



硕士学位论文

基于遗传算法的最优证券组合 投资模型研究

专 业：系统分析与集成

作 者：陈 科 燕

指导教师：肖冬荣教授

南京气象学院

2004年5月

学 位 论 文

基于遗传算法的最优证券组合投资模型 研究

作 者: 陈 科 燕
指 导 教 师: 肖 冬 荣
申 请 学 位: 硕 士
专 业: 系统分析与集成
提 交 论 文 时 间: 2004 年 5 月
学 位 授 予 时 间: _____
答 辩 委 员 会 主 席: _____

南京信息工程大学
(原南京气象学院)
2004 年 5 月

论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得南京信息工程大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

签名: 陈科燕
日期: 2004 年 5 月 24 日

关于论文使用授权的说明

本学位论文作者完全了解南京信息工程大学有关保留、使用学位论文的规定，有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子文档，允许论文被查阅和借阅。本人的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。除在保密期的保密论文外，本人授权南京信息工程大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文，也可以公布（包括刊登）论文的全部或部分内容。

签名: 陈科燕 导师签名: 陈科燕
日期: 2004 年 5 月 24 日

基于遗传算法的最优证券组合投资模型研究

摘要

本文提出采用遗传算法对证券组合投资模型进行计算,得到了满足特定投资者的最优投资组合,并在研究过程中对组合投资模型进行了改进,同时也改进了遗传算法,使其能适应本文的模型。

由于证券投资组合的挑选是一项复杂的系统工程,在挑选之前要对历史数据进行充分的分析,因此本文首先对初步挑选的证券进行价格预测,研究投资时机是否适合,以及挑选的证券是否适合。本文通过比较分析后,采用 RBF 神经网络模型对证券价格进行了预测,并在这个基础上得到了适用于组合的证券。

在得到所需的证券之后,计算其期望收益及方差,并进一步调整欲组合的证券。随后构造了适合实际市场情况的证券组合模型,并计算具体的组合。

由于采用传统的数学方法解决本文问题存在一定难度,因此通过研究考虑采用遗传算法来进行计算,并在计算过程中针对遗传算法存在的缺陷进行了改进,采用自适应遗传算法来实现计算目标。

在得到有效解后,本文提出采用两种方法来获取最优解:第一种方法是采用特定投资者的无差异曲线与有效边界相切的方法得到最优解;第二种方法是采用安全第一方法来获得最优解。

通过以上两种方法得到的最优解只是满足特定投资者投资偏好的最优解的收益率及风险率,而具体的组合方案还需进行进一步的解决。本文首先通过修改模型,使模型适应实际情况,再用针对该模型的约束遗传算法进行求解。

通过以上求解,得到满足投资者偏好的最优证券投资组合,这个组合实现了在预期收益最大化和收益率不确定性(风险)的最小化之间的某种平衡,而这个平衡点就是投资者所需要的,最符合其投资要求的一种方案。

关键词:预期收益;风险;RBF 神经网络;预测;有效边界;无差异曲线;遗传算法;自适应遗传算法;约束遗传算法;最优解

The Research of The Optimal Models for Portfolio Investment Bases on Genetic Algorithm

Abstract

Genetic Algorithm is advanced to calculate the model for portfolio investment in this paper, and the optimal portfolio meeting the specific investor is found. The model is improved during the research, and the Genetic Algorithm is also improved to fit the model in this paper.

Because the selection of the stocks is a complex systems engineering, the plenty analysis must be done on the history data before selecting. In order to study whether the time is fit and whether the stock is fit, the stock that is primarily selected is forecast at first in this paper. After comparing, RBF model is adopted to forecast the price of the stock, and the stocks are gained which fit to portfolio.

After gaining the stocks what we want, the expected return and variance are calculated, and the stock which we want to fit together are adjusted further more. Then a model for portfolio investment fitting the actual market more is structured, and the concrete portfolio are calculated.

Because it is difficulty to settle the problem in this paper by tradition mathematics way, the Genetic Algorithm is used to solve it. And the improvement aiming at the bug of the Genetic Algorithm is done, which is the Adaptive Genetic Algorithm.

Two methods are brought forward to obtain the optimal solution after gained the efficient solution: one is letting the Non-discrimination of specific investor and the efficient borderline have a common tangent at a point, and this point is the optimal solution; the other gains optimal solution basing on safety-first method.

The optimal solutions we gain with the two methods are only the return rate and the risk rate of the optimal solution, which meet the specific investor; in addition, the concrete portfolio project must be settled. In this paper, model is amended to suit the actual situation at first, and the Constrained Optimization Genetic Algorithm is used to solve the problem.

It is the optimal portfolio investment that meets the investor, and this portfolio realizes some balance between the maximal of the expected return and the minimal of the incertitude of the return variance (risk). And of course this balance point is a best point which meet the investor

most.

Keyword: expectation return; risk; RBF nerve net; forecast; efficient borderline;
Non-discrimination; Genetic Algorithm; Adaptive Genetic Algorithm; Constrained Optimization
Genetic Algorithm; optimal solution

目 录

1 前言	1
1.1 证券组合投资管理概述	1
1.1.1 证券组合的涵义	1
1.1.2 构建证券组合的原因	1
1.1.3 两个假设	2
1.2 组合投资目前的研究进展	2
1.3 本文的研究意义	3
1.4 本文内容安排	3
2 选择“合适”的证券	5
2.1 采用神经网络方法对股票价格进行预估	5
2.1.1 RBF 网络	6
2.1.2 基于 MATLAB 的 RBF 神经网络	6
2.1.3 采用 RBF 网络进行预测	7
3 期望收益和方差	11
3.1 期望收益率	11
3.2 方差	12
3.3 计算期望收益率及方差	13
3.4 相关系数的计算	14
3.5 调整证券	15
4 投资模型构造	17
4.1 初始模型	17
4.2 模型改进	17
4.2.1 模型中加入交易费用	17
4.2.2 模型中加入无风险资产	18
4.3 将多目标规划转化为单目标规划	18
5 有效解的求解方法	20
5.1 遗传算法	20
5.1.1 算法简介	20
5.1.2 算法设计与实现	21
5.1.3 针对本文问题的遗传算法实现	21
5.1.4 遗传算法的流程图	25
5.2 计算	27
5.3 自适应遗传算法	29

5.3.1 针对本文问题的自适应遗传算法·····	30
5.3.2 采用自适应遗传算法进行计算·····	30
5.4 采用自适应遗传算法计算·····	32
5.5 有效边界曲线·····	35
5.5.1 有效边界·····	35
5.5.2 有效边界的求取·····	36
6 求解最优解·····	40
6.1 无差异曲线与有效边界曲线相切法·····	40
6.1.1 无差异曲线·····	40
6.1.2 无差异曲线与有效边界曲线相切·····	41
6.1.3 无差异曲线的求取·····	41
6.1.4 求最优点·····	46
6.2 安全第一法·····	47
6.2.1 安全第一法定义·····	47
6.2.2 模型·····	48
6.2.3 最优点的求解·····	49
7 约束遗传算法求最优点·····	52
7.1 模型·····	52
7.2 针对上述问题的遗传算法·····	56
7.3 计算结果·····	57
8 结论·····	60
参考文献·····	61
致 谢·····	64
附 录·····	65
作者在学期间发表的论文清单·····	67

1 前言

1.1 证券组合投资管理概述

组合投资是一种区别于个别资产管理的投资管理理念。组合管理理论最早是由美国著名的经济学家 Harry Markowitz^[1]于 1952 年系统的提出的,他开创了对投资进行整体管理的先河^[2]。在此之前,经济学家和投资者一般致力于对个别投资对象的研究与管理。30 年代,偶尔有人也曾在论文中提出过组合的概念,但缺乏系统的理论支持,没有引起人们的注意。

Markowitz 考虑的问题是单期投资问题:投资者在某个时间(称为初期)用一笔自有资金购买一组证券并持有一段时期(称为持有期),在持有期结束时(称为期末),投资者出售他在初期购买的证券并将收入用于消费或再投资。Markowitz 考虑的这一问题第一次对证券投资中的风险因素进行了正规的阐述。他注意到一个典型的投资者不仅希望“收益高”,而且希望“收益尽可能确定”。这意味着在投资者寻求“预期收入最大化”的同时追求“收益的最小的不确定性”,在期初进行决策时必然力求使这两个相互制约的目标达到某种平衡。Markowitz 分别用期望收益率和收益率的方差来衡量投资的预期收益水平和不确定性(风险),建立所谓的均值方差模型来阐述如何全盘考虑上述两个目标,从而进行决策。这种考虑得出了一个有趣的结果,即投资者应该同时购买多种证券而不是一种证券,来进行分散化投资。

Markowitz 在创立组合理论的同时,也用数量化方法提出了确定最佳资产组合的基本模型。在以后的岁月里,经济学家们一直在利用数量化方法不断丰富和完善组合管理的理论和实际投资管理方法,并使之成为投资学中的主流理论。

1.1.1 证券组合的涵义

投资学中的组合一词通常是指个人或机构投资者所拥有的各种资产的总称。特别地,证券组合是指个人或机构投资者所持有的各种有价证券的总称,通常包括各种类型的债券、股票及存款单等。

1.1.2 构建证券组合的原因

证券投资者构建证券组合的原因是为了降低风险。投资者通过组合投资可以在投资收益和投资风险中找到一个平衡点，即在风险一定的条件下实现收益的最大化，或收益一定的条件下使风险尽可能的降低。

资产组合理论证明，证券组合的风险随着组合所包含的证券的增加而降低，资产间关联性极低的多元化证券组合可以有效的降低风险。当投资者将各种资产按不同比例进行组合时，其选择就会有无限多种，这为投资者在给定风险水平的条件下获取更高收益提供了机会。当投资者对证券组合的风险和收益做出权衡时，他能够得到比投资单个资产更为满意的收益与风险的平衡。

1.1.3 两个假设

Markowitz 在提供证券组合选择方法时，首先通过假设来简化和明确上述两个目标。这些假设是：

假设一：投资者以期望收益率来衡量未来实际收益率的总体水平，以收益率的方差（或标准差）来衡量收益率的不确定性（风险），因而投资者在决策中只关心投资的期望收益率和方差。

假设二：投资者是不知足的和风险厌恶的，即投资者总是希望收益率越高越好，而方差越小越好。

上述 Markowitz 所提供的方法中牵涉两个最基本也是最核心的概念——期望收益率和收益率的方差。期望值和方差本身是两个数学概念。前者反映一个不确定性的变量以不同的可能性（概率）取各种可能值时，其平均取值水平；后者反映不确定性变量的各种可能值的分散程度，在一定意义上也反映了该变量取值的不确定性程度。可见，期望收益率和方差与收益率作为一个不确定性的变量有关。

1.2 组合投资目前的研究进展

目前在组合投资研究领域中，除 Markowitz 证券分析理论外，还存在由威廉·夏普提出的“单因素模型”，及其推广模型“多因素模型”；由夏普、林特和摩森提出的资本资产定价模型（CAPM）；由史蒂夫·罗斯提出的套利定价理论（APT）^[3]等。这些理论在投资领域中都 被广泛应用，而由于 Markowitz 的投资理论在投资者只关注“期望收益率”和“方差”的假设前提下是完全精确的，且由于目前计算机运算能力的快速提高，Markowitz 投资理论存在的计算量大的缺陷日益不明显，因此该理论应用极为广泛。

在采用 Markowitz 理论进行证券分析时，目前的研究成果主要集中在对模型的研究与改进以及对各种算法的研究中^[4-5]，但通常的研究都以获得一系列的有效解为目标，而“真正的”最优解并未获得，或是在理论上采用某些方法证明了某点为最优解，但没有提供方法来求得最终的最优组合。

1.3 本文的研究意义

本文在获得有效解的基础上提供了一个求取最优解的方法，采用本文的方法，可以得到满足具有特定偏好投资者的最优证券投资组合。

本文采用 Markowitz 组合投资理论构建模型，在研究过程中对模型进行了一系列的改进，使得本文的模型较以往模型更加适合实际市场的情况。

由于模型较复杂性，采用一般的数学方法求解存在很大的困难，因此本文尝试采用在各个科学领域中被广泛应用的一种优化算法——遗传算法来求解本文的问题。运用遗传算法，本文模型在求解方面的困难迎刃而解；同时，自适应遗传算法的应用也使问题的求解更加的高效，准确。

以往的研究通常只进行到一系列单个离散有效解的求取，此时所得到得有效解并不是真正的最优解，而本文中在得到有效解集的基础上，采用拟合的方式得到了有效边界曲线，并且结合无差异曲线得到了最优解，最后，采用约束遗传算法得到了最优解的具体组合方案。因此较以往的研究，本文提供的方法得到了一个完全意义上的最优解，并且这个最优解满足了特定的投资者。此外，本文的方法方便易行，能适用于实际应用中。

1.4 本文内容安排

第二章 研究如何挑选证券及选择投资证券的时机。本章首先在证券市场中挑选了一批业绩较好的证券，随后采用 RBF 神经网络对这些证券的未来价格进行预估，判断所选证券种类及选择的时机是否合适，以此初步挑选出要进行组合的证券。

第三章 计算证券的期望收益及方差（风险）。以周为单位计算证券收益率，并得到证券的期望收益及方差值。此外，根据协方差情况调整所选证券的品种。

第四章 构建证券投资模型。首先根据 Markowitz 投资理论构建投资模型，随后根据实际市场情况对模型进行调整，使模型更加合理。

第五章 求解有效解。本章提出采用遗传算法对模型进行求解，并且在求解过程中针对遗传算法存在的缺陷进行改进，采用自适应遗传算法进行求解，得到了较好的结果。在

得到一系列有效解之后，本文采用拟合方法得到了有效边界曲线。

第六章 求取最优解。在得到有效边界曲线后，本章采用两种方法来求取最优解。其一是有效边界曲线与无差异曲线相切法；其二是“安全第一法”。采用这两种方法可得到满足特定投资者的最优解。

第七章 采用约束遗传算法求解最优解具体组合。本章首先根据实际情况修正模型，使其能适应进一步求解需要，随后提出采用约束遗传算法求解最优解的具体组合。

第八章 对全文进行总结。

2 选择“合适”的证券

要进行组合投资，先要挑选用于投资的证券。在进行选择投资的证券时，首先要经过周密的分析，目前，进行证券投资分析所采用的分析方法主要有两大类：基本分析和技术分析。

基本分析是根据经济学、金融学、财务管理学及投资学的基本原理，对决定证券价格的基本要素进行分析的一种方法；而技术分析是通过对市场过去和现在的行为，应用数学和逻辑得方法，探索出一些典型的规律并据此预测证券市场的未来变化趋势。本文从技术分析的角度来挑选合适的证券进行组合投资。

首先对未来股价进行预估，这个预估价跟下文上要提及的预期收益并无关系，只是作为挑选股票的参考指标。对被选股票进行预测，如果其中的大多数股票的收益率都显示为负，即股价下跌的话，就应考虑改变近期投资计划，即暂时不做投资考虑。因此对选择的证券进行预估是有意义的。

经过初步挑选，选定八种业绩较好的证券进行组合，这八个证券分别为：000717（韶钢松山）、600104（上海汽车）、600002（齐鲁石化）、000625（长安汽车）、600886（*ST华靖）、600166（福田汽车）、600780（ST东锅）、000063（中兴通讯）。对这八个证券的价格进行预估。

对证券未来价格进行预测的基础是股市大量的历史数据，这些历史数据主要是每日的开盘价、最高价、最低价、收盘价、成交量等，此外除了这些原始数据外，还可用一些技术指标来做股市分析。本文中进行预估的主要指标为每日收盘价。

2.1 采用神经网络方法对股票价格进行预估

对股价进行预估是采用历史数据来预测未来，但证券系统是一个非线性复杂系统，一些传统的预测方法，如统计法等，效果欠佳。近年来神经网络以其逼近非线性函数的能力而被广泛运用于非线性系统的预测问题^[6]。

在神经网络预测模型中，以往的成果主要集中在对 BP(Back—Propagation)网络的研究中，如文献[7][8]等。但 BP 网络存在收敛速度慢和结果容易陷入局部极值的缺点，这些缺点使 BP 网络的预测效果并不理想。而径向基函数（Radial basis Function，简称 RBF）神经网络是一种新颖有效的神经网络，具有最佳逼近性能和全局最优^[9]的特性，其学习速度、

逼近能力及收敛性都优于BP网络^[10-12]。因而本文采用RBF网络来构建时间序列预测模型，用于预测股票在未来一周的收盘价。

2.1.1 RBF 网络

RBF网络是由一个输入层、一个隐层和一个线性输出层组成的前向网络，其结构如图2.1。隐层采用径向基函数作为网络激活函数，径向基函数为高斯函数，表示为：

$$\Phi_i = \exp(-\|X_j - C_i\|^2 / 2\delta_i^2) \quad (2-1)$$

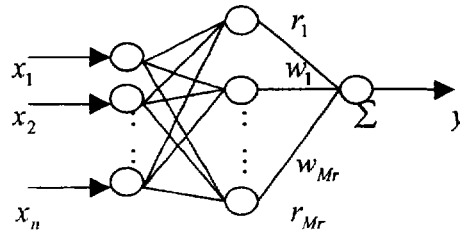


图 2.1 RBF 网络结构

其中， $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为输入， X_j 为第 j 个输入样本， C_i 为第 i 个隐节点的中心参数，且 $C_i \in R^N$ ， δ_i 为宽度参数。

设 $W = (w_1, \dots, w_{Mr})$ 为连接权重， M_r 是隐节点数目。

将网络的输出表示为：

$$Y_j(x) = \sum_{i=1}^{M_r} w_i \Phi_i(X_j) \quad (2-2)$$

其中， $Y_j(x)$ 为第 j 个输出值。

2.1.2 基于 MATLAB 的 RBF 神经网络

MATLAB 的神经网络工具箱为径向基函数网络的仿真提供了丰富的函数，因此本文采用 MATLAB 来仿真 RBF 神经网络的预测^[13]。

网络设计函数

格式: $net = newrb(P, T, GOAL, SPREAD)$

说明: 用径向基函数网络逼近函数时, $newrb$ 可自动增加径向基网络的隐层神经元, 直到均方误差满足为止。

其中: P 为输入矢量; T 为输出矢量; $GOAL$ 为均方误差; $SPREAD$ 为径向基函数的分布。

2.1.3 采用 RBF 网络进行预测

在用神经网络做预测时, 通过选择合适的网络输入输出变量, 来获得更好的预测效果。根据试验分析后, 本文采用这样的方案来进行预测: 输入为前几日的收盘指数 (股价), 输出为后几日的收盘指数 (股价)。即输入为 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其中 $x_i, i = 1, \dots, n$ 依次为前几日的收盘指数; 输出 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, 为后几日收盘指数。

本文中, 股价是一个离散的时间序列, 现在采用序列的前 N 个时刻的值预测后 M 个时刻的值^[11] (即采用前 N 日的收盘指数预测后 M 日的收盘指数)。

假设共采集到数据 L 个, 以 $N + M$ 个数据为一组进行滑动式预测, 则将 L 个数据分为 $(L + 1 - N - M)$ 组。数据的划分方法见下图:

