Федеральное агентство по образованию

Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет «ЛЭТИ»

Методы вычисления пределов

Методические указания
к решению задач

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2008

УДК 517

Методы вычисления пределов: Методические указания к решению задач / Сост.: Ю. В. Крашенинникова, М. Н. Абрамова. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2008. 32 с.

Содержат определения, формулировки основных теорем и примеры решения задач различными методами по теме «Предел функции».

Предназначены для студентов-заочников всех специальностей.

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве методических указаний

© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2008

Настоящее издание призвано помочь студентам-заочникам младших курсов самостоятельно научиться решать задачи по теме «Предел функции». Как правило, освоение этого раздела математического анализа вызывает затруднения у студентов. Поэтому первая часть методических указаний посвящена подробному обсуждению понятия «предел функции» и основных правил предельного перехода, причем все определения предела сопровождаются геометрической иллюстрацией. Во второй части указаний рассматриваются методы вычисления некоторых типов пределов.

Данные методические указания, хотя и содержат теоретический материал, не призваны служить полной заменой учебника по теме «Предел функции», поэтому составители рекомендуют параллельно работать с учебным пособием «Конспект лекций по высшей математике» Д. Т. Письменного [1].

1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

1.1. Окрестность точки

Пусть x_0 – действительное число. Обозначение: $x_0 \in \mathbb{R}$.

Определение. Окрестностью точки x_0 радиуса ε (ε-окрестностью) называется интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Если точка x попадает в ε-окрестность точки x_0, т. е. $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, то выполнено неравенство $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ или $-\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon$. Последнее двойное неравенство равносильно неравенству $|x - x_0| < \varepsilon$, *геометрический смысл* которого состоит в том, что расстояние между точками x и x_0 меньше чем ε (рис. 1.1).

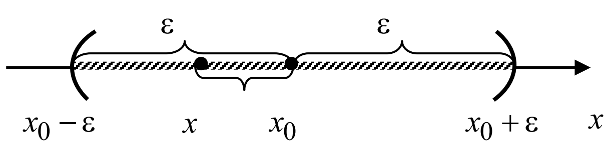


Рис. 1.1

Окрестность без точки x_0 называется проколотой окрестностью. Она задается неравенством $0 < |x - x_0| < \varepsilon$, причем $x \neq x_0$.

В дальнейшем рассматривается поведение функций не только в окрестности точки x_0, но и на бесконечности. Символы $+\infty$, $-\infty$ используются для обозначения процесса неограниченного удаления точек числовой оси от нуля вправо и влево соответственно. Иногда символ бесконечности употребляют без уточнения знака.

Определение. Окрестностью $+\infty$ называется бесконечный интервал $(M,+\infty)$, а окрестностью $-\infty$ – интервал $(-\infty,-M)$, где $M>0$.

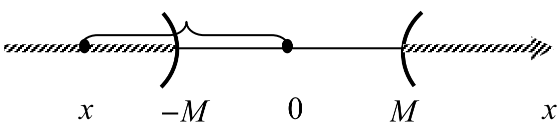


Рис. 1.2

Если точка x принадлежит окрестности $+\infty$, то выполнено неравенство $x>M$, если же точка x попадает в окрестность $-\infty$, то для нее справедливо неравенство $x<-M$. Объединение лучей $(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$ будем рассматривать как окрестность ∞ (об операциях над множествами см. в [1, с. 97]). Совокупность описывающих это множество неравенств $\left[\begin{array}{l} x<-M \\ x>M \end{array}\right.$ можно заменить одним неравенством $|x|>M$, означающим, что расстояние от точки x до точки 0 больше чем M (рис. 1.2).

1.2. Предел функции в точке. Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0\in\mathbb{R}$, кроме, быть может, самой точки x_0 (о функции см. в [1, с. 100]).

Определение предела функции на «языке $\varepsilon-\delta$» см. в [1, с. 112]. Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. Запишем это определение коротко:

$$\big(\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \forall x:\ 0<|x_0-x|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\big)\ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

Квантор всеобщности $\forall$ читается: «для всех». Квантор существования $\exists$ заменяет слово «существует». Запись $C\Rightarrow D$ означает, что «из C следует D». А $C\Leftrightarrow D$ указывает на эквивалентность высказываний C и D, т. е. «из C следует D и из D следует C».

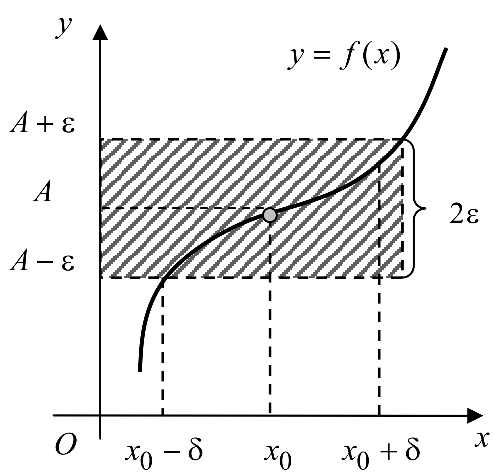


Рис. 1.3

Геометрический смысл предела функции поможет понять рис. 1.3. Для любой ε-окрестности точки A (ось OY) найдется такая δ-окрестность точки x_0 (ось OX), что для всех точек этой окрестности, кроме, быть может, x_0, соответствующие значения функции $y = f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A. Иначе говоря, точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$. Величина δ зависит от выбора ε, поэтому пишут $\delta(\varepsilon)$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если на рис. 1.3 устранить разрыв функции в точке x_0, положив $A = f(x_0)$, то функция $y = f(x)$ окажется непрерывной в этой точке.

1.3. Предел функции на бесконечности

Пусть функция $y = f(x)$ определена на всей числовой оси. Определение предела функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ см. в [1, с. 114].

Обозначение: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Запишем определение предела функции коротко:

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists M(\varepsilon) > 0\ \forall x:\ |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right) \Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

.

