прямая на плоскости

Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид: $Ax + By + C = 0$. Иногда в общем уравнении выражают y через x и получают уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = kx + b$.

Пример 2.1. Построить прямые на плоскости, заданные общими уравнениями: а) $l_1 : 2x + y - 3 = 0$; б) $l_2 : x + 5 = 0$; в) $l_3 : 2y - 4 = 0$; г) $l_4 : 3x - 2y = 0$.

Решение:

а) Прямая l_1 задана уравнением $2x + y - 3 = 0$. Если $x = 0$, то $2 \cdot 0 + y - 3 = 0$ и $y = 3$, и точка $A(0;3)$ принадлежит прямой l_1 , что записывается: $A(0;3) \in l_1$.

Пусть $x = 1$, тогда $2 \cdot 1 + y - 3 = 0$ и $y = 1$, то есть $B(1;1) \in l_1$. Известно, что две точки однозначно определяют прямую на плоскости (рис. 2.1).

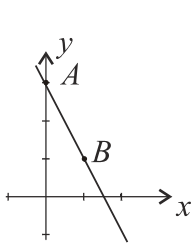


Рис. 2.1

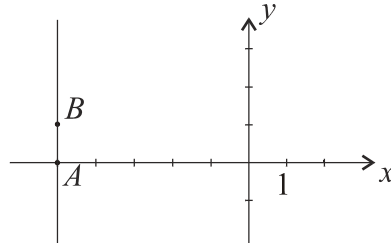


Рис. 2.2

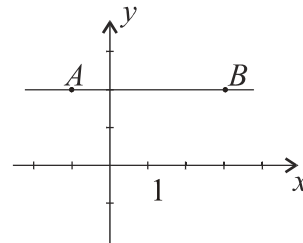


Рис. 2.3

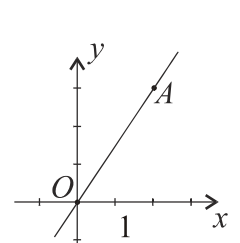


Рис. 2.4

б) Прямая l_2 задана уравнением $x + 5 = 0$, это значит, что абсцисса любой точки этой прямой равна -5 , а ордината произвольная. Например, точки $A(-5;0)$ и $B(-5;2)$ определяют прямую l_2 (рис. 2.2). Если в общем уравнении коэффициент при y равен нулю, то прямая параллельна оси Oy .

в) Из уравнения $2y - 4 = 0$ следует, что произвольная точка прямой l_3 имеет ординатой $y = 4/2 = 2$, а абсциссой любое число. Например, точки $A(-1;2)$ и $B(3;2)$ определяют прямую l_3 (рис. 2.3). Если в общем уравнении коэффициент при x равен нулю, то прямая параллельна оси Ox .

г) Подставим в уравнение $l_4 : 3x - 2y = 0$ значения x и, вычислив y , составим

таблицу значений координат точек: $\begin{matrix} x & 0 & 2 \\ y & 0 & 3 \end{matrix}$. Таким образом, точки $O(0;0)$ и

$A(2;3)$ определяют l_4 (рис. 2.4). Если в общем уравнении прямой свободный коэффициент равен нулю, то прямая проходит через начало координат.

Пример 2.2. Найти общее уравнение прямой на плоскости, если известно, что она проходит через точку $(2;-1)$ и составляет с осью Ox угол в 30° .

Решение. Рассмотрим в общем виде уравнение прямой, проходящей через данную точку $(x_0; y_0)$ в заданном направлении: $y - y_0 = k(x - x_0)$. В

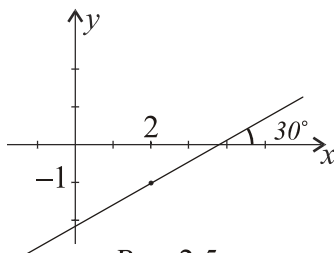


Рис. 2.5

этом уравнении коэффициент k – это характеристика направления прямой, $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α – угол наклона прямой к оси Ox .

В задаче $k = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, координаты известной

точки равны $(2;-1)$ (рис. 2.5). Можем составить урав-

нение: $y - (-1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2)$, раскроем скобки и перенесем все слагаемые влево: $\frac{1}{\sqrt{3}}x + y + 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = 0$ или $\underline{x + \sqrt{3}y + \sqrt{3} + 2 = 0}$, это и есть искомое общее уравнение прямой.

Пример 2.3. Найти угол между прямыми l_1 и l_2 , заданными уравнениями: а) $l_1 : x + y + 1 = 0$, $l_2 : 2x - y + 3 = 0$; б) $l_1 : 6x - 2y + 1 = 0$, $l_2 : 3x - y - 8 = 0$; в) $l_1 : 2x - y + 3 = 0$, $l_2 : \frac{1}{2}x + y - 1 = 0$.