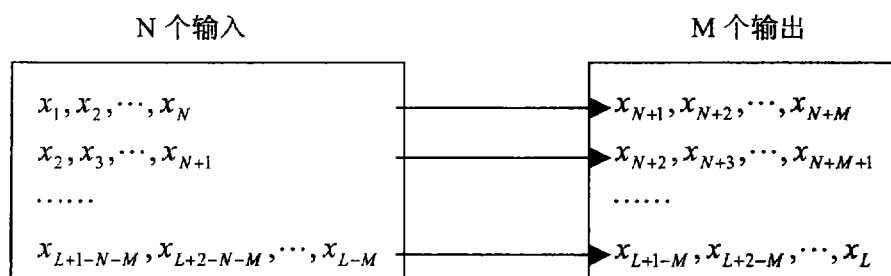


图 2.2 数据的划分方法

在本文中选取的数据为 2003 年 1 月 2 日到 5 月 16 日期间的股票价格。而需要预测的数据为 5 月 19 日到 5 月 23 日的日股票价, 即一周的股价, 以此来分析股价的变化情况。

为了符合网络输入输出对数据的要求, 在学习之前对样本按公式 (2-3) (2-4) 进行线性归一化处理。

$$y_{ij} = \frac{y_{ij} - \min(y_i)}{\max(y_i) - \min(y_i)}, i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, S \quad (2-3)$$

$$x_{ij} = \frac{x_{ij} - \min(x_i)}{\max(x_i) - \min(x_i)}, i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, S \quad (2-4)$$

其中, $S = L + 1 - N - M$ 。

首先进行实证研究, 证实 RBF 的有效性, 选取的证券为 000625, 共采集到其在 2003 年 1 月 2 日到 5 月 16 日间的股票价格数据 80 个, 分别为 (单位: 元): (7.95, 7.66, 7.8, 7.79, 7.99, 8.1, 7.99, 8.28, 8.55, 8.33, 8.45, 8.59, 8.68, 8.85, 8.71, 8.75, 8.84, 8.83, 8.72, 8.6, 8.65, 8.75, 8.66, 8.64, 8.74, 8.94, 9.06, 9.01, 8.75, 9.01, 8.75, 9.01, 9.11, 9.28, 9.43, 9.93, 10, 9.97, 10, 10.36, 10.3, 9.9, 9.92, 10.51, 10.63, 11.25, 11.27, 11.04, 11.66, 11.22, 11.16, 11.4, 11.78, 11.6, 11.44, 11.45, 11.83, 11.6, 11.65, 12.17, 12.77, 13.37, 13.12, 14.43, 14.98, 15.11, 16.62, 17.64, 17.27, 17, 16.91, 17.36, 16.23, 15.16, 15.31, 16.84, 16.39, 16.99, 17.71, 17.76, 17.84)

现假设 5 月 16 日的数据 17.84 为未知数据, 需要进行预测。以 5 天的数据为一个输入组, 即设 $N = 5$, 在本文中为了使预测更准确, 每次预测结果为一个值, 即 $M = 1$ 。

学习过程中取网络中心宽度 $s = 1.0$, 误差 $eg = 0.3$

经过试验得到结果为: 17.67, 而实际值为: 17.84, 误差为 0.95%。并在迭代 25 次后达到 $eg = 0.3$, 见下图。

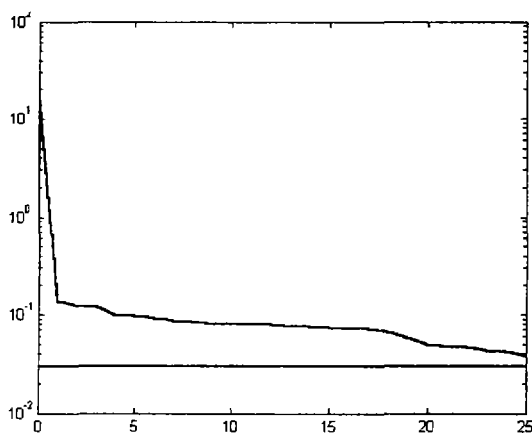


图 2.3 RBF 网络误差变化图

此外,同时采用BP网络进行预测,反复试验五次,得结果为:(17.51, 18.92, 18.22, 16.41, 17.01)误差分别为(1.85%, 6.05%, 2.13%, 8.02%, 4.65%),平均误差为4.54%。由上述结果可知,采用RBF网络进行预测的结果较BP网络预测结果优,同时收敛性方面也是RBF网络优于BP网络。

在预测过程中有一点需注意的是:要选择合适的误差项 eg ,在试验过程中发现,当误差选得过大时会出现拟合不好的情况,导致预测结果不佳;而反之当误差选得过小时,会出现过拟合现象,同样也会使结果不好。因此在预测过程中要进行反复的试验,经试验适合本文问题的误差项 eg 为0.3。

因此,由实证可得出结论:虽然股票市场是复杂的非线性系统,存在着非线性和不确定性,其动态机制非常复杂,但是采用RBF神经网络模型对其进行预测的效果相当好,通过与其他方法比较也看出了该方法具有优越性和可行性。因此,下文采用RBF网络来进行预测。

在实际应用中需预测出后5日的股票价格(因下文收益率计算以周为单位,而一周有5个股价数据),而本文采用的方法是每组预测样本中预测值的个数为 $M=1$,即每次只能预测出一个值,因此本文中采用将已得的预测值当作已知值来进行输入,即假设首先通过预测得出5月19日的股价,然后再将以得数据作为输入值来预测5月20日的股价,以此类推进行滚动预测。

表 2.1 为八只股票在 5 月 19 日到 5 月 23 日预测价格(各股票的历史价格见附录):

表 2.1 股票预测价格

	000717	600104	600002	000625	600886	600166	600780	000063
5.19	12.39	12.60	5.89	16.85	12.46	15.38	14.24	21.30
5.20	12.58	12.59	5.95	17.01	12.49	14.68	14.41	21.32
5.21	12.61	13.01	5.90	17.56	12.78	14.89	14.56	21.20
5.22	12.78	13.13	5.96	19.11	12.59	15.34	14.91	21.28
5.23	13.34	13.04	6.04	19.25	12.89	15.56	15.21	21.67

根据上表,在 5.19 日到 5.23 日的收盘价日增长率为:

表 2.2 股票日增长率

	000717	600104	600002	000625	600886	600166	600780	000063
5.19	-0.0064	-0.019	0.0232	-0.0555	-0.0095	0.0199	-0.0352	0.0005
5.20	0.0153	-0.0008	0.0102	0.0095	0.0024	-0.0455	0.0199	0.0009
5.21	0.0023	0.0333	-0.0084	0.0323	0.0232	0.0143	0.0104	-0.0056
5.22	0.0135	0.0092	0.0102	0.0883	-0.0149	0.0302	0.0240	0.0038
5.23	0.0438	-0.0069	0.0134	0.0073	0.0238	0.0143	0.0201	0.0183

对以上预测结果作简单分析,认为在这段时期内所选定的几只股票价格变化是正常的,且没有出现诸如集体下降的趋势,因此在这段时期内可选择进行投资,并投资于所选择的股票。

3 期望收益和方差

组合投资理论为进行多元化投资提供了有实际应用价值的建议：第一，应根据证券的预期收益及其与市场上其他证券收益的相关关系来构建组合；第二，不仅要考虑收益，还要考虑收益的波动；第三，要有效降低证券组合的标准差，一般来说证券组合中至少应包含多种证券。

因此，在对证券做了初步选取后，要估计出这些证券的期望收益率、方差以及它们相互之间的协方差系数。对期望收益率、方差及协方差的估计可利用历史数据通过统计估计技术来完成。在市场相对稳定的情况下，该种估计具有良好的精确性，在不稳定情况下，需对未来形势做出分析的基础上对估计做一定改进。

通过分析各所选股票的历史价格及第二章中做的预估，认为市场较为稳定，因而可直接采用估计方法。

3.1 期望收益率

期望收益率的计算方法：采用算术平均法计算收益率，算术平均法是将各历史时期已实现的收益率（记为 r_k ）加起来，然后再除以时期数（记为 M ）。即：

$$E(r) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^m r_k \quad (3-1)$$

这里 $E(r)$ 代表算术平均收益率，即用算术平均法所得到的平均收益率。

在本文中 r_k 表示周收益率，该收益率为期间收益率，其数学表达式为：

$$r_k = \frac{EMV - BMV}{BMV} \quad (3-2)$$

其中， EMV 为末期市场价值； BMV 为初期市场价值。在本文中 EMV 为本周末收盘价， BMV 为上周末收盘价。

若一个组合中有 N 种证券，过去 M 周内期间收益率记为：

$$\mathfrak{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix}$$

则称为收益率矩阵。

根据收益率矩阵可计算得平均收益率矩阵 $E(r)=[E(r_1), E(r_2) \cdots E(r_n)]$ ，其中

$$E(r_i) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^m r_{ik}, \quad i=1,2,\cdots,n. \quad k=1,2,\cdots,m.$$

3.2 方差

收益率的方差是一种衡量资产的各种可能收益率相对于期望收益率的分散程度指标，通常将收益率的方差用来衡量资产风险的大小。

方差通常用 σ^2 来表示，计算公式为：

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^m P_k [r_k - E(r)]^2 \quad (3-3)$$

P_k 为收益率 r_k 发生的概率，由于本文中计算的是某资产 M 周以来的收益率的方差，

因此将 P_k 简化为 $\frac{1}{M}$ ，即方差计算公式为：

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^m \frac{1}{M} [r_k - E(r)]^2 \quad (3-4)$$

方差是用来衡量某一种资产或证券组合的收益率波动性大小的指标，而协方差则是用来衡量两种资产收益率的同向型，即同动程度的指标。如两种资产的收益率趋向于同增或同减，那么他们间的协方差便为正值，如一种升高而另一种降低则协方差为负值。

如果两种资产的收益率随市场条件的变化而同增同减，那么这两种资产间的同动程度很高，称为正相关。在组合中，两种资产同动程度越弱，则该组的风险也越小。

计算两资产间的协方差的公式如下：

$$Cov(r_A, r_B) = \sum_{k=1}^M \frac{1}{M} [r_{A,k} - E(r_A)][r_{B,k} - E(r_B)] \quad (3-5)$$

因而，方差可视为是 $r_A = r_B$ 时的协方差。故两种证券间的协方差为：

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^m [r_{ik} - E(r_i)][r_{jk} - E(r_j)], \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \quad (3-6)$$

称 σ_{ij} 是第 i 种证券与第 j 种证券的协方差。

$$\text{记 } \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

称为投资组合的方差—协方差矩阵。

3.3 计算期望收益率及方差

则根据公式（3-2）计算，得到八只证券的周收益率数据为：

表 3.1 周收益率数据

股票代码	000717	600104	600002	000625	600886	600166	600780	000063
1	14.08	4.67	3.79	4.31	4.89	8.50	4.75	6.70
2	-0.69	9.21	6.01	7.51	4.99	6.05	15.15	17.52
3	-4.41	2.90	6.16	1.86	7.80	0.47	-0.19	0.50
4	1.34	3.46	0.46	-0.34	-0.45	1.12	1.83	3.46
5	0.36	-3.34	1.39	-0.92	2.16	-0.09	-0.19	-1.08
股 6	-1.67	-1.54	-1.82	1.27	1.56	-1.01	-2.08	-3.87
票 7	0.61	5.59	2.09	13.49	8.32	8.85	5.03	5.78
周 8	4.35	1.97	1.82	3.73	-2.93	0.86	-1.47	3.33
收 9	1.74	1.93	2.90	9.22	3.43	-0.76	0	0.34
益 10	3.19	0.95	-1.08	-0.8	1.01	6.84	3.83	-0.12
率 11	0.88	5.16	1.97	2.60	5.18	-1.92	1.71	0.69
12	2.40	5.25	1.29	11.53	2.94	4.32	3.19	3.87
13	9.61	6.68	4.25	18.32	0.92	-0.63	9.69	3.23
14	9.35	17.30	-0.20	12.51	11.58	8.89	5.47	8.82
15	-7.39	-11.19	-3.06	-9.94	-13.81	-2.10	-9.56	-8.69
16	10.10	13.93	11.79	10.97	7.01	8.63	12.12	3.74
17	8.91	8.12	13.56	3.24	11.43	2.45	7.89	6.59

根据公式（3-1），得期望收益率为：

$$R = 10^{-2} \times (3.10, 4.17, 3.02, 5.21, 3.30, 2.97, 3.36, 2.99)^T$$

根据公式（3-6），得协方差为：

$$\Sigma = 10^{-4} \begin{bmatrix} 30.23 & 22.92 & 10.83 & 20.21 & 15.27 & 11.75 & 18.32 & 13.85 \\ 22.92 & 39.32 & 14.51 & 31.07 & 28.72 & 16.12 & 28.62 & 26.12 \\ 10.83 & 14.51 & 18.40 & 9.62 & 14.34 & 4.15 & 15.89 & 10.89 \\ 30.21 & 31.07 & 9.62 & 44.86 & 21.98 & 11.56 & 25.47 & 20.58 \\ 15.27 & 28.72 & 14.34 & 21.98 & 33.16 & 12.05 & 20.72 & 19.28 \\ 11.76 & 16.12 & 4.15 & 11.56 & 12.05 & 16.15 & 13.70 & 13.62 \\ 18.32 & 28.62 & 15.89 & 25.47 & 20.72 & 13.70 & 32.20 & 25.77 \\ 13.85 & 26.12 & 10.89 & 20.58 & 19.28 & 13.62 & 25.77 & 29.98 \end{bmatrix}$$

3.4 相关系数的计算

从协方差是正值还是负值，可以看出两个证券收益率是同向运动还是反向运动。但是从中并不能断定这两种证券的联系有多大。两随机变量的同动性部分依赖两随机变量各自的波动性有多大。

如果两变量的关系很密切，那么，这两变量间的相关性就很强；如果两变量的关系不密切，那么，他们间的相关性则较弱。协方差不能直接用来比较两变量间相关性的强弱，即不能直接用来比较两变量间关系的密切程度的大小。但是，相关系数可以解决上述问题。相关系数记为 ρ ，其计算公式为：

$$\rho_{A,B} = \frac{Cov(R_A, R_B)}{\sigma_A \sigma_B} \quad (3-7)$$

由于 σ_A, σ_B 的值总为正值，故相关系数的 $\rho_{A,B}$ 符号取决于协方差 $Cov(R_A, R_B)$ 的符号。当协方差为正值时，相关系数也为正；反之，当协方差为负时，相关系数也为负。相关系数 $\rho_{A,B}$ 的大小在 -1 与 $+1$ 之间，即 $-1 \leq \rho_{A,B} \leq 1$ ，相关系数可直接用来比较两证券收益率间的相关性。

根据公式 (3-7)，计算八只证券的相关系数：

$$\rho = \begin{Bmatrix} 1 & 0.66 & 0.46 & 0.55 & 0.48 & 0.53 & 0.59 & 0.46 \\ 0.66 & 1 & 0.54 & 0.74 & 0.64 & 0.63 & 0.80 & 0.76 \\ 0.46 & 0.54 & 1 & 0.33 & 0.58 & 0.24 & 0.65 & 0.46 \\ 0.55 & 0.74 & 0.33 & 1 & 0.57 & 0.42 & 0.67 & 0.56 \\ 0.48 & 0.80 & 0.58 & 0.57 & 1 & 0.52 & 0.63 & 0.61 \\ 0.53 & 0.64 & 0.24 & 0.42 & 0.52 & 1 & 0.60 & 0.62 \\ 0.59 & 0.80 & 0.65 & 0.67 & 0.63 & 0.60 & 1 & 0.83 \\ 0.46 & 0.76 & 0.46 & 0.56 & 0.61 & 0.62 & 0.83 & 1 \end{Bmatrix}$$

由结果可知，由于协方差均为非负，相关系数均为 $0 \leq \rho_{A,B} \leq 1$ ，即均为正相关。对这些相关系数进行分析，发现相关系数有大有小，但从普遍看比较大，大多数超过 0.5，最大达到了 0.83，说明这一段时期内，所选定的八种证券随市场变化同增同减的程度较高。这样对于风险的分散不利，因此考虑加入一些与所选证券相关系数较小的证券来分散风险。

3.5 调整证券

经过挑选引入证券 600205（山东铝业），首先采用 RBF 神经网络对其进行预测，发现满足要求（即没有骤降趋势），随后计算其周收益率，为：

表 3.2 股票（600205）周收益率

600205	1	2	3	4	5	6	7	8
收益 (%)	5.26	6.25	-0.9	6.89	6.11	-1.57	0	2.98
9	10	11	12	13	14	15	16	17
1.03	1.84	3.01	2.24	4.86	-0.5	-2.29	10.94	5.99

则将证券 600205 加入，再根据公式（3-1）计算期望收益率为：

$$R = 10^{-2} \times (3.14, 3.10, 4.17, 3.02, 5.21, 3.30, 2.97, 3.36, 2.99)^T$$

根据公式（3-6）得协方差为：

$$\Sigma = 10^{-4} \begin{bmatrix} 11.65 & 10.24 & 9.37 & 9.61 & 4.98 & 5.14 & 3.61 & 12.85 & 8.52 \\ 10.24 & 30.23 & 22.92 & 10.83 & 20.21 & 15.27 & 11.75 & 18.32 & 13.85 \\ 9.37 & 22.92 & 39.32 & 14.51 & 31.07 & 28.72 & 16.12 & 28.62 & 26.12 \\ 9.61 & 10.83 & 14.51 & 18.40 & 9.62 & 14.34 & 4.15 & 15.89 & 10.89 \\ 4.98 & 30.21 & 31.07 & 9.62 & 44.86 & 21.98 & 11.56 & 25.47 & 20.58 \\ 5.64 & 15.27 & 28.72 & 14.34 & 21.98 & 33.16 & 12.05 & 20.72 & 19.28 \\ 3.61 & 11.76 & 16.12 & 4.15 & 11.56 & 12.05 & 16.15 & 13.70 & 13.62 \\ 12.85 & 18.32 & 28.62 & 15.89 & 25.47 & 20.72 & 13.70 & 32.20 & 25.77 \\ 8.52 & 13.85 & 26.12 & 10.89 & 20.58 & 19.28 & 13.62 & 25.77 & 29.98 \end{bmatrix}$$

根据公式 (3-7) 得相关系数为:

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0.55 & 0.44 & 0.66 & 0.22 & 0.26 & 0.26 & 0.66 & 0.46 \\ 0.55 & 1 & 0.66 & 0.46 & 0.55 & 0.48 & 0.53 & 0.59 & 0.46 \\ 0.44 & 0.66 & 1 & 0.54 & 0.74 & 0.64 & 0.63 & 0.80 & 0.76 \\ 0.66 & 0.46 & 0.54 & 1 & 0.33 & 0.58 & 0.24 & 0.65 & 0.46 \\ 0.22 & 0.55 & 0.74 & 0.33 & 1 & 0.57 & 0.42 & 0.67 & 0.56 \\ 0.26 & 0.48 & 0.80 & 0.58 & 0.57 & 1 & 0.52 & 0.63 & 0.61 \\ 0.26 & 0.53 & 0.64 & 0.24 & 0.42 & 0.52 & 1 & 0.60 & 0.62 \\ 0.66 & 0.59 & 0.80 & 0.65 & 0.67 & 0.63 & 0.60 & 1 & 0.83 \\ 0.46 & 0.46 & 0.76 & 0.46 & 0.56 & 0.61 & 0.62 & 0.83 & 1 \end{bmatrix}$$