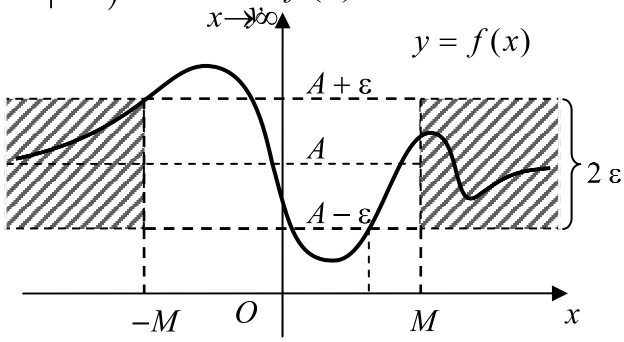


Рис. 1.4

Геометрический смысл этого определения: для любой ε-окрестности точки A (рис. 1.4) найдется такая окрестность бесконечно удаленной точки $(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$ (ось OX), что для всех точек этой окрестности соответствующие значения функции $y = f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A, т. е. точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$.

Если рассматривается поведение функции при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$, то пишут $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ и, соответственно, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

1.4. Бесконечно большая и бесконечно малая функции

Пусть $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$. Определение бесконечно большой функции при $x \to x_0$ см. в [1, с. 114].

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$. Запишем определение коротко:

$$\big(\forall M > 0\ \exists \delta(M) > 0\ \forall x:\ 0 < |x_0 - x| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M\big) \ \Leftrightarrow\ \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty .$$

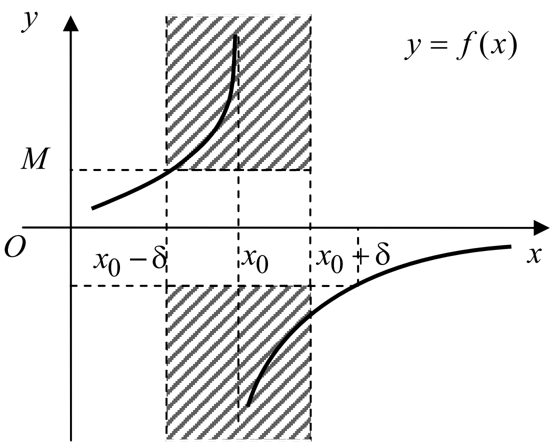


Рис. 1.5

Геометрический смысл определения: для любой окрестности бесконечно удаленной точки $(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$ найдется такая δ-окрестность точки x_0, что для всех точек этой окрестности, кроме точки x_0, соответствующие значения функции $y = f(x)$ лежат в окрестности ∞, т. е. точки графика лежат выше прямой $y = M$ и ниже прямой $y = -M$ (рис. 1.5).

Если функция $y = f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to x_0$, принимая только положительные значения, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, а если, принимая лишь отрицательные значения, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на всей числовой оси. Определение бесконечно большой функции при $x \to \infty$ см. в [1, с. 114].

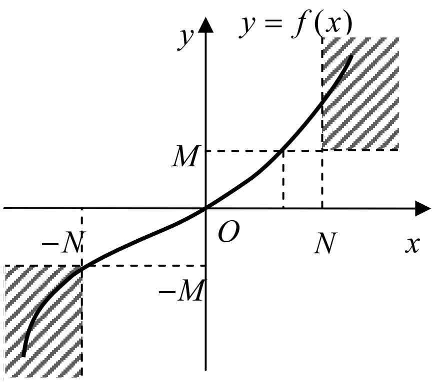


Рис. 1.6

Обозначение: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Коротко:

$$\big(\forall M > 0\ \exists N(M) > 0\ \forall x:\ |x| > N \Rightarrow |f(x)| > M\big) \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Геометрический смысл определения: для любой окрестности $(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$ бесконечно удаленной точки оси OY найдется такая окрестность $(-\infty, -N) \cup (N, +\infty)$ бесконечно удаленной точки оси OX, что как только точка попадает в эту окрестность, так сразу соответствующие значения функции $y = f(x)$ лежат в окрестности ∞, т. е. точки графика лежат выше прямой $y = M$ и ниже прямой $y = -M$ (рис. 1.6).

Определение [1, с. 115]. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$ (включая бесконечность), если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

1.5. Односторонние пределы

В определении предела функции при $x \to x_0$ считается, что x стремится к x_0 любым способом: справа (оставаясь больше x_0), слева (оставаясь меньше x_0) или колеблясь около точки x_0. Часто способ приближения x к x_0 влияет на значение предела функции, поэтому вводят понятие односторонних пределов.

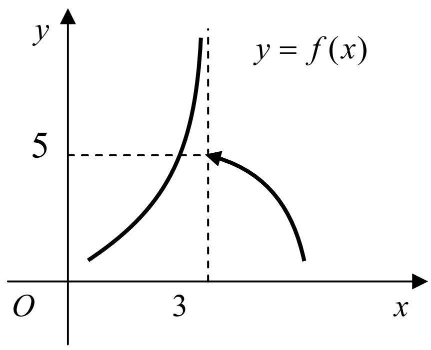


Рис. 1.7

Если x стремится к x_0 справа, то пишут: $x \to x_0 + 0$, если же x стремится к x_0 слева, то пишут: $x \to x_0 - 0$.

Пример 1.1. Найдите односторонние пределы функции, заданной рис. 1.7, при $x \to 3$.

Решение. На рис. 1.7 приведен график функции, для которой $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = +\infty$, а $\lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = 5$.

1.6. Элементарные функции

Рассмотрим поведение основных элементарных функций на примерах.

Постоянная функция $y = c$ и степенная функция $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ непрерывны во всех точках числовой оси (см. 1.2), то есть

$$\lim_{x \to x_0} c = c, \quad \lim_{x \to x_0} x^n = x_0{}^n, \ \forall x_0 \in \mathbb{R}. \qquad (1.1)$$

Пример 1.2. Найдите $\lim\limits_{x \to \pm\infty} x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Решение. При $x \to \pm\infty$ степенная функция является бесконечно большой (см. 1.4), причем ее предел зависит не только от поведения аргумента x, но и от четности или нечетности показателя степени n, так как $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$. Но при этом $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

Значит,

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{bmatrix} +\infty, \text{ åñëè } n - \text{ ÷åòíîå}, \\ -\infty, \text{ åñëè } n - \text{ íå÷åòíîå}; \end{bmatrix} \text{ a } \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty,\ \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (1.2)$$

Функция $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$ определена только при $x \ge 0$, если n — четное число. В остальном ее свойства подобны свойствам функции $y = x^n$.

Тригонометрические функции $y = \cos x$, $y = \sin x$ непрерывны во всех точках $x \in \mathbb{R}$.

Пример 1.3. Найдите $\lim\limits_{x\to 0} \sin x$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x$.

