Контрольная работа №1

1. Даны матрицы A, B и D. Найти $AB-9D$, если:

$$A=\begin{pmatrix}-4 & 7\\ 1 & -1\\ 7 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3 & 9 & 7\\ -1 & -3 & 7\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-6 & -9 & -6\\ 3 & -8 & -3\\ 2 & 2 & 7\end{pmatrix}.$$

Перемножим матрицы $A_{3\times 2}$ и $B_{2\times 3}$. Результирующая будет C размера 3×3, состоящая из элементов

$$C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}.$$

По правилу умножения имеем:

$$c_{11} =< \text{1-я строка } A >< \text{1-й столбец } B >= \begin{pmatrix}-4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ -1\end{pmatrix} =$$

$$= -4\cdot(-3)+7\cdot(-1)=5;$$

$$c_{12} =< \text{1-я строка } A >< \text{2-й столбец } B >= \begin{pmatrix}-4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\\ -3\end{pmatrix} =$$

$$= -4\cdot 9+7\cdot(-3)=-57;$$

$$c_{13} =< \text{1-я строка } A >< \text{3-й столбец } B >= \begin{pmatrix}-4 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 7\end{pmatrix} =$$

$$= -4\cdot 7+7\cdot 7=21;$$

$$c_{21}=1\cdot(-3)+(-1)\cdot(-1)=-2; \qquad c_{31}=7\cdot(-3)+(-3)\cdot(-1)=-18;$$

$$c_{22}=1\cdot 9+(-1)\cdot(-3)=12; \qquad c_{32}=7\cdot 9+(-3)\cdot(-3)=72;$$

$$c_{23}=1\cdot 7+(-1)\cdot 7=0; \qquad c_{33}=7\cdot 7+(-3)\cdot 7=28.$$

Таким образом, получаем: $C=\begin{pmatrix}5 & -57 & 21\\ -2 & 12 & 0\\ -18 & 72 & 28\end{pmatrix}$.

Далее, умножим матрицу D на число 9:

$$9D=9\begin{pmatrix}-6 & -9 & -6\\ 3 & -8 & -3\\ 2 & 2 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-54 & -81 & -54\\ 27 & -72 & -27\\ 18 & 18 & 63\end{pmatrix}.$$

В результате, имеем:

$$AB-9D=\begin{pmatrix} 5 & -57 & 21 \\ -2 & 12 & 0 \\ -18 & 72 & 28 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -54 & -81 & -54 \\ 27 & -72 & -27 \\ 18 & 18 & 63 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 5-(-54) & -57-(-81) & 21-(-54) \\ -2-27 & 12-(-72) & 0-(-27) \\ -18-18 & 72-18 & 28-63 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 59 & 24 & 75 \\ -29 & 84 & 27 \\ -36 & 54 & -35 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему уравнений: а) по формулам Крамера; б) матричным способом; в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1- \ x_2+ \ x_3=0, \\ -3x_1+5x_2- \ x_3=1, \\ -5x_1+5x_2-2x_3=1. \end{cases}$$

а) По формулам Крамера

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -5 & 5 & -2 \end{vmatrix}=\left|\begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -5 & 5 & -2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \\ -5 & 5 \end{matrix}=$$

$$=2\cdot 5\cdot(-2)+(-1)\cdot(-1)\cdot(-5)+1\cdot(-3)\cdot 5-$$

$$-\Big(1\cdot 5\cdot(-5)+2\cdot(-1)\cdot 5+(-1)\cdot(-3)\cdot(-2)\Big)=1.$$

Последовательно заменив в Δ первый, второй и третий столбцы столбцом из правых частей, получим:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix}=-1,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \end{vmatrix}=2.$$

Находим: $x_1=\frac{-1}{1}=-1$, $x_2=\frac{0}{1}=0$, $x_3=\frac{2}{1}=2$.

б) Для нахождения решения системы матричным способом запишем систему уравнений в матричной форме $AX=B$, где

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -5 & 5 & -2 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения имеет вид $X = A^{-1}B$. Найдем A^{-1}. Имеем $\Delta = \det A = 1 \neq 0$. Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - (-1) \cdot 5 = -5,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -\Big((-3) \cdot (-2) - (-1) \cdot (-5)\Big) = -1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 5 - 5 \cdot (-5) = 10,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = -5, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 7.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 10 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Откуда, решение системы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 10 & -5 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

3. Вычислить определитель: а) получив предварительно нули в строке; б) получив предварительно нули в столбце.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 8 & 7 & -3 & -3 \\ -4 & -2 & 7 & -1 \\ 6 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Вычислим определитель, получив предварительно нули в четвертом столбце.

Умножим первую строку определителя на -3 и прибавим ко второй

$$\begin{array}{rrrr|c} 2 & 1 & -5 & -1 & \times -3 \\ \hline -6 & -3 & 15 & 3 & \\ 8 & 7 & -3 & -3 & + \\ \hline 2 & 4 & 12 & 0 & \end{array} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 12 & 0 \\ -4 & -2 & 7 & -1 \\ 6 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix},$$

затем умножим на -1 и прибавим к третьей

$$\begin{array}{rrrr|c} 2 & 1 & -5 & -1 & \times -1 \\ \hline -2 & -1 & 5 & 1 & \\ -4 & -2 & 7 & -1 & + \\ \hline -6 & -3 & 12 & 0 & \end{array} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 12 & 0 \\ -6 & -3 & 12 & 0 \\ 6 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix},$$

далее, умножим на 2 и прибавим к четвертой

$$\begin{array}{rrrr|c} 2 & 1 & -5 & -1 & \times 2 \\ \hline 4 & 2 & -10 & -2 & \\ 6 & 3 & -5 & 2 & + \\ \hline 10 & 5 & -15 & 0 & \end{array} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 12 & 0 \\ -6 & -3 & 12 & 0 \\ 10 & 5 & -15 & 0 \end{vmatrix}.$$

Тогда в четвертом столбце все элементы, кроме одного, будут нулями. Разложим полученный таким образом определитель по элементам четвертого столбца и вычислим его:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 8 & 7 & -3 & -3 \\ -4 & -2 & 7 & -1 \\ 6 & 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 12 & 0 \\ -6 & -3 & 12 & 0 \\ 10 & 5 & -15 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 12 \\ -6 & -3 & 12 \\ 10 & 5 & -15 \end{vmatrix} = 90.$$

