НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»
Дисциплина: «Дискретная математика»

Домашнее задание 3

Исследование алгоритмов решения
метрической задачи коммивояжера

Вариант 002

Выполнил: Абрамов Артем,
студент группы БПИ1511

Преподаватель: Авдошин С.М.,
профессор департамента
программной инженерии
факультета компьютерных наук

Москва 2016

1. На плоскости задано множество точек $V = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ своими координатами $(x = 4, y = 1), (x = 4, y = 3), (x = 2, y = 7), (x = 9, y = 6), (x = 10, y = 7), (x = 6, y = 10)$

2. Вычислим элементы d_{ij} весовой матрицы смежности графа $G =< V, V * V >$ по формуле $dij = |xi - xj| + |yi - yj|$

0	3	9	8	11	5
3	0	8	7	8	4
9	8	0	3	8	4
8	7	3	0	11	3
11	8	8	11	0	10
5	4	4	3	10	0

3. Используя метод ветвей и границ, найдем множество кодов всех оптимальных гамильтоновых циклов являющихся решением задачи коммивояжера на графе G. Петли не могут быть частью решения. Поэтому положим диагональные элементы равными бесконечности.

∞	3	9	8	11	5
3	∞	8	7	8	4
9	8	∞	3	8	4
8	7	3	∞	11	3
11	8	8	11	∞	10
5	4	4	3	10	∞

Обозначим через $S = \{p : V \to V\}(p(l) = l)\&(\forall j \subset V)(\forall j \subset V)((p(i) = p(j)) \Longrightarrow (i = j))$ множество кодов всех гамильтоновых циклов $v = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_1)$ графа G, заданного весовой матрицей смежности D. Здесь p_i используется в качестве сокращенной записи $p(i)$.

Найдем нижнюю границу b множества S

s	1	2	3	4	5	6	min α
1	∞	3	9	8	11	5	3
2	3	∞	8	7	8	4	3
3	9	8	∞	3	8	4	3
4	8	7	3	∞	11	3	3
5	11	8	8	11	∞	10	8
6	5	4	4	3	10	∞	3

s	1	2	3	4	5	6
1	∞	0	6	5	8	2
2	0	∞	5	4	5	1
3	6	5	∞	0	5	1
4	5	4	0	∞	8	0
5	3	0	0	3	∞	2
6	2	1	1	0	7	∞
min β	0	0	0	0	5	0

$b = \alpha + \beta = 28$

Определим дугу ветвления для разбиения множества s

s	1	2	3	4	5	6
1	∞	0	6	5	3	2
2	0	∞	5	4	0	1
3	6	5	∞	0	0	1
4	5	4	0	∞	3	0
5	3	0	0	3	∞	2
6	2	1	1	0	2	∞

(1,2)

s0	1	2	3	4	5	6	min
1	∞	∞	6	5	3	2	2
2	0	∞	5	4	0	1	0
3	6	5	∞	0	0	1	0
4	5	4	0	∞	3	0	0
5	3	0	0	3	∞	2	0
6	2	1	1	0	2	∞	0
min	0	0	0	0	0	0	

s0	1	2	3	4	5	6
1	∞	∞	4	3	1	0
2	0	∞	5	4	0	1
3	6	5	∞	0	0	1
4	5	4	0	∞	3	0
5	3	0	0	3	∞	2
6	2	1	1	0	2	∞

b0 = b + 2 + 0 = 30

s1	1	3	4	5	6	min
2	∞	5	4	0	1	0
3	6	∞	0	0	1	0
4	5	0	∞	3	0	0
5	3	0	3	∞	2	0
6	2	1	0	2	∞	0
min	2	0	0	0	0	

s1	1	3	4	5	6
2	∞	5	4	0	1
3	4	∞	0	0	1
4	3	0	∞	3	0
5	1	0	3	∞	2
6	0	1	0	2	∞

b1 = b + 0 + 2 = 30

Определим дугу ветвления для разбиения множества s1

s1	1	3	4	5	6
2	∞	5	4	0	1
3	4	∞	0	0	1
4	3	0	∞	3	0
5	1	0	3	∞	2
6	0	1	0	2	∞

(2,5)

s10	1	3	4	5	6	min
2	∞	5	4	∞	1	1
3	4	∞	0	0	1	0
4	3	0	∞	3	0	0
5	1	0	3	∞	2	0
6	0	1	0	2	∞	0
min	0	0	0	0	0	