Решение. Так как функция $y = \sin x$ непрерывна при $x \in \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = \underline{0}$. Поэтому при $x \to 0$ функция $y = \sin x$ является бесконечно малой (см. 1.4).

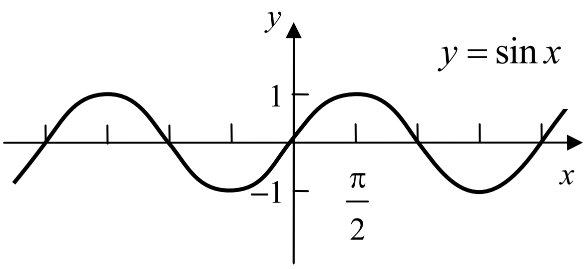


Рис. 1.8

Из рис. 1.8 видно, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$ не существует, так как для любых, сколь угодно больших или сколь угодно малых значений аргумента x данная функция принимает все значения из промежутка $[-1, 1]$.

Аналогичные рассуждения применимы и для функции $y = \cos x$, поэтому $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x$ не существует.

Пример 1.4. Найдите пределы: $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x$ и $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x$.

Решение. Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена и непрерывна во всех точках вещественной оси кроме точек $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 0 = \underline{0}$.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ определена и непрерывна во всех точках вещественной оси кроме точек $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Значит, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{2} = \underline{0}$.

Пример 1.5. Найдите односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}\pm 0}\operatorname{tg} x$ и $\lim\limits_{x\to\pi\pm 0}\operatorname{ctg} x$.

Решение. Функция $y=\operatorname{tg} x$ определена и непрерывна во всех точках вещественной оси, кроме точек $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Из рис. 1.9 видно, что $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg} x=-\infty$, а $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg} x=+\infty$, поэтому в точках разрыва тангенс является бесконечно большой величиной.

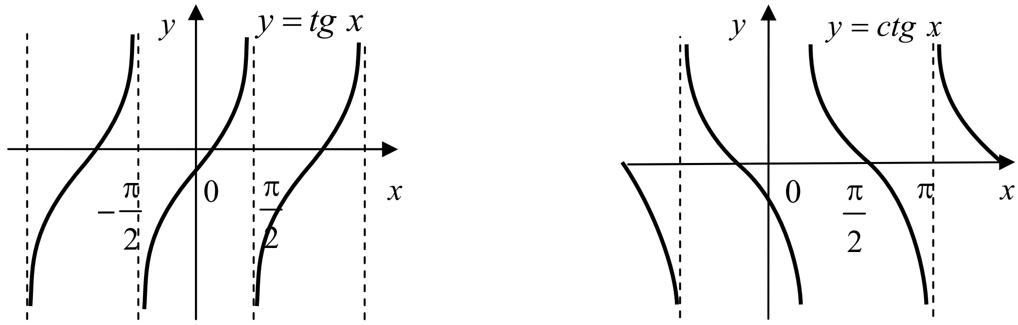


Рис. 1.9

Функция $y=\operatorname{ctg} x$ терпит разрывы в точках $x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. На графике функции (рис. 1.9) $y=\operatorname{ctg} x$ видно, что $\lim\limits_{x\to\pi+0}\operatorname{ctg} x=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to\pi-0}\operatorname{ctg} x=-\infty$.

Пример. 1.6. Найдите $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg} x$.

Решение. Обратная тригонометрическая функция $y=\operatorname{arctg} x$ определена и непрерывна для всех $x\in\mathbb{R}$. Все ее значения попадают в промежуток $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. На графике функции $y=\operatorname{arctg} x$ (рис. 1.10) видно, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x=\dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg} x=-\dfrac{\pi}{2}$.

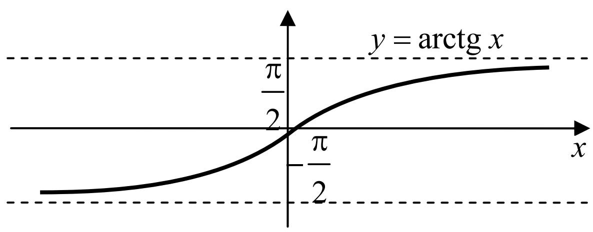


Рис. 1.10

Построив график функции $y=\operatorname{arcctg} x$ можно самостоятельно убедиться в том, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arcctg} x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arcctg} x=\pi$.

Показательная функция $y=a^x,\ a>0,\ a\neq 1$ определена и непрерывна во всех точках вещественной оси (рис. 1.11).

В зависимости от того, какие значения принимает основание a, показательная функция ведет себя на бесконечности по-разному. Если $a>1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$. Если $0<a<1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$.

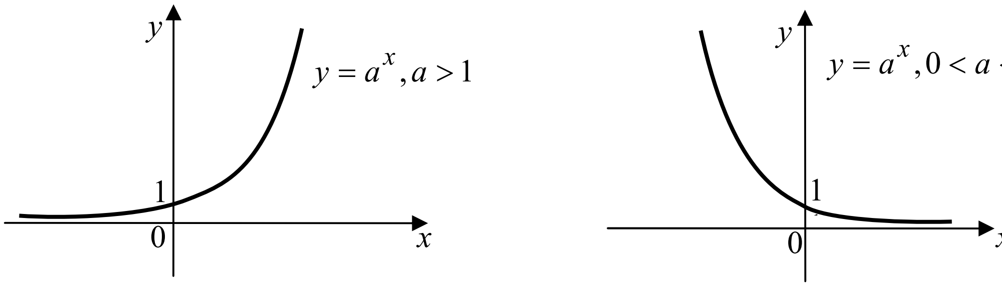
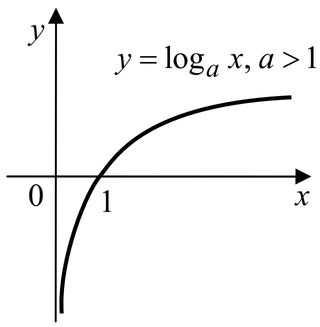


Рис. 1.11

Пример 1.7. Найдите $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

Решение. Так как основание показательной функции равно 3, а 3 > 1, то $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x=+\infty$. Напротив, так как $0<\dfrac{1}{2}<1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$.

Логарифмическая функция $y=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$ непрерывна во всех точках $x>0$. Графики логарифмических функций, соответствующие различным основаниям, представлены на рис 1.12.