Решение. Известно, что $\widehat{\angle(l_1, l_2)} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}$, где k_1, k_2 – угловые коэффициенты l_1 и l_2 соответственно.

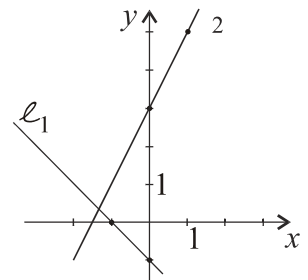


Рис. 2.6

а) Прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями (рис. 2.6), выразим y через x , узнаем угловые коэффициенты: $x + y + 1 = 0 \Rightarrow y = -x - 1$, т. е. $k_1 = -1$; $2x - y + 3 = 0 \Rightarrow y = 2x + 3$, т. е. $k_2 = 2$. Подставим полу-

ченные коэффициенты: $\widehat{\angle(l_1, l_2)} = \frac{-1 - 2}{1 + (-1) \cdot 2} = \frac{-3}{-1} = 3$,

значит, искомый угол $\widehat{\angle(l_1, l_2)} = \arctg 3$.

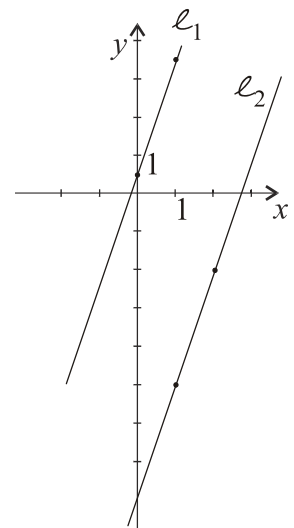


Рис. 2.7

б) Перепишем данные общие уравнения через угловые коэффициенты: $l_1 : 6x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = 3x + \frac{1}{2}$, $k_1 = 3$;

$l_2 : 3x - y - 8 = 0 \Rightarrow y = 3x - 8$, $k_2 = 3$. Подставим коэффици-

циенты: $\widehat{\angle(l_1, l_2)} = \frac{3 - 3}{1 + 3 \cdot 2} = \frac{0}{10} = 0$, значит, искомый угол

$\widehat{\angle(l_1, l_2)} = \arctg 0 = 0^\circ$ (рис. 2.7).

Если угловые коэффициенты прямых равны, то такие прямые параллельны.

в) Уравнения с угловыми коэффициентами для $l_1 : y = 2x + 3$, для $l_2 : y = -\frac{1}{2}x + 1$. Тогда

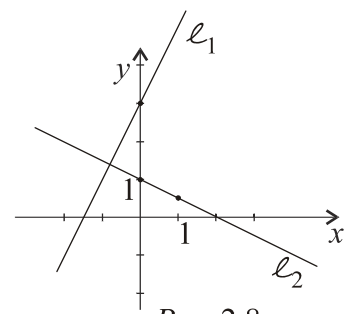


Рис. 2.8

$$\operatorname{tg}(\hat{l}_1, \hat{l}_2) = \frac{2 - (-1/2)}{1 + 2 \cdot (-1/2)} = \frac{3/2}{0} \text{ не существует, следовательно, } \underline{\hat{l}_1, \hat{l}_2 = 90^\circ}$$

(рис. 2.8). Если $k_1 = -\frac{1}{k_2}$, то прямые перпендикулярны.

Пример 2.4. Составить общее уравнение прямой, проходящей через точки $A(3; -1)$ и $B(-1; 2)$.

Решение. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки

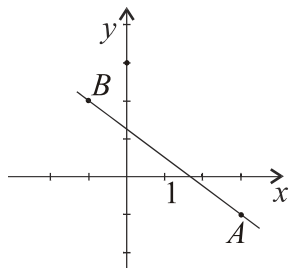


Рис. 2.9

$A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ имеет вид: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. В нашем

случае (рис. 2.9) имеем: $\frac{x - 3}{-1 - 3} = \frac{y - (-1)}{2 - (-1)}$, $\frac{x - 3}{-4} = \frac{y + 1}{3}$. Вос-

пользуемся свойством пропорции: $(x - 3) \cdot 3 = (y + 1) \cdot (-4) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3x - 9 = -4y - 4 \Rightarrow \underline{3x + 4y - 5 = 0}.$$

Пример 2.5. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси Oy отрезок длины 3 и образующей с прямой $3x - y + 1 = 0$ угол в 45° .

Решение. Для того чтобы составить уравнение искомой прямой, надо найти точку, лежащую на ней, и направление, тогда можно будет воспользоваться уравнением $y - y_0 = k(x - x_0)$.

