Вопрос № 1

Трехмерная графика. Методы удаления скрытых поверхностей, использующие Z-буфер

***1**. Алгоритм удаления невидимых граней, использующий Z - буфер.*

Для реализации этого алгоритма требуется два буфера:

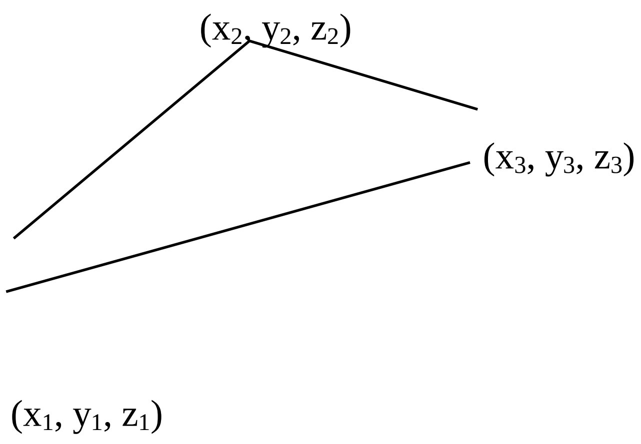
1) Буфер глубины (*Z* - буфер).
2) Буфер регенерации.

Из 3-х мерной сцены выбираем последовательно грани и развертываем в растр. Но предварительно буфер регенерации заполняем фоновым цветом, а в *Z* - буфер помещаем значения максимально большие для этой сцены, а в *Z* - буфере получаются значения значительно большие чем глубина сцены. И для каждого многоугольника во время растровой развертки выполняем следующие алгоритмические шаги:

1) Если глубина многоугольника $Z(x, y)$ в текущей точке растровой развертки меньше чем соответствующая точка в *Z* - буфере, то точка находится ближе к наблюдателю и в буфер регенерации в точку (x, y) записываем атрибут многоугольника, $Z_{БУФ}(x, y) \leftarrow Z(x, y)$.
2) Иначе $\{Z(x, y) > Z_{БУФ}(x, y)\}$ переход к следующей точке растровой развертки многоугольника.

Главным недостатком алгоритма является большой размер *Z* - буфера. Сцена будет появляться в той последовательности в какой мы анализируем грани.

Достоинства: обрабатываются сцены любой сложности, прост в реализации.



$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} (z_i - z_j)(y_i + y_j);$$

$$B = \sum_{i=1}^{n} (x_i + x_j)(z_i - z_j);$$

$$C = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_j)(y_i + y_j);$$

где $\begin{matrix} j = \{если \quad i = n, \quad то \quad 1\} \\ j = \{если \quad i \neq n, \quad то \quad i+1\} \end{matrix}$

$$D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1;$$

Для облегчения вычисления Z при растровой развертке многоугольника можно воспользоваться:

$$Z_{(x,y)} = \frac{-D - Ax - By}{C};$$

$$Z_{(x+\Delta x,y)} = \frac{-D - Ax - A\Delta x - By}{C} = Z_{(x,y)} - \frac{A}{C}\Delta x = Z_{(x,y)} - \frac{A}{C};$$

$$\Delta x = 1;$$

Аналогично вычисляется Z при переходе на следующую сканирующую строку:

$$Z_{(y+\Delta y)} = Z_{(y)} - \frac{B}{C}\Delta y;$$

Алгоритм удаления невидимых граней, использующий Z - строку.

Работает в рамках одной сканирующей строки. Количество элементов в Z - строке соответствует разрешающей способности по горизонтали. Глубина Z - строки определяет величину значения Z (см. Алгоритм использующий Z - буфер).

Для повышения эффективности работы алгоритма за каждым многоугольником закрепляют верхнюю и нижнюю сканирующие строки.

Z-buffering

Процесс удаления скрытых поверхностей, использующий значения глубины, хранящиеся в Z-буфере. Перед отображением нового кадра, буфер очищается, и значения величин Z устанавливаются равными бесконечности. При рендеринге объекта устанавливаются значения Z для каждого пиксела: чем ближе расположен пиксел, тем меньше значение величины Z. Для каждого нового пиксела значение глубины сравнивается со значением, хранящимся в буфере, и пиксел записывается в кадр, только если величина глубины меньше сохраненного значения.

Z-sorting

Процесс удаления невидимых поверхностей с помощью сортировки многоугольников в порядке низ-верх, предшествующий рендерингу. Таким образом, при рендеринге верхние поверхности обрабатываются последними. Результаты рендеринга получаются верными только, если объекты не близки и не пересекаются. Преимуществом этого метода является отсутствие необходимости хранения значений глубины. Недостатком является высокая загрузка процессора и ограничение на пересекающиеся объекты.