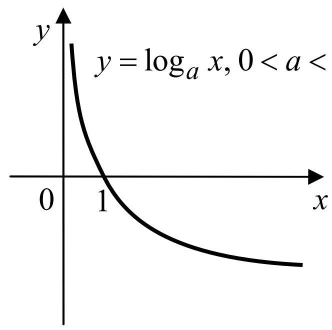


Рис. 1.12

Если $a>1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0+0}\log_a x=-\infty$. В случае если $0<a<1$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to 0+0}\log_a x=+\infty$. Поскольку логарифмическая функция не определена при $x\le 0$, то можно говорить только об одностороннем пределе справа в точке 0 (см. 1.5).

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ

2.1. Правила предельного перехода

Множество $\mathbb{R}$, дополненное двумя бесконечно удаленными точками, называется расширенной числовой осью и обозначается $\widehat{\mathbb{R}}$. $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$. Арифметические операции над бесконечно удаленными точками будем осуществлять по следующим правилам:

1. $A + (\infty) = \infty$, $A \in \mathbb{R}$.
2. $+\infty + (+\infty) = +\infty$.
3. $-\infty + (-\infty) = -\infty$.
4. $A \cdot \infty = \infty$, $A \in \widehat{\mathbb{R}}$, $A \neq 0$.
5. $\dfrac{A}{\infty} = 0$, $A \in \mathbb{R}$.
6. $\dfrac{A}{0} = \infty$, $A \in \widehat{\mathbb{R}}$, $A \neq 0$.

Операции $+\infty - (+\infty)$, $-\infty - (-\infty)$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$ не определены.

Правила 1 и 4 – 6 определены вне зависимости от знака бесконечности.

Пусть $a \in \widehat{\mathbb{R}}$. Если при $x \to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные или бесконечные пределы, а c – некоторая постоянная, то

$$\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x); \tag{2.1}$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x); \tag{2.2}$$

если $g(x) \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}; \tag{2.3}$$

$$\lim_{x\to a} cg(x) = c \lim_{x\to a} g(x). \tag{2.4}$$

Формула (2.4) вытекает из формулы (2.2), если в качестве одного из сомножителей взять постоянную функцию $f(x) = c$. Приведенные формулы известны как теоремы о пределе суммы, произведения и частного.

Замечание. Операцию деления на ноль в правиле 6 нужно воспринимать в смысле предельного перехода, т. е. если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$ и $g(x) \neq 0$, но $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{0} = \infty$.

По формуле (2.3) и в силу правил 5, 6 имеем: если $f(x) \neq 0$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \infty$; обратно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$. Таким образом, функция, обратная к бесконечно малой, является бесконечно большой и наоборот, функция, обратная к бесконечно большой, является бесконечно малой. Например, так как $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty$ (1.2), то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0. \tag{2.5}$$

Рассмотрим композицию функций $f(\varphi(x))$ [1, 104]. Пусть функция $y = \varphi(x)$ имеет конечный или бесконечный предел при $x \to a$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A$, а функция $z = f(y)$ непрерывна в точке A. Тогда верна формула для предела композиции функций

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x\to a} \varphi(x)) = f(A). \tag{2.6}$$

Пример 2.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^4 + 2x^2 - x + 1\right)$.

Решение. Воспользуемся формулам (2.1), (2.4) и непрерывностью постоянной и степенной функций (1.1):

$\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^4 + 2x^2 - x + 1\right) = 3\lim\limits_{x\to 2} x^4 + 2\lim\limits_{x\to 2} x^2 - \lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 1 =$

$= 3\cdot 16 + 2\cdot 4 - 2 + 1 = 55.$

Обобщим полученный результат: предел многочлена при $x \to x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ равен значению многочлена в точке x_0.

Пример 2.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\ln x}$.

Решение. По формуле о пределе частного и правилу 5, получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln x} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x}{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x} = \left[\frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty}\right] = 0.$$

Пример 2.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right)$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Для всех слагаемых, за исключением последнего, имеем:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} a_k x^k = a_k \cdot \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^k = \pm\infty,\ k=1,\ldots,n$. Соотношения $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$, $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ можно использовать для вычисления предела многочлена только, если все слагаемые многочлена стремятся к бесконечности одного и того же знака. В общем случае это не так, потому что знак предела $\lim\limits_{x\to\pm\infty} a_k x^k$ при нечетном k определяется не только знаком a_k, а зависит еще и от знака x (1.2).

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0) =$ [вынесем из каждого слагаемого, в качестве общего множителя, переменную в наивысшей степени n] =

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x^n \left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} x^n \left(\lim_{x\to\pm\infty} a_n + a_{n-1} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} + \ldots + a_1 \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} \right) = [2.5] =$$

$$= \left[\pm\infty \cdot \left(a_n + 0 + \ldots + 0 + 0 \right) = \pm\infty \cdot a_n \right] = [\text{по правилу 4}] = \pm\infty .$$

Итак, любой многочлен, степень которого не меньше 1, является бесконечно большой функцией при $x \to \pm\infty$.

Пример 2.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin(e^x)$.

Решение. Внутренняя показательная функция $y = e^x$ является бесконечно малой при $x \to -\infty$, так как ее основание $e > 1$. Внешняя функция $z = \sin y$ непрерывна в точке 0. По формуле (2.6) имеем:

$$\lim_{x\to-\infty} \sin(e^x) = \sin(\lim_{x\to-\infty} e^x) = \sin 0 = 0 .$$

Пример 2.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1}$.

Решение. Сначала применим к многочлену, стоящему под корнем, прием, рассмотренный в примере 2.3.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2 + 2x - 1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2} \right)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}} =$ [воспользуемся формулой о пределе произведения и учтем, что $\sqrt{x^2} = |x|$] =

$= \lim\limits_{x\to\pm\infty}|x|\cdot \lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}} =$[применим формулу о пределе композиции функций] $= \lim\limits_{x\to\pm\infty}|x|\cdot\sqrt{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \left[+\infty\cdot\sqrt{1}\right] = +\infty$.

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right)$. Согласно результату, полученному в примере 2.5, имеем: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-x\right) = \left[+\infty-(+\infty)\right]$. Однако данная операция над бесконечно удаленными точками не определена. При столкновении с какой-либо из неопределенных ситуаций: $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, принято говорить, что имеет место неопределенность соответствующего типа. Процесс вычисления предела в случае наличия неопределенности принято называть «раскрытием неопределенности». Раскрытию неопределенностей различных типов будет посвящен следующий раздел, в котором вернемся к подобному пределу.