由结果看, 新引入的证券与其它证券的相关系数相对较小, 可以起到一定的分散风险的作用。

4 投资模型构造

在挑选到合适的证券之后，下面的目标就是要计算如何将资金合理的分配在各个证券之上，使其能够满足投资者的要求。因此，首先要构建一个符合要求的模型。

4.1 初始模型

如前所述 Markowitz 理论采用证券的期望收益率表示证券收益；用证券收益的方差表示风险。其研究目的是：寻找投资组合，使其在风险一定的条件下，收益达到最大；或在收益一定的条件下，风险达到最小。从其研究目的及方法看，该模型是单目标规划模型，在优化过程中对收益和风险中的一个目标进行优化。

考虑到在实际的投资中，理性的投资者总是追求收益尽可能的大、风险尽可能的小的投资组合，因此，本文利用多目标规划^[14-17]的方法，建立了多目标证券组合投资模型，并设期望收益率与风险率分别为 $E(R)$ 和 σ^2 ，各项资产的投资比例为 $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ ，则构建模型 A 为：

$$\max E(R) = R^T W \quad (4-1)$$

$$\min \sigma^2 = W^T \Sigma W \quad (4-2)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 1^T W = 1 \\ w_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4-3)$$

4.2 模型改进

4.2.1 模型中加入交易费用

由于在实际的证券交易中总是需要交易费^[18]，交易费用通常是这样规定的：

$$C(w_i) = \begin{cases} w_i S c_i, & w_i S \geq a_i \\ a_i c_i, & w_i S \leq a_i \end{cases} \quad (4-4)$$

S 为总资产额， c_i ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，为第 i 种资产的交易费用率， $C(w_i)$ 为第 i 种资产的交

易费用。当购买额不超过给定值 $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ 时, 交易费用按购买 a_i 计算。因而, 当投资规模不大, 且其中某一项资产的投资额没有超过 a_i 时, 该项资产的交易费用相对提高了, 为 $\frac{w_i S}{a_i} c_i$, 投资者的收益就相应减少, 会影响投资者在该项上的投资决策, 并且交易费用会影响最终收益, 所以引入交易费用是必要的。因此要对模型进行修正, 转化为模型 B:

$$\max E_1(R) = R^T W - \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n C(w_i) \quad (4-5)$$

$$\min \sigma^2 = W^T \Sigma W \quad (4-6)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 1^T W = 1 \\ w_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4-7)$$

4.2.2 模型中加入无风险资产

此外投资者可能希望组合中包含无风险资产, 因而引入无风险资产来降低投资组合的风险, 假设比例为 w_0 , 则扩展为模型 C:

$$\max E_2(R) = R^T W - \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n C(w_i) + r_0 w_0 \quad (4-8)$$

$$\min \sigma^2 = W^T \Sigma W \quad (4-9)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 1^T W + w_0 = 1 \\ w_j \geq 0, j = 0, 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4-10)$$

无风险资产 r_0 假设为银行存款。

4.3 将多目标规划转化为单目标规划

至此构造了一个能同时优化收益及风险的多目标决策模型。由于直接求解多目标规划模型比较困难, 因此将其转化为单目标模型^[19]。本文采用多目标规划的模糊优选法, 将其转化为单目标规划。

由此将上述模型 B 转化为模型 D:

$$\min F(\sigma, -E_1(R)) = \mu\sigma - (1 - \mu)E_1(R) \quad (4-11)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 1^T W = 1 \\ w_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4-12)$$

将模型 C 转化为模型 E:

$$\min F(\sigma, -E_2(R)) = \mu\sigma - (1 - \mu)E_2(R) \quad (4-13)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 1^T W + w_0 = 1 \\ w_j \geq 0, j = 0, 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (4-14)$$

权重 μ 表示投资者对投资风险厌恶情况。 μ 的取值范围为 $0 \leq \mu \leq 1$, μ 数值越大, 说明投资者越不能接受风险, $\mu = 1$ 时投资者完全规避风险。

说明, 在 Markowitz 投资组合理论中, 认为方差是衡量风险的标准, 故在多目标模型 B、C 中采用 σ^2 表示要优化的风险。但在加权相加操作中, 需要两个目标函数的量纲一致, 故将标准差 σ 作为风险度量。由于 $\min \sigma^2 = W^T \Sigma W$ 与 $\min \sigma = (W^T \Sigma W)^{1/2}$ 是一致的, 因此这样的修正是合理的。

至此, 我们完成了组合决策模型的构造, 该模型同时优化了收益和风险两个目标, 且在实际的投资过程中可根据投资者对风险的厌恶程度, 选定不同的风险厌恶系数来进行决策投资。

假设总资产 S 为 1000000 元, $a_i, i = 1, 2, \dots, 4$ 均为 5000 元, 交易费用率分别假设为 (0.006, 0.002, 0.003, 0.004, 0.005, 0.002, 0.004, 0.003, 0.002)。银行利率 r_0 假设为 2%。

5.有效解的求解方法

本文的模型是一个典型的非线性规划问题，经研究发现一些传统的数学方法如拉格朗日法等，求解比较复杂，很难得到有效解，即使得到有效解也容易陷入局部最优；此外，由于本文模型中，交易费用的计算要在获得投资比例之后才能确定，传统方法求解也存在困难。所以本文采用遗传算法进行求解^[20-23]。

5.1 遗传算法

5.1.1 算法简介

遗传算法（genetic algorithm, GA）^[24-26]于20世纪60年代末期到70年代初期，主要由美国Michigan大学的John Holland与其同事、学生们研究形成的一个较为完备的理论和方法，从试图解释自然系统中生物的复杂适应过程入手，模拟生物进化的机制来构造人工系统的模型。

生物遗传物质的主要载体是染色体，在遗传算法中，染色体通常是遗传数据，用来作为优化问题的解的代码，其本身不一定是解。遗传算法一般经过以下几个过程^[27-28]：首先，随机产生一定数目的染色体，这些随机产生的染色体组成一个种群。种群中染色体的数目称为种群的大小或种群规模。然后，用评价函数来评价每一个染色体的优劣，即染色体对环境的适应程度（称为适应度），用来作为以后遗传操作的依据。接着，进行选择过程，选择的目的是为了从当前种群中选出优良的染色体，使它们成为新一代的染色体。判断染色体优良与否的准则就是各自的适应度，即染色体的适应度越高，其被选择的机会就越多。通过选择过程产生一个新的种群。对这个新的种群进行交叉操作，交叉操作是遗传算法中主要的遗传操作之一。接着进行变异操作，变异操作的目的是挖掘种群中个体的多样性，克服有可能陷入局部解的弊病。这样，经过运算产生的染色体称为后代，然后对新的种群（即后代）重复进行选择、交叉、和变异操作，经过给定次数的迭代处理后把最好的染色体作为优化问题的最优解输出。

因此遗传算法是一种采用“适者生存”仿自然法则，基于种群（population）设计，并加入自然选择、交叉及变异操作的随机优化与搜索方法^[29-31]。它具有高度的鲁棒性、并行

性、及全局优化性等鲜明特征。其选择、交叉、变异运算均以一种概率方式进行，故增加了搜索过程的灵活性，且随着进化过程的进行，新种群中总会更多的产生出优良的个体，如果在每代进化过程中保留最优解，则对于全局最优化问题，随着进化代数的趋于无穷，遗传算法以概率 1 收敛于全局最优解。

5.1.2 算法设计与实现

基本遗传算法 (Simple Genetic Algorithm, SGA) 可定义为一个 8 元组^[32]：

$$SGA = (C, E, P_0, M, \Phi, \Gamma, \Psi, T)$$

其中， C ——个体的编码方法，SGA 使用固定长度二进制符号串的编码方法； E ——个体的适应度评价函数； P_0 ——初始种群； M ——群体的大小，一般取 20-100； Φ ——选择算子，SGA 使用比例选择算子； Γ ——交叉算子，SGA 使用单点交叉算子； Ψ ——变异算子，SGA 使用基本为变异算子； T ——算法中止条件。

(1) 问题的表示

对于一个实际的待优化问题，首先需要将其表示为适合遗传算法操作的形式。以二进制编码为例，包括以下几个步骤：

1. 根据问题确定待寻优的参数；
2. 对每个参数确定它的变化范围，并用一个二进制数来表示。例：如参数 a 的变化范围为 $[a_{\min}, a_{\max}]$ ，用 m 位二进制数 b 来表示，则二者之间满足：

$$a = a_{\min} + \frac{b}{2^m - 1} (a_{\max} - a_{\min}) \quad (5-1)$$

这时参数范围的确定应覆盖全部的寻优空间，字长 m 的确定应在满足精度要求情况下尽量取小的 m ，以尽量减小遗传算法计算的复杂性。

3. 将所有表示参数的二进制数串接起来组成一个长的二进制字符串。该字符串的每一位只有 0 或 1 两种取值。该字符串即为遗传算法的操作对象。

(2) 初始种群的产生

产生初始种群的方法通常有两种。一种是完全随机的方法产生的，该方法适合于对问题的解无任何先验知识的情况。某些先验知识可转变为必须满足的一组要求，然后在满足这些要求的解中再随机的选取样本。这样选择初始种群可使遗传算法更快的到达最优解。

5.1.3 针对本文问题的遗传算法实现

首先，由于前文研究的模型 D 和 E 是一个带有线性约束的规划模型，因此，要采用求解线性约束最优化问题的遗传算法来解决。

经过对模型进行分析发现，由于前文模型的约束比较简单，为：

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 1^T W = 1 \\ w_j \geq 0, j = 0, 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (5-2)$$

即仅要求所有的解均大于 0，且所有的解和为 1，当然，其中也隐藏了所有的解都要小于 1，即 $0 \leq w_j \leq 1, j = 1, 2, \dots, n$ 。因此，尝试采用以下方法来解决约束问题：

第一，对于解都要大于 0 而小于 1 这个问题，在编码、解码的时候直接实现，即使：

$$a = 0 + \frac{b}{2^m - 1} (1 - 0) \quad (5-3)$$

即：

$$a = \frac{b}{2^m - 1} \quad (5-4)$$

第二，所有解之和为 1，对于这个问题，在编解码时不予考虑，在得到解之后立即对所有的解进行归一化处理，经过归一化处理后，既实现了使所有解的和为 1，又不改变各解的比例，因此不会对计算带来影响。

通过以上处理，解决了约束问题，而遗传算法的求解不受影响。

(1) 给出具体的遗传算法步骤：

步骤 1：编码

本文采用二进制向量表示各染色体，将变量值代表的个体表示为一个 {0, 1} 二进制串。各向量元素表示对应的证券的投资比例。串长取决于求解精度，本文中各投资比例要求精确到小数点后四位，而求解区间长度为 (0—1)，因此将区间分为 $(1-0) * 10^4$ 等份。由于 $8192 = 2^{13} < 1 * 10^4 < 2^{14} = 16384$ ，因此编码的二进制长至少为 14 位。

步骤 2：初始化

由于本文需求解的未知数为多个，因此考虑将每个染色体定义为一个数组，数组个数即为证券只数，随机产生一组具有 m 个染色体 (即有 m 个数组) 的种群 $X = (X[n]_1, X[n]_2, \dots, X[n]_m)^T$ 。其中 $X[i]_j, i = 1, 2, \dots, m, x_{ij}, j = 1, 2, \dots, n$ 表示第 j 种证券在第 i 个染色体中占总投资的比重，且共有 n 种证券。

步骤 3: 评价函数

评价函数 (用 $eval(X_i)$ 表示) 用来对种群的每个染色体设定概率, 以使该染色体被选择的可能性与其种群中其他染色体的适应都成比例。本文中直接采用待求解的单目标函数 $F(W) = \mu\sigma - (1 - \mu)E(R)$ 来定义适应值 $Fit(F(W))$ [33]。由于目标函数为最小值问题, 因此适应度函数为 $Fit(F(W)) = -F(W)$ 。由于偏好系数范围为 $[0, 1]$, 所以 $Fit(F(W))$ 可能出现负值情况, 这样会出现不满足在常用的轮盘赌选择中概率非负要求的情况, 因此, 根据情况将适应度修正为:

$$Fit(F(W)) = -F(W) + X \quad (5-5)$$

由于目标函数为最小问题, 因此 X 为 $F(W)$ 的最大估计值, 据分析 $F(W)$ 的最大值为当 $\mu = 1$ 时的情况, 也即投资者完全风险规避的状态, 此时:

$$F(W) = 1 \times \sigma_{\min} - (1 - 1)E(R) = \sigma_{\min} \quad (5-6)$$

理论上来说这个值为风险最小的证券的方差, 但在实际计算中不可能得到这样的解: 即风险最小的证券的投资比例为 1, 而其它证券的投资比例均为 0; 此外, 当证券中含有无风险资产时, $F(W)$ 的值也不会正好等于 0, 因此这个值不易估计。所以, 为了保证求解在本文中假定 $X = 1$, 即:

$$Fit(F(W)) = -F(W) + 1 \quad (5-7)$$

由于 $X = 1 > F(W)$, 这样就能确保 $Fit(F(W))$ 为非负。

最后定义评价函数为:

$$eval(w_i) = Fit(F(w_i)) / \sum_i^m Fit(F(w_i)) \quad (5-8)$$

步骤 4: 遗传操作

(1) 选择算子

采用赌轮 (Roulette Wheel) 随机选择染色体, 使该染色体被选择的可能性与其种群中其它染色体的适应性成比例, 保证优良基因遗传给下一代。旋转赌轮 m 次, 每次为新种群选择一个染色体, 赌轮按每个染色体的适应度选择, 具体步骤为:

Step1: 对每个染色体 X_i , 计算累计概率 q_i ,

$$\begin{cases} q_0 = 0 \\ q_i = \sum_{j=1}^i eval(X_j), i = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (5-9)$$

Step2: 从区间 $(0,1]$ 中产生一个随机数 r ;

Step3: 若 $q_{i-1} < r \leq q_i$, 则选择第 i 个染色体 $V_i (1 \leq i \leq m)$;

Step4: 重复 Step2, Step3 共 m 次, 可得 m 个复制染色体。

(2)交叉操作

交叉 (crossover) 是以某个概率 P_c 选择父个体, 将两个父个体的部分结构进行替换重组生成新个体以扩大搜索范围, 交叉的目的是为了能够使下一代产生新的个体, 通过重组交叉操作, 遗传算法的搜索能力得以飞跃地提高。因而交叉操作是遗传算法获取新优良个体的最重要方法。本文采用单点交叉法^[34-35]。根据输入的交叉概率 P_c 选择交叉父代, 随机配对后进行交叉。例:

$$S_1 = \langle 00000 \mid 101110000000010000 \rangle$$

$$S_2 = \langle 11100 \mid 100000111111000101 \rangle$$

随机选择交叉点, 例第 5 位与第 6 位之间, 则交叉后产生新个体为:

$$S_1' = \langle 00000 \mid 100000111111000101 \rangle$$

$$S_2' = \langle 11100 \mid 101110000000010000 \rangle$$

(3)变异操作

变异 (mutation) 是以概率 P_m 随机选定个体, 将个体的某一位或某几位进行取反运算, 即“1”变为“0”或将“0”变为“1”, 以保持种群的多样性。随机选择一个遗传因子 (例选中 S_2' 的第 5 个遗传因子) 变异, 遗传因子由原来的 0 变为 1, 产生新的个体为:

$$S_2' = \langle 11101 \mid 101110000000010000 \rangle$$

步骤 5: 计算目标值

通过选择、交叉和变异，产生新一代染色体，对染色体各向量进行解码，通过运算转换为 $0 \sim 1$ 之间的实数。将染色体各向量进行归一化运算，所得即为各证券投资比例。

计算目标值，保留最好的染色体。

给定进化代数 T 次，进行 T 次选择、交叉和变异，从中找出最优解。

(2) 将上述过程归纳为：

Step1: 输入参数 m, p_c, p_m, T ;