Контрольная работа №2

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, определяются координатами

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$$

Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$

Произведением вектора $\vec{a}$ и числа λ

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$$

Скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi, \quad (\vec{a}, \vec{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Длиной или модулем вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} \left| [\vec{a}, \vec{b}] \right|$$

Смешанное произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \left| (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \right|$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a},\vec{b}) = 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\lambda \ \vec{a} = \lambda\vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{a},\vec{b}] = \vec{0}$$

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ – компланарны} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$$

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ – правая} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) > 0$$

$$\vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ – левая} \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) < 0$$

Уравнения прямой на плоскости:

Параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = a_x t + x_0 \\ y = a_y t + y_0 \end{cases},$$

где $\vec{a} = (a_x; a_y)$ – направляющий вектор прямой, а точка $M(x_0; y_0)$ лежит на прямой.

Каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}$$

Общее уравнением прямой

$$Ax + By + C = 0$$

Вектор $\vec{n} = (A; B)$ перпендикулярен к прямой и называется нормальным вектором прямой, а вектор $\vec{l} = (-B; A)$ – направляющий вектор прямой.

Расстояние ρ от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Пусть прямая проходит через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

Параметрические уравнения прямой

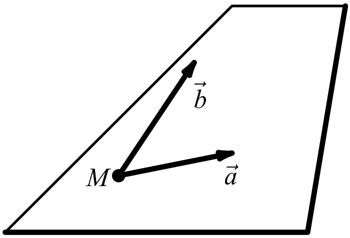
$$\begin{cases} x = a_x t + x_0 \\ y = a_y t + y_0 \\ z = a_z t + z_0 \end{cases}$$

Канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$

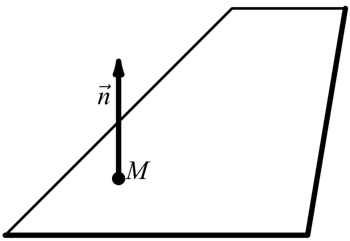
Уравнение плоскости проходящую через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ параллельно двум векторам $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$



Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору. Если плоскость проходит через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярна к вектору $\vec{n} = (A, B, C)$, то ее уравнение записывается в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

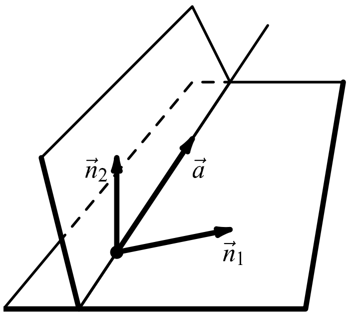


Расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной в прямоугольной системе координат уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, равно

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Направляющий вектор $\vec{a}$ прямой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, & \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0, & \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \end{cases},$$



определяется по формуле

$$\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2].$$

Величина угла ψ между прямой

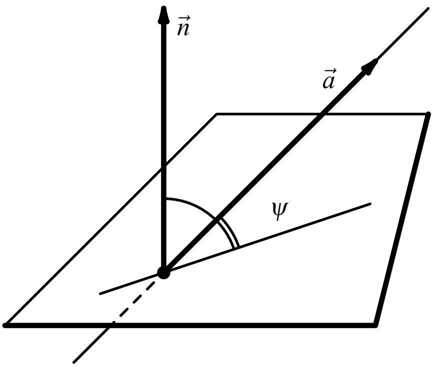
$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}, \quad \vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

и плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \vec{n} = (A, B, C)$$

вычисляется по формуле

$$\sin\psi = \frac{|(\vec{n}, \vec{a})|}{|\vec{n}|\,|\vec{a}|}.$$



Тема: Векторы.

1. (*1*) Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$, если $A(3;6;4)$, $B(2;7;3)$, $C(4;6;5)$.

Решение. $\overrightarrow{AB} = (2-3;7-6;3-4) = (-1;1;-1)$ $\overrightarrow{AC} = (4-3;6-6;5-4) = (1;0;1)$

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -1\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 = -2$$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(1)^2+(0)^2+(1)^2} = \sqrt{2}$. Окончательно получаем $\text{Пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \dfrac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{-2}{\sqrt{2}}$

2. (*1*) Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, где $A(3;6;4)$, $B(2;7;3)$, $C(4;6;5)$.

Решение. Так как $\cos\varphi = \dfrac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}$

$$\overrightarrow{AB} = (-1,1,-1), \quad \overrightarrow{AC} = (1,0,1)$$

Находим:

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -1\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 = -2,$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2+(1)^2+(-1)^2} = \sqrt{3},$$
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(1)^2+(0)^2+(1)^2} = \sqrt{2}.$$

Следовательно, $\cos\varphi = \dfrac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$ и $\varphi = \arccos\left(\dfrac{-2}{\sqrt{2}\sqrt{3}}\right) \approx 2,53$.

3. (*1*) Выяснить, какой является тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (правой или левой), если $\vec{a} = (0;-1;2)$, $\vec{b} = (-2;-1;0)$, $\vec{c} = (-2;-1;-2)$.

Решение. Вычисляем

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

т. е. тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – правая.

4. (*2*) Найти площадь $\triangle ABC$, если известны координаты его вершин: $A(3;6;4)$, $B(2;7;3)$, $C(4;6;5)$.

Решение. Известно, что $S_\triangle = \dfrac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\right|$ Находим: $\overrightarrow{AB} = (2-3;7-6;3-4) = (-1;1;-1)$, $\overrightarrow{AC} = (4-3;6-6;5-4) = (1;0;1)$,

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= \vec{i} - \vec{k} = (1;0;-1)$$

Окончательно имеем:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\sqrt{(1)^2+(0)^2+(-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

5. (*2*) Найти объем пирамиды $ABCD$, если известны координаты ее вершин: $A(3;-7;1)$, $B(2;-8;1)$, $C(2;-8;2)$, $D(4;-7;0)$.