2.2. Предел дробно-рациональной функции

Дробно-рациональной функцией называется частное двух многочленов $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_s x^s + b_{s-1}x^{s-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$, где $a^n \neq 0$, $b_s \neq 0$.

Интерес представляют два типа задач:

1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$. Неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$.

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}$, где x_0 – корень многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ [2, 21]. Неопределенность типа $\frac{0}{0}$.

При вычислении $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}$ могут возникнуть три различные ситуации.

Пример 2.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

Решение. Так как числитель и знаменатель дроби – бесконечно большие функции, то имеем дело с неопределенностью $\frac{\infty}{\infty}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ = [в числителе и знаменателе вынесем за скобки наивысшую степень x] $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^4\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\right)=$ [воспользуемся формулами (2.1) – (2.4)] =

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}=0\cdot\frac{1+0}{1-0+0}=0.$$

Пример 2.7. Вычислить $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^4-5x}{-2x^2-3x+2}$.

Решение. Выполним те же преобразования, что и в примере 2.6 и воспользуемся правилом 4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4-5x}{-2x^2-3x+2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\left(4-\frac{5}{x^3}\right)}{x^2\left(-2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x^2\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4-\frac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\left[+\infty\cdot\frac{4-0}{-2-0+0}=+\infty\cdot(-2)\right]=-\infty.$$

Пример 2.8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^3+x+1}{3x^3+x^2+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3\left(-3+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(-3+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)}=\frac{-3+0+0}{3+0+0}=-1.$$

Обобщим результаты, полученные в примерах 2.2 – 2.8:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0}{b_sx^s+b_{s-1}x^{s-1}+\ldots+b_1x+b_0}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left[\begin{array}{l}0,\ \text{åñëè}\ n<s;\\ \infty,\ \text{åñëè}\ n>s;\\ \dfrac{a_n}{b_s},\ \text{åñëè}\ n=s.\end{array}\right. \qquad (2.7)$$

Пример 2.9. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{x^2+1}$.

Решение. Сначала раскроем скобки и приведем подобные слагаемые в числителе, а затем, сравнив степени многочленов, стоящих в числителе и знаменателе, по формуле (2.7) вычислим предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+3x+1-(x^3-3x^2+3x-1)}{x^2+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+2}{x^2+1}=\frac{6}{1}=6.$$

Обратите внимание, что в ходе преобразования числителя третьи степени неизвестного сокращаются, а значит, числитель есть многочлен второй, а не третьей степени. Если этого не заметить и сразу воспользоваться формулой (2.7), то получится неверный ответ ∞!

При вычислении $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где x_0 – корень многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ также возникают три различные ситуации.

Пример 2.10. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$.

Решение. Найдем значения числителя и знаменателя в точке 1: $P(1)=1-1-1+1=0$, $Q(1)=1-3+2=0$. Значит, многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to 1$. Мы имеем дело с неопределенностью $\frac{0}{0}$. Число 1 является корнем обоих многочленов, следовательно, они делятся на линейный многочлен $(x-1)$, который и порождает неопределенность. Разделим числитель и знаменатель дроби на $(x-1)$ «уголком» [2, 19]:

$$
\begin{array}{r|l}
_{-}x^3 - x^2 - x + 1 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - x^2\qquad\quad} & x^2 - 1 \\
_{-}-x+1 & \\
\underline{-x+1} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
_{-}x^3 \qquad - 3x + 2 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - x^2\qquad\qquad} & x^2 + x - 2 \\
_{-}x^2 - 3x + 2 & \\
\underline{x^2 - x\qquad} & \\
_{-}-x+1 & \\
\underline{-x+1} & \\
0 &
\end{array}
$$

Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на $(x-1)$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-1)}{(x-1)(x^2+x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)}{(x^2+x-2)}.$$

Проверим, уничтожило ли данное преобразование неопределенность. ВычислИВ значения многочленов x^2-1 и x^2+x-2 в точке 1, видим, что неопределенность сохранилась. Снова разложим числитель и знаменатель полученной дроби на множители и сократим общий множитель $(x-1)$. Как только неопределенность уходит, можно воспользоваться формулами о пределе частного и суммы функций:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)}{(x^2+x-2)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(x+2)}=\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}.$$

Напомним, что число x_0 называется корнем многочлена кратности k, $k\in\mathbb{N}$, если многочлен делиться нацело на $(x-x_0)^k$, но уже не делится нацело на $(x-x_0)^{k+1}$. Если $k=1$, то говорят, что корень x_0 простой.

В примере 2.10 число $x=1$ является корнем многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ кратности 2.

Пример 2.11. Вычислить $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x+2}{x^3+x^2-x-1}$.

Решение. Проверкой убеждаемся, что $x=-1$ является корнем обоих многочленов, и раскладываем числитель и знаменатель на множители. Сокращение общего множителя $(x+1)$ сразу уничтожает неопределенность:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x+2}{x^3+x^2-x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\left(x^2-x+2\right)}{(x+1)^2(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{\left(x^2-x+2\right)}{(x+1)(x-1)}=$$

$$=\left[\frac{4}{0}\right]=+\infty .$$

Число $x=-1$ является простым корнем числителя и корнем знаменателя кратности 2.

Пример 2.12. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^3-9x}$.

Решение. Рассуждаем так же, как и в предыдущих задачах:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^3-9x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)^2}{x(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)}{x(x+3)}=\left[\frac{0}{18}\right]=0 .$$

Число $x=3$ является корнем числителя кратности 2 и простым корнем знаменателя.

