Содержание

1 Элементы линейной алгебры

1.1 Комплексные числа

1.1.1 Определение

Комплексное число - это число, которое может быть выражено в форме $a + bi$

- a и b - *вещественные числа*
- i - *мнимая единица*, которая удовлетворяет равенство $i^2 = -1$.

1.1.2 Различные формы представления

1. Алгебраическая

   z - это комплексное число.

   $z = x + iy\ x, y \in \mathbb{R}$

   (a) Части комплексного числа

      i. Вещественная $x = \Re(z)$

      ii. Мнимая $y = \operatorname{Im} z$

   (b) Мнимая единица $i^2 = -1$
   $\sqrt{-1} = i$
   $\sqrt{-1} = -i$

   (c) Пример возведения i в различные степени $i^1 = i$
   $i^2 = -1$
   $i^3 = i^2 \times i = (-1) \times i = -i$
   $i^4 = i^3 \times i = -i \times i = -i^2 = 1$
   $i^5 = i^4 \times i = 1 \times i = i$

      i. Обобщение результата

$$i^n = \begin{cases} 1, n = 4k, k \in \mathbb{Z} \\ i, n = 4k+1, k \in \mathbb{Z} \\ -1, n = 4k+2, k \in \mathbb{Z} \\ -i, n = 4k+3, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \tag{1}$$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме производятся по правилам действия над многочленами относительно величины i, при этом важно помнить, что $i^2 = -1$.

(d) Пример 1
   i. Дано (5 + 3i) + (-2 - i)
   ii. Задание Выполнить действия
   iii. Решение
      A. $5 + 3i - 2 - 1i$
      B. $(5 - 2) + (3 - 1)i$
      C. $3 + 2i$
   iv. Ответ $3 + 2i$

(e) Пример 2
   i. Дано $2(3 + 4i) + (5 - 3i)(1 + 2i)$
   ii. Задание Выполнить действия
   iii. Решение
      A. Раскрываем скобки, пользуясь правилами действий над многочленами:
      B. $2 \times 3 + 2 \times 4i + 5 \times 1 + 5 \times 2i - 3i \times 1 - 3i \times 2i$
      C. Учитывая то, что $i \times i = i^2 = -1$
      D. $6 + 8i + 5 + 10i - 3i + 6$
      E. $6 + 5 + 6 + (8 + 10 - 3)i$
      F. $17 + 15i$

(f) **TODO** Дополнение **Сумма и произведение** *комплексных чисел* могут быть вычислены непосредственным суммированием и перемножением таких выражений, как обычно раскрывая скобки и приводя подобные, чтобы представить результат тоже в стандартной форме (при этом надо учесть, что $i^2 = -1$):
   i. Сумма $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i\,(b + d)$;
   ii. Произведение $(a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac + iad + ibc - bd = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$.

2. **TODO** Тригонометрическая

   Если вещественную x и мнимую y части комплексного числа выразить через модуль $r = |z|$ и аргумент φ (то есть $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$), то всякое комплексное число z, кроме нуля, можно записать в *тригонометрической форме*:

   $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

3. **TODO** Показательная

   Применяя *формулу Эйлера* к тригонометрической форме, получим показательную форму комплексного числа:

   $z = re^{i\varphi}$,

   где $e^{i\varphi}$ - это расширение *экспоненты* для случая комплексного показателя степени.

   Отсюда вытекают следующие широко используемые равенства:

   - $\cos\varphi = \frac{\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)}{2}$
   - $\sin\varphi = \frac{\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)}{2i}$

1.1.3 TODO Действия над ними

1.1.4 TODO [5. Гл.VI]