Решение. Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AB}$, совпадающие с ребрами пирамиды, сходящимися в вершине A:

$$\overrightarrow{AB} = (-1;-1;0),$$
$$\overrightarrow{AC} = (-1;-1;1),$$
$$\overrightarrow{AD} = (1;0;-1).$$

Находим смешанное произведение этих векторов:

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

Так как объем пирамиды равен $\dfrac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\right|$, то $V = \dfrac{1}{6}$.

6. (*2*) Показать, что векторы $\vec{a} = (-1;-1;1)$, $\vec{b} = (0;-1;-1)$, $\vec{c} = (-1;1;1)$ образуют базис. Разложить вектор $\vec{d} = (0;5;-1)$ по этому базису.

Решение. Если определитель составленный из координат векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, не равен 0, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно независимы и, следовательно, образуют базис. Убеждаемся, что

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Таким образом, тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – базис.
Обозначим координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ через x, y, z. Тогда $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Следовательно, $x\vec{a} = (-x; -x; x)$, $y\vec{b} = (0; -y; -y)$, $z\vec{c} = (-z; z; z)$ и

$$(0; 5; -1) = (-x - z; -x - y + z; x - y + z),$$

а это возможно только в случае равенства их соответствующих координат. Отсюда получаем систему для нахождения неизвестных x, y, z:

$$\begin{cases} -x - z = 0, \\ -x - y + z = 5, \\ x - y + z = -1. \end{cases}$$

Ее решение: $x = -3$, $y = 1$, $z = 3$. Итак, $\vec{d} = (-3; 1; 3)$.

7. (*2*) Найти вектор $\vec{c}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a} = (1; 1; 1)$ и $\vec{b} = (-3; 6; 6)$ и удовлетворяет условию $(\vec{c}, \vec{d}) = -9$, если вектор $\vec{d} = (0; 1; 0)$.

Решение. Пусть $\vec{c} = (x; y; z)$, тогда

$$(\vec{c}, \vec{a}) = 0, \quad x + y + z = 0,$$

$$(\vec{c}, \vec{b}) = 0, \quad -3x + 6y + 6z = 0,$$

$$(\vec{c}, \vec{d}) = -9, \quad y = -9.$$

Получаем систему для нахождения неизвестных x, y, z. Ее решение: $x = 0$, $y = -9$, $z = 9$.

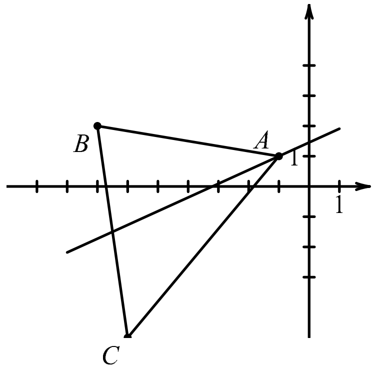
Тема: Прямая на плоскости.

8. (*1*) Найти направляющий вектор прямой $5x + 7y + 2 = 0$. Сделать чертеж.

Решение. Поскольку, $A = 5$, $B = 7$, то

$$\vec{l} = (-7, 5)$$

9. (*1*) В треугольнике ABC найти уравнение медианы, проведенной из вершины A, если $A(-1;1)$, $B(-7;2)$, $C(-6;-5)$. Сделать чертеж.



Решение. $x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{-7+(-6)}{2} = -\dfrac{13}{2}$,

$y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{2+(-5)}{2} = -\dfrac{3}{2}$

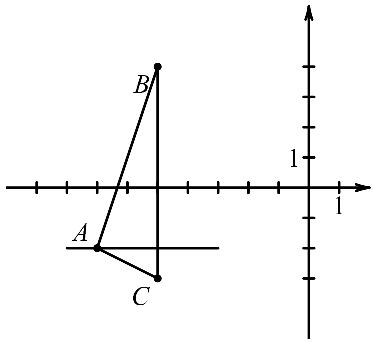
$M(-\dfrac{13}{2}, -\dfrac{3}{2})$

$\overrightarrow{AM} = \left(-\dfrac{13}{2}+1, -\dfrac{3}{2}-1\right) = \left(-\dfrac{11}{2}; -\dfrac{5}{2}\right)$

$\dfrac{x-(-1)}{-\dfrac{11}{2}} = \dfrac{y-1}{-\dfrac{5}{2}}$

$\dfrac{x+1}{11} = \dfrac{y-1}{5}$

10. (*1*) В треугольнике ABC найти уравнение высоты, проведенной из вершины A, если $A(-7;-2)$, $B(-5;4)$, $C(-5;-3)$. Сделать чертеж.



Решение.

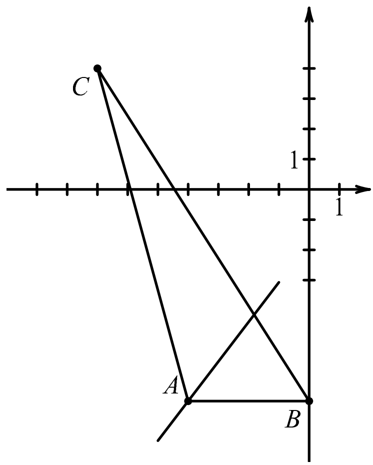
$$\overrightarrow{BC} = (0; -7),$$

$$0 \cdot (x - (-7)) - 7 \cdot (y - (-2)) = 0$$

$$-7 \cdot (y - (-2)) = 0$$

$$y + 2 = 0$$

11. (*2*) В треугольнике ABC найти уравнение биссектрисы, проведенной из вершины A, если $A(-4; -7)$, $B(0; -7)$, $C(-7; 4)$. Сделать чертеж.



Решение.

$$\overrightarrow{AB} = (4; 0), \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$$

$$\overrightarrow{AC} = (-3; 11), \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + (11)^2} = \sqrt{130}$$

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{1}{4}(4; 0) + \frac{1}{\sqrt{130}}(-3; 11) =$$

$$= (1; 0) + \left(\frac{-3}{\sqrt{130}}; \frac{11}{\sqrt{130}}\right) = \left(1 - \frac{3}{\sqrt{130}}; \frac{11}{\sqrt{130}}\right)$$

$$\frac{x - (-4)}{1 - \dfrac{3}{\sqrt{130}}} = \frac{y - (-7)}{\dfrac{11}{\sqrt{130}}}$$

$$\frac{x + 4}{\sqrt{130} - 3} = \frac{y + 7}{11}$$

12. (*1*) Точка $A(3;3)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $-4x-y+5=0$. Вычислить площадь этого квадрата. Сделать чертеж.