s10	1	3	4	5	6
2	∞	4	3	∞	0
3	4	∞	0	0	1
4	3	0	∞	3	0
5	1	0	3	∞	2
6	0	1	0	2	∞

b10 = b1 + 1 + 0 = 31

s11	1	3	4	6	min
3	4	∞	0	1	0
4	3	0	∞	0	0
5	∞	0	3	2	0
6	0	1	0	∞	0
min	0	0	0	0	

s11	1	3	4	6
3	4	∞	0	1
4	3	0	∞	0
5	∞	0	3	2
6	0	1	0	∞

b11 = b1 + 0 + 0 = 30

Определим дугу ветвления для разбиения множества s0

s0	1	2	3	4	5	6
1	∞	∞	4	3	1	0
2	0	∞	5	4	0	1
3	6	5	∞	0	0	1
4	5	4	0	∞	3	0
5	3	0	0	3	∞	2
6	2	1	1	0	2	∞

(2,1)

s00	1	2	3	4	5	6	min
1	∞	∞	4	3	1	0	0
2	∞	∞	5	4	0	1	0
3	6	5	∞	0	0	1	0
4	5	4	0	∞	3	0	0
5	3	0	0	3	∞	2	0
6	2	1	1	0	2	∞	0
min	2	0	0	0	0	0	

s00	1	2	3	4	5	6
1	∞	∞	4	3	1	0
2	∞	∞	5	4	0	1
3	4	5	∞	0	0	1
4	3	4	0	∞	3	0
5	1	0	0	3	∞	2
6	0	1	1	0	2	∞

b00 = b0 + 0 + 2 = 32

s01	2	3	4	5	6	min
1	∞	4	3	1	0	0
3	5	∞	0	0	1	0
4	4	0	∞	3	0	0
5	0	0	3	∞	2	0
6	1	1	0	2	∞	0
min	0	0	0	0	0	

s01	2	3	4	5	6
1	∞	4	3	1	0
3	5	∞	0	0	1
4	4	0	∞	3	0
5	0	0	3	∞	2
6	1	1	0	2	∞

b01 = b0 + 0 + 0 = 30

Определим дугу ветвления для разбиения множества s11

s11	1	3	4	6
3	4	∞	0	1
4	3	0	∞	0
5	∞	0	3	2
6	0	1	0	∞

(6,1)

s110	1	3	4	6	min
3	4	∞	0	1	0
4	3	0	∞	0	0
5	∞	0	3	2	0
6	∞	1	0	∞	0
min	3	0	0	0	

s110	1	3	4	6
3	1	∞	0	1
4	0	0	∞	0
5	∞	0	3	2
6	∞	1	0	∞

b110 = b11 + 0 + 3 = 33

s111	3	4	6	min
3	∞	0	1	0
4	0	∞	0	0
5	0	3	∞	0
min	0	0	0	

s111	3	4	6
3	∞	0	1
4	0	∞	0
5	0	3	∞

b111 = b11 + 0 + 0 = 30

Определим дугу ветвления для разбиения множества s01

s01	2	3	4	5	6
1	∞	4	3	1	0
3	5	∞	0	0	1
4	4	0	∞	3	0
5	0	0	3	∞	2
6	1	1	0	2	∞

(1,6)

s010	2	3	4	5	6	min
1	∞	4	3	1	∞	1
3	5	∞	0	0	1	0
4	4	0	∞	3	0	0
5	0	0	3	∞	2	0
6	1	1	0	2	∞	0
min	0	0	0	0	0	

s010	2	3	4	5	6
1	∞	3	2	0	∞
3	5	∞	0	0	1
4	4	0	∞	3	0
5	0	0	3	∞	2
6	1	1	0	2	∞

b010 = b01 + 1 + 0 = 31

s011	2	3	4	5	min
3	5	∞	0	0	0
4	4	0	∞	3	0
5	0	0	3	∞	0
6	∞	1	0	2	0
min	0	0	0	0	

s011	2	3	4	5
3	5	∞	0	0
4	4	0	∞	3
5	0	0	3	∞
6	∞	1	0	2

b011 = b01 + 0 + 0 = 30

Определим дугу ветвления для разбиения множества s111

s111	3	4	6
3	∞	0	1
4	0	∞	0
5	0	3	∞

(3,4)

s1110	3	4	6	min
3	∞	∞	1	1
4	0	∞	0	0
5	0	3	∞	0
min	0	3	0	

s1110	3	4	6
3	∞	∞	0
4	0	∞	0
5	0	0	∞

b1110 = b111 + 1 + 3 = 34

s1111	3	6
4	∞	0
5	0	∞

b1111 = b111 + 0 + 0 = 30

$v = \{1, 2, 5, 3, 4, 6, 1\}$

Определим дугу ветвления для разбиения множества s011

s011	2	3	4	5
3	5	∞	0	0
4	4	0	∞	3
5	0	0	3	∞
6	∞	1	0	2

(5,2)