Step2: 从搜索空间中随机产生 m 个染色体，并对其进行可行化；

Step3: 通过交叉、变异，更新染色体，并记录最好的染色体；

Step4: 计算每个染色体的适应值，采用旋转赌轮来选择下一代染色体；

Step5: 重复步骤 3、4 共 T 次；

Step6: 记录最好的染色体，作为问题的最优解。

5.1.4 遗传算法的流程图

通过以上研究，了解了适合本文问题的遗传算法的编制步骤，接下来是具体的编程过程。

分别给出遗传算法流程图、种群初始化流程图和产生新一代种群的流程图。并且根据流程图编制适合本文所研究问题的遗传算法程序（本文程序采用 C 语言编制而成）。

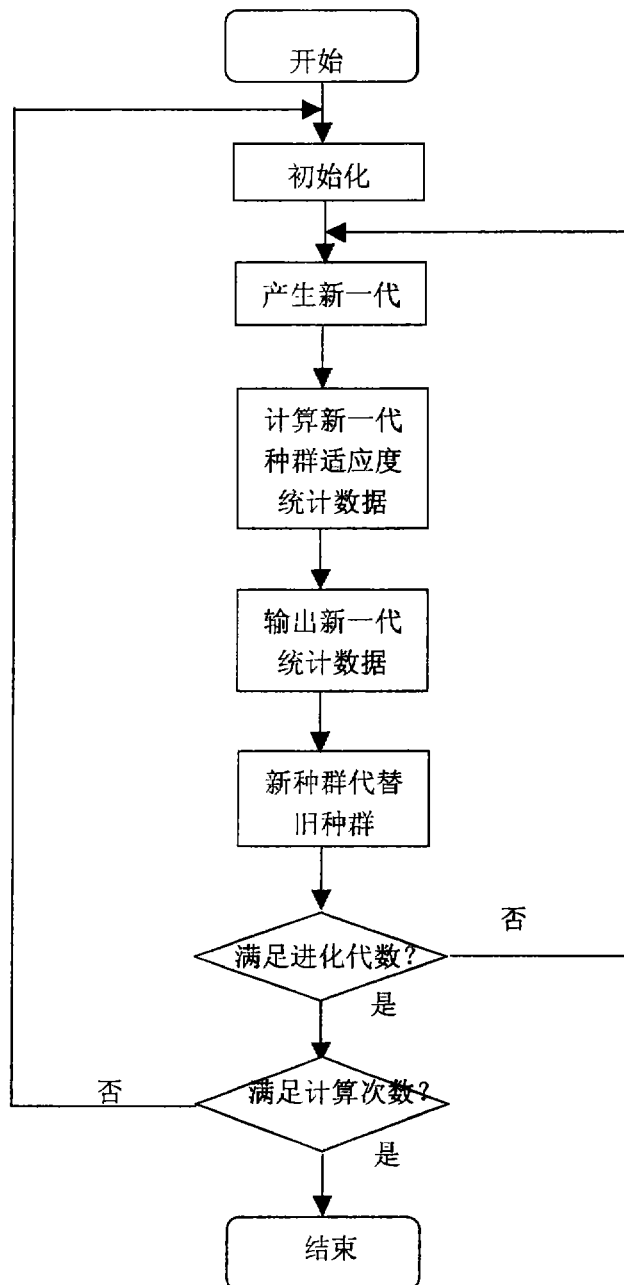


图 5.1 遗传算法流程图

其中初始化过程和产生新一代种群的流程图分别为：

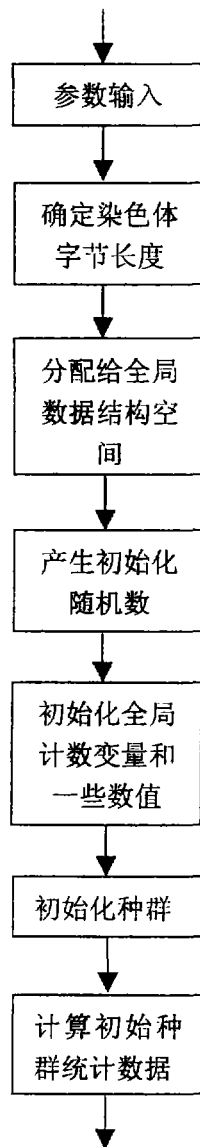


图 5.2 种群初始化

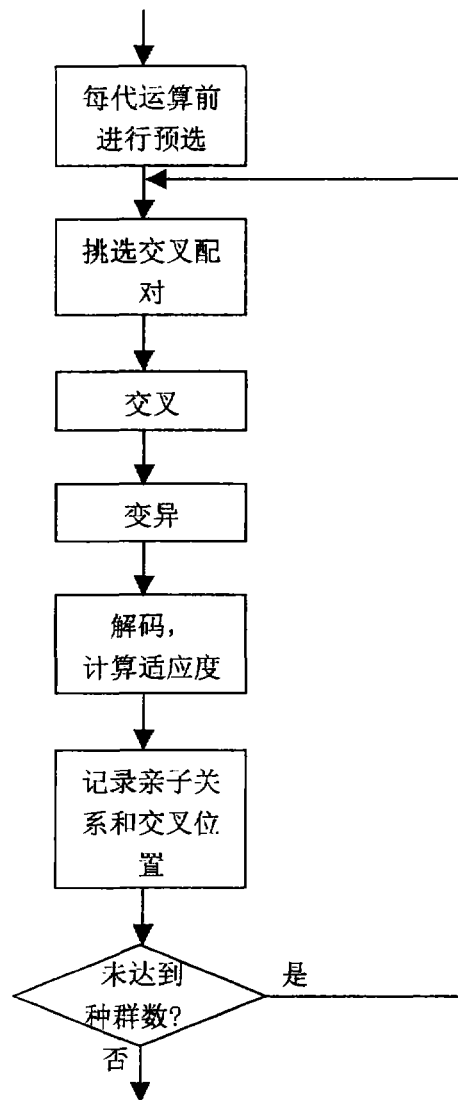


图 5.3 种群新一代的产生

5.2 计算

在运算遗传算法程序时，需要对一些参数做选择，它们包括种群的大小、染色体长度、交叉率、变异率、最大进化代数等，这些参数对遗传算法的性能都有很重要的影响。

选择较大数目的初始种群可以同时处理更多的解，因而容易找到全局最优解，其缺点是增加每次迭代的时间，一般取 20-100，本文选择初始染色体个数为 30；由于本文中证券只数较多，即要求的未知数较多，因此要求较多的进化代数以获得最优解，本文选定进化

代数 为 10000；染色体长度的选择根据前文的计算至少为 14，在本文中 选择染色体长度为 20；交叉率的选择决定了交叉操作的频率，频率越高，可以越快的收敛到最有希望的最优解区域，因此一般选取较大的交叉概率，但太高的频率也可能导致过早收敛，一般取值 0.4-0.9。变异率 的选取一般受种群大小、染色体长度等因素影响，通常选取很小的值，一般取 0.001-0.1。若选取高的变异率，虽然增加样本模式的多样性，但可能会引起不稳定。交叉概率和变异概率的选择是一件比较繁琐的工作，在对同一问题的求解过程中，采用不同的变异概率或交叉概率，会产生不同的结果，因此在求解过程中，要通过反复试验来确定合适的交叉概率和变异概率^[32]。

表 5.1 本文遗传算法参数

种群大小	=30
染色体长度	=20
最大进化代数	=10000

以模型 E 为例，进行实证计算，取风险厌恶系数为 0.32 的情况。

$$\begin{aligned} \min \quad & F(\sigma, -E_2(R)) = 0.32\sigma - 0.68E_2(R) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 1^T W + w_0 = 1 \\ w_j \geq 0, j = 0, 1, 2, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

取变异概率为 0.08，分别取不同的交叉概率，得表 5.2：

表 5.2 取不同变异概率时的解情况

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
W1(%)	14.91	23.05	5.06	22.83	26.38	24.75	16.54	2044	28.89
W2(%)	5.27	3.42	7.40	3.38	2.26	0.65	2.39	1.13	3.56
W3(%)	0.30	3.22	0.42	1.38	0.39	5.20	2.69	1.64	6.11
W4(%)	9.19	5.78	9.23	4.75	0.65	1.23	13.11	6.35	1.16
W5(%)	28.85	29.23	25.85	28.51	25.98	23.41	27.50	26.29	25.97
W6(%)	2.0	0.24	7.61	1.58	8.36	4.59	0.47	0.26	1.60
W7(%)	9.16	2.74	1.27	14.22	3.98	13.95	2.39	14.72	5.76
W8(%)	2.43	3.97	1.27	1.04	4.06	0.85	0.03	2.91	1.47
W9(%)	0.40	3.03	3.19	0.61	2.06	1.04	6.24	0.03	1.28
W0(%)	27.49	25.32	37.80	21.70	25.88	24.33	28.64	26.23	24.20
E(R)(%)	3.05	3.10	2.97	3.07	3.03	3.00	3.03	2.99	3.07
σ(%)	2.94	3.07	2.79	2.98	2.93	2.85	2.91	2.80	2.97

观察这个表中数据，可发现当取不同的交叉概率时具体组合及风险收益的值都不同，同样经过试验发现取不同的变异概率时也有这种情况。这些组合所得到的风险与组合的优

劣主要由适应值来决定（适应值越大越优），根据计算，适应值情况见下表：

表 5.3 取不同交叉概率时的适应值情况

交叉概率	0.1	0.2	0.3	0.4
适应值	1.011931	1.011873	1.011844	1.011945
0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1.011824	1.011865	1.011886	1.011951	1.011976

因此，理论上来说只要尝试足够多的交叉概率（变异概率），在这些组合中必能找到一组相对最好的解。但获得这个最优解的前提是要进行足够多的反复试验，这在实际情况中是不可能实现的。

因此，要对遗传算法进行改进，考虑采用自适应遗传算法来减少工作量，并提高性能。

5.3 自适应遗传算法

遗传算法的参数交叉概率与变异概率的选择是影响遗传算法行为及性能的关键所在，直接影响算法的收敛性，交叉概率越大，新个体产生的速度就越快。然而，交叉概率过大时遗传模式被破坏的可能性也越大，使得具有高适应度的个体结构很快就会被破坏；但是如果交叉概率过小就会使搜索过程缓慢，以至停滞不前。对于变异概率，变异概率过小就不易产生新的个体结构；如果变异概率过大，那么遗传算法就变成了纯粹的随机搜索算法。因此在求最优解的过程中要针对每一次求解，反复试验确定交叉概率与变异概率，因而相当繁琐且很难找到适应于每次求解的最优值。

Srinivas 等提出了一种自适应遗传算法（Adaptive GA,AGA）。交叉概率和变异概率能够随适应度自动改变^[36]。当种群中各个体适应度趋于一致或者趋于局部最优时，使交叉概率和变异概率增加，而当群体适应度比较分散的时候，使交叉概率和变异概率减少。同时，对于适应度值高于群体平均适应值的个体，对应于较低的交叉概率和变异概率，使该解得以保护进入下一代；而低于平均适应值的个体，相对应于较高的交叉概率和变异概率，使该解被淘汰掉。因此，自适应的交叉概率和变异概率能够提供相对于某个解的最佳交叉概率和变异概率^[37-38]。

自适应遗传法在保证群体多样性的同时，保证遗传算法的收敛性。考虑将自适应遗传算法应用于本文的研究中。

5.3.1 针对本文问题的自适应遗传算法

(1) 交叉操作

本文中，将 P_c 调整为^[32]：

$$P_c = \begin{cases} P_{c1} - \frac{(P_{c1} - P_{c2})(f' - f_{avg})}{f_{max} - f_{avg}}, & f' \geq f_{avg} \\ P_{c1}, & f' < f_{avg} \end{cases} \quad (5-10)$$

其中， f' 为染色体的适应值， f_{avg} 为染色体的平均适应值。

(2) 变异操作

将 P_m 调整为^[32]：

$$P_m = \begin{cases} P_{m1} - \frac{(P_{m1} - P_{m2})(f_{max} - f')}{f_{max} - f_{avg}}, & f' \geq f_{avg} \\ P_{m1}, & f' < f_{avg} \end{cases} \quad (5-11)$$

5.3.2 采用自适应遗传算法进行计算

1. 计算

采用自适应遗传算法来对前文问题进行计算，进化代数仍为 10000，参数为 $P_{c1} = 0.9$ ，

$P_{c2} = 0.6$ ， $P_{m1} = 0.1$ ， $P_{m2} = 0.01$ 。计算结果为：

表 5.4 采用自适应遗传算法获得的解及适应值

W	$W1(\%)$	$W2(\%)$	$W3(\%)$	$W4(\%)$	$W5(\%)$	$W6(\%)$
	3.92	2.26	0.83	2.58	32.27	7.88
$W7(\%)$	$W8(\%)$	$W9(\%)$	$W0(\%)$	$E(R)(\%)$	$\sigma(\%)$	适应值
1.71	0.65	3.67	44.22	3.05	2.85	1.01221

从上面结果可以看出，当进化代数与普通遗传算法相同时，采用自适应遗传算法计算的结果明显优于采用普通遗传算法计算所得的结果。

2. 比较适应值变化情况

来比较一下分别采用两种方法计算时适应值的变化情况，选取当交叉率分别为

0.9, 0.8, 0.4 时的情况进行试验, 结果见下图:

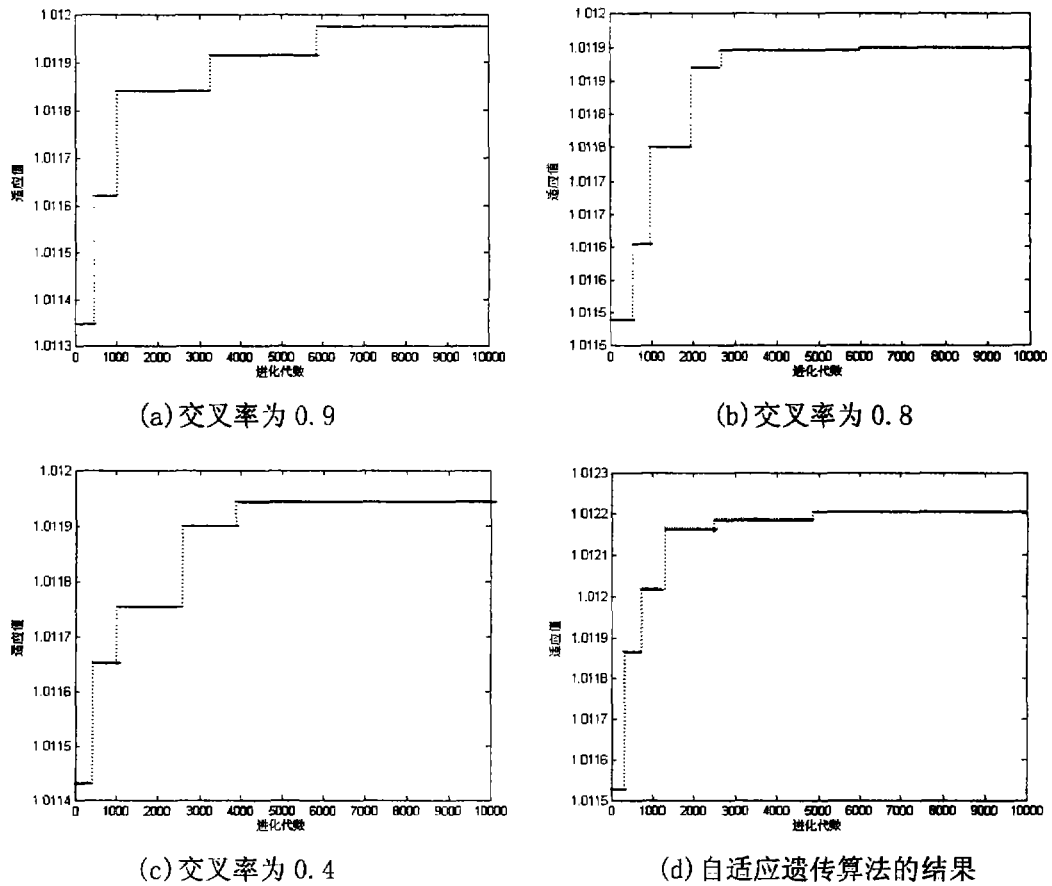


图 5.4 适应值变化情况

将四种情况下的适应值变化情况做比较, 得图 5.5, 由图 5.5 所示, 最上方的一条曲线为自适应情况下的适应值曲线。很明显采用自适应遗传算法获得的适应值进化得更快, 且值更优。因此在下文的计算中采用基于自适应选取交叉概率和变异概率的遗传算法进行计算。

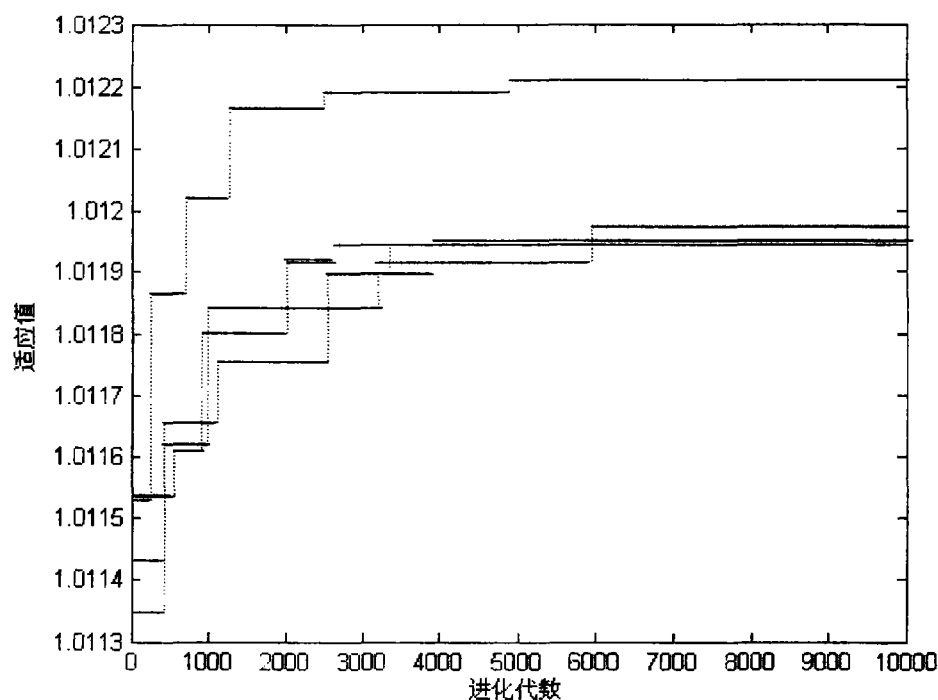


图 5.5 适应值情况比较图

5.4 采用自适应遗传算法计算

根据模型 D 和 E, 分别选取不同的风险厌恶系数, 采用自适应遗传算法求解, 结果见表 5.5 和 5.6:

表 5.5 组合中不含无风险资产时的解

μ	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55
$W1(\%)$	39.28	27.38	34.87	31.88	31.10	28.74	28.84	33.88
$W2(\%)$	4.07	1.22	1.18	3.26	5.33	3.15	4.10	0.53
$W3(\%)$	2.68	0.44	2.54	1.87	0.90	5.28	3.40	4.22
$W4(\%)$	12.81	23.97	18.28	17.55	9.93	14.88	4.70	7.20
$W5(\%)$	2.38	7.42	8.99	13.72	18.35	18.25	22.33	23.26
$W6(\%)$	3.86	5.32	3.91	0.46	3.39	2.24	0.59	1.88
$W7(\%)$	30.61	29.32	25.08	28.74	30.45	25.19	35.36	23.99
$W8(\%)$	3.19	0.47	1.24	1.31	0.43	1.53	0.49	3.06
$W9(\%)$	1.01	4.46	3.91	0.96	0.12	0.74	0.19	1.96
$E(R)(\%)$	2.70	2.77	2.83	2.90	2.99	3.04	3.08	3.13
$\sigma(\%)$	3.10	3.14	3.16	3.18	3.27	3.38	3.42	3.46

μ	0.50	0.45	0.40	0.36	0.33	0.30	0.28	0.26
$W1(\%)$	25.72	20.54	30.40	28.08	31.96	37.95	37.06	30.53
$W2(\%)$	5.88	1.18	1.33	4.17	1.06	1.46	3.61	5.92
$W3(\%)$	1.45	2.13	5.76	3.20	5.43	5.10	2.30	1.02
$W4(\%)$	15.26	23.85	7.13	7.66	1.05	10.72	2.77	6.31
$W5(\%)$	26.69	29.16	30.40	32.89	32.56	34.97	38.10	41.11
$W6(\%)$	0.68	2.03	0.03	0.41	3.11	1.34	0.63	0.30
$W7(\%)$	2201	20.49	24.29	23.25	22.91	5.29	6.33	8.91
$W8(\%)$	0.26	0.37	0.12	0.24	0.20	2.38	0.73	2.40
$W9(\%)$	2.05	0.25	0.34	0.11	1.71	0.79	7.87	3.50
$E(R)(\%)$	3.16	3.21	3.27	3.30	3.32	3.37	3.41	3.46
$\sigma(\%)$	3.52	3.59	3.62	3.68	3.74	3.82	3.92	4.02

μ	0.24	0.22	0.20	0.18	0.16	0.13	0.09	0.05
$W1(\%)$	27.51	29.24	30.97	28.06	13.92	4.99	2.29	1.50
$W2(\%)$	5.53	0.55	0.25	5.76	0.54	1.59	0.68	9.43
$W3(\%)$	2.87	2.35	8.22	12.09	25.14	18.09	4.90	8.14
$W4(\%)$	7.14	10.14	2.35	0.77	16.63	5.30	3.35	2.76
$W5(\%)$	41.15	43.87	43.47	43.47	38.22	4.29	56.27	56.14
$W6(\%)$	0.31	5.51	0.67	1.06	2.06	1.97	1.25	5.14
$W7(\%)$	8.97	2.42	6.39	5.82	2.36	13.04	23.27	4.56
$W8(\%)$	0.82	2.56	0.34	0.74	0.54	9.38	1.38	7.23
$W9(\%)$	5.67	3.36	7.59	2.23	0.59	2.69	6.61	5.10
$E(R)(\%)$	3.48	3.55	3.62	3.64	3.70	3.75	3.82	3.93
$\sigma(\%)$	4.08	4.19	4.26	4.41	4.66	4.94	4.96	5.33