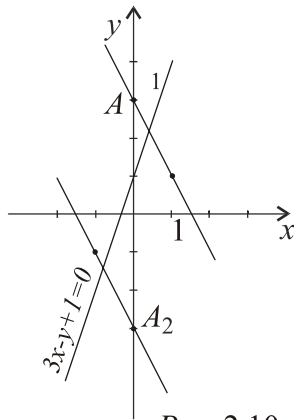


Рис. 2.10

Искомая прямая образует угол в 45° с прямой $y = 3x + 1$, значит, можно воспользоваться формулой для нахождения угла между прямыми. Получим

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{k - 3}{1 + 3k}, \text{ т. е. } \frac{k - 3}{1 + 3k} = 1 \Rightarrow k - 3 = 3k + 1 \Rightarrow k = -2.$$

Известно, что искомая прямая отсекает на оси Oy отрезок длины 3, т. е. она проходит (рис. 2.10) либо через точку $A_1(0; 3)$, либо через точку $A_2(0; -3)$. В первом случае уравнение будет иметь вид $y - 3 = -2(x - 0)$, т. е.

$y = -2x + 3$, а во втором $y + 3 = -2(x - 0)$, т. е. $y = -2x - 3$.

Ответ: $y = -2x \pm 3$.

Пример 2.6. Составить уравнение стороны AB , медианы BM и высоты CH треугольника ABC , если $A(0; -1)$, $B(3; 2)$, $C(-2; 5)$.

Решение. Составим уравнение стороны AB , как уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(0;-1)$ и $B(3;2)$: $\frac{x-0}{3-0} = \frac{y-(-1)}{2-(-1)}$, $\frac{x}{3} = \frac{y+1}{3}$, $x = y+1$. Уравнение стороны AB : $x-y-1=0$.

По определению медианы BM точка M есть середина стороны AC , т. е. ее координаты есть среднее арифметическое координат вершин A и C .

$M\left(\frac{0-2}{2}; \frac{-1+5}{2}\right) \Rightarrow M(-1;2)$. Тогда уравнение медианы BM имеет вид:

$\frac{x-3}{-1-3} = \frac{y-2}{2-2} \Rightarrow \frac{x-3}{-4} = \frac{y-2}{0}$. Если знаменатель одной из частей уравнения равен нулю, то это означает, что и числитель равен нулю, т. е. уравнение медианы BM : $y-2=0$. Действительно, на рис. 2.11 видно, что медиана BM параллельна оси абсцисс.

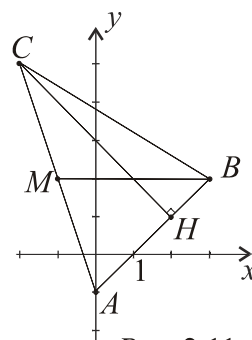


Рис. 2.11

По определению высота CH перпендикулярна стороне AB , т. е. угловые коэффициенты этих прямых в произведении дают -1 . Угловой коэффициент AB равен 1 , следовательно, угловой коэффициент высоты CH равен -1 . Запишем уравнение CH как уравнение прямой, проходящей через точку $C(-2;5)$ с угловым коэффициентом -1 : $y-5 = -1 \cdot (x-(-2))$. Таким образом, $x+y-3=0$ – уравнение высоты CH треугольника ABC .

2.2. Плоскость в пространстве

Плоскость в пространстве (рис. 2.12) однозначно определяется точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и вектором нормали $\vec{n}(A, B, C)$. Уравнение плоскости с нормалью $\vec{n}(A, B, C)$, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, имеет вид: $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$.

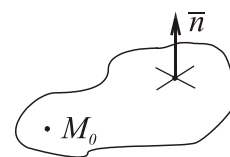


Рис. 2.12

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые можно получить *общее уравнение плоскости в пространстве*: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Пример 2.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;2;3)$ перпендикулярно вектору \overline{AM} , где $A(-1;2;1)$.

Решение. Для того чтобы составить уравнение плоскости надо узнать координаты вектора нормали, в качестве которой (по условию) рассмотрим

вектор \overline{AM} . Для нахождения координат вектора \overline{AM} из координат конца

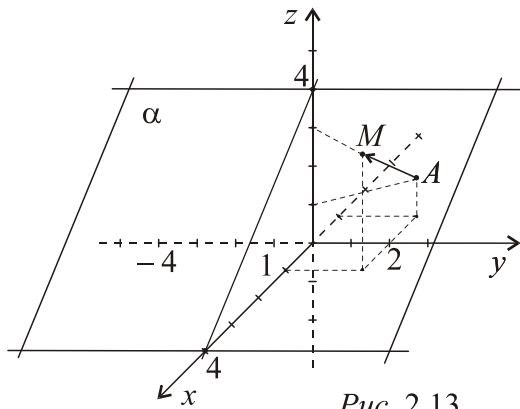


Рис. 2.13

вектора вычтем координаты его начала:

$\overline{AM}(1-(-1); 2-2; 3-1)$ или $\overline{AM}(2; 0; 2)$.

Подставим данные в уравнение плоскости, заданное точкой и вектором нормали:

$$2 \cdot (x-1) + 0 \cdot (y-2) + 2 \cdot (z-3) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x + 2z - 8 = 0$. Искомое общее уравнение плоскости: $x + z - 4 = 0$. На рис. 2.13

видно, что плоскость заданная таким уравнением параллельна оси Oy .