s0110	2	3	4	5	min
3	5	∞	0	0	0
4	4	0	∞	3	0
5	∞	0	3	∞	0
6	∞	1	0	2	0
min	4	0	0	0	

s0110	2	3	4	5
3	1	∞	0	0
4	0	0	∞	3
5	∞	0	3	∞
6	∞	1	0	2

b0110 = b011 + 0 + 4 = 34

s0111	3	4	5	min
3	∞	0	0	0
4	0	∞	3	0
6	1	0	∞	0
min	0	0	0	

s0111	3	4	5
3	∞	0	0
4	0	∞	3
6	1	0	∞

b0111 = b011 + 0 + 0 = 30

Определим дугу ветвления для разбиения множества s0111

s0111	3	4	5
3	∞	0	0
4	0	∞	3
6	1	0	∞

(3,5)

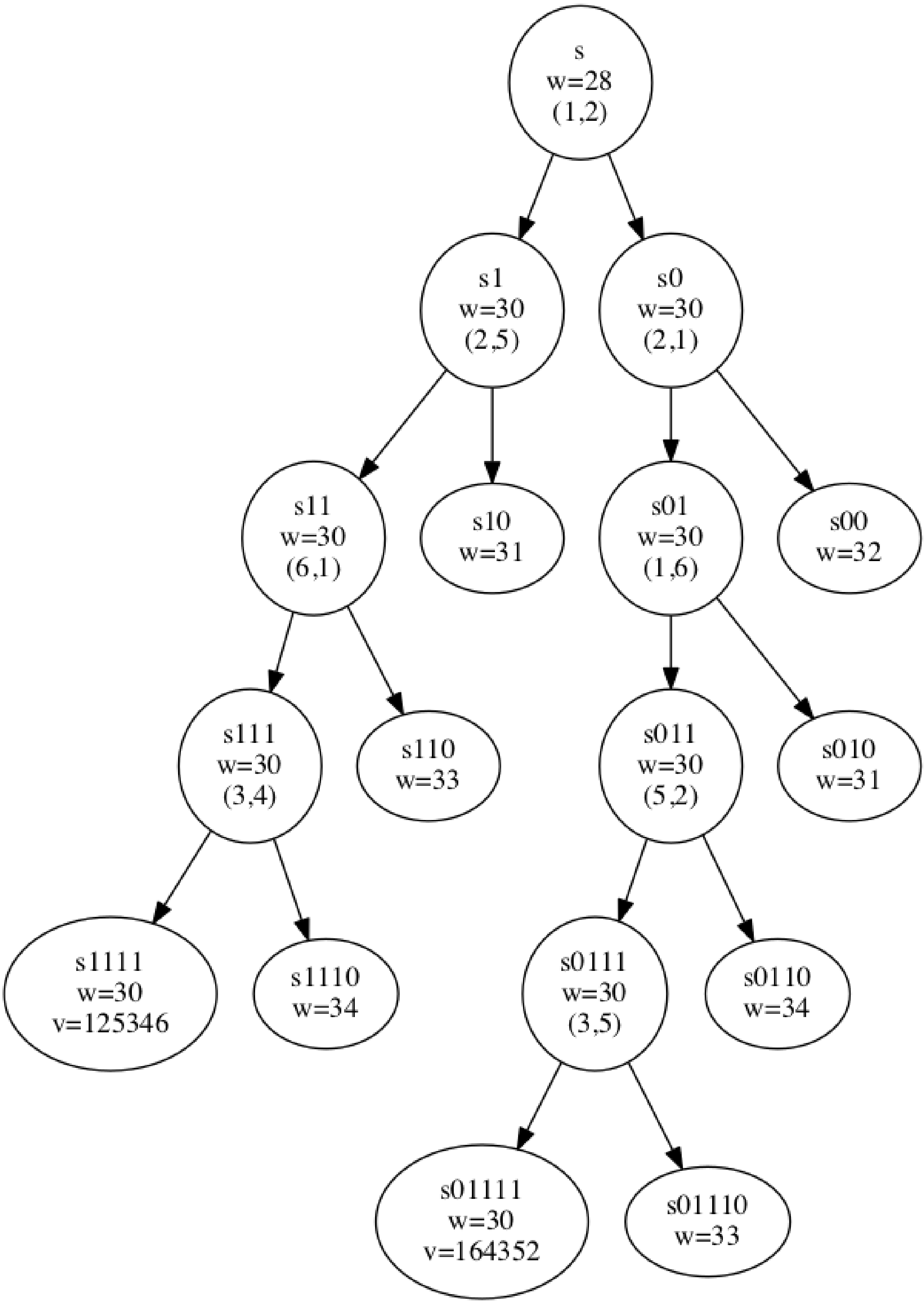
s01110	3	4	5	min
3	∞	0	∞	0
4	0	∞	3	0
6	1	0	∞	0
min	0	0	3	