Обобщим результаты, полученные в примерах 2.10 – 2.12: пусть число x_0 является корнем многочлена $P(x)$ кратности p и корнем многочлена $Q(x)$ кратности q, тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[\begin{array}{l}\text{÷èñëó, îòëè÷íîìó îò íóëÿ, åñëè } p=q;\\ \infty,\ \text{åñëè } p<q;\\ 0,\ \text{åñëè } p>q.\end{array}\right.$$

2.3. Предел функций, содержащих иррациональные выражения

Пример 2.13. Вычислить $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-x\right)$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2+4x+5}=+\infty$ (пример 2.5), то исходный предел будет зависеть от того, куда стремится переменная x. Пусть сначала $x\to -\infty$. Тогда по правилу $+\infty+\infty=+\infty$ сразу находим:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-x\right)=\left[+\infty-(-\infty)=+\infty+\infty\right]=+\infty .$$

Если же $x\to+\infty$, то имеет место неопределенность $+\infty-(+\infty)$. Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное к нему $\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)$. Затем в числителе полученной дроби воспользуемся формулой разности квадратов $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$, полагая в ней $a=\sqrt{x^2+4x+5},\ b=x$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+4x+5}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+4x+5\right)-x^2}{\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+5}{\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)}.$$

Числитель и знаменатель последней дроби – бесконечно большие функции, таким образом, переходим от неопределенности $+\infty-(+\infty)$ к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$, которая раскрывается вынесением из числителя и из знаменателя переменной в наивысшей степени:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+5}{\left(\sqrt{x^2+4x+5}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x}\right)}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{\left(x\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x}\right)}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x}\right)}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x}\right)}+1}=\frac{4+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{4}{2}=2.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-x\right)=\left[\begin{array}{l}+\infty,\ x\to-\infty;\\ 2,\ x\to+\infty.\end{array}\right.$

Пример 2.14. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Решение. В данном случае предел числителя и предел знаменателя равны нулю. Домножим числитель и знаменатель на сопряженные выражения:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(x^2+1\right)-1}{\left(x^2+16\right)-16}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{\sqrt{16}+4}{\sqrt{1}+1}=4.$$

Пример 2.15. Вычислить $I=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}}{x-1}$.

Решение. Прием умножения на сопряженное выражение не пригоден для вычисления этого предела. С целью уничтожения иррациональности в числителе воспользуемся формулой $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$. Положим: $a=\sqrt[3]{2x-1}$, $b=\sqrt[3]{3x-2}$. Чтобы получить в числителе разность кубов, надо его умножить на выражение $\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}$. Умножив числитель и знаменатель на эту величину, получим:

$$I=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{3x-2}\right)\left(\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-1)-(3x-2)}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{3x-2}+\sqrt[3]{(3x-2)^2}\right)}=$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-x+1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{3x-2} + \sqrt[3]{(3x-2)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\sqrt[3]{(2x-1)^2} + \sqrt[3]{2x-1}\cdot\sqrt[3]{3x-2} + \sqrt[3]{(3x-2)^2}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1}\cdot\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1^2}} = -\frac{1}{3}.$$

2.4. Замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые функции

При решении практических задач используются замечательные пределы [1, с. 123, 124]:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ – первый замечательный предел;} \qquad (2.8)$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ – второй замечательный предел.} \qquad (2.9)$$

Замечательные пределы позволяют установить ряд полезных предельных соотношений:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x} = 1$; 5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$; 6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$;

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$; 8) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m,\ m > 0$.

Пример 2.16. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$.

Решение. Сначала найдем предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x}$. Для решения предложенной задачи сделаем замену $y = 2x$. Новая переменная $y \to 0$, когда $x \to 0$. Тогда в силу первого замечательного предела имеем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left[y = 2x,\ y \to 0\right] = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Рассуждая аналогичным образом, и учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, находим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x}{3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[y=3x,\ y\to 0\right]=\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg} y}{y}=1.$$

В числителе исходной дроби выделим выражение $\dfrac{\sin 2x}{2x}$, а в знаменателе выражение $\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{3x}$ и применим формулы (2.3), (2.4). Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\dfrac{\sin 2x}{2x}}{3\cdot\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{3x}}=\frac{2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}}{3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{3x}}=\frac{2}{3}.$$

Пусть $y=f(x)$ и $y=g(x)$ есть бесконечно малые функции при $x\to a$, $a\in\widehat{\mathbb{R}}$, т. е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$. Обозначается это так: $f(x)\sim g(x)$.

Используя формулу (2.8) и предельные соотношения $1-8$, составим таблицу важнейших эквивалентных бесконечно малых функций при $x\to 0$.

$\sin x\sim x$	$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$
$tg\ x\sim x$	$\ln(1+x)\sim x$
$\arcsin x\sim x$	$e^x-1\sim x,\ a^x-1\sim x\ln a$
$arctg\ x\sim x$	$(1+x)^m-1\sim mx$

Замечание. В качестве аргумента бесконечно малых функций в таблице эквивалентностей может выступать не только $x\to 0$, но и любая величина $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$.

Поясним сказанное на примерах.

Пример 2.17. Найти бесконечно малые, эквивалентные функциям:

1) $e^{x^2}-1$ при $x\to 0$; 2) $\sin\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty$; 3) $\ln\left(2x^2-x\right)$ при $x\to 1$.

Решение:

1. Выражение $\alpha(x)=x^2\to 0$ при $x\to 0$. Поэтому в роли бесконечно ма-

лого аргумента показательной функции из таблицы эквивалентностей выступает величина x^2. Следовательно, $(e^{x^2}-1)\sim x^2$ при $x\to 0$.

2. Рассматриваемая функция действительно является бесконечно малой: $\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=\sin\left(\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\right)=\sin 0=0$. Выражение $\alpha(x)=\dfrac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$, следовательно: $\sin\dfrac{1}{x}\sim\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty$.

3. Проверкой убеждаемся, что $\lim\limits_{x\to 1}\ln\left(2x^2-x\right)=\ln 1=0$. В аргументе логарифма выделим единицу: $\ln\left(2x^2-x\right)=\ln\left[\left(2x^2-x-1\right)+1\right]$. Выражение $\alpha(x)=(2x^2-x-1)\to 0$ при $x\to 1$. Тогда по таблице эквивалентностей имеем: $\ln\left(2x^2-x\right)\sim 2x^2-x-1$ при $x\to 1$.

Пример 2.18. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln\left(2x^2-x\right)}{\ln\left(2x-x^2\right)}$.

Решение. Подстановкой убеждаемся, что имеет место неопределенность $\dfrac{0}{0}$, для раскрытия которой применим следующее утверждение.