Пример 2.8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0;1;-1)$ и содержащей векторы $\overline{a}(2; 0; 2)$ и $\overline{b}(-1; 3; 8)$.

Решение. Из схематического рисунка 2.14 видно, что вектором нормали плоскости может служить любой вектор, перпендикулярный одновременно и вектору \overline{a} , и вектору \overline{b} . Таким вектором может служить векторное произведение $\overline{a} \times \overline{b}$. Вычислим его:

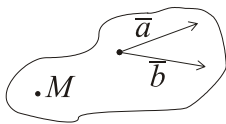


Рис. 2.14

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 6\bar{k} - 2\bar{j} - 6\bar{i} - 16\bar{j} = -6\bar{i} - 18\bar{j} + 6\bar{k}.$$

Будем рассматривать в качестве вектора нормали вектор $\overline{n}(-6, -18, 6)$. Составим уравнение плоскости: $-6(x-0) - 18(y-1) + 6(z-(-1)) = 0$. Упростив, получим искомое уравнение: $-x - 3y + z + 8 = 0$.

Пример 2.9. Составить уравнение плоскости, содержащей точки $M_1(2;-1;1)$, $M_2(3;0;-1)$ и $M_3(-3;1;-2)$.

Решение. Из схематического рисунка 2.15 видно, что произвольная точка $M(x; y; z)$ лежит в плоскости, определяемой точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, если векторы $\overline{MM_1}$, $\overline{M_2M_1}$, $\overline{M_3M_1}$ ком-

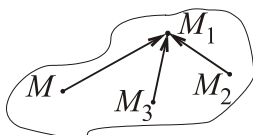


Рис. 2.15

планарны, т. е. их смешанное произведение равно нулю.

Следовательно, уравнение плоскости, проходящей через три данные точки имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

В наших условиях: $\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 3-2 & 0+1 & -1-1 \\ -3-2 & 1+1 & -2-1 \end{vmatrix} = 0$. Найдем определитель левой

части уравнения: $-3(x-2) + 2(z-1) + 10(y+1) + 5(z-1) + 4(x-2) + 3(y+1) = (x-2) + 13(y+1) + 7(z-1) = x + 13y + 7z + 4$.

Таким образом, искомое уравнение имеет вид: $x + 13y + 7z + 4 = 0$.

Пример 2.10. Найти угол между плоскостями α_1 и α_2 , если они заданы следующими уравнениями: а) $\alpha_1 : 3x - y + z - 1 = 0$, $\alpha_2 : y + 3z + 1 = 0$; б) $\alpha_1 : 2x + 4y - 2z + 3 = 0$, $\alpha_2 : 3x + 6y - 3z - 1 = 0$; в) $\alpha_1 : -x + y - 3z + 2 = 0$, $\alpha_2 : 3x + 6y + z - 7 = 0$.

Решение. Угол между плоскостями численно равен углу между нормальными к этим плоскостям, таким образом, $\cos(\alpha_1, \alpha_2) = \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

а) Так как в общем уравнении плоскости коэффициенты при неизвестных – координаты вектора нормали плоскости, то $\vec{n}_1(3; -1; 1)$, $\vec{n}_2(0; 1; 3)$. Значит, $\cos(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{3 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{9+1+1} \cdot \sqrt{1+9}} = \frac{2}{\sqrt{110}} = \frac{\sqrt{110}}{55}$ и $(\alpha_1, \alpha_2) = \arccos \frac{\sqrt{110}}{55}$.

б) В этом случае векторы нормалей: $\vec{n}_1(2; 4; -2)$, $\vec{n}_2(3; 6; -3)$. Тогда $\cos(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{6 + 24 + 6}{\sqrt{4+16+4} \cdot \sqrt{9+36+9}} = \frac{36}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{54}} = \frac{36}{2\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{6}} = \frac{36}{6(\sqrt{6})^2} = 1$ и $(\alpha_1, \alpha_2) = \arccos 1 = 0^\circ$, следовательно, плоскости параллельны.

Для того чтобы плоскости были параллельны необходимо и достаточно, чтобы их нормали были коллинеарны, т. е. иметь пропорциональные координаты. Действительно, в задаче координаты нормалей соотносятся: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{-2}{-3}$, значит, $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, и плоскости параллельны.

в) В этом случае векторы нормалей: $\vec{n}_1(-1; 1; -3)$, $\vec{n}_2(3; 6; 1)$. Тогда $\cos(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{-3 + 6 - 3}{\sqrt{1+1+9} \cdot \sqrt{9+36+1}} = \frac{0}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{46}} = 0$ и $(\alpha_1, \alpha_2) = \arccos 0 = 90^\circ$, следовательно, плоскости перпендикулярны.