Решение.

$$\rho=\frac{|-4\cdot3-1\cdot3+5|}{\sqrt{(-4)^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{17}}$$

$$S_{\square}=\rho^2=\left(\frac{10}{\sqrt{17}}\right)^2=\frac{100}{17}$$

13. (*2*) Найти общее уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно прямой, проходящей через точки A и C, если $A(-5;-7)$, $B(1;2)$, $C(-3;-1)$.

Решение.

$$\overrightarrow{AC}=(2;6)$$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{6},\quad \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3},$$

$$3\cdot(x-1)=1\cdot(y-2),\quad 3x-3=y-2,$$

$$3x-y-1=0$$

Тема: Плоскость в пространстве.

14. (*1*) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(5;-3;6)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n}=(-3;-2;0)$.

Решение.

$$-3\cdot(x-5)-2\cdot(y-(-3))+0\cdot(z-6)=0$$

$$-3x+15-2y-6=0$$

$$-3x-2y+9=0$$

15. (*1*) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(3;-2;4)$ параллельно плоскости $4x-7y+6z+6=0$.

Решение. Нормальный вектор искомой плоскости совпадает с нормальным вектором данной плоскости; следовательно, уравнение искомой плоскости примет вид

$$4(x-3)-7(y+2)+6(z-4)=0,$$

или

$$4x-7y+6z-50=0$$

16. (*2*) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-7;0;4)$ перпендикулярно плоскостям $3x+5y-6z+7=0$ и $-4x-3y-5z+3=0$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} x-(-7) & y-0 & z-4 \\ 3 & 5 & -6 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x+7 & y & z-4 \\ 3 & 5 & -6 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}(x+7) - \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}(z-4) =$$

$$-43(x+7)+39y+11(z-4) = -43x+39y+11z-345$$

$$-43x+39y+11z-345=0$$

17. (*2*) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-5;-4;-2)$ и $B(-4;-2;-4)$ перпендикулярно плоскости $x+5y-5z-4=0$.

Решение.

$$\overrightarrow{AB} = (1;2;-2)$$

$$\begin{vmatrix} x-(-5) & y-(-4) & z-(-2) \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$y+z+6=0.$$

18. (*1*) Определить двугранный угол, образованный пересечением плоскостей $-5x-2y+3z-2=0$ и $-5x+5y+6z-5=0$.

Решение. $\vec{n}_1 = (-5;-2;3)$ $\vec{n}_2 = (-5;5;6)$

$$(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = -5\cdot(-5)+(-2)\cdot 5+3\cdot 6 = 33$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{(-5)^2+(-2)^2+(3)^2} = \sqrt{38}, \quad |\vec{n}_2| = \sqrt{(-5)^2+(5)^2+(6)^2} = \sqrt{86}.$$

$$\cos\varphi = \frac{33}{\sqrt{38}\sqrt{86}},$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{33}{\sqrt{38}\sqrt{86}}\right) \approx 0.95541.$$

19. (*1*) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(7;3;-7)$, $B(7;4;-7)$, $C(7;1;-9)$.

Решение.

$$\overrightarrow{AB}=(0;1;0)$$

$$\overrightarrow{AC}=(0;-2;2)$$

$$\begin{vmatrix} x-7 & y-3 & z-(-7) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$2x-14=0, \quad x-7=0.$$

20. (*2*) Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2;-3;-3)$ и $B(-2;-2;-2)$ параллельно вектору $\vec{d}=(1;0;0)$.

Решение.

$$\overrightarrow{AB}=(0;1;1)$$

$$\begin{vmatrix} x-(-2) & y-(-3) & z-(-3) \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x+2 & y+3 & z+3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}(x+2)-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}(y+3)+\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}(z+3)$$

$$y-z=0.$$

21. (*2*) Вычислить расстояние от точки O до плоскости, проходящей через точки $A(7;3;-7)$, $B(7;4;-7)$, $C(8;1;-9)$.

Решение.

$$\overrightarrow{AB}=(0;1;0)$$

$$\overrightarrow{AC}=(1;-2;2)$$

$$\begin{vmatrix} x-(7) & y-(3) & z-(-7) \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$2x-z-21=0$$

$$\rho=\frac{|2\cdot 0-0-21|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}}=\frac{21}{\sqrt{5}}$$

Тема: Прямая в пространстве.

22. (*1*) Найти направляющий вектор прямой $-7x-4y+2z-2=0,\ 4x-7z-4=0.$

Решение.

$$\vec{n}_1=(-7;-4;2),\quad \vec{n}_2=(4;0;-7)$$

$$\vec{l}=[\vec{n}_1,\vec{n}_1]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -7 & -4 & 2\\ 4 & 0 & -7\end{vmatrix}=28\vec{i}-41\vec{j}+16\vec{k}=(28;-41;16)$$

23. (*1*) Найти угол между прямыми, заданными параметрическими уравнениями: $x=7t+4,\ y=3t+6,\ z=5,\ x=-4t-6,\ y=t-7,\ z=-2t+3.$

Решение.

$$\vec{l}_1=(7;3;0),\quad \vec{l}_2=(-4;1;-2)$$

$$(\vec{l}_1,\vec{l}_2)=7\cdot(-4)+(3)\cdot 1+0\cdot(-2)=-25$$

$$|\vec{l}_1|=\sqrt{(7)^2+(3)^2+(0)^2}=\sqrt{58},\quad |\vec{l}_2|=\sqrt{(-4)^2+(1)^2+(-2)^2}=\sqrt{21}.$$

$$\cos\varphi=\frac{-25}{\sqrt{58}\sqrt{21}}$$

$$\varphi=\arccos\left(\frac{-25}{\sqrt{58}\sqrt{21}}\right)\approx 2.8102.$$

24. (*1*) Составить общие уравнения прямой, проходящей через точки $A(3;1;-6)$ и $B(5;-3;-4)$.

