

homework4-3

1 差异来源的理论分析

对于 Bell 态 $\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$, 理论上有:

- $\langle Z_0 Z_1 \rangle = 1$ (精确值)
- 测量结果只能是 00 或 11, 且概率均为 50%, 因此每次测量的 $Z_0 Z_1$ 值为 $(-1)^{b_0+b_1} = +1$

但实际采样时, 由于有限测量次数 N , 观测到的 00 和 11 次数可能不完全相等, 导致估计值偏离理论值。

2 误差的标度规律

设 \hat{E}_N 为 N 次采样后的估计值, 则:

- 期望: $\mathbb{E}[\hat{E}_N] = 1$ (无偏估计)
- 方差: 每次测量的 $Z_0 Z_1$ 是随机变量 $X_i \in \{+1\}$ (因为只有 00 和 11), 方差为:

$$\text{Var}(X_i) = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 = 1 - 1 = 0.$$

若电路存在噪声 (如弛豫或门误差), 可能出现 01 或 10, 此时方差非零。假设 $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$, 则:

$$\text{Var}(\hat{E}_N) = \frac{\sigma^2}{N}.$$

- 误差标度: 标准差 (典型误差) 随测量次数 N 的衰减规律为:

$$\text{Error} \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

3 关键结论

- 无噪声理想情况: 对于 Bell 态, 由于 $\text{Var}(X_i) = 0$, 有限次测量也会精确得到 $\hat{E}_N = 1$ (无误差)
- 实际含噪声情况: 若存在噪声 (如 01 或 10 结果), 误差按 $\mathcal{O}(1/\sqrt{N})$ 衰减
- 标度普适性: 此规律适用于任何可观测量估计, 是蒙特卡罗采样的基本性质