表 5.6 组合中包含无风险资产时的解

μ	0.90	0.85	0.80	0.75	0.70	0.65	0.60	0.55
$W1(\%)$	0.77	1.19	5.75	7.55	5.27	1.72	12.65	2.73
$W2(\%)$	0.05	0.07	0.64	0.91	1.17	1.50	1.28	0.05
$W3(\%)$	1.20	4.40	1.83	3.44	3.47	0.66	4.85	6.70
$W4(\%)$	0.88	3.18	0.34	1.63	0.30	0.16	0.30	0.09
$W5(\%)$	5.36	6.85	9.21	10.56	13.34	16.78	14.88	17.55
$W6(\%)$	0.99	0.10	0.73	0.15	2.88	2.40	0.22	0.34
$W7(\%)$	0.08	0.34	0.33	2.43	3.46	5.91	3.42	6.51
$W8(\%)$	0.05	0.06	0.18	1.17	0.03	0.76	1.65	0.85
$W9(\%)$	1.32	0.20	1.95	0.30	0.13	0.01	0.42	1.70
$W0(\%)$	89.30	83.60	79.03	71.84	69.95	70.00	60.33	63.47
$E(R)(\%)$	2.19	2.29	2.34	2.43	2.50	2.54	2.60	2.66
$\sigma(\%)$	0.54	0.80	0.93	1.19	1.38	1.48	1.66	1.82

μ	0.50	0.45	0.40	0.38	0.36	0.34	0.33	0.32
$w_1(\%)$	3.33	1.75	3.48	17.59	0.52	16.84	20.59	3.92
$w_2(\%)$	1.19	2.06	0.38	1.43	3.19	2.03	1.67	2.26
$w_3(\%)$	3.19	9.12	2.03	5.59	2.96	7.67	6.54	0.83
$w_4(\%)$	0.92	4.02	1.56	0.65	1.82	3.63	0.76	2.58
$w_5(\%)$	20.67	19.46	25.77	22.25	26.85	23.54	26.05	32.27
$w_6(\%)$	1.16	2.22	3.44	1.23	0.03	0.29	1.44	7.88
$w_7(\%)$	5.52	0.11	0.85	4.42	1.88	5.41	5.17	1.71
$w_8(\%)$	1.77	1.29	0.54	0.30	9.63	2.61	0.35	0.65
$w_9(\%)$	1.62	0.06	1.70	2.37	0.11	0.67	2.78	3.67
$w_{10}(\%)$	60.63	59.91	60.25	44.17	53.00	37.31	34.65	44.22
$E(R)(\%)$	2.71	2.77	2.81	2.86	2.91	2.96	3.01	3.05
$\sigma(\%)$	1.93	2.10	2.12	2.34	2.56	2.64	2.73	2.85

μ	0.31	0.30	0.29	0.28	0.27	0.26	0.25	0.24
$w_1(\%)$	7.79	21.00	7.07	22.76	2.47	19.56	6.64	22.14
$w_2(\%)$	2.18	1.64	0.04	1.78	0.88	3.03	0.07	0.04
$w_3(\%)$	0.97	3.48	23.13	3.77	0.52	10.17	10.39	4.05
$w_4(\%)$	3.03	3.47	1.30	3.75	4.24	3.20	2.07	7.00
$w_5(\%)$	31.39	31.68	25.83	34.34	38.27	33.78	40.80	42.22
$w_6(\%)$	9.49	8.45	1.84	9.17	14.13	2.27	4.09	3.34
$w_7(\%)$	8.15	1.18	0.51	1.28	4.38	9.12	0.82	8.73
$w_8(\%)$	2.40	0.20	2.02	0.22	0.98	0.53	3.22	0.58
$w_9(\%)$	0.56	1.89	0.8	2.05	5.68	4.97	2.15	1.80
$w_{10}(\%)$	34.04	27.01	37.46	20.87	28.45	13.38	29.75	10.10
$E(R)(\%)$	3.10	3.16	3.21	3.26	3.30	3.35	3.41	3.45
$\sigma(\%)$	3.04	3.14	3.30	3.40	3.61	3.73	3.75	3.85

μ	0.23	0.22	0.21	0.20	0.18	0.15	0.12	0.09	0.05
$w_1(\%)$	6.31	22.85	23.57	6.10	8.29	8.54	8.32	2.88	1.32
$w_2(\%)$	0.69	3.78	3.89	3.52	8.39	2.76	0.46	0.06	0.79
$w_3(\%)$	4.60	8.98	9.27	1.30	5.52	3.74	19.82	3.77	5.93
$w_4(\%)$	2.83	4.62	4.76	4.01	2.46	19.33	9.55	22.41	0.9
$w_5(\%)$	46.71	42.68	44.03	50.20	49.26	51.41	44.75	57.20	59.82
$w_6(\%)$	6.25	0.59	0.61	12.26	3.05	2.81	4.02	0.25	7.45
$w_7(\%)$	1.54	4.77	4.92	2.65	10.79	2.13	0.54	0.74	16.13
$w_8(\%)$	1.74	3.68	3.80	1.02	2.60	6.96	8.44	7.64	6.52
$w_9(\%)$	3.08	0.83	0.86	5.70	4.28	1.18	1.46	4.61	0.64
$w_{10}(\%)$	26.25	7.22	4.30	13.24	5.37	1.14	2.64	0.44	0.50
$E(R)(\%)$	3.49	3.55	3.60	3.64	3.68	3.73	3.80	3.85	3.95
$\sigma(\%)$	3.93	4.16	4.29	4.44	4.51	4.61	4.85	4.91	5.16

5.5 有效边界曲线

5.5.1 有效边界

在 Markowitz 的均值方差理论中, 证券或证券组合的特征完全由期望收益率和方差来描述。在图形上以标准差为横坐标、以期望收益率为纵坐标建立一个坐标系, 那么每一种证券或证券组合由平面上的一个点来表示, 见下图 5.5(a)。

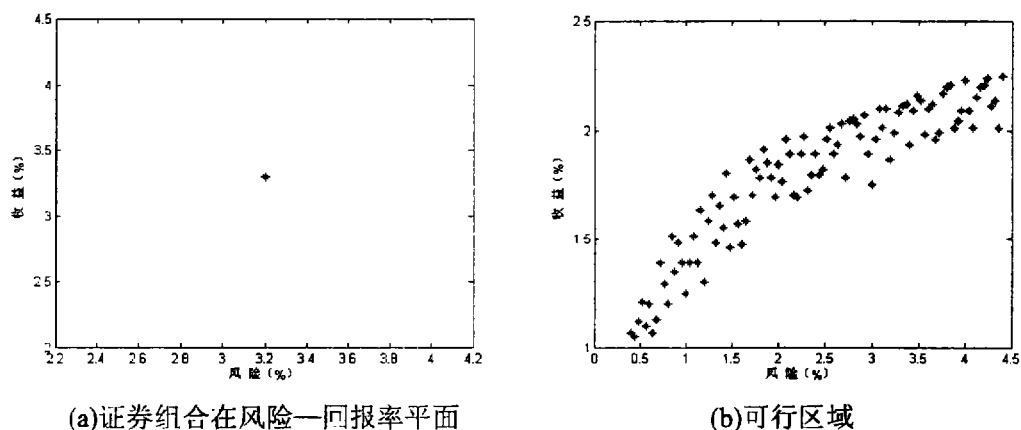


图 5.5 有效解在风险—回报率平面示意图

由于每种证券或证券组合由位于均值方差坐标系中的点来表示, 那么所有存在的证券和合法的证券组合在平面上就构成一个区域, 这个区域被称为可行区域, 见上图 5.5(b)。可行集代表由一组 N 种证券所形成的所有组合, 即所有可能的组合可以位于可行集的边界上或内部。

由于投资者被假定偏好期望收益率而厌恶风险, 因而在给定相同方差水平的那些组合种, 投资者会选择收益率最高的组合。而在给定相同期望收益率水平的组合中, 投资者会选择方差最小的组合。这些选择会导致产生一个所谓的有效边界见下图 5.6, 在这个有效边界的每一个点具有这样的性质: 在所有收益相同的组合中, 位于有效边界上的点的风险最小; 而在所有风险相同的组合中, 位于有效边界上的点的收益最大。在下图 5.7 中, A 点的收益与 B 点的收益相同, 但 A 点的风险明显大于在有效边界上的 B 点; A 点的风险与 C 点相同, 但同样 A 点的收益小于在有效边界上的 C 点。

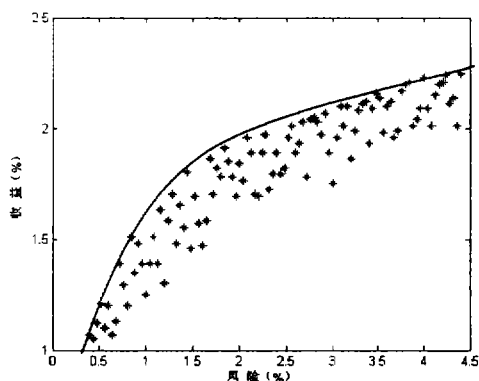


图 5.6 有限边界

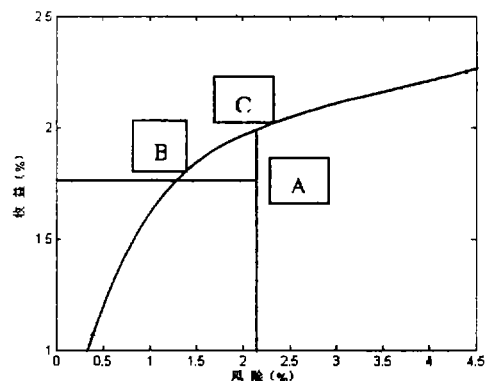


图 5.7 三点比较图

5.5.2.有效边界的求取

由上文可知，有效边界是这样一条曲线：在它上面的每一个点都是在同等条件（相同收益或相同风险）下的最优点。

而上文通过求解得到的每一个有效解都是同等条件下的最优解，因此这些点都位于本文问题的有效边界上，也就是说本文的有效边界是这些离散的最优解点的集合，因而本文的有效边界的求取采用拟合有效解集的方法来获得^[39]。

采用 MATLAB 的回归分析拟合出曲线，得到不带无风险资产的证券组合的有效边界方程为：

$$R^* = 10^3 * (-1.56516280643237 + 2.27649015607227 * \sigma - 1.37084351362698 * \sigma^2 + 0.43792047843420 * \sigma^3 - 0.07822206004851 * \sigma^4 + 0.00740503547330 * \sigma^5 - 0.00029019991952 * \sigma^6)$$

不带无风险资产的证券组合的有效边界曲线的图为 5.8：

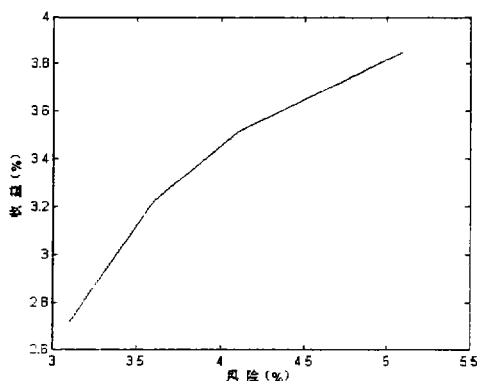


图 5.8 组合中不含无风险资产时的有效边界曲线

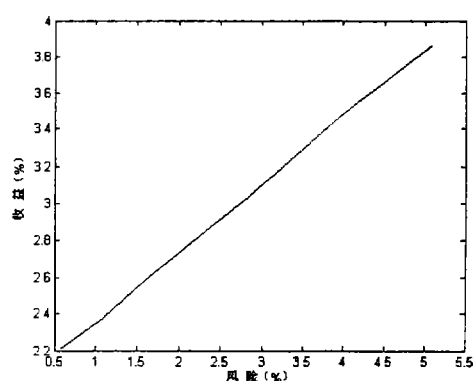


图 5.9 组合中包含无风险资产时的有效边界曲线

该曲线是一条上凸的曲线，在这条曲线上是不可能出现“凹陷”的情况^[3]。

包含无风险资产的证券组合的方程为：

$$R^{**} = 1.83358855532753 + 1.08393616526211 * \sigma - 1.22186085902373 * \sigma^2 \\ + 1.03977747084075 * \sigma^3 - 0.48072540071075 * \sigma^4 + 0.12228092394930 * \sigma^5 \\ - 0.01603596462674 * \sigma^6 + 0.00084583129729 * \sigma^7$$

其有效边界曲线见上图 5.9。

这条曲线从形状上看接近于直线。实际上，当不考虑交易费用的时候，包含无风险资产的有效边界就是一条直线，为 $R = r_0 + k\sigma$ ^[40]，这条曲线的截距为无风险资产 r_0 ，而由于本组合中收益最大的证券同时也是风险最大的证券，因此有效边界的最高点就是当全部资产都投资于该证券的时候，因此斜率 $k = \frac{r_i - r_0}{\sigma_i}$ ，其中 r_i 为收益最高的证券（000625）

的收益率， σ_i 为该证券的风险。见下图 5.10：

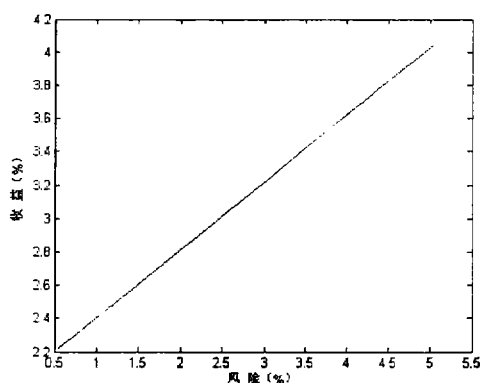


图 5.10 不含交易费用的有效边界曲线

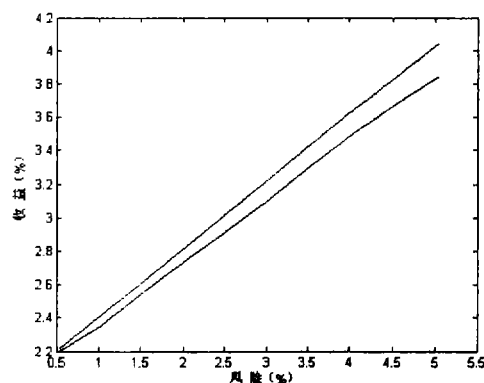


图 5.11 基于遗传算法的含交易费用的有效边界曲线与不含交易费用的有效边界曲线比较

将包含交易费用与不含交易费用情况进行比较，见上图 5.11。发现两个曲线相当接近，但采用遗传算法计算得到的含交易费用的曲线低于不含交易费用曲线，且存在一定差距。其中原因之一是存在交易费用，另一原因是虽然采用遗传算法进行计算时以概率 1 无限接近于最优解，但在实际计算中存在一定的限制，与最优解有一定差距。

这两个原因导致了本文中的含交易费用的组合的有效曲线与不含交易费用的有效曲线不能重合。

现在来比较含无风险资产与不含无风险资产的两条曲线，见下图 5.12(a)：

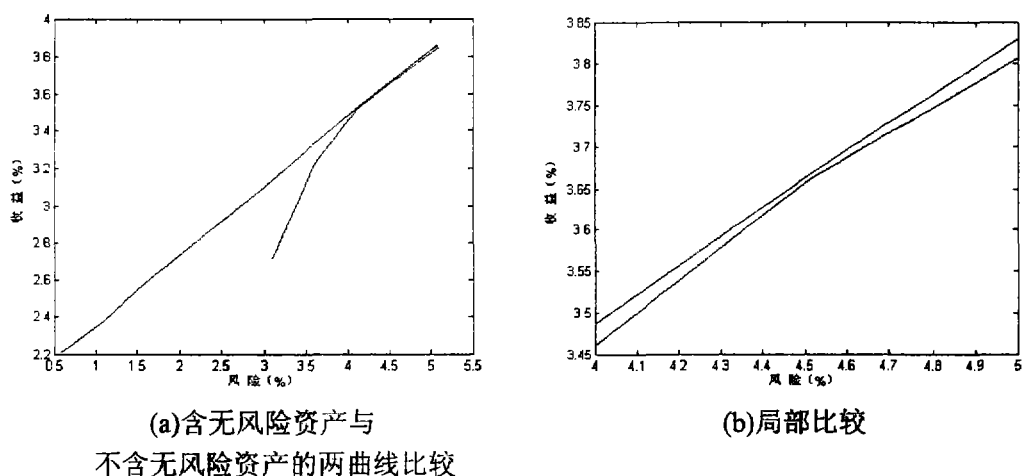


图 5.12 两曲线比较图

发现含有无风险资产的组合的有效边界曲线高于不含无风险资产组合的有效边界曲线，也就是说含有无风险资产的组合的有效边界曲线上的解优于不含无风险资产组合的有效边界曲线上的点。

进行局部观察，仔细的分析两条曲线的关系，见上图 5.12(b)。

经过局部观察发现，曲线 A 和曲线 B 在某一区域附近相当接近。当不计交易费用的时候，此处应该为相切的点^[40]。

最后，将三条曲线一起进行比较，如下图 5.13：

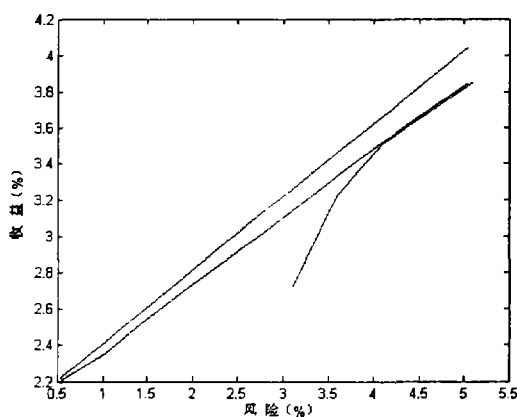


图 5.13 三曲线比较图

经过图示，发现当组合中含有无风险资产时，组合的有效边界比较优越，因此在研究

以及实际应用中通常会在组合中加入无风险资产以降低组合的风险。

6 求解最优解

6.1 无差异曲线与有效边界曲线相切法

Markowitz 的假设并没有对所有证券之间的比较做出限定。他认为最终的比较依赖于每一个投资者对收益和风险（方差）的偏好个性，也就是说，在通过确定有效边界(相应的确定有效组合)之后，投资者须根据其个人对均值和方差的更具体、更精细的偏好态度（用无差异曲线来描述）在有效边界上选择他看来最满意的点（即最满意的证券组合）。该点是投资者的无差异曲线与有效边界的切点^[41-42]。

6.1.1 无差异曲线

无差异曲线表示投资者对风险和收益的偏好，因而可以以一个二维图表示，称为均值方差图。其中横轴表示用标准差（记为 σ ）测度的风险，纵轴表示用预期回报率（记为 R ）测度的回报。

下图 6.1(a)表示某投资者拥有的无差异曲线的“图形”，该曲线即为投资者的无差异曲线，代表所有提供统一给定满意水平的组合整体。在无差异曲线上的所有组合对投资者来说，其提供满意程度是相同的，即从这条曲线上的一种资产转换成另一种资产其结果并无差异。沿着条曲线移动，投资者或承担较多的风险并获得较高的收益，或承担较少的风险同时获得较低的收益。无论出现那种可能，只要这些资产位于同一条无差异曲线上，投资者就会对这些各不相同的资产有相同的偏好。