Вопрос № 2

Использование Булевой алгебры для анализа и синтеза логических электронных схем

X = 0 0 1 1
Y = 0 1 0 1

Функции и их обозначение:

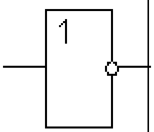
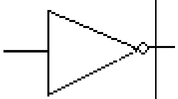
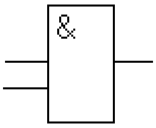
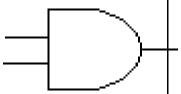
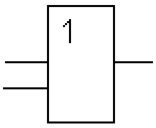
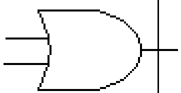
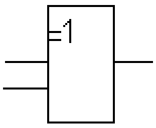
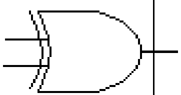
F = 0 0 0 1	$X \cap Y$	Конъюнкция (Логическое И)
F = 0 1 1 1	$X \cup Y$	Дизъюнкция (Логическое ИЛИ)
F = 1 0 1 1	$Y \rightarrow X$	Импликация от Y к X
F = 1 1 0 1	$X \rightarrow Y$	Импликация от X к Y
F = 1 1 1 0	$X \mid Y$	Штрих Шеффера (Отрицание конъюнкции)
F = 1 0 0 0	$X \downarrow Y$	Стрелка Пирса (отрицание дизъюнкции)
F = 1 0 0 1	$X \sim Y$	Эквивалентность
F = 0 1 1 0	$X \oplus Y$	Сумма по модулю 2 (Исключающее ИЛИ)
F = 0 1 0 0	$Y \Delta X$	Запрет по X (Отрицание импликации)

Аксиомы алгебры логики.

1. $\overline{\overline{X}} = X$ - закон двойного отрицания.
2. $X \cap Y = Y \cap X$ - коммутативный закон для умножения
3. $X \cap (Y \cap Z) = X \cap Y \cap Z$ - сочетательный закон для умножения
4. $X \cap X = X$ - закон тождества для умножения
5. $1 \cap X = X$ - закон умножения на единицу
6. $0 \cap X = 0$ - закон умножения с нулем
7. $X \cup Y = Y \cup X$ - коммутативный закон для сложения
8. $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$ - сочетательный закон для сложения

9. $X \cup X = X$ - закон тождества для сложения
10. $1 \cup X = 1$ - закон сложения с единицей
11. $0 \cup X = X$ - закон сложения с нулем
12. $X \cap (Y \cup Z) = X \cap Y \cup X \cap Z$ - первый распределительный закон
13. $X \cup Y \cap Z = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ - второй распределительный закон
14. $X \cup X \cap Y = X$
15. $X \cap (X \cup Y) = X$ - законы поглощения
16. $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$
17. $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ - законы де Моргана (инверсии)
18. $X \cup \overline{X} = 1$ - закон исключенного третьего
19. $X \cap \overline{X} = 0$ - закон противоречия.

Обозначение функциональных узлов

Название	Обозначение	
	Россия	США
инвертор		
Конъюнктор(и)		
Дезъюнктор(или)		
Исключающее или		

Функциональную схему логического устройства получают в результате абстрактного синтеза, который состоит из следующих этапов:

1. словесная формулировка функций логического устройства
2. составление таблицы истинности по словесной формулировке
3. запись логического уравнения устройства в виде СДНФ или СКНФ
4. минимизация логического уравнения
5. выбор одного из логических базисов
6. преобразование логического уравнения с использованием правил де Моргана
7. построение функциональной схемы логического устройства

Пример:

1. синтезировать логическое устройство на три входные переменные генерирующее сигнал 1 на выходе, если две рядом стоящие переменные из трех принимают значение 1

2. таблица истинности

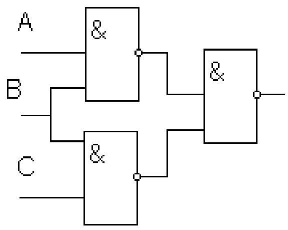
A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

3. $Y = \overline{A} \cap B \cap C \cup A \cap B \cap \overline{C} \cup A \cap B \cap C$

4. $Y = \overline{A} \cap B \cap C \cup A \cap B \cap (C \cup \overline{C}) = \overline{A} \cap B \cap C \cup A \cap B = B \cap (\overline{A} \cap C \cup A) = B \cap (A \cup C) =$
$= B \cap A \cup B \cap C$

5. принять для реализации схемы логического устройства базис и-не

6. $Y = \overline{\overline{Y}} = \overline{\overline{(B \cap A \cup B \cap C)}} = \overline{(\overline{(B \cap A)} \cap \overline{(B \cap C)})}$



Вопрос № 3

Найти кратчайшее расстояние от точки A(0; 1) до прямой y=2x+3, используя методы вариационного исчисления

I способ. Аналитический.
y=2x+3 -> 2x-y+3=0, тогда нормальный вектор к данной прямой n={2: -1}
пусть P – основание перпендикуляра , тогда уравнение прямой PA, перпендикулярной исходной прямой будет иметь вид