Плоскости перпендикулярны, если перпендикулярны их векторы нормали, т.е. их скалярное произведение равно нулю. Действительно, в нашем слу-

чае $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 6 + (-3) \cdot 1 = -3 + 6 - 3 = 0$, значит, $\overline{n_1} \perp \overline{n_2}$, и плоскости перпендикулярны.

2.3. Прямая в пространстве

Прямая в пространстве может быть задана, как пересечение двух плоскостей (*общее уравнение прямой в пространстве*):
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Так же, однозначно определяют прямую точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющий вектор $\vec{l}(m, n, p)$, в этом случае говорят о *каноническом уравнении прямой*:
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Пример 2.11. Составить каноническое и общее уравнения прямых, проходящих через точку $M_0(-1; 2; 4)$ параллельно: а) вектору $\vec{a}(3; 2; 1)$; б) вектору $\vec{b}(0; -1; 3)$; в) оси Ox .

Решение:

а) Пусть прямая l_1 проходит через точку $M_0(-1; 2; 4)$ параллельно вектору $\vec{a}(3; 2; 1)$ (рис. 2.16), тогда каноническое уравнение l_1 имеет вид:
$$\frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 4}{1}.$$
 Каноническое уравнение прямой представляет собой два

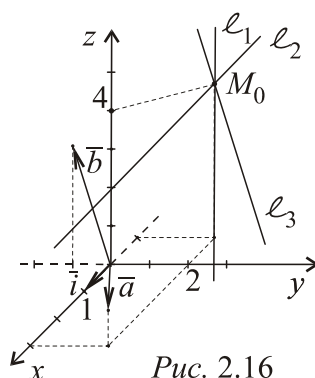


Рис. 2.16

равенства, запишем их, объединив системой:

$$\begin{cases} \frac{x + 1}{3} = \frac{y - 2}{2}, \\ \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 4}{1}. \end{cases} \quad \text{Упростим уравнения в этой системе,}$$

используя свойства пропорции:
$$\begin{cases} 2(x + 1) = 3(y - 2), \\ y - 2 = 2(z - 4). \end{cases}$$

Получим общее уравнение l_1 :
$$\begin{cases} 2x - 3y + 8 = 0, \\ y - 2z + 10 = 0. \end{cases} \quad \text{Причем,}$$

каждое уравнение этой системы задает плоскость, содержащую прямую l_1 .

б) Пусть прямая l_2 проходит через точку $M_0(-1; 2; 4)$ параллельно вектору $\vec{b}(0; -1; 3)$ (рис. 2.16), тогда каноническое уравнение l_2 имеет вид:
$$\frac{x + 1}{0} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 4}{3}.$$
 Ноль в знаменателе канонического уравнения прямой

означает, что числитель тоже равен нулю, то есть $x + 1 = 0$, и у всех точек пря-

мой l_2 абсцисса одинакова, $x = -1$. Таким образом, получено уравнение одной плоскости, в которой лежит l_2 : $x + 1 = 0$. Преобразуем равенство $\frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$ и получим уравнение второй плоскости, содержащей l_2 : $3(y-2) = (-1) \cdot (z-4) \Rightarrow 3y + z - 10 = 0$. Общее уравнение l_2 :
$$\begin{cases} x + 1 = 0, \\ 3y + z - 10 = 0. \end{cases}$$

б) Пусть прямая l_3 проходит через точку $M_0(-1; 2; 4)$ параллельно оси Ox (рис. 2.16), тогда она параллельна орту \vec{i} , то есть $l_3 \parallel (1; 0; 0)$. Каноническое уравнение l_3 имеет вид:
$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{0}.$$

Нули знаменателя в каноническом уравнении прямой означают, что числители тоже равны нулю, то есть у всех точек прямой l_3 : $y = 2, z = 4$. Плоскость $y = 2$ — это плоскость, параллельная координатной плоскости Oxz и отстоящая от нее на 2 единицы, а $z = 4$ — это плоскость, параллельная координатной плоскости Oxy и отстоящая от нее на 4 единицы. Таким образом, прямая может быть задана пересечением плоскостей $y = 2$ и $z = 4$, и общее уравнение l_3 :
$$\begin{cases} y - 2 = 0, \\ z - 4 = 0. \end{cases}$$

Пример 2.12. Составить параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2; 3; -1)$ и $M_2(1; -1; 3)$.

Решение. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки в общем виде записывается: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Для наших данных:

$$\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-3}{-1-3} = \frac{z+1}{3+1}, \quad \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{4}.$$

Обозначим все части равенства через t и выразим через него неиз-

вестные:
$$\begin{cases} \frac{x-2}{-1} = t, \\ \frac{y-3}{-4} = t, \\ \frac{z+1}{4} = t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2 = -t, \\ y-3 = -4t, \\ z+1 = 4t. \end{cases}$$

Тогда
$$\begin{cases} x = -t + 2, \\ y = -4t + 3, \\ z = 4t - 1 \end{cases}$$
 — параметрическое уравнение прямой M_1M_2 .

