

# 2023 杭州电子科技大学第十三届研究生数学建模竞赛题目

(请先阅读“2023 杭电第十三届研究生数学建模竞赛参赛须知”)

## A 题：并联机械手运动轨迹规划与控制问题

机器人在工业中应用越来越广，许多强度大、快速、重复的工作不断的被机器人所替代。在各种类型的机器人中，工业机器人在实际应用中相对成功，被广泛地用于航空航天、机械、汽车、电子、化工、食品等领域，可完成诸如加工、装配、搬运、涂装、焊接、包装等操作。因并联机器人具有结构简单、机构重量轻，柔性強和速度快等优点，近年来制造业对其需求不断上升，并广泛应用于食品包装、航空航天、医疗、精密制造等领域。在这类并联机器人当中最具有代表性的当属 Clavel 博士发明的如图 1 Delta 机构的机械手。该机械手由静动两个平台、三个主动臂、三个从动臂、末端执行器构成，通过驱动主动臂旋转，可以使动平台做平移运动。而后在此设计基础上，提出了不同于 Delta 机构的变异形式与其它并联机器人，以适于对不同工作空间的要求。

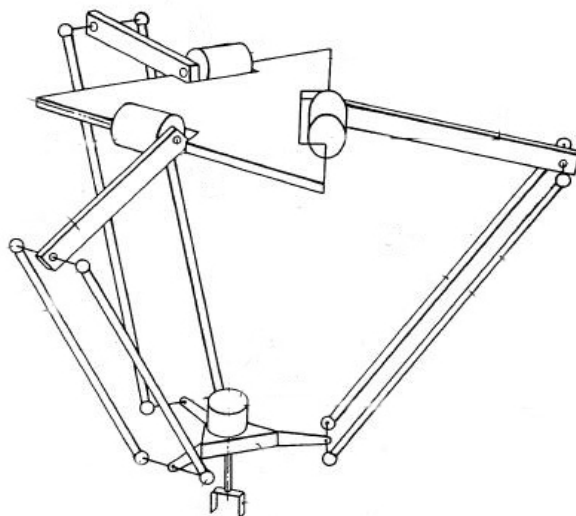


图 1 Clavel 发明的 Delta 机构

为了研究问题方便，图 2 给出了 Delta 并联机械手机构简图。静坐标系  $O-XYZ$ ，原点  $O$  位于静（固定）平台正三角形  $\Delta A_1 A_2 A_3$  的半径为  $R$  外接圆的圆心， $A_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 表示旋转关节， $OX$  轴过  $A_1$ ， $OZ$  轴垂直于固定平台， $OY$  轴方向由右手法则确定。动坐标系  $O'-X'Y'Z'$  原点  $O'$  位于动平台正三角形  $\Delta C_1 C_2 C_3$  的半径为  $r$  外接圆的圆心，坐标轴建立方法与固定平台一致。 $B_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 表示球铰， $A_i B_i$  表示主动臂，长度为  $L_1$ ； $B_i C_i$  表示从动臂，长度为  $L_2$ ； $\theta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) 表示主动臂输出角度；坐标系  $O_{i0}-X_{i0}Y_{i0}Z_{i0}$  认为是绕任意  $K$  轴旋转  $\theta_i$ ，再相对坐标系  $O-XYZ$  移动。

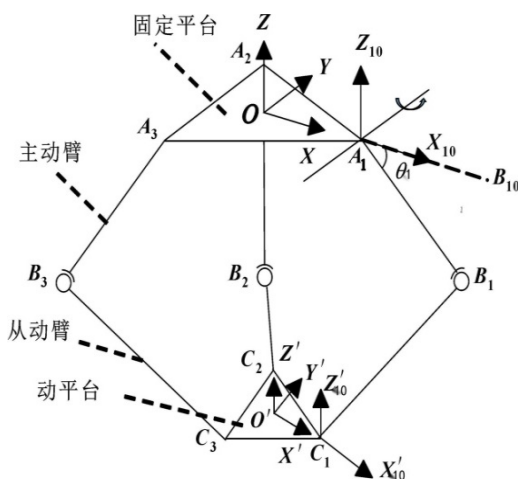


图 2 Delta 并联机械手机构简图

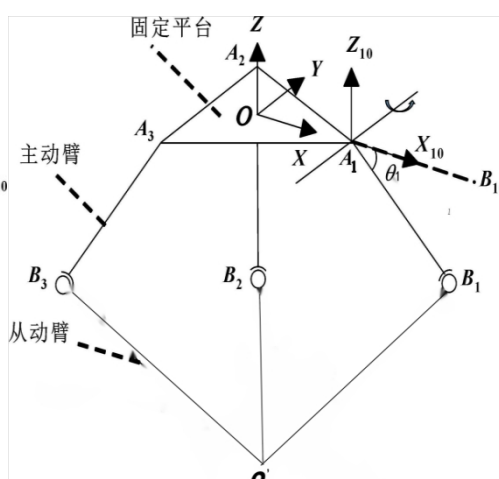


图 3 Delta 并联机械手动平台简化为质点机构简图

请你们团队通过合理的假设，建立数学模型解决以下问题：

**问题 1** 当动平台外接圆半径  $r$  很小时，可将动平台简化为质点，如 图 3 所示，建立 Delta 并联机械手运动学模型，即在静坐标系  $O-XYZ$  中，建立主动臂输出角度  $\theta_i$  ( $i=1、2、3$ ) 与动平台质点坐标之间的相互对应关系。进一步，设参数  $R=130\text{mm}$ 、 $L_1=380\text{mm}$ 、 $L_2=980\text{mm}$ ，(1) 表 1 给定了主动臂输出角度，求解相应动平台质点坐标；(2) 表 2 给出了动平台质点坐标，确定相应主动臂输出角度；(3) 给出动平台质点可移动的最大坐标空间。

**问题 2** 在问题 1 设计参数下，给定该动平台质点的运动轨迹为

$$\begin{cases} x = 200\cos(\frac{\pi}{3}t) \\ y = 200\sin(\frac{\pi}{3}t) \\ z = -800 \end{cases} \quad t \in [0,6] \quad , \text{ 坐标单位 mm;}$$

建立数学模型，给出主动臂输出角度的最优控制曲线。

**问题 3** 在问题 1 设计参数下，请设计动平台质点从  $P_1(-250,0,-850)$  为起始点，途经  $P_2(-250,25,-850)$ 、 $P_3(0,50,-850)$ 、 $P_4(250,25,-850)$ ，最后到放置点  $P_5(250,0,-850)$  移动轨迹 (坐标单位