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y-1}{-1}$$

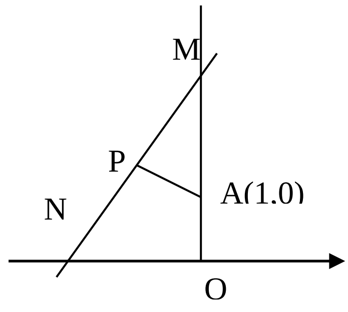
Определим координаты точки P
т.к. P точка пересечения двух прямых решив систему, найдем ее координаты

$$\begin{cases} x/2+y=1 \\ y=2x+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-4/5 \\ y=7/5 \end{cases}$$

теперь найдем искомое расстояние AP
AP=$\sqrt{(0+4/5)^2+(1-7/5)^2} = 0{,}4\sqrt{5}$

II способ геометрический



AP(искомое расстояние) перпендикулярно MN

тр-ик MNO подобен тр-ику MPA -> MN/MA = NO/AP -> AP=NO*MA/MN

MA=2 NO=1.5 MN=$\sqrt{MO^2 + NO^2} = \sqrt{3^2 + 1.5^2} = 1.5\sqrt{5}$

AP=$0.4\sqrt{5}$

III способ. Оптимизационный

Запишем функцию расстояния от точки до прямой и любым методом оптимизации (например, сканирование, метод золотого сечения)

y=2*x+3

s=sqrt(x^2+(2x+3-1)^2)=sqrt(x^2+4*(x+1)^2)=sqrt(5*x^2+8*x+4);

s'=(10*x+8)*0.5/ sqrt(5*x^2+8*x+4)= (5*x+4)/sqrt(5*x^2+8*x+4)=0; следовательно x=-0.8;

s=sqrt(0.8)= $0.4\sqrt{5}$

Уравнение Эйлера (численный)

Элементарное ΔS расстояние между двумя точками на плоскости, координаты которых отличаются на dt и dx, равно: $\Delta S = \sqrt{dx^2 + dt^2}$

Выполним некоторые преобразования: $\Delta S = \sqrt{dt^2 + \frac{dx^2}{dt^2} dt^2} = \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dt^2}} dt = \sqrt{1 + (x')^2}\, dt$

Расстояние между двумя точками на плоскости выразится интегралом: $S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + (x')^2}\, dt.$

Задача сводится к нахождению экстремального значения интеграла при условии, что левый конец точка A(0,1), а правый прямая x=2t+3. Таким образом, в нашем случае имеем Ψ(t)=2t+3.

Для составления уравнения Эйлера запишем: $\partial \mathrm{F} / \partial \mathrm{x} = 0 \partial \mathrm{F} / \partial \mathrm{x}' = \mathrm{x}' / \sqrt{1 + (\mathrm{x}')^2}$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}'} \right) = \frac{\mathrm{x}'' \sqrt{1+(\mathrm{x}')^2} - (\mathrm{x}')^2 \mathrm{x}'' / \sqrt{1+(\mathrm{x}')^2}}{1+(\mathrm{x}')^2}$

Уравнение Эйлера имеет вид x''=0. Общее решение уравнения Эйлера: $x=C_1t+C_2$.

Условия трансверсальности имеют вид $\left(\sqrt{1 + (x')^2} + (2 - x') \frac{x'}{\sqrt{1+(x')^2}} \right) \Big|_{t = t_1} = 0.$ Т.к. $x'=C_1$, получим: $\sqrt{1 + C_1^2} + (2 - C_1) \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0.$ Уравнения в данном случае принимают вид

$C_1t_0+C_2=x_0$, $C_1t_1+C_2=2t_1+3$. В результате имеем систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
& x_0 = x(t_0, C_1, C_2) & & C_1 * 0 + C_2 = 1 \\
& x(t_1, C_1, C_2) = \psi(t_1) & \Rightarrow\quad & C_1 t_1 + C_2 = 2t_1 + 3 \\
& f + (x'(t_1, C_1, C_2) - \psi'(t)) \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{t=t_1} = 0 & & \sqrt{1 + C_1^2} + (2 - C_1) \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}} = 0
\end{aligned}
$$

Из системы C_2=1. Необходимо найти t_1,C_1

$$\begin{cases} C_1 t_1 + C_2 = 2t_1 + 3 \\ \sqrt{1+C_1^2} + (1-C_1)\dfrac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1+C_1^2} + (2-C_1)\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} = 0 \setminus * \sqrt{1+C_1^2} \Rightarrow C_1^2 \neq -1$$

$$1 + C_1^2 + (2-C_1)C_1 = 0 \Rightarrow 1 + 2C_1 = 0 \Rightarrow C1 = -0{,}5$$

$$-0{,}5t_1 + 1 = 2t_1 + 3 \Rightarrow t_1 = -0{,}8$$

$$S = \int_{-2/3}^{0} \sqrt{1+(-0{,}5)^2}\,dt = 0.894\,.$$