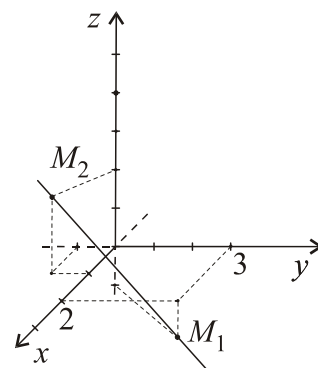


Рис. 2.17

В общем виде *параметрическое уравнение прямой в пространстве* записывается:
$$\begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = nt + y_0, \\ z = pt + z_0, \end{cases}$$
 где (m, n, p) – координаты направляющего вектора прямой, а (x_0, y_0, z_0) – координаты точки, лежащей на прямой.

Пример 2.13. Найти угол между прямыми $l_1: \begin{cases} x - y + 3z = 0, \\ 2x + y - z + 7 = 0 \end{cases}$ и $l_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

Решение. Угол между прямыми в пространстве численно равен углу между их направляющими векторами. То есть для нахождения угла между прямыми l_1 и l_2 , надо найти их направляющие векторы. Направляющий вектор прямой l_2 можно сразу записать из ее канонического уравнения: $\overline{l_2}(-1; 4; 5)$.

Направляющий вектор прямой l_1 должен быть параллелен самой прямой, а, следовательно, обеим плоскостям из общего ее уравнения. Вектор параллелен плоскости, если перпендикулярен вектору нормали этой плоскости, координаты вектора нормали – коэффициенты при неизвестных в уравнении плоскости. Значит, $\overline{l_1} \perp \overline{n_1}(1; -1; 3)$ и $\overline{l_1} \perp \overline{n_2}(2; 1; -1)$. Так как $\overline{l_1}$ перпендикулярен двум векторам, то в его качестве мы можем рассмотреть векторное произведение $\overline{n_1} \times \overline{n_2}$.

$$\overline{l_1} = \overline{n_1} \times \overline{n_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\overline{i} + \overline{k} + 6\overline{j} - (-2\overline{k} + 3\overline{i} - \overline{j}) = -4\overline{i} + 7\overline{j} + 3\overline{k}.$$

Теперь направляющие векторы обеих прямых нам известны – $\overline{l_1}(-4; 7; 3)$, $\overline{l_2}(-1; 4; 5)$, и можно вычислить угол между ними:

$$\cos(\overline{l_1}, \overline{l_2}) = \frac{\overline{l_1} \cdot \overline{l_2}}{|\overline{l_1}| \cdot |\overline{l_2}|} = \frac{4 + 28 + 15}{\sqrt{16 + 49 + 9} \cdot \sqrt{1 + 16 + 25}} = \frac{43}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{42}} = \frac{43}{2\sqrt{777}}, \text{ а так}$$

как $\cos(\overline{l_1}, \overline{l_2}) = \cos(\widehat{l_1, l_2})$, то $\widehat{l_1, l_2} = \arccos \frac{43}{2\sqrt{777}}$.

Пример 2.14. Записать каноническое уравнение прямой, заданной общим уравнением:
$$\begin{cases} x - y + 2z - 2 = 0, \\ -2x - 3y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Для того чтобы записать каноническое уравнение прямой необходимо знать направляющий вектор этой прямой и точку, через которую она проходит.

В качестве направляющего вектора прямой рассмотрим векторное произведение нормалей $\vec{n}_1(1; -1; 2)$ и $\vec{n}_2(-2; -3; 1)$ плоскостей из данного общего

уравнения: $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 5\vec{j} - 5\vec{k}.$

Для того чтобы найти точку, лежащую на данной прямой, надо рассмотреть какое-либо простое значение одной из переменных и решить систему общего уравнения, подставив это значение. Например, пусть $z = 0$, тогда дан-

ное общее уравнение примет вид $\begin{cases} x - y - 2 = 0, \\ -2x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$ То есть точка с

координатами $(1; -1; 0)$ принадлежит данной прямой. Следовательно, иско-

мое каноническое уравнение имеет вид: $\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-0}{-5}$ или

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-1}.$$

2.4. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

Пусть прямая l задана каноническим уравнением $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$, плоскость α общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$.

Рассмотрим всевозможные варианты расположения прямой и плоскости в пространстве.