Теорема 2.1. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

И числитель, и знаменатель дроби – бесконечно малые. В примере 2.17 определена бесконечно малая, эквивалентная числителю: $\ln(2x^2-x)\sim 2x^2-x-1$ при $x\to 1$. Рассуждая аналогичным образом, получаем: $\ln(2x-x^2)=\ln\left[(2x-x^2-1)+1\right]\sim 2x-x^2-1$ при $x\to 1$. После замены числителя и знаменателя найденными эквивалентными бесконечно малыми, придем к пределу отношения двух многочленов:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(2x^2-x\right)}{\ln\left(2x-x^2\right)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{2x-x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(x-1\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{-\left(x-1\right)^2}=$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)}{-(x-1)} = \left[\frac{3}{0}\right] = \infty .$$

Замечание. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x}$ (пример 2.16) можно вычислить значительно быстрее, если заменить числитель и знаменатель эквивалентными им бесконечно малыми. Так как $\sin 2x \sim 2x$, а $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$.

Согласно теореме 2.1, замена по таблице эквивалентностей разрешена в частном и произведении бесконечно малых функций, а вот в сумме или разности бесконечно малых функций она не законна. Однако некоторые пределы, содержащие сумму или разность бесконечно малых, можно вычислить, если перед тем, как осуществлять замену эквивалентными, воспользоваться теоремой о пределе суммы.

Пример 2.19. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$.

Решение. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, следующим образом: $\dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \dfrac{e^{x^2} - 1 + 1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$. По таблице эквивалентностей: $(e^{x^2} - 1) \sim x^2$ и $(1 - \cos x) \sim \dfrac{1}{2}x^2$ при $x \to 0$. Тогда, применив теорему о пределе суммы и заменив бесконечно малые эквивалентными уже в отношениях, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Но даже предварительное применение теоремы о пределе суммы или разности не гарантирует уничтожения неопределенности. Например,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x^3} - \frac{\sin x}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x^3} - \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3} =$$

$$=\left[\operatorname{tg} x \sim x,\ \sin x \sim x \text{ ï ðè } x \to 0\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3} - \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} - \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = [\infty - \infty].$$

2.5. Пределы, содержащие тригонометрические функции

При вычислении пределов, содержащих тригонометрические функции, как правило, приходится обращаться к таблице эквивалентностей, предварительно преобразовав выражение с помощью тригонометрических формул.

Пример 2.20. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\arcsin\frac{x^2}{2}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\arcsin\frac{x^2}{2}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\arcsin\frac{x^2}{2}} =$

$$=\left[\sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2},\ \arcsin\frac{x^2}{2} \sim \frac{x^2}{2} \text{ ï ðè } x \to 0\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{4}}{\frac{x^2}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2.21. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

Решение. Вычислить этот предел в 2.4 не удалось. Рассмотрим другой путь рассуждений. С помощью преобразований перейдем в числителе от разности бесконечно малых к произведению бесконечно малых и заменим эквивалентными в произведении.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin x\cos x}{x^3\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x} = \left[\sin x \sim x,\ 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \text{ при } x \to 0\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{2}.$$

В некоторых случаях применение тригонометрических преобразований позволяет раскрыть неопределенность, не обращаясь к таблице эквивалентностей.

Пример 2.22. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$.

Решение. Так как $\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ и $\cos\frac{\pi}{2}=0$, то имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Имеет смысл преобразовать знаменатель по формуле $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$, а потом разложить знаменатель на множители как разность квадратов. После сокращения общего множителя в числителе и знаменателе, неопределенность уйдет:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 2.23. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{tg} x$.

Решение. Известно, что $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg} x=\infty$. Выражение, стоящее под знаком предела, дает неопределенность $0\cdot\infty$ при $x\to\frac{\pi}{2}$. Уничтожить неопределенность только посредством преобразований, как это было сделано примере 2.22, не удастся. Сделаем замену переменной так, чтобы новая переменная стремилась к нулю. Положим $y=x-\frac{\pi}{2}$, $y\to 0$ при $x\to\frac{\pi}{2}$, а $x=y+\frac{\pi}{2}$. Далее воспользуемся формулой приведения $\operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{ctg} y$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x=[0\cdot\infty]=\left[y=x-\frac{\pi}{2},\ y\to 0\right]=\lim_{y\to 0}(-y)\operatorname{tg}\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$= \lim_{y\to 0} y \operatorname{ctg} y = \lim_{y\to 0} \frac{y\cos y}{\sin y} = \left[\sin y \sim y,\ y \to 0\right] = \lim_{y\to 0} \frac{y\cos y}{y} = \lim_{y\to 0} \cos y = 1.$$

Замечание. Предел $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$ также вычисляется путем замены переменной: $y = x - \pi$ и последующим применением формул приведения. Однако было бы ошибкой сразу прибегнуть к таблице эквивалентностей: $\sin 3x \sim 3x$, $\sin 2x \sim 2x$. Дело в том, что аргументы данных функций – $2x$ и $3x$ не являются бесконечно малыми при $x \to \pi$.

2.6. Пределы выражений, содержащих показательную, логарифмическую и степенную функции

Пример 2.24. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 3^{-x}}{x}$.

Решение. Так как $3^0 = 1$, то выражение, стоящее под знаком предела, при $x \to 0$ дает неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Воспользуемся свойствами показательной функции: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ и преобразуем числитель дроби следующим образом: $3^x - 3^{-x} = 3^x - \dfrac{1}{3^x} = \dfrac{3^x \cdot 3^x - 1}{3^x} = \dfrac{3^{2x} - 1}{3^x}$. Тогда

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 3^{-x}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{3^{2x} - 1}{3^x \cdot x} = \left[3^{2x} - 1 \sim 2x\ln 3 \text{ при } x \to 0\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2x\ln 3}{3^x \cdot x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\ln 3}{3^x} = \frac{2\cdot\ln 3}{1} = 2\ln 3.$$

Пример 2.25. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\ln(x+2) - \ln x\right]$.