Решение. $\overrightarrow{AB}=(2;-4;2),$

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-(-6)}{2},$$

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+6}{1},$$

$$\begin{cases}\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-2},\\ \dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+6}{1}\end{cases},\quad \begin{cases}-2(x-3)=y-1,\\ y-1=-2(z+6)\end{cases},\quad \begin{cases}-2x-y+7=0,\\ y+2z+11=0\end{cases}$$

25. (*1*) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $C(-3;-4;6)$ параллельно прямой $2x+5y+3z+6=0,\ -7x-5y-6z+6=0.$

Решение.

$$\vec{n}_1 = (2;5;3), \quad \vec{n}_2 = (-7;-5;-6)$$

$$\vec{l} = [\vec{n}_1, \vec{n}_1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 3 \\ -7 & -5 & -6 \end{vmatrix} = (-15, -9, 25)$$

$$\frac{x-(-3)}{-15} = \frac{y-(-4)}{-9} = \frac{z-(6)}{25}$$

$$\frac{x+3}{-15} = \frac{y+4}{-9} = \frac{z-6}{25}$$

26. (*1*) Доказать, что две прямые $x-2y-3z+1=0$, $-2x+y+7z-2=0$ и $x=-t+2$, $y=-t+1$, $z=4t+1$ перпендикулярны.

Решение.

$$\vec{n}_1 = (1;-2;-3), \quad \vec{n}_2 = (-2;1;7)$$

$$\vec{l}_1 = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = (-11;-1;-3)$$

$$\vec{l}_2 = (-1;-1;4)$$

Находим скалярное произведение этих векторов; так как $(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = 0$, то $\vec{l}_1 \perp \vec{l}_2$.

27. (*1*) Доказать, что две прямые $-x-y-z-7=0$, $3x+y+z+1=0$ и $x=-2$, $y=t-3$, $z=-t+1$ параллельны.

Решение.

$$\vec{n}_1 = (-1;-1;-1), \quad \vec{n}_2 = (3;1;1)$$

$$\vec{l}_1 = [\vec{n}_1, \vec{n}_1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0;-2;2)$$

$$\vec{l}_2 = (0;1;-1)$$

$$\vec{l}_1 = -2\vec{l}_2$$

Тема: Прямая и плоскость в пространстве.

28. (*1*) Определить угол между плоскостью $2x+y+z+5=0$ и прямой $x=-2t-2$, $y=t+1$, $z=2t+7$.

Решение.

$$\vec{n} = (2;1;1), \quad \vec{l} = (-2;1;2)$$

$$(\vec{n},\vec{l}) = 2\cdot(-2)+1\cdot 1+1\cdot 2 = -1$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(2)^2+(1)^2+(1)^2} = \sqrt{6}, \quad |\vec{l}| = \sqrt{(-2)^2+(1)^2+(2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

$$\sin\psi = \frac{|(\vec{n},\vec{l})|}{|\vec{n}||\vec{l}|},$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{1}{3\sqrt{6}}\right) \approx 0.13650.$$

29. (*1*) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;0;1)$ перпендикулярно прямой $x = 2t+3$, $y = -4t+4$, $z = 7t-5$.

Решение.

$$\vec{n} = (2;-4;7)$$

$$2(x-1)-4y+7(z-1) = 0$$

$$2x-2-4y+7z-7 = 0$$

$$2x-4y+7z-9 = 0$$

30. (*1*) Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(4;-7;-6)$ перпендикулярно к плоскости $-3x-y+2z-5 = 0$.

Решение.

$$\begin{cases} x=-3t+4, \\ y=-t-7, \\ z=2t-6 \end{cases}$$

31. (*2*) Найти точку B^*, симметричную точке $B(-4;-3;-1)$ относительно плоскости $3x-3y+7z+3 = 0$.

Решение.

$$\begin{cases} x=\ \ 3t-4 \\ y=-3t-3 \\ z=\ \ 7t-1 \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости

$$3(3t-4)-3(-3t-3)+7(7t-1)+3 = 0$$

$$9t-12+9t+9+49t-7+3=0, \quad 67t=-7,$$

найдем $t=-\dfrac{7}{67}$, откуда $x_P=3(-\dfrac{7}{67})-4=-289/67$, $y_P=-3(-\dfrac{7}{67})-3=-180/67$, $z_P=7(-\dfrac{7}{67})-1=-116/67$.

Координаты симметричной точки найдутся из формул

$$x_P=\frac{x_B+x_{B^*}}{2}, \quad y_P=\frac{y_B+y_{B^*}}{2}, \quad z_P=\frac{z_B+z_{B^*}}{2},$$

т. е

$$x_{B^*}=2\cdot x_P-x_B, \quad y_{B^*}=2\cdot y_P-y_B, \quad z_{B^*}=2\cdot z_P-z_B.$$

Таким образом,

$$x_{B^*}=-310/67, \quad y_{B^*}=-159/67, \quad z_{B^*}=-165/67.$$

32. (*1*) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(5;1;-4)$ перпендикулярно прямой $4x-7y-3z+4=0$, $-4x-7y+6z+4=0$.

Решение.

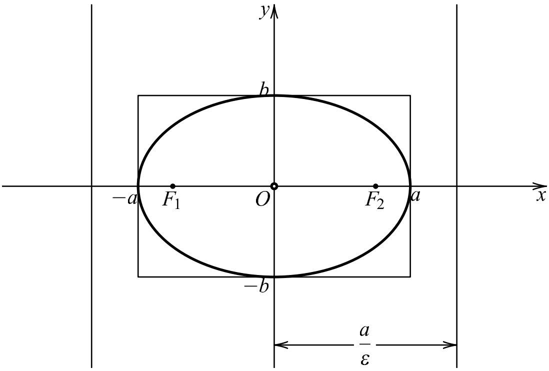
$$\begin{vmatrix} x-5 & y-1 & z-(-4) \\ 4 & -7 & -3 \\ -4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=0,$$

$$-63x-12y-56z+103=0.$$

<u>Эллипс</u> имеет каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a \geqslant b > 0$. При $a=b$ эллипс есть окружность. Число a, называется *большой полуосью*, число b, называется *малой полуосью*. Точка $O(0,0)$, называется *центром*, точки $(\pm a,0)$ и $(0,\pm b)$, называются *вершинами*. Точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, где $c=\sqrt{a^2-b^2}$, называются *фокусами*. Число $\varepsilon=\frac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* (очевидно, что $0 \leqslant \varepsilon < 1$), при $\varepsilon \neq 0$ прямые $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами*. Фокус $(c,0)$ и директриса $x=\frac{a}{\varepsilon}$ называются правыми, а фокус $(-c,0)$ и директриса $x=-\frac{a}{\varepsilon}$ – левыми. Фокус и директриса называются одноименными, если они оба – правые или оба – левые.