Прямая l и плоскость α параллельны, если направляющий вектор $\vec{l}(m, n, p)$ и нормаль $\vec{n}(A, B, C)$ перпендикулярны (рис. 2.18), то есть их скалярное произведение равно нулю $Am + Bn + Cp = 0$. Прямая l лежит в плоскости α , если

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

Прямая l и плоскость α перпендикулярны, если направляющий вектор $\vec{l}(m, n, p)$ и нормаль $\vec{n}(A, B, C)$ коллинеарны

(рис. 2.19), то есть их координаты пропорциональны $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$

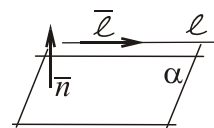


Рис. 2.18

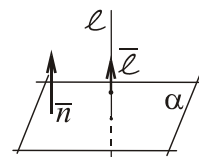


Рис. 2.19

Две прямые в пространстве могут лежать в одной плоскости (либо пересекаются, либо параллельны) или не лежать в одной плоскости (прямые скрещиваются).

Пример 2.15. Выяснить, лежат ли в одной плоскости прямые $l_1: \begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = t + 1, \\ z = -t + 2 \end{cases}$ и $l_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = z$.

Решение. Прямые лежат в одной плоскости, если их направляющие векторы и вектор, соединяющий точки на этих прямых, компланарны (их смешанное произведение равно нулю).

Выпишем из уравнений l_1 и l_2 координаты направляющих векторов \vec{l}_1 , \vec{l}_2 и точек $M_1 \in l_1$, $M_2 \in l_2$. Прямая l_1 задана параметрически, поэтому координаты \vec{l}_1 – это коэффициенты при параметре t , а координаты точки M_1 – свободные члены, то есть $\vec{l}_1(3; 1; -1)$, $M_1(-2; 1; 2)$. Прямая l_2 задана канонически, поэтому координаты \vec{l}_2 – знаменатели отношений, а координаты точки M_2 – свободные члены числителей с минусом, то есть $\vec{l}_2(2; -1; 1)$, $M_2(1; -1; 0)$.

Координаты вектора $\vec{M_1M_2}$ есть разности координат M_2 и M_1 , то есть $\vec{M_1M_2}(3; -2; -2)$. Найдем смешанное произведение векторов \vec{l}_1 , \vec{l}_2 , $\vec{M_1M_2}$:

$$\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 \cdot \vec{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 6 + 4 + 3 - 3 + 6 + 4 = 20 \neq 0.$$

Смешанное произведение векторов \vec{l}_1 , \vec{l}_2 , $\vec{M_1M_2}$ не ноль, следовательно, эти векторы не компланарны, и прямые не лежат в одной плоскости.

Пример 2.16. Найти взаимное расположение прямой l и плоскости α , если: а) $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-7}{1}$, $\alpha: 2x - y + 3z - 10 = 0$;

б) $l: \frac{x}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$, $\alpha: -x + 2y - z + 4 = 0$;

в) $l: \frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-8}$, $\alpha: 3x + y - 4z + 53 = 0$;

г) $l: \frac{x+1}{7} = \frac{y-7}{3} = \frac{z+1}{5}$, $\alpha: -x + 2y + z - 2 = 0$.

Решение:

а) Проверим, являются ли прямая l и плоскость α параллельными, вычислим для этого скалярное произведение направляющего вектора $\vec{l}(2; 7; 1)$ и нормали $\vec{n}(2; -1; 3)$: $\vec{l} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 0$. Видим, что $\vec{l} \perp \vec{n}$, следовательно, $l \parallel \alpha$ или $l \subset \alpha$. Проверим, лежит ли прямая l в плоскости α , подставив координаты точки $M_0(1; -3; 7)$ в уравнение плоскости: $2 \cdot 1 - (-3) + 3 \cdot 7 - 10 = 0 \Rightarrow 16 = 0$. Мы получили неверное равенство, следовательно, $M_0 \notin \alpha$ и $l \not\subset \alpha$. Таким образом, $l \parallel \alpha$.

б) В этом случае $\vec{n}(-1; 2; -1)$, $\vec{l}(3; 1; -1)$, $M_0(0; -1; 2)$. Проверим, перпендикулярны ли векторы \vec{n} и \vec{l} : $\vec{l} \cdot \vec{n} = (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 0$. Так как $\vec{l} \perp \vec{n}$, следовательно, $l \parallel \alpha$ или $l \subset \alpha$. Подставим координаты точки M_0 в уравнение плоскости α : $-0 + 2 \cdot (-1) - 2 + 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$. Полученное верное равенство говорит о том, что $M_0 \in \alpha$, следовательно, $l \subset \alpha$.

в) В этом случае $\vec{n}(3; 1; -4)$, $\vec{l}(6; 2; -8)$, $M_0(2; -3; 1)$. Проверим, чему равно скалярное произведение векторов \vec{n} и \vec{l} : $\vec{l} \cdot \vec{n} = 18 + 2 + 32 = 52 \neq 0$, то есть векторы \vec{n} и \vec{l} не перпендикулярны. Следовательно, прямая l не может ни лежать в плоскости α , ни быть ей параллельной. Проверая, коллинеарны ли векторы \vec{n} и \vec{l} , видим, что $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{-4}{-8}$ (их координаты пропорциональны), то есть $\vec{l} \parallel \vec{n}$. Значит, $l \perp \alpha$.