s01110	3	4	5
3	∞	0	∞
4	0	∞	0
6	1	0	∞

b01110 = b0111 + 0 + 3 = 33

s01111	3	4
4	0	∞
6	∞	0

b01111 = b0111 + 0 + 0 = 30
$v = \{1, 6, 4, 3, 5, 2, 1\}$



Ответ: множество кодов всех оптимальных гамильтоновых циклов являющихся решением задачи коммивояжера на графе G есть $\{1643521, 1253461\}$. Вес f_o оптимального гамильтонова цикла равен 30.

4. Найдем приближенное решение задачи коммивояжера v_1 с помощью первого алгоритма Кристофидеса. Используя весовую матрицу смежности D графа G , построим кратчайшее связывающее дерево T с помощью алгоритма Прима.

∞	3	9	8	11	5
3	∞	8	7	8	4
9	8	∞	3	8	4
8	7	3	∞	11	3
11	8	8	11	∞	10
5	4	4	3	10	∞

9	8	11	5
8	7	8	4
∞	3	8	4
3	∞	11	3
8	11	∞	10
4	3	10	∞

9	8	11
8	7	8
∞	3	8
3	∞	11
8	11	∞
4	3	10

9	11
8	8
∞	8
3	11
8	∞
4	10

11
8
8
11
∞
10

Рассмотрим матрицу смежности графа.

Возьмем реберо (1,2) с наименьшим весом 3 и исключим из таблицы колонки 1, 2. Будем искать наименьшее ребро исходящее из вершин 1 или 2.
Это ребро (2,6) с весом 4. Добавим его в дерево и исключим из таблицы колонку 6. Найдем наименьшее ребро исходящее из вершин 1, 2 или 6.
Это ребро (6,4) с весом 3. Добавим его в дерево и исключим из таблицы колонку 4. Найдем наименьшее ребро исходящее из вершин 1, 2 ,6 или 4.
Это ребро (4,3) с весом 3. Добавим его в дерево и исключим из таблицы колонку 3. Найдем наименьшее ребро исходящее из вершин 1, 2, 6, 4, 3.
Это ребро (2,5) с весом 8. Добавим его в дерево и исключим из таблицы колонку 5.

Следовательно кратчайшее связывающее дерево $E(T) = \{(1,2),(2,6),(6,4),(4,3),(2,5)\}$
Вес дерева $f(T) = \sum_{(i,j)\in E(T)} d_{ij} = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i = 17$

В графе с удвоенным числом ребер дерева
$E(T)||E(T) = \{(1,2),(2,6),(6,4),(4,3),(2,5),(2,1),(6,2),(4,6),(3,4),(5,2)\}$
Построим Эйлеров цикл $\mu = (1,2,5,2,6,4,3,4,6,2,1)$.
Удалим повторения вершин в Эйлеровом цикле для получения приближенного решения $v_1 = (1,2,5,6,4,3,1)$.
Вес полученного гамильтонова цикла равен $f(v_1) = 3 + 8 + 10 + 3 + 3 + 9 = 36$
Вычислим относительную точность полученного решения $\epsilon = \frac{f(v_1)-f(v_0)}{f(v_0)} = \frac{36-30}{30} = 0.2$
Таким образом найдено приближенное решение задачи коммивояжора.

5. Найдем приближенное решение задачи коммивояжора v_2 с помощью второго алгоритма Кристофидеса. Кратчайшее связывающие дерево имеет ребра $E(T) = \{(1,2),(2,6),(6,4),(4,3),(2,5)\}$
В дереве четыре вершины нечетной степени 1,2,5,3.
В оптимальное паросочетание $E(M) = \{(2,1),(5,3)\}$ входит два ребра. Строим Эйлеров цикл в графе со множеством ребер
$E(T)||E(M) = \{(2,1),(5,3),(1,2),(2,6),(6,4),(4,3),(2,5)\}$
Полученный эйлеров цикл является одновременно и гамильтоновым $v_2 = \mu = (1,2,5,3,4,6,1)$
Вес цикла $f(v_2) = 30$.
Относительная точность решения $\epsilon = \frac{f(v_1)-f(v_0)}{f(v_0)} = \frac{30-30}{30} = 0$

Таким образом вторым алгоритмом найдено точное решение.