Решение. В скобках воспользуемся свойством логарифмической функции: $\log_a N_1 - \log_a N_2 = \log_a \dfrac{N_1}{N_2}$ и выделим в аргументе логарифма единицу: $\ln(x+2) - \ln x = \ln\dfrac{x+2}{x} = \ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$ Легко видеть, что $\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) \to \ln 1 = 0$, а выражение $\alpha(x) = \dfrac{2}{x} \to 0$ при $x \to \infty$. По таблице эквивалентностей имеем:

$$\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\sim\frac{2}{x} \text{ при } x\to\infty,\ \lim_{x\to\infty} x\left[\ln(x+2)-\ln x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=\left[\infty\cdot 0\right]=\lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{2}{x}=2.$$

Пример 2.26. Вычислить $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

Решение. Поскольку по определению логарифма $\ln e=1$, надо раскрыть неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Введем новую переменную, так чтобы она стремилась к нулю и сделаем замену в пределе:

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\left[\frac{0}{0}\right]=\left[y=x-e,\ y\to 0 \text{ при } x\to e,\ x=y+e\right]=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+e)-1}{y}=$$

$$=\left[\ln e=1\right]=\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+e)-\ln e}{y}=\left[\ln N_1-\ln N_2=\ln\frac{N_1}{N_2}\right]=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(\frac{y+e}{e}\right)}{y}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(\frac{y}{e}+1\right)}{y}=\left[\ln\left(\frac{y}{e}+1\right)\sim\frac{y}{e} \text{ при } y\to 0\right]=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{y}{e}}{y}=\frac{1}{e}=e^{-1}.$$

Пример 2.27. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$.

*Решение***.** Применим к степенным выражениям соотношение $\sqrt[m]{x^n}=x^{\frac{m}{n}}$ и сделаем в пределе замену $y=x-1$ с целью воспользоваться эквивалентностью $(y+1)^m-1\sim m\cdot y$ при $y\to 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^4}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{4}{3}}-1}{x^{\frac{1}{5}}-1}=\left[y=x-1,\ y\to 0 \text{ ï ðè } x\to 1,\ x=y+1\right]=\lim_{y\to 0}\frac{(y+1)^{\frac{4}{3}}-1}{(y+1)^{\frac{1}{5}}-1}=$$

$$=\left[(y+1)^{\frac{4}{3}}-1\sim\frac{4}{3}y,\ (y+1)^{\frac{1}{5}}-1\sim\frac{1}{5}y \text{ ï ðè } y\to 0\right]=\lim_{y\to 0}\frac{\frac{4}{3}y}{\frac{1}{5}y}=\frac{4\cdot 5}{3}=\frac{20}{3}.$$

2.7. Предел показательно-степенной функции

Напомним, что функция $y=u(x)^{v(x)}$, $u(x)>0$, основание и показатель степени которой являются функциями, зависящими от переменной x, называется показательно-степенной. Пользуясь тождеством $e^{\ln N}=N$ и свойством логарифмической функции $\ln\left(N^n\right)=n\cdot\ln N$, представим показательно-степенную функцию в виде $u(x)^{v(x)}=e^{\ln\, u(x)^{v(x)}}=e^{v(x)\ln\, u(x)}$. В силу непрерывности показательной функции по формуле (2.6) получаем:

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to a} e^{v(x)\ln\, u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x)\ln\, u(x)}, \; a\in\widehat{\mathbb{R}}. \qquad (2.10)$$

Таким образом, нахождение исходного предела сводится к нахождению предела $\lim\limits_{x\to a} v\left(x\right)\cdot\ln u\left(x\right)$. Показательно-степенные выражения в пределе могут порождать три типа неопределенности: 1^{∞}, 0^0, ∞^0. Для раскрытия неопределенности 1^{∞} можно использовать второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$.

Правила вычисления $\lim\limits_{x\to a} u(x)^{v(x)}$**:**

1. Если функции $u\left(x\right)$ и $v\left(x\right)$ имеют при $x\to a$ конечные пределы, то справедливо соотношение

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to a} u(x)^{\lim\limits_{x\to a} v(x)}. \qquad (2.11)$$

2. Во всех остальных случаях рекомендуется перейти к основанию e по формуле (2.10), вычислить предел $\lim\limits_{x\to a} v\left(x\right)\ln u\left(x\right)$ и воспользоваться свойствами показательной функции $y=e^x$.

Пример 2.28. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$.

Решение. Так как основание и показатель степени имеют при $x \to 0$ конечные пределы: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2} = \dfrac{3}{2}$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, то по формуле (2.10) получаем:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \left(\frac{3}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}.$$

Пример 2.29. Вычислить $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^x$.

Решение. Согласно формуле (2.7) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{x-1} = 2$. Пользуясь свойствами показательной функции с основанием, большим единицы: $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0$, окончательно получаем:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x = +\infty \text{ и } \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x = 0.$$

Пример 2.30. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$.

Решение. Найдем пределы основания и показателя степени при $x \to 1$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2};\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1} = \infty.$$

Однако поведение показательной функции на бесконечности существенно зависит от знака бесконечно удаленной точки. Для показательной функции с основанием, меньшим единицы, имеем: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = 0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = +\infty$. Проанализируем поведение функции $\dfrac{1}{x-1}$ при $x \to 1$. Если x стремится к 1 справа, т. е. оставаясь все время больше 1, то разность $x-1$ стремится к нулю, также оставаясь положительной. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{x-1} = +\infty$. При стремлении x к 1 слева x будет меньше 1, а разность

$x-1$ стремится к нулю, оставаясь отрицательной. В этом случае $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$. Тогда предел исходной показательно-степенной функции будет зависеть от того, с какой стороны x приближается к 1:

$$\lim_{x\to 1+0}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{x-1}}=0 \text{ и } \lim_{x\to 1-0}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{x-1}}=+\infty.$$

Пример 2.31. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^x$.

Решение. Неопределенность 1^∞ можно раскрыть, не прибегая к формуле (2.10), а пользуясь вторым замечательным пределом. Воспользуемся свойством показательной функции $\left(a^x\right)^y=a^{x\cdot y}$ и преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{3}}\right]^{\frac{3}{3x-2}\cdot x}.$$

По второму замечательному пределу (2.9) имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{3}}=\left[y=\frac{3}{3x-2},\ y\to 0\right]=\lim_{y\to 0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}}=e.$$

Кроме того, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{3x-2}=1$. Тогда по формуле (2.11) окончательно получаем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{3}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{3x-2}}=e^1=e$$

Список литературы

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: В 2 ч. М.: Айрис Пресс, 2006. Ч. 1.

2. Комплексные числа и многочлены: Методические указания к решению задач / Сост.: М. Н. Абрамова, Е. А. Толкачева, А. И. Куприянов. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2007.

Содержание

Редактор И. Г. Скачек

Подписано в печать Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 2.0.

Гарнитура «Times». Тираж 250 экз. Заказ

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

197376, С.-Петербург, Проф. Попова, 5