33. Выделением полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнение линии, определить тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):

$$4x^2+9y^2+32x-54y+109=0.$$

Решение. Перепишем уравнение так:

$$4(x^2+8x)+9(y^2-6y)=-109.$$

Дополняя выражения в скобках до полных квадратов, получим

$$4(x^2+8x+16)+9(y^2-6y+9)=64+81-109$$

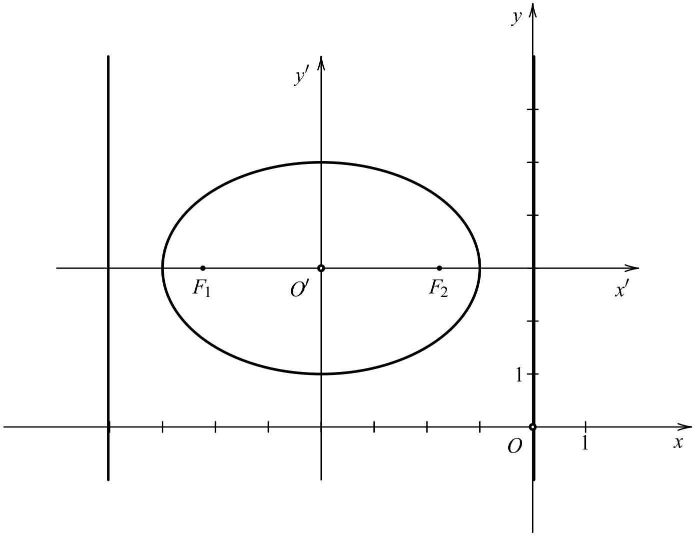
или, после преобразований,

$$\frac{(x+4)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1.$$

Перенесем начало координат в точку $O'(-4,3)$ полагая $x'=x+4$, $y'=y-3$ будем иметь

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1.$$

Это есть уравнение эллипса. Центр его лежит в точке (-4,3), а полуоси равны $a=3$ и $b=2$.

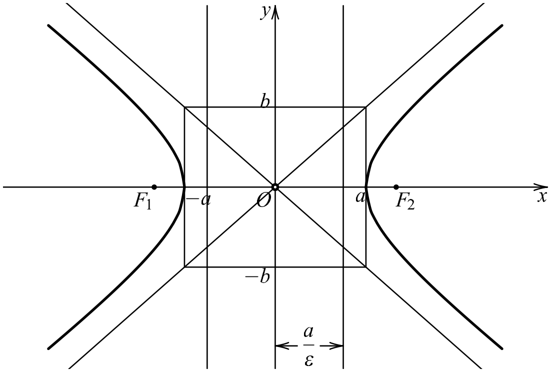


Гипербола имеет каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $a>0$, $b>0$. Число a, называется *действительной полуосью*, число b, называется *мнимой полуосью*. Точка $O(0,0)$, называется *центром*, точки $(\pm a,0)$ и $(0,\pm b)$, называются *вершинами*. Точки $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}$, называются *фокусами*. Число $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ называется *эксцентриситетом* (очевидно, что $\varepsilon>1$). Прямые $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами*. Фокус $(c,0)$ и директриса $x=\dfrac{a}{\varepsilon}$ называются правыми, а фокус $(-c,0)$ и директриса $x=-\dfrac{a}{\varepsilon}$

– левыми. Фокус и директриса называются одноименными, если они оба – правые или оба – левые. Прямые $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ являются *асимптотами* гиперболы.



34. Выделением полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнение линии, определить тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):

$$4x^2 - 9y^2 + 32x + 54y - 53 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение так:

$$4(x^2 + 8x) - 9(y^2 - 6y) = 53.$$

Дополняя выражения в скобках до полных квадратов, получим

$$4(x^2 + 8x + 16) - 9(y^2 - 6y + 9) = 64 - 81 + 53$$

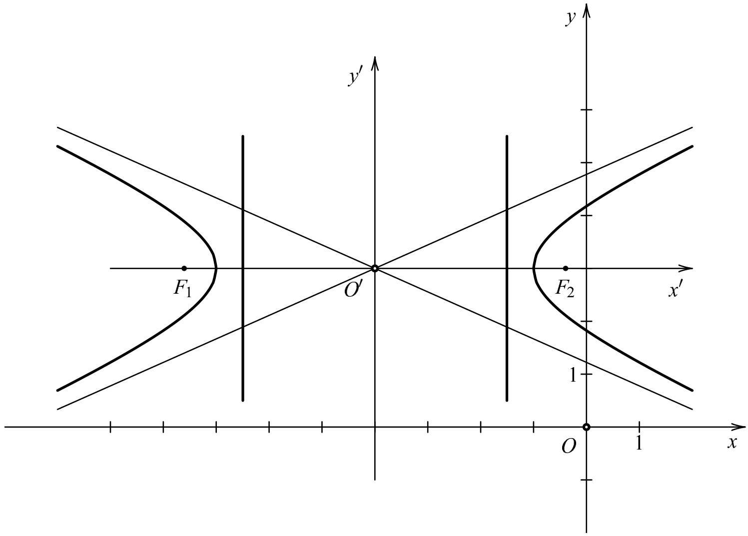
или, после преобразований,

$$\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$$

Перенесем начало координат в точку $O'(-4,3)$ полагая $x' = x + 4$, $y' = y - 3$ будем иметь

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1.$$

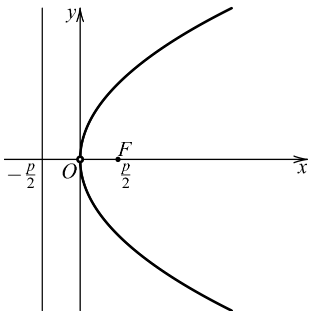
Это уравнение гиперболы с центром в точке (-4,3). Действительная полуось ее равна $a = 3$, а мнимая равна $b = 2$.