当在均值方差坐标系中，将某投资者认为满意程度相同的点都连成无差异曲线时，可以得到无穷多条曲线，所有这些无差异曲线的全体便成为该投资者的无差异曲线族，见下图 6.1(b)。有了无差异曲线族，该投资者能够对所有的证券或证券组合进行比较，不同的无差异曲线代表了他不同的满意度和效用倾向：同一条无差异曲线上的满意程度相同，效用倾向相同；无差异曲线越高，满意度越高，效用倾向越高。

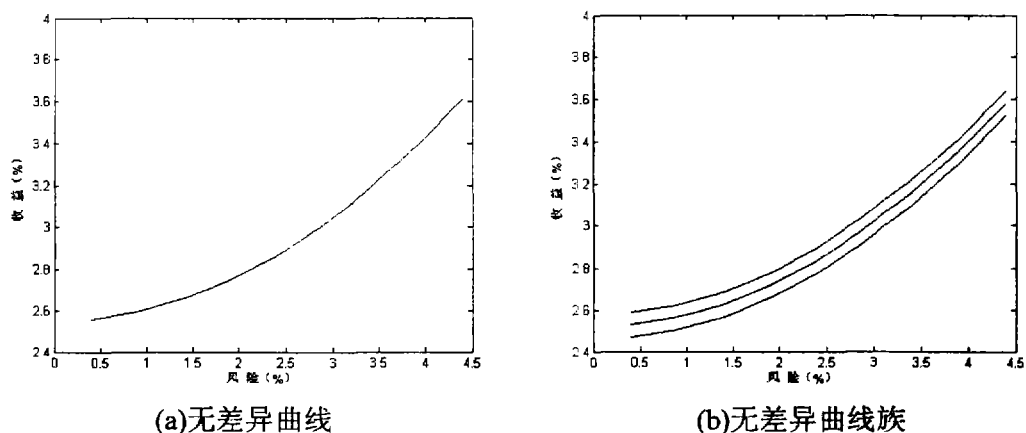


图 6.1 无差异曲线

此外，在风险投资问题中，由于不同的投资者对风险的偏好各有不同，因而有各自不同的无差异曲线，无差异曲线越陡，表明投资者对风险越厌恶。

6.1.2 无差异曲线与有效边界曲线相切

结合有效边界曲线，在可行解集的有效边界一定的情况下，能与有效边界相切的那条无差异曲线便是其中最高的一条，即此时投资者的满意度最高。而相切的切点便是最优的投资组合点，见下图 6.2。

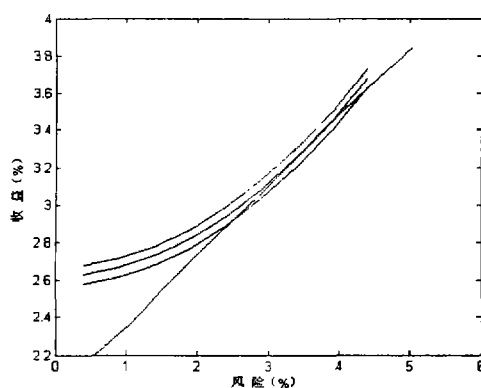


图 6.2 无差异曲线与有效边界相切图

6.1.3 无差异曲线的求取

1. 采用简单组合推导无差异曲线

现在的问题转化为求解无差异曲线。假设投资者的偏好是一致的，即不论组合中包含的证券数目为多少，所确定的无差异曲线是相同的。那么，为了简化问题的求解，采用最

简单组合来推导无差异曲线^①：即组合中只包括一种风险资产（例如为 600115）和一种无风险资产。交易费用及总资产的规定如前，则收益率 R 及总体风险 σ 分别如下：

$$R = (1 - m_0)(r_p - \frac{C_p}{S}) + m_0 r_0 \quad (6-1)$$

$$\sigma = (1 - m_0)q_p \quad (6-2)$$

m_0 为无风险资产的比例， r_p 为风险资产收益率， C_p 为风险资产的交易费用， q_p 为风险资产的风险。

不同投资比率下具体组合方式，见下表 6.1：

表 6.1 简单组合风险收益表

无风险资产 (%)	100	95	90	85	80	75	70
收益 (%)	2.00	2.11	2.20	2.30	2.41	2.51	2.61
风险 (%)	0.0	0.34	0.67	1.01	1.34	1.68	2.01
无风险资产 (%)	65	60	55	50	45	40	35
收益 (%)	1.96	2.82	2.92	3.02	3.12	3.22	3.32
风险 (%)	2.35	2.68	3.02	3.35	3.69	4.02	4.36
无风险资产 (%)	30	25	20	15	10	5	0
收益 (%)	3.43	3.53	3.62	3.73	3.84	3.94	4.04
风险 (%)	4.69	5.03	5.36	5.70	6.03	6.37	6.70

以上一系列简单组合用于供投资者选择，投资者根据自己的风险厌恶程度挑选其中一组。由于这些离散组合点均匀分布于风险从最大到最小的区间中，假设投资者总是可以选择到最满意或最接近满意的一组。

2. 无差异曲线的表示方法

选择投资组合是一种使投资者期望效用最大化的活动，也就是使投资者能够获得预期收益最大化和收益率不确定性（风险）的最小化之间的某种平衡的一个组合。因此要先得到一个效用函数^[43-44]，这个效用函数要兼顾风险和收益。这个用均值一方差来表现风险—回报率互相替换的大小和形式的效用函数，在风险—回报率平面内被称作为无差异曲线。

①吕馨,徐松艳,张刚著:《组合投资的数学模型》,摘自《哈尔滨工业大学学报》,1999(4):51~54.

由于计算投资组合效用的函数为： $U = R - \frac{1}{2}A\sigma^2$ ^[45]，其中 U 为效用值， A 为反映投资者回避风险程度的指数，因而无差异曲线可表示为：

$$R = U + \frac{1}{2}A\sigma^2 \quad (6-3)$$

将(6-1)(6-2)式代入(6-3)式可得：

$$(1-m_0)(r_P - \frac{C_P}{S}) + m_0r_0 = U + \frac{A}{2}(1-m_0)^2q_P^2 \quad (6-4)$$

对(6-4)式中 m_0 求导，得：

$$-(r_P - \frac{C_P}{S}) + r_0 = -A(1-m_0)q_P^2 \quad (6-5)$$

$$A = \frac{r_P - \frac{C_P}{S} - r_0}{(1-m_0)q_P^2} \quad (6-6)$$

因而，无差异曲线可表示为：

$$R = U + \frac{r_P - \frac{C_P}{S} - r_0}{2(1-m_0)q_P^2}\sigma^2 \quad (6-7)$$

计算各种组合下的无差异曲线，并粗略的将投资者作简单的分类，将投资者粗略分为保守型、中间型和冒险型^[46]三种，见下表 6.2。

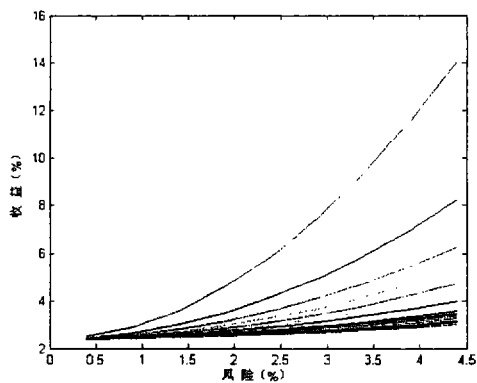
表 6.2 不同投资者的无差异曲线

无风险资产 (%)	b	R	投资者类型
100			
95	1.2074	$R = U + 0.6037\sigma^2$	保守型
90	0.6038	$R = U + 0.3019\sigma^2$	中间型
85	0.4024	$R = U + 0.2012\sigma^2$	
80	0.3018	$R = U + 0.1509\sigma^2$	
75	0.2414	$R = U + 0.1207\sigma^2$	
70	0.2012	$R = U + 0.1006\sigma^2$	
65	0.1652	$R = U + 0.0826\sigma^2$	
50	0.1208	$R = U + 0.0604\sigma^2$	冒险型
45	0.1098	$R = U + 0.0549\sigma^2$	
40	0.1006	$R = U + 0.0503\sigma^2$	
35	0.0928	$R = U + 0.0464\sigma^2$	
30	0.0862	$R = U + 0.0431\sigma^2$	
25	0.0804	$R = U + 0.0402\sigma^2$	
20	0.0754	$R = U + 0.0377\sigma^2$	
15	0.0710	$R = U + 0.0355\sigma^2$	
10	0.0670	$R = U + 0.0335\sigma^2$	
5	0.0636	$R = U + 0.0318\sigma^2$	
0	0.0604	$R = U + 0.0302\sigma^2$	

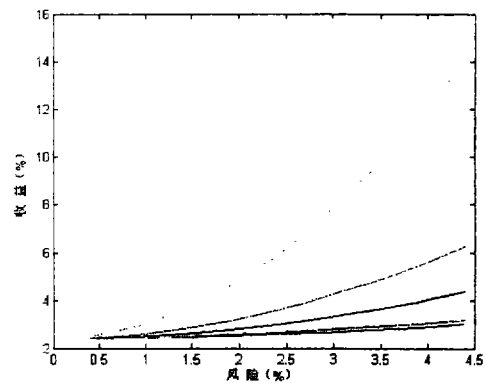
将所有的无差异曲线表现在同一个图中，见图 6.3(a)，其中最陡最高的曲线为保守型投资者的无差异曲线，越往下的曲线代表越愿意冒险的投资者，最低最平坦的曲线表示投资者愿意将所有的资产都投入到风险资产种，表明其具有很低的风险厌恶性。

从各个具有不同投资偏好的投资者的无差异曲线的分布可知，当资产组合具有相同的风险时，越是保守的投资者越是要求较高的收益回报，否则宁可放弃投资；而当组合具有相同的收益的时候，越是保守的投资者越是要求较低的投资风险，同样如果不能满足，宁可放弃。而反过来，具有较高冒险精神的投资者相对容易接受较高的风险，以此寻求更高的收益回报^[2]。

从所有的无差异曲线中，分别从不同类型的投资者中挑选几条来进行下文进一步的研究，分别从保守型、中间型和冒险型投资者的无差异曲线中挑选一条、两条和三条曲线，见图 6.3(b)。



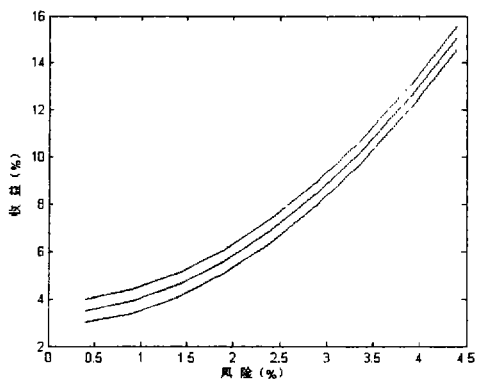
(a) 不同投资者的无差异曲线



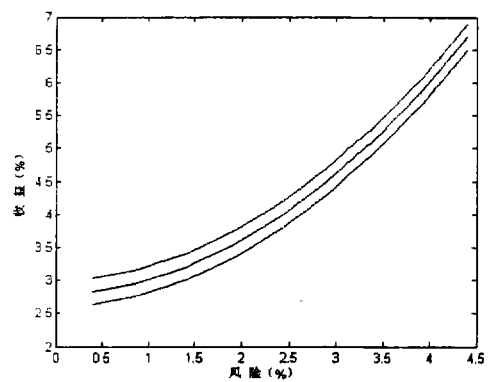
(b) 其中的六条无差异曲线

图 6.3 无差异曲线

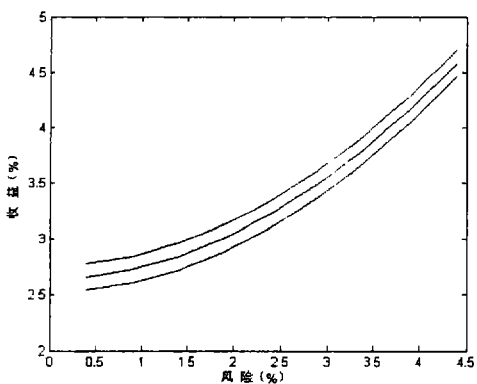
分别来看一下这六条曲线，做出它们的无差异曲线族：



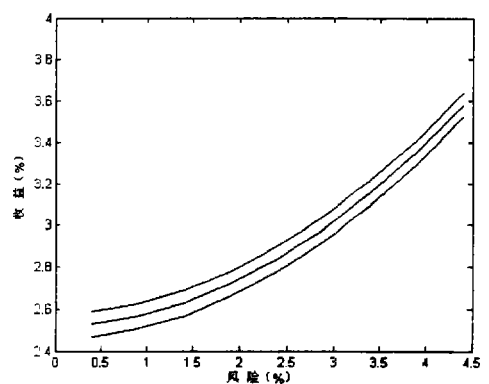
(a) $R = U + 0.6037\sigma^2$



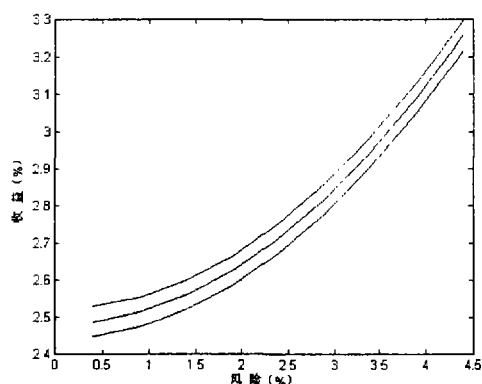
(b) $R = U + 0.2012\sigma^2$



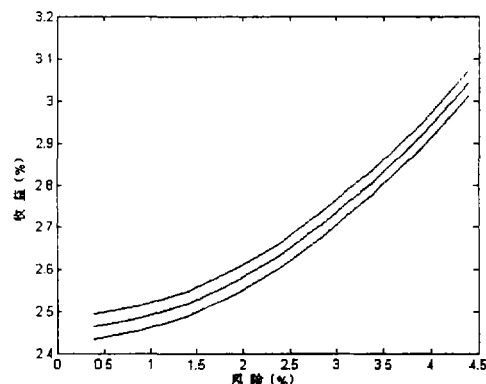
(c) $R = U + 0.1006\sigma^2$



(d) $R = U + 0.0549\sigma^2$



$$(e) R = U + 0.0431\sigma^2$$



$$(f) R = U + 0.0302\sigma^2$$

图 6.4 无差异曲线

6.1.4 求最优点

根据上文所述, 采用有效边界曲线和无差异曲线相切来求最优点, 在本结中采用含有无风险资产的组合所得的有效边界曲线来做示例, 得:

$$\frac{\partial R^{***}}{\partial \sigma} = \frac{\partial R^{**}}{\partial \sigma} \quad (6-8)$$

其中, R^{***} 为无差异曲线。

采用 MATLAB 求公切点^[46]: 当无差异曲线为 $R = A + 0.6037\sigma^2$ 时, 两曲线无法在自变量范围 (0.54, 5.26) 内相切, 见图 6.5(a); 当无差异曲线为 $R = A + 0.2012\sigma^2$ 时, $\sigma = 0.8875\%$, 将 σ 代入有效边界得收益率 $r = 2.3216\%$, 见图 6.5(b); 当无差异曲线为 $R = A + 0.1006\sigma^2$ 时, $\sigma = 1.8750\%$, 此时 $r = 2.6887\%$, 见图 6.5(c); 当无差异曲线为 $R = A + 0.0549\sigma^2$ 时, $\sigma = 3.6701\%$, 此时 $r = 3.3472\%$, 见图 6.5(d); 当无差异曲线为 $R = A + 0.0431\sigma^2$ 时, $\sigma = 4.9142\%$, 此时 $r = 3.8351\%$, 见图 6.5(e); 当无差异曲线为 $R = A + 0.0302\sigma^2$ 时, 两曲线无法在自变量范围内相切, 见图 6.5(f)。

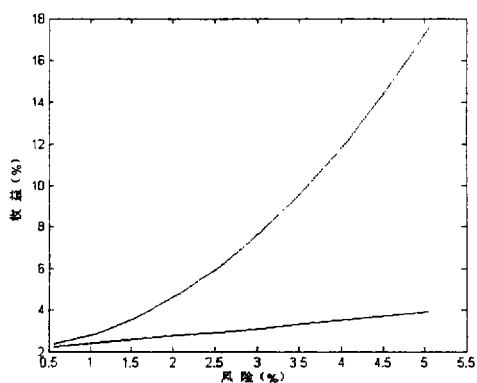


图 6.5(a)

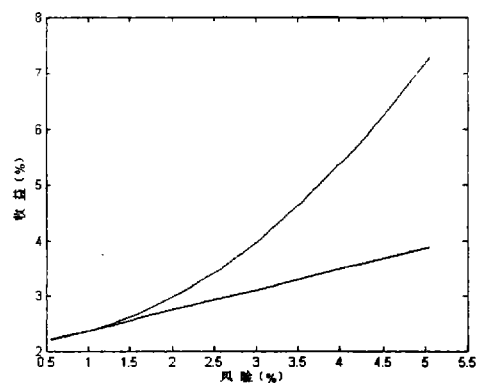


图 6.5(b)

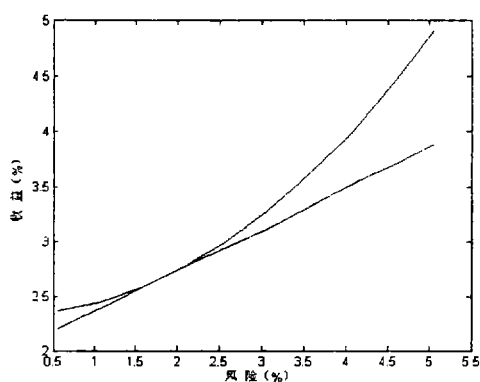


图 6.5(c)

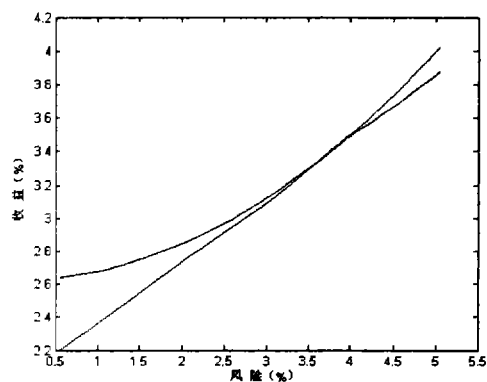


图 6.5(d)

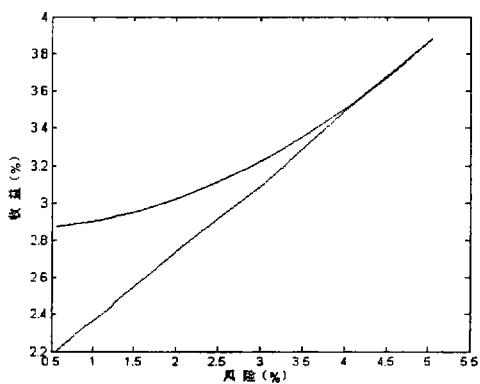


图 6.5(e)