Можно найти точку пересечения прямой l и плоскости α , решив совместно их уравнения: $\begin{cases} \frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{-8}, \\ 3x + y - 4z + 53 = 0. \end{cases}$ Для упрощения решения введем па-

раметр в уравнении прямой (перейдем к параметрическому уравнению):

$$\begin{cases} \frac{x-2}{6} = t, \\ \frac{y+3}{2} = t, \\ \frac{z-1}{-8} = t, \\ 3x + y - 4z + 53 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6t + 2, \\ y = 2t - 3, \\ z = -8t + 1, \\ 3(6t + 2) + (2t - 3) - 4(-8t + 1) + 53 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4, \\ y = -5, \\ z = 9, \\ t = -1. \end{cases}$$

Получили, что точка $N(-4; -5; 9)$ является общей для прямой l и плоскости α , следовательно, $l \cap \alpha = N(-4; -5; 9)$.

г) В этом случае $\bar{n}(-1; 2; 1)$, $\bar{l}(7; 3; 5)$, $M_0(-1; 7; -1)$. Так как $\bar{l} \cdot \bar{n} = -7 + 6 + 5 = 4 \neq 0$, то прямая l не может ни лежать в плоскости α , ни быть ей параллельной. Координаты \bar{n} и \bar{l} не пропорциональны: $\frac{-1}{7} \neq \frac{2}{3} \neq \frac{1}{5}$, то есть прямая l не перпендикулярна плоскости α . Так как исчерпаны все другие возможности, то остается только один вариант – прямая l и плоскость α пересекаются. Найдем точку их пересечения, решив совместно уравнения:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{7} = \frac{y-7}{3} = \frac{z+1}{5}, \\ -x+2y+z-2=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7t-1, \\ y=3t+7, \\ z=5t-1, \\ -(7t-1)+2(3t+7)+(5t-1)-2=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-22, \\ y=-2, \\ z=-16, \\ t=-3. \end{cases}$$

Получили, что точка $K(-22; -2; -16)$ является общей для прямой l и плоскости α , следовательно, $l \cap \alpha = K(-22; -2; -16)$.

Пример 2.17. Найти расстояние d от точки $N(2; -1; 0)$ до плоскости $\alpha: 3x + y - z + 1 = 0$.

Решение. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. В

нашем случае $d = \frac{|3 \cdot 2 + (-1) - (-1) + 1|}{\sqrt{9+1+1}} = \frac{7}{\sqrt{11}}$.

Ответ: $d = \frac{7}{\sqrt{11}}$.

Пример 2.18. Найти расстояние от точки $K(2; -1; 6)$ до прямой

$$l: x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}.$$

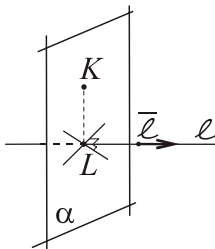


Рис. 2.20

Решение. Рассмотрим плоскость α , перпендикулярную прямой l и проходящую через точку K . Нормалью этой плоскости будет являться направляющий вектор $\bar{l}(1; 2; 3)$ прямой (рис. 2.20). Уравнение плоскости α имеет вид: $1 \cdot (x-2) + 2(y+1) + 3(z-6) = 0$, то есть $x + 2y + 3z - 18 = 0$.

Пусть точка L – точка пересечения прямой l и плоскости α (рис. 2.20).
Найдем ее координаты, решив совместно уравнения прямой l и плоскости α :

$$\begin{cases} x = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}, \\ x+2y+3z-18=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t, \\ y=2t-1, \\ z=3t+2, \\ t+2(2t-1)+3(3t+2)-18=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=1, \\ z=5, \\ t=1. \end{cases}$$

Итак, $L(1; 1; 5)$.

Расстояние между точками K и L является искомым расстоянием между точкой K и прямой l . $KL = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$.

Ответ: $\sqrt{21}$.

В методических указаниях разобраны только основные типы задач, которые используются в контрольных заданиях первого семестра обучения на открытом факультете СПбГЭТУ «ЛЭТИ» по темам векторная алгебра и аналитическая геометрия.

Содержание

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА	3
1. Координаты точки на плоскости и в пространстве.....	3
1.2. Векторы в прямоугольной декартовой системе координат	7
1.3. Умножение вектора на число	9
1.4. Сумма векторов	10
1.5. Скалярное произведение векторов	11
1.6. Векторное произведение векторов	14
1.7. Смешанное произведение векторов	16
2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ	17
2.1. Прямая на плоскости.....	17
2.2. Плоскость в пространстве	21
2.3. Прямая в пространстве	24
2.4. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве	27

Редактор

Подписано в печать

Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 2.0.

Гарнитура «Times». Тираж 250 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

197376, С.-Петербург, Проф. Попова, 5