Парабола имеет каноническое уравнение

$$y^2 = 2px,$$

где $p > 0$. Число p называют *параметром параболы*. *Вершиной* параболы является начало координат, *фокусом* – точка $F(p/2, 0)$. *Директрисой* параболы является прямая $x = -p/2$, *Эксцентриситет* параболы равен 1.



35. Выделением полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнение линии, определить тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):

$$y^2 - 4x - 2y + 9 = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение так:

$$y^2 - 2y + 1 = 4x - 8$$

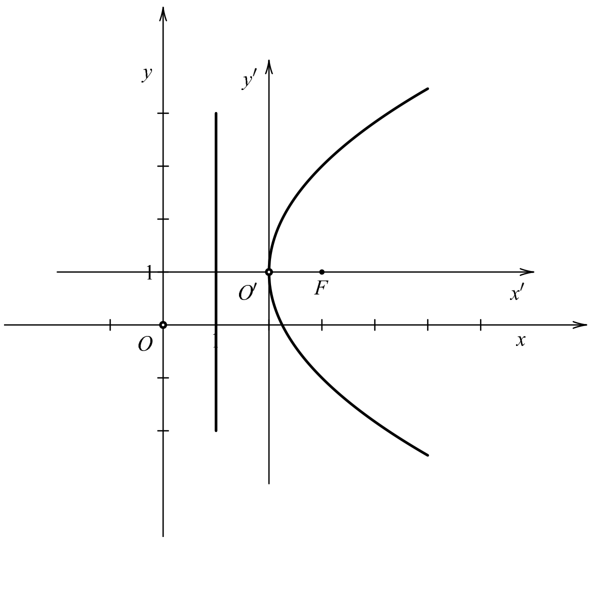
или, после преобразований,

$$(y-1)^2 = 4(x-2).$$

Вершина параболы находится в точке $O'(2,1)$, параметр $p = 2$, а ветвь параболы направлена в положительную сторону оси Ox.

Перенесем начало координат в точку $O'(2,1)$ полагая $x' = x - 2$, $y' = y - 1$ будем иметь

$$y'^2 = 4x'.$$



Контрольная работа №3

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Правила дифференцирования:

1. $c'=0$
2. $x'=1$
3. $(u\pm v)'=u'\pm v'$
4. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
6. $y'_x=y'_u\cdot u'_x$ если $y=f(u)$ и $u=h(x)$
7. $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$ если $y=f(u)$ и $x=g(y)$

Формулы дифференцирования:

1. $(u^n)'=nu^{n-1}$;
2. $(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}$;
3. $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{1}{u^2}$;
4. $(a^u)'=a^u\ln a$;
5. $(e^u)'=e^u$;
6. $(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\ln a}$;
7. $(\ln u)'=\dfrac{1}{u}$;
8. $(\sin u)'=\cos u$;
9. $(\cos u)'=-\sin u$;
10. $(\mathrm{tg}\,u)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}$;
11. $(\mathrm{ctg}\,u)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}$;
12. $(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$;
13. $(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$;
14. $(\mathrm{arctg}\,u)'=\dfrac{1}{1+u^2}$;
15. $(\mathrm{arcctg}\,u)'=-\dfrac{1}{1+u^2}$;

4. Найти производную функции y', если $y=\mathrm{tg}(7x+5)\cdot\lg(3x+1)$

Решение.

$$y' = \mathrm{tg}'(7x+5)\cdot\lg(3x+1)+\mathrm{tg}(7x+5)\cdot\lg'(3x+1) =$$

$$= \frac{1}{\cos^2(7x+5)}(7x+5)'\cdot\lg(3x+1)+\mathrm{tg}(7x+5)\cdot\frac{1}{(3x+1)\ln 10}(3x+1)' =$$

$$= \frac{7}{\cos^2(7x+5)}\cdot\lg(3x+1)+\mathrm{tg}(7x+5)\cdot\frac{3}{(3x+1)\ln 10}$$

5. Найти производную функции y', если $y = \mathrm{ctg}\,x^5 + \dfrac{\mathrm{ctg}(3x-1)}{\arcsin x}$

Решение.

$$y' = \mathrm{ctg}'\,x^5 + \left(\frac{\mathrm{ctg}(3x-1)}{\arcsin x}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x^5}(x^5)' + \frac{\mathrm{ctg}'(3x-1)\arcsin x - \mathrm{ctg}(3x-1)\arcsin' x}{\arcsin^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x^5}5x^4 + \frac{-\dfrac{1}{\sin^2(3x-1)}(3x-1)'\arcsin x - \mathrm{ctg}(3x-1)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x} =$$

$$= -\frac{5x^4}{\sin^2 x^5} + \frac{-\dfrac{3}{\sin^2(3x-1)}\arcsin x - \mathrm{ctg}(3x-1)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\arcsin^2 x}$$

6. Найти производную функции y', если $y = \arccos^5(x^2+7x-14)$

Решение.

$$y' = (\arccos^5(x^2+7x-14))' = 5\arccos^4(x^2+7x-14)\arccos'(x^2+7x-14) =$$

$$= 5\arccos^4(x^2+7x-14)\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(x^2+7x-14)^2}}\right)(x^2+7x-14)' =$$

$$= -5\arccos^4(x^2+7x-14)\frac{2x+7}{\sqrt{1-(x^2+7x-14)^2}}$$

7. Найти производную функции y', если $y = (\sin(2x-7))^{7x^2-7x-6}$

Решение.