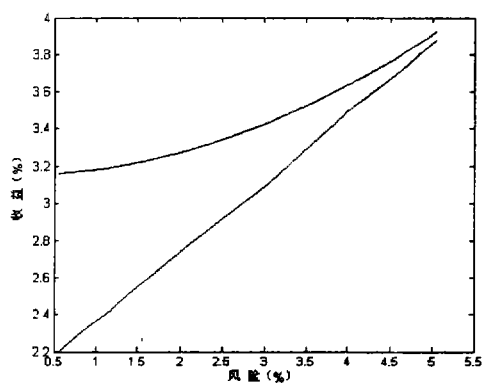


图 6.5(f)

图 6.5 无差异曲线与有效边界相切图

6.2 安全第一法

6.2.1 安全第一法定义

由上文研究可知：反映投资者回避风险程度的指数 A 的选取带有一定主观性，因此，无差异曲线的求取同样也带有一定主观性，投资者要确定确实适合自己的无差异曲线有一定难度，因此考虑采用另一种方式来求取最优点。

这种方法是曹国华、黄薇的研究成果——“安全第一法”，这个方法是基于这样一种思想^①：投资者希望投资收益高于某一个界限（某一给定值），记为 S ，或者是投资收益低于该界限的可能性尽可能的小，设为 a ， a 为灾难性水平发生的概率。

6.2.2 模型

在这种情况下，需考虑的问题由 R 与 σ 之间的关系转化成为 S 与 a 之间的关系。不同的投资者会取不同的 S 和 a 值。一方面要使 S 值尽可能大，另一方面又要使收益率低于 S 的概率被控制，因此模型 F 被设定为：

$$\max R = E(R_p) = R^T W \quad (6-9)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} P\{R_p \leq S\} \leq a \\ \sum_{i=1}^n W_i + w_0 = 1 \end{cases} \quad (6-10)$$

S 与 a 是需决定的两个参数。通过变形、转化等一系列工作，曹国华、黄薇将这个复杂的模型进行处理，得到了 (6-11)：

$$P(R_p \leq S) = P((R_p - R) \leq (S - R)) = P\left(\frac{R_p - R}{\sigma_p} \leq \frac{S - R}{\sigma_p}\right) = F\left(\frac{S - R}{\sigma_p}\right) \quad (6-11)$$

其中，假定 R_p 的分布由两数字特征 R, σ_p 充分描述，因此它转换成标准化随机变量

$\frac{R_p - R}{\sigma_p}$ ， F 为其分布函数。

所以

$$P(R_p \leq S) \leq a \Leftrightarrow F\left(\frac{S - R}{\sigma_p}\right) \leq a \Leftrightarrow \frac{S - R}{\sigma_p} \leq F^{-1}(a) \Leftrightarrow S \leq R + F^{-1}(a)\sigma_p \quad (6-12)$$

其中，因为分布函数是单调不减，因而分布函数 F 有逆函数 F^{-1}

^①曹国华，黄薇著.《安全第一的证券投资组合优化模型与绩效管理》.摘自《重庆大学学报》(自然科学版) 2000 (3)，94-96，第 23 卷。

所以问题转化为以下模型 G:

$$\max R = E(R_p) = R^T W \quad (6-13)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} R + F^{-1}(a)\sigma_p \geq S \\ \sum_{i=1}^n W_i + w_0 = 1 \end{cases} \quad (6-14)$$

6.2.3 最优点的求解

通过这个模型得到了最优解的范围（即缩短了有效解的范围），但曹国华、黄薇的研究成果中没有得出最优解。本文中尝试通过这个模型来获取最优解。

下图 6.6 中，曲线 AB 为有效边界曲线，而直线 SMN 为 $R + F^{-1}(a)\sigma_p = S$ ，由于在安全第一法中的约束条件为 $R + F^{-1}(a)\sigma_p \geq S$ ，因此有效边界缩小为 MN 中间部分^[47]。

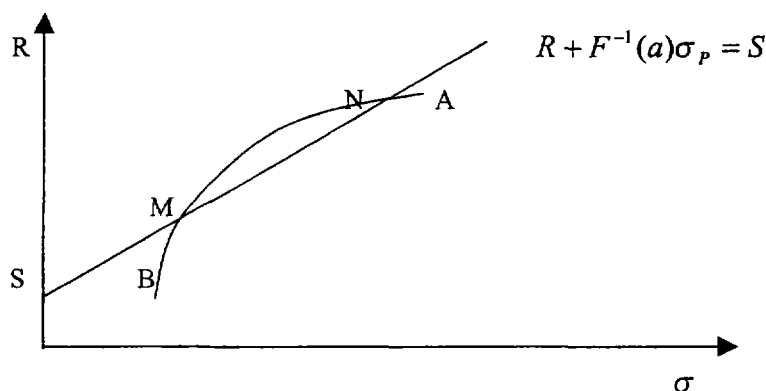


图 6.6 有效边界缩短为曲线 MN

a 为灾难性水平发生的概率，因此 a 越大，则投资的效果越差；而反之 a 越小，则投资效果越好。而当 a 变小时，直线斜率变大，直到斜率足够大到与有效边界只有一个交点，即切点。如下图 6.7 中直线 SC:

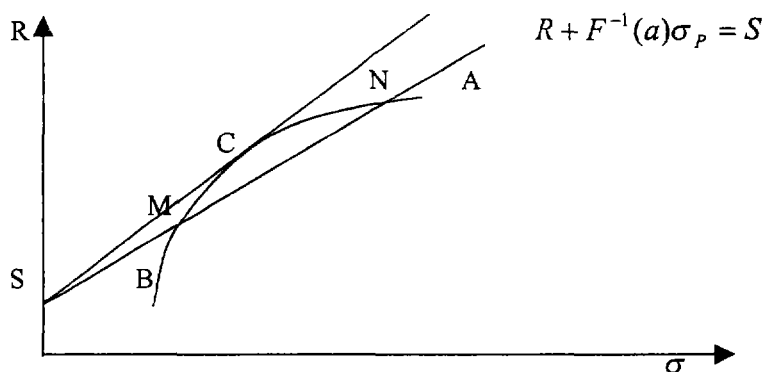


图 6.7 最优点为 C

则本文认为：此时的切点 C 便是最优点。

假设 S 为已知，来求取切点 C。

假设 C 点的坐标为 (σ_1, r_1) ，S 点的坐标为 (σ_0, r_0) ，则直线的斜率为 $k = \frac{r_1 - r_0}{\sigma_1 - \sigma_0}$ ，

有效边界与该直线相切，因此，切点处的一阶导数为 k ，即：

$$\frac{dR^*}{d\sigma} = k = \frac{r_1 - r_0}{\sigma_1 - \sigma_0} \quad (6-15)$$

将 σ_1 代入式子左半边并设 $\frac{dR^*}{d\sigma} = f_1(\sigma)$ ，则左式为 $f_1(\sigma_1)$ ，因而：

$$f_1(\sigma_1) = \frac{r_1 - r_0}{\sigma_1 - \sigma_0} \quad (6-16)$$

由于 S 为 (σ_0, r_0) 为已知，因此：

$$r_1 = f_1(\sigma_1) * (\sigma_1 - \sigma_0) + r_0 \quad (6-17)$$

另外由于相切，因而点 $C(\sigma_1, r_1)$ 也是有效边界上的点，故得：

$$r_1 = f_2(\sigma_1) \quad (6-18)$$

其中， $f_2(\sigma_1) = R^*$ ，为有效边界。

由 (6-17) (6-18) 得：

$$f_1(\sigma_1) * (\sigma_1 - \sigma_0) + r_0 = f_2(\sigma_1) \quad (6-19)$$

由于根据前文中有效边界的结论我们知道，当组合中存在无风险资产，且不计交易费用时，有效边界为一直线，即使考虑交易费用时，有效边界的形状还是类似于直线，因此存在无风险资产的组合求取最优点时，采用以上安全第一法意义不大（求两条直线的切点无意义）；因此，安全第一法比较适用于当组合中不存在无风险资产时的情况，因为当组合中不存在无风险资产时，有效边界的形状是一条上凸的曲线，见下图 6.8。

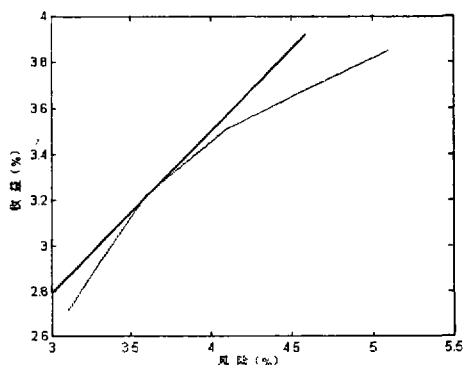


图 6.8 求最优点

现采用上文中求得的不含无风险资产时的有效边界曲线来求最优点，假设 S 点为 (0, 2.8)，则采用 MATLAB 对 (6-19) 进行计算，得结果为：

$\sigma = 3.6128\%$ ，相应的将该点代入有效边界 R^* 中得： $r = 3.2330\%$ ，即最优点为：

$$\begin{cases} \sigma = 3.6128\% \\ r = 3.2330\% \end{cases}$$

因此在前人的研究基础上，通过本文的进一步研究，得到了一个最优点。在这个点上，实现了投资收益高于某一个界限，而投资收益低于该界限的可能性达到了最小。

7 约束遗传算法求最优点

获得最优点后, 风险和收益成为了已知条件, 接下来最主要的问题是要求具体的投资组合比例。依然考虑采用遗传算法来求解。由于风险和收益为已知, 因此, 采用约束法^[13]来求解, 即在运算中使一个已知量 (风险或收益) 当作一个约束条件, 而另一个已知量当作未知量运用到适应值运算中, 即使目标函数转化为:

$$F_1(W) = \sigma \quad (7-1)$$

或:

$$F_2(W) = E(R) \quad (7-2)$$

在算适应值时, 由于当目标函数为风险函数时, 该规划为一个最小化问题, 因此其适应函数应为以下式子:

$$Fit(F_1(W)) = -F_1(W) + X \quad (7-3)$$

其中, X 为 $F_1(W)$ 的最大估计值。在本文中, 以包含无风险资产的组合为例, 组合可能达到的最大风险为假设所有资金均投入到风险最大的证券中, 经分析该证券为 000625, 其风险为 6.70。因此, 设 $X_1 = 6.70$, 即适应函数为:

$$Fit(F_1(W)) = -F_1(W) + 6.70 \quad (7-4)$$

当目标函数为收益率函数时, 规划为最大化问题, 则适应函数为:

$$Fit(F_2(W)) = F_2(W) - X_2 \quad (7-5)$$

其中, X_2 为 $F_2(W)$ 的最小估计值。同样在本文实例中, 组合可能获得的最小收益为当所有资金均投入到无风险时的情况, 此时 $X_2 = 2$, 即适应函数为:

$$Fit(F_2(W)) = F_2(W) - 2 \quad (7-6)$$

7.1 模型

根据以上分析, 将包含无风险资产的组合模型转化为以下两种形式, 分别为模型 H 和

模型 I。

模型 H:

$$\text{Max } E(R) = \sum_{i=1}^n w_i r_i - \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n C(w_i) + r_0 w_0 \quad (7-7)$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i + w_0 = 1 \\ w_j \geq 0, j = 0, 1, 2, \dots, n \\ \sigma = \left(\sum_{i,j=1}^n w_i \sigma_{ij} w_j \right)^{1/2} \end{cases} \quad (7-8)$$

模型 I:

$$\text{Min } \sigma = \left(\sum_{i,j=1}^n w_i \sigma_{ij} w_j \right)^{1/2} \quad (7-9)$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i + w_0 = 1 \\ w_j \geq 0, j = 0, 1, 2, \dots, n \\ E(R) = \sum_{i=1}^n w_i r_i - \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n C(w_i) + r_0 w_0 \end{cases} \quad (7-10)$$

前文中已提到这样的问题是一个约束优化问题 (Constrained Optimization Problems, COPs), 求解这种问题的一个常规途径是把有约束问题转化为无约束问题, 再用无约束问题的方法去求解。

模型的约束条件中的前面两个的处理方法前文中已经提起过, 下面主要来处理一下第三个约束条件。

经分析, 模型 I 中的第三个约束条件为线性方程。处理这个问题采用的方法是: 通过消除可能的变量以减少变量的数目, 消除等式约束, 并设计特别的遗传操作手段, 使线性约束最优化问题适合于遗传算法求解; 而模型 H 关于风险的约束条件为一个非线性方程, 因此这样的约束方程组在消除一个变量之后还将是一个非线性的方程组, 这样的非线性约束对于后面设计遗传算法是不利的。因此, 在这本文中, 放弃模型 H, 采用模型 I 来进行研究。

此外, 由于交易费用要在确定投资比例之后才能确定, 所以采用先忽略小比例投资, 即假设所有种类证券的投资额均超过规定数日; 然后再由误差的大小来决定该最优解是否符合要求。因此, 将上述约束模型 I 转化为如下形式, 即约束模型 J:

$$\text{Min } \sigma = \left(\sum_{i,j=1}^n w_i \sigma_{ij} w_j \right)^{1/2} \quad (7-11)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i + w_0 = 1 \end{cases} \quad (7-12)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} w_j \geq 0, j = 0, 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (7-13)$$

$$\begin{cases} E(R) = \sum_{i=1}^n w_i (r_i - c_i) + r_0 w_0 \end{cases} \quad (7-14)$$

采用上述消除变量的方法来改变约束模型。

观察这个约束方程，其变量一共有 $n+1$ 个，即有 n 只证券，和一个无风险资产；在方程（7-11）（也就是目标函数同时也是适应函数的一部分）中包含的变量有只有 n 个，即在方程（7-11）中没有无风险资产变量 w_0 。因此考虑消除模型中的无风险资产变量，该模型中只有两个等式约束方程，对这两个等式方程进行转化。首先将（7-14）式转化为：

$$w_0 = [E(R) - \sum_{i=1}^n w_i (r_i - c_i)] / r_0 \quad (7-15)$$

将式（7-15）代入式（7-12），则式（7-12）转化为：

$$\sum_{i=1}^n w_i + [E(R) - \sum_{i=1}^n w_i (r_i - c_i)] / r_0 = 1 \quad (7-16)$$

即为：

$$\sum_{i=1}^n (w_i (r_0 - r_i + c_i)) = r_0 - E(R) \quad (7-17)$$

进一步，为：

$$\frac{\sum_{i=1}^n (w_i (r_i - c_i - r_0))}{E(R) - r_0} = 1 \quad (7-18)$$

则原约束模型转化为：

$$\text{Min } \sigma = \left(\sum_{i,j=1}^n w_i \sigma_{ij} w_j \right)^{1/2} \quad (7-19)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n (w_i(r_i - c_i - r_0))}{E(R) - r_0} = 1 \\ w_j \geq 0, j = 0, 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (7-20)$$

此外，前文中的另一种情况是组合中不含无风险资产，这种情况的求解方法类似于组合中包含无风险资产情况，因此采用以下模型 K 进行研究：

$$\text{Min } \sigma = \left(\sum_{i,j=1}^n w_i \sigma_{ij} w_j \right)^{1/2} \quad (7-21)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^n w_i = 1 \end{cases} \quad (7-22)$$

$$\begin{cases} w_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (7-23)$$

$$\begin{cases} E(R) = \sum_{i=1}^n w_i (r_i - c_i) \end{cases} \quad (7-24)$$

对于这个模型，在约束条件中任意消去一个 w ，假设消去 w_1 ，则将 (7-24) 式转化为：

$$w_1 = [E(R) - \sum_{i=2}^n w_i (r_i - c_i)] / (r_1 - c_1) \quad (7-25)$$

将 (7-25) 式代入 (7-22) 式，则 (7-22) 式转化为：

$$\sum_{i=2}^n w_i + [E(R) - \sum_{i=2}^n w_i (r_i - c_i)] / (r_1 - c_1) = 1 \quad (7-26)$$

将 (7-26) 式转化为：

$$\frac{\sum_{i=2}^n w_i [(r_i - c_i) - (r_1 - c_1)]}{E(R) - (r_1 - c_1)} = 1 \quad (7-27)$$

则模型转化为：

$$\text{Min } \sigma = \left(\sum_{i,j=1}^n w_i \sigma_{ij} w_j \right)^{1/2} \quad (7-28)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n w_i [(r_i - c_i) - (r_1 - c_1)]}{E(R) - (r_1 - c_1)} = 1 \\ w_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (7-29)$$

7.2 针对上述问题的遗传算法

针对这样一个问题，要对遗传操作方法进行特别的设计。

第一种情况，即组合中含有无风险资产时，适应函数根据上文的分析进行修改，为：

$Fit(F_1(W)) = -F_1(W) + 6.70$ 。对约束条件的处理比较复杂，不能象前面的遗传操作一样

对各染色体进行简单的归一化处理，而通过以下的方法处理：

$for(i = 0; i < 9; i++)$

$$R_i = \frac{r_i - c_i - r_0}{E(R) - r_0};$$

$for(i = 0; i < 9; i++)$

$sum = sum + R_i * w_i;$

$for(i = 0; i < 9; i++)$

$w_i = w_i / sum;$

$for(i = 0; i < 9; i++)$

$w_0 = 1 - w_i;$

由于约束条件（7-20）要求各投资比例与其相应的系数，即为 $\frac{r_i - c_i - r_0}{E(R) - r_0}$ 的乘积之和

累加为 1。因此在程序设计中这样考虑：首先，与各投资比例相对应的系数设定为 R_i ；当经过遗传操作产生了新一代染色体后，这些染色体与其相应的系数相乘后进行累加，表示为 sum ；随后将各染色体除以总和 sum ，得出的结果即为 n 只证券的投资比例。经过以上

计算,得到的 n 只证券的投资比例并之和并不正好等于 1,这与之前的遗传算法将所得结果进行简单归一化处理不同。最后将 1 减去 n 证券的投资比例后得到的结果便是无风险资产的投资比例。

当组合中不含无风险资产时,遗传算法设计与上文略有不同,为:

$for(i = 0; i < 8; i++)$

$$R_i = \frac{r_i - c_i - (r_1 - c_1)}{E(R) - (r_1 - c_1)};$$

$for(i = 1; i < 8; i++)$

$sum = sum + R_i * w_i;$

$for(i = 1; i < 8; i++)$

$w_i = w_i / sum;$

$for(i = 1; i < 8; i++)$

$w_1 = 1 - w_i;$

7.3 计算结果

进行计算,得到的结果为:

表 7.1 约束遗传算法计算结果

	1	2	3	4	5
$w_1(\%)$	2.61	1.70	21.50	5.54	27.69
$w_2(\%)$	3.14	3.38	3.82	9.13	1.91
$w_3(\%)$	1.53	4.19	4.93	8.64	2.66
$w_4(\%)$	0.02	2.54	7.59	6.46	14.17
$w_5(\%)$	8.97	18.69	37.23	53.40	27.92
$w_6(\%)$	1.25	1.68	3.45	2.45	1.12
$w_7(\%)$	0.26	3.01	5.55	9.88	15.61
$w_8(\%)$	0.28	0.38	1.18	3.08	0.12
$w_9(\%)$	0.02	2.47	1.85	0.20	8.80
$w_{10}(\%)$	81.92	61.96	12.90	1.22	
$E(R)(\%)$	2.3216	2.6887	3.3472	3.8351	3.2330
$\sigma^*(\%)$	0.8899	1.8865	3.6842	4.9481	3.6211

