本质矩阵 $E = t^\wedge R$ 的SVD分解.

(slam十四讲 P145)

[ORBSLAM3中TwoViewReconstruction.cc ReconstructF()]

△ 问题描述.

本质矩阵E求出后,如何通过SVD分解得到R.t

△ 推导 (超详细版)

$E = t^\wedge R$ 已知

其中 $t^\wedge$ 表示平移向量t的反对称矩阵

$$t^\wedge = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^\wedge = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

由反对称阵的性质,存在n阶正交阵U,使得

$$\underbrace{t^\wedge = U^T S U \quad 或 \quad t^\wedge = V S V^T}_{V = U^T}$$

性质5：若A为n阶实反对称矩阵，则存在n阶正交矩阵Γ，使得

$$\Gamma^T A \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & & & & & \\ -b_1 & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & b_r & & \\ & & & -b_r & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 & b_n \\ & & & & & & -b_n & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $S = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\pm b_1$ 是 $t^\wedge$ 的非零特征值

将S拆为对角阵

$$S = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \qquad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

这只表示尺度，大小不重要

$$= diag(b_1\ b_1\ 0)\, W$$

$$t^\wedge = V diag(b_1, b_1, 0)\, W\, V^T$$

回到 E，E 是方阵，存在两阵 A B 使得 $E = A\Sigma B^T$ 也是正交阵

Σ 是 E 的奇异值组成的对角阵

方阵的奇异值是 EE^T / E^TE 的特征值开方

$$\begin{aligned} EE^T &= (t^\wedge R)(t^\wedge R)^T \\ &= t^\wedge R R^T t^{\wedge T} \\ &= t^\wedge t^{\wedge T} = -(t^\wedge)^2 \end{aligned}$$

$t^\wedge$ 的特征值是 $b_1, b_1, 0$，因此 E 的特征值也是两个相等且非零的数与 0

E 的 SVD 分解形式为 $E = A\, diag(1,1,0) B^T$ [省去尺度，因为不影响结果]

$$E = A \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} B^T$$

方案 1　　　　方案 2

$$\xrightarrow{\text{变换}} A \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^T = A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^T$$

$$\xrightarrow[\substack{AA^T = A^TA = I \\ BB^T = B^TB = I}]{\text{A.B 均是正交阵}} A \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^T A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^T$$

$$= t^\wedge R$$

$$t^\wedge = A \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^T \qquad R = A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^T$$

或

$$t^\wedge = A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} A^T \qquad R = A \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^T$$