$$y = (e^{\ln\sin(2x-7)})^{7x^2-7x-6} = e^{(7x^2-7x-6)\ln\sin(2x-7)}$$

$$y' = e^{(7x^2-7x-6)\ln\sin(2x-7)}\Big((7x^2-7x-6)'\ln\sin(2x-7)+$$

$$+(7x^2-7x-6)(\ln\sin(2x-7))'\Big)=$$

$$e^{(7x^2-7x-6)\ln\sin(2x-7)}\Big((14x-7)\ln\sin(2x-7)+$$

$$+(7x^2-7x-6)\frac{1}{\sin(2x-7)}\sin'(2x-7)\Big)=$$

$$e^{(7x^2-7x-6)\ln\sin(2x-7)}\Big((14x-7)\ln\sin(2x-7)+$$

$$+(7x^2-7x-6)\frac{1}{\sin(2x-7)}\cos(2x-7)\cdot(2x-7)'\Big)=$$

$$e^{(7x^2-7x-6)\ln\sin(2x-7)}\Big((14x-7)\ln\sin(2x-7)+$$

$$+(7x^2-7x-6)\frac{1}{\sin(2x-7)}\cos(2x-7)\cdot 2\Big)=$$

$$(\sin(2x-7))^{7x^2-7x-6}\Big((14x-7)\ln\sin(2x-7)+2(7x^2-7x-6)\operatorname{ctg}(2x-7)\Big)$$

7. Найти производную функции y'_x, если $x=\operatorname{arcctg}(\operatorname{arctg}y\cdot\ln y)$

Решение.

$$y'_x=\frac{1}{x'_y}$$

$$x'_y=-\frac{1}{1+(\operatorname{arctg}y\cdot\ln y)^2}(\operatorname{arctg}y\cdot\ln y)'=$$

$$=-\frac{1}{1+(\operatorname{arctg}y\cdot\ln y)^2}(\operatorname{arctg}'y\cdot\ln y+\operatorname{arctg}y\cdot\ln' y)=$$

$$=-\frac{1}{1+(\operatorname{arctg}y\cdot\ln y)^2}\left(\frac{1}{1+y^2}\cdot\ln y+\operatorname{arctg}y\cdot\frac{1}{y}\right)$$

$$y'_x=\frac{1}{-\frac{1}{1+(\operatorname{arctg}y\cdot\ln y)^2}\left(\frac{1}{1+y^2}\cdot\ln y+\operatorname{arctg}y\cdot\frac{1}{y}\right)}$$

7. Найти производную функции y'_x, если $\begin{cases}x=5t-7+\operatorname{arctg}t,\\ y=3t^2+4t-8+\log_3 t\end{cases}$

Решение.

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$$

$$x'_t=5+\frac{1}{1+t^2}$$

$$y'_t = 6t + 4 + \frac{1}{t\ln 3}$$

$$y'_x = \frac{6t + 4 + \frac{1}{t\ln 3}}{5 + \frac{1}{1+t^2}}$$

Найти указанные пределы.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6x - 3 - \sqrt{5x^2+2x+3}}{2x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x - 3 - \sqrt{5x^2+2x+3}}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x - 3 - \sqrt{x^2(5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}}{2x-1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x - 3 - |x|\sqrt{5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x - 3 - x\sqrt{5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2x-1} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x(6 - \frac{3}{x} - \sqrt{5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}})}{x(2-\frac{1}{x})} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6 - \frac{3}{x} - \sqrt{5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{6-\sqrt{5}}{2}.$$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6x - 3 - \sqrt{5x^2+2x+3}}{2x-1}$.

Решение.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x - 3 - \sqrt{5x^2+2x+3}}{2x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x - 3 - \sqrt{x^2(5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}}{2x-1} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6x - 3 - |x|\sqrt{5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x - 3 + x\sqrt{5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2x-1} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x(6 - \frac{3}{x} + \sqrt{5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}})}{x(2-\frac{1}{x})} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{6 - \frac{3}{x} + \sqrt{5+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{6+\sqrt{5}}{2}.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{5x^2+x+4}-\sqrt{5x^2-3x-1})$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{5x^2+x+4}-\sqrt{5x^2-3x-1})=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{5x^2+x+4}-\sqrt{5x^2-3x-1})(\sqrt{5x^2+x+4}+\sqrt{5x^2-3x-1})}{\sqrt{5x^2+x+4}+\sqrt{5x^2-3x-1}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+5}{\sqrt{5x^2+x+4}+\sqrt{5x^2-3x-1}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\dfrac{5}{x}}{\sqrt{5+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x^2}}+\sqrt{5-\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{4}{\sqrt{5}+\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

4. Найти $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3x^2+12x+9}{2x^2+11x+15}$.

Решение. Здесь имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Разложим на множители числитель и знаменатель дроби:

$$\lim_{x\to-3}\frac{3x^2+12x+9}{2x^2+11x+15}=\lim_{x\to-3}\frac{3(x+3)(x+1)}{2(x+3)(x+\frac{5}{2})}=\lim_{x\to-3}\frac{3(x+1)}{2(x+\frac{5}{2})}=\frac{3(-3+1)}{2(-3+\frac{5}{2})}=6.$$

5. Найти $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+8}-\sqrt{6}}{x-2}$.

Решение. Переведем иррациональность из числителя в знаменатель.

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x^2-3x+8}-\sqrt{6}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x^2-3x+8}-\sqrt{6})(\sqrt{x^2-3x+8}+\sqrt{6})}{(x-2)(\sqrt{x^2-3x+8}+\sqrt{6})}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+8-6}{(x-2)(\sqrt{x^2-3x+8}+\sqrt{6})}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{(x-2)(\sqrt{x^2-3x+8}+\sqrt{6})}=$$

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(\sqrt{x^2-3x+8}+\sqrt{6})}=\lim_{x\to2}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-3x+8}+\sqrt{6}}=\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

6. Найти $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sin(3x+3)}{x^2-4x-5}$.
Так как $x\neq-1$ под знаком предела, то

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sin(3(x+1))}{(x+1)(x-5)}=\lim_{x\to -1}\frac{\sin(3(x+1))}{(x+1)}\cdot\frac{1}{x-5}=$$

$$3\lim_{x\to -1}\frac{\sin(3(x+1))}{3(x+1)}\cdot\frac{1}{x-5}=3\cdot 1\cdot\frac{1}{-1-5}=-\frac{1}{2}.$$

7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}$

Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1+2}{2x-1}\right)^{3x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{2}}\right)^{3x+1}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{2}}\right)^{\frac{2x-1}{2}}\right]^{\frac{2}{2x-1}\cdot(3x+1)}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x-1}{2}}\right)^{\frac{2x-1}{2}}\right]^{\frac{6x+2}{2x-1}}=e^3$$