其中组合 1—4 为上文中获得的含有无风险资产情况下的四个最优点的具体组合，组合 5 为不含无风险资产情况下的最优点的具体组合。

由于在约束遗传算法编程过程中统一将交易费用规定为 $C(w_i) = w_i S c_i$ ，从而忽略了 $w_i S \leq a_i$ 时的情况，但实际上交易费用时这样规定的：

$$C(w_i) = \begin{cases} w_i S c_i, & w_i S \geq a_i \\ a_i c_i, & w_i S \leq a_i \end{cases} \quad (7-30)$$

因此以上获得的结果还需进行修正，即收益率应修正为：

$$E^*(R) = E(R) - \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n X_i \quad (7-31)$$

其中

$$X_i = \begin{cases} 0 & w_i S \geq a_i \\ a_i c_i - w_i S c_i & w_i S \leq a_i \end{cases} \quad (7-32)$$

即当投资于某一证券的资金不足规定值时，说明这一项在计算中存在误差，要进行修正，而反之则不需修正，因此只需减 0 即可。

对以上结果进行修正，由于本文规定 $S = 1000000$ ， $a_i = 5000$ ，因此当 $w_i \leq \frac{5000}{1000000}$ 时， $X_i = 5000 * c_i - w_i * 1000000 * c_i$ 。则经过计算后五种情况下的收益率分别降低为：

(0.00491%，0.00036%，0，0.0006%，0.0011%)

因此收益率无差为：

表 7.2 收益率误差

	1	2	3	4	5
$E(R)^*(\%)$	2.31669	2.68834	3.3472	3.8345	3.2319
误差 (%)	0.21	0.01	0	0.02	0.03

由上表可以知道在遗传算法计算中忽略交易费用后，可能使得到的收益产生误差，即所得到的最优组合并不总是精确为投资者所需的，而是有可能比投资者所需的组合所产生的收益小。但经过分析，误差较小，因此在此处将这个误差忽略不计，即认为该组合就是投资者所需的最优组合。

经过这样的处理后，在采用遗传算法得到的结果中可以看到，作为约束条件的收益的值就是前面所提供的最优点的收益值，并且得到了十只证券的投资比例，这些比例就是最佳比例，但是会发现结果中风险的值会与所提供的风险值有所不同，存在一定的偏差。这是由于遗传算法的计算原理就是以概率 1 接近最有解，但在每次计算中由于各种条件的制约使得其得到的结果并不总以概率 1 接近最优解，通常会与最优解存在一定的差距，由于这个原因，致使每次计算会产生一定误差；此外，由于有效边界的产生是采用拟合有效解集的方法将无数离散的点拟合而成的，因此这也会导致采用无差异曲线与有效边界曲线相切所得的最佳点与遗传算法计算所得的最佳点存在一定的误差，但只要这个误差在一定的范围内，将被认为合理，即可忽略。

下面来计算一下误差情况，误差为：

$$\sigma^{**} = \sigma - \sigma^* \quad (7-33)$$

表 7.3 风险率误差

	1	2	3	4	5
$\sigma^{**}(\%)$	0.0024	0.0115	0.0141	0.0339	0.0083
误差 (%)	0.27	0.61	0.38	0.69	0.23

从上表可知，采用本文的约束遗传算法计算得到的结果是有效且合理的，因为风险率误差情况较好，均在1% 以下。

至此，通过一系列的研究计算，得到了满足特定投资者投资偏好的最优组合。

8 结论

本文通过研究给出了一个获取满足特定投资者投资偏好的最优组合的方法，这个方法简单易操作，具有较强的现实价值，可运用于实际证券投资中。

对本文中研究的证券投资方法做一个总结：第一，选择一定种类的“合适”的证券。这些证券不仅要有较好的历史业绩，还要有较好的未来预测收益；第二，估计出这些证券的期望收益率、方差以及它们相互之间的协方差系数。根据估计结果，进一步调整所选股票，尽量分散风险；第三，运用适当的方法求出证券组合的组合系数，即寻求有效组合。在此过程中，首先要建立能良好反映市场实际情况的组合模型，随后要找到能求解该模型的方法；第四，在有效的证券组合中寻找最佳证券组合。第三步获得的有效解并不是真正的最优解，真正的最优解的求取依赖于每一个投资者对收益和风险的偏好个性，利用特定投资者的偏好求取真正的最优解。

通过以上四个步骤，获得了满足有特定偏好的投资者投资要求的最优组合，这个组合实现了在预期收益最大化和收益率不确定性（风险）的最小化之间的某种平衡，而这个平衡点就是投资者所需要的，最符合其投资要求的一种方案。

因此，本文的研究具有一定的实际应用价值，通过实例实证也证明了该方法的可操作性、有效性和优越性。

参考文献

- [1] Harry Markowitz. Portfolio Selection[J]. Journal of Finance, March 1952:77-91.
- [2] 汉姆, 列维著, 任淮秀等译. 投资学[M], 北京大学出版社, 2000.
- [3] 威廉·F·夏普, 戈登·J·亚历山大, 杰弗里·V·贝利. 投资学[M]. 中国人民大学出版社, 1998.
- [4] 王喆, 顾培亮, 梁姣洁, 钱为国. 模拟退火改进遗传算法在股市投资决策中的应用[J]. 天津大学学报, 2000, 33 (1): 81-84.
- [5] 张璞, 李鑫, 窦雯虹. 最优证券组合投资模型[J]. 西北大学学报, 2001, 31 (4): 99-101.
- [6] 张东摩, 李红兵. 人工智能研究动态与发展与趋势[J]. 计算机科学, 1998, 25 (2): 5-8.
- [7] 吴成东, 王长涛. 人工神经元 BP 网络在股市预测方面的应用[J]. 控制工程, 2002, 9 (3): 48-50.
- [8] 吴微, 陈维强, 刘波. 用 BP 神经网络预测股票市场涨跌[J]. 大连理工大学学报, 2001 (1), 第 41 卷: 9-15.
- [9] Bianchini M•et al. Learning without local minima in radial basis function networks. IEEE Trans on Neural Network, 1995, 6:749-755.
- [10] 刘新勇, 贺江峰, 孟祥泽等. 基于神经网络的股市预测[J]. 南开大学学报, 1998, 31 (3): 39-44.
- [11] 王上飞, 周佩玲, 吴耿峰等. 径向基神经网络在股市预测中的应用[J]. 预测, 1998 (6): 44-46.
- [12] 李宗伟, 王美娟, 郑淑华. 基于径向基神经网络的股价预测[J]. 上海理工大学学报, 2002, 24 (1): 81-83.
- [13] 闻新, 周露, 王丹力等. MATLAB 神经网络应用设计[M]. 北京: 科学出版社, 2000:244-270.
- [14] 徐大江. 证券投资决策的多目标线性规划法[J]. 系统工程理论与实践, 1995 (12): 46~52.
- [15] 林铨云, 董加礼. 多目标优化的方法与理论 [M]. 吉林教育出版社, 1992, 62.
- [16] 成思危, 胡清淮, 刘敏. 大型线性目标规划及其应用[M]. 河南科学技术出版社, 2000, 235.
- [17] 陈科燕, 肖冬荣. 多目标证券组合投资决策[M]. 统计与决策, 2003 (4): 23-24.
- [18] 刘善存, 邱菀华, 汪寿阳. 带交易费用的泛证券组合投资策略[J]. 系统工程理论与实践, 2003 (1), 22-25.
- [19] 钱渝主编. 运筹学 (一) [M], 科学出版社 2000.
- [20] 任建芳, 赵瑞清, 鲍兰平. 随机最优证券投资组合模型[J]. 系统工程理论与实践, 2000 (9): 14~18.
- [21] 刘宝碇, 赵瑞清. 随机规划与模糊规划[M]. 北京: 清华大学出版社, 1998.

- [22] 陈科燕, 肖冬荣. 基于遗传算法的最优证券投资组合模型[J], 南京气象学院学报. 2003, 26(5): 707-711.
- [23] 攀登, 吴冲锋. 用遗传算法直接搜索证券组合投资的有效边界[J], 系统工程学报. 2002 (4), 364-367. 第 17 卷.
- [24] Holland J H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems* [M]. University of Michigan Press, Ann Arbor MI, 1975.
- [25] Goldberg D E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Learning* [M]. New York: Addison-Wesley, 1989.
- [26] Mitsuo C, Runwei C. *Genetic Algorithms and Engineering Design* [M]. Wiley, New York.
- [27] 周明, 孙树栋. 遗传算法原理及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.
- [28] 陈国良, 王煦法 等. 遗传算法及应用[M]. 北京: 人民邮电出版社, 1996.
- [29] 许国远. 系统科学与工程研究[M]. 上海, 上海科技教育出版社, 2000.
- [30] 李衍达. 信息科学与生命之谜[J]. 世界科技研究与发展, 1999, 23 (3): 26-30.
- [31] Hofbauer J, Sigmund K. *The Theory of Evolution and Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1988
- [32] 王小平, 曹立明. 遗传算法理论、应用与软件实现[M]. 西安交通大学出版社, 2002.
- [33] 辛香非, 朱鳌鑫. 遗传算法的适应度函数研究[J]. 系统工程与电子技术, 1998 (11): 58-62.
- [34] Goldberg D E, *Genetic Algorithm in Search, Optimization and Machine Learning* [M]. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989: 21-45
- [35] Vittorio Maniezzo, *Genetic Evolution of the Topology and Weight Distribution of the Neural Networks* [J]. IEEE, Trans. On Neural Networks, 1994, 5(1): 39-53.
- [36] Srinivas M, Patnaik L.M. Adaptive Probabilities of Crossover and Mutations in Gas. IEEE Trans. On SMC, 1994, 24(4): 656-667.
- [37] 李海民, 吴成柯. 自适应遗传算法及其性能分析[J]. 电子学报, 1999, 27 (5): 90-92.
- [38] 张雪江, 朱向阳 等. 自适应基因遗传算法及其在知识获取中的应用[J]. 系统工程与电子技术, 1997 (7): 67-72.
- [39] 吕馨, 徐松艳, 张刚. 组合投资的数学模型[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1999(4): 51~54.
- [40] 屠新曙, 王春峰. 含无风险资产时投资组合的效用最大化[J]. 天津大学学报, 2003 (2) 243-247, 第 36 卷.
- [41] 李政兴. 证券组合投资决策的二次规划方法与无差异曲线法[J]. 中南财经大学学报, 2000(5): 73~76.
- [42] 吴可, 孟新平. 投资组合虚拟无差异曲线模型最优化方法[J], 华中科技大学学报. 2001 (增刊 1), 第 29 卷.

- [43] 屠新曙,王春峰,巴曙松.投资组合效用问题的研究[J],数量经济技术研究.2002(5)。
- [44] Mark Kritzman, About Utility[J], Financial Analysts Journal, 1992,48(3):17-20.
- [45] 王春峰,屠新曙,厉斌.效用函数意义下投资组合有效选择问题的研究[J].中国管理科学.2002(2),第10卷:15-19.
- [46] 胡世良.效用曲线与股票投资主体行为分析[J].投资理论与实践,1992(9):17-17.
- [47] 曹国华,黄薇.安全第一的证券投资组合优化模型与绩效管理[J].重庆大学学报(自然科学版)2000(3),94-96,第23卷。

致 谢

本论文的研究工作是在肖冬荣教授的悉心指导下完成的。在这三年时间里，导师在学习、生活等方面给予我们无微不至的关怀，在论文的选题、研究和撰写过程中倾注了大量的心血和汗水。导师严谨的治学态度、渊博的学术造诣给予我莫大的启迪，必将成为我前行的方向。

研究生部钱翼梅老师对我生活上的关爱，让我难以忘怀；师兄师姐的宝贵资料、建议和帮助，为论文工作的展开排除了许多不利因素；一些朝夕相处的同学和朋友也给了我许多相互学习和提高的机会，使我得以顺利地完论文，在此一并致以深深的谢意！

本文水平有限，文章不足之处在所难免，肯请批评指正。

附 录

八只股票 2003 年 1 月 6 日到 5 月 16 日的收盘价, 单位: 元。

600205 (7.66, 7.76, 7.94, 8.02, 8, 8.17, 8.43, 8.3, 8.46, 8.5, 8.38, 8.45, 8.44, 8.35, 8.42, 8.85, 8.89, 9, 9.05, 9.05, 9.1, 9.16, 9.55, 9.41, 9.33, 9.37, 9.41, 9.4, 9.27, 9.35, 9.21, 9.4, 9.59, 9.6, 9.8, 9.75, 9.68, 9.5, 9.6, 9.63, 9.83, 9.78, 9.72, 9.68, 9.66, 9.69, 9.96, 9.92, 9.9, 10, 10.18, 10.26, 10.38, 10.6, 10.56, 10.54, 10.49, 10.34, 10.42, 10.45, 10.53, 11, 11.81, 11.73, 11.24, 11.31, 10.94, 11.1, 11.35, 11.23, 10.66, 10.69, 11.64, 11.77, 11.86, 12.55);

000717 (7.94, 8.3, 8.43, 8.65, 8.67, 8.55, 8.81, 8.6, 8.7, 8.61, 8.29, 8.23, 8.26, 8.38, 8.34, 8.35, 8.65, 8.59, 8.4, 8.37, 8.24, 8.45, 8.46, 8.44, 8.23, 8.24, 8.4, 8.35, 8.29, 8.28, 8.56, 8.46, 8.49, 8.62, 8.64, 8.41, 8.45, 8.7, 8.61, 8.79, 9.01, 8.94, 9.04, 8.93, 9.07, 9.03, 8.85, 8.78, 9.09, 9.15, 9.34, 9.3, 9.37, 9.37, 9.35, 9.61, 9.92, 9.84, 10.27, 11.07, 12.18, 12.39, 11.84, 11.23, 11.41, 11.07, 10.48, 10.64, 11.26, 10.91, 11.45, 12.11, 12.38, 12.51, 12.62, 12.47);

600104 (6.75, 6.79, 6.96, 7.04, 6.95, 7.02, 7.43, 7.37, 7.65, 7.59, 7.71, 7.58, 7.59, 7.55, 7.81, 8, 7.99, 8.08, 7.91, 7.94, 7.97, 7.85, 7.81, 7.71, 7.78, 7.86, 7.9, 7.69, 7.65, 7.8, 7.99, 7.95, 8.12, 8.31, 8.25, 8.19, 8.18, 8.28, 8.08, 8.14, 8.22, 8.26, 8.44, 8.64, 8.5, 8.61, 8.5, 8.52, 8.71, 8.73, 8.62, 8.84, 8.96, 9.36, 9.3, 9.3, 9.21, 9.43, 9.64, 9.49, 9.81, 9.89, 10.06, 10.49, 11.53, 11.47, 11.9, 11.8, 11.26, 11.41, 11.38, 10.48, 11.53, 12.06, 11.94, 13.13, 12.71, 12.85);

600002 (3.72, 3.72, 3.84, 3.89, 3.83, 3.85, 4.12, 4.03, 4.06, 4.09, 4, 4.05, 4.09, 4.31, 4.027, 4.4, 4.33, 4.27, 4.27, 4.33, 4.28, 4.39, 4.29, 4.28, 4.31, 4.35, 4.31, 4.31, 4.37, 4.43, 4.45, 4.4, 4.46, 4.41, 4.47, 4.42, 4.48, 4.5, 4.53, 4.55, 4.57, 4.61, 4.71, 4.69, 4.59, 4.56, 4.56, 4.57, 4.48, 4.58, 4.65, 4.77, 4.73, 4.76, 4.68, 4.71, 4.71, 4.78, 4.8, 4.92, 4.87, 4.91, 4.95, 5.05, 4.87, 4.81, 4.9, 4.87, 5.11, 5.06, 4.93, 4.75, 5.17, 5.03, 5.31, 5.8, 5.59, 6.06, 6.15, 6.03);

600886 (7.64, 7.57, 7.8, 7.94, 7.82, 7.62, 8.27, 8.16, 8.19, 8.21, 8.35, 8.5, 8.98, 8.76, 8.85, 8.93, 8.87, 8.81, 8.62, 8.82, 8.92, 9, 9, 8.98, 9.05, 9.28, 9.33, 9.14, 9.54, 9.57, 9.58, 9.8, 9.9, 9.93, 9.74, 9.72, 9.61, 9.51, 9.59, 9.61, 9.84, 9.94, 10.12, 10.02, 10.11, 10.38, 10.04, 10.09, 9.99, 10.01, 10.24, 10.56, 10.71, 10.74, 10.86, 10.9, 10.87, 10.68, 10.84, 11.06, 11.05, 10.97, 11.3, 11.78, 11.71, 11.81, 12.24, 11.81, 11.71, 11.69, 11.11, 10.55, 10.84, 10.89, 11.29, 11.85, 12.11, 12.4, 12.7, 12.58);

600166 (9.37, 9.36, 9.77, 10.07, 10.88, 10.36, 10.76, 10.7, 10.9, 10.69, 11.1, 11.01, 10.75, 10.68, 10.74, 10.81, 10.82, 10.86, 10.99, 10.98, 11.07, 10.92, 10.85, 10.66, 10.79, 10.74, 10.74, 11.03, 11.31, 11.72, 11.69, 11.7, 11.41, 11.46, 11.93, 11.79, 11.4, 11.11, 11.33, 11.67, 11.7, 12.28, 12.15, 12.22, 11.99, 12.5, 12.54, 12.36, 12.33, 12.26, 12.28, 12.29, 12.3, 12.35, 12.79, 12.79, 12.48, 12.83, 12.73, 12.71, 12.86, 13.43, 13, 13.12, 13.84, 13.71, 14.54, 14.25, 13.49, 13.55, 14.9, 14.92, 14.72, 15.69, 14.76, 15, 14.98, 15.08,);

600780 (8.74, 8.79, 8.95, 9.08, 9.37, 10.31, 10.09, 10.49, 10.41, 10.41, 10.27, 10.2, 10.2, 10.39, 10.39, 10.39, 10.58, 10.58, 10.7, 10.72, 10.6, 10.56, 10.41, 10.29, 10.43, 10.54, 10.34, 10.41, 10.67,

10.88, 10.94, 10.86, 10.84, 10.73, 10.67, 10.66, 10.7, 10.49, 10.56, 10.66, 10.69, 10.7, 10.83, 10.86, 10.78, 11.14, 11.11, 11.13, 10.94, 10.94, 11.06, 11.3, 11.5, 11.44, 11.42, 11.42, 11.66, 11.66, 11.7, 11.92, 11.89, 12.79, 12.74, 13.61, 13.18, 13.01, 13.49, 13.18, 13.11, 13.02, 12.61, 12.2, 13.41, 13.29, 13.68, 14.04, 13.92, 14.48, 14.58, 14.76)。

作者在学期间发表的论文清单

1. 陈科燕, 肖冬荣. 多目标证券组合投资决策. 统计与决策, 2003 (4): 23-24.
2. 陈科燕, 肖冬荣. 基于遗传算法的最优证券投资组合模型. 南京气象学院学报, 2003, 26 (5): 707-711.
3. 陈科研, 肖冬荣, 张雅. 特定偏好下的最优证券组合投资模型研究. 工业技术经济, 2003, 22 (5): 136-137.
4. 张雅, 肖冬荣, 陈科燕等. 时间序列模型对深证成指的预测分析. 统计与决策, 2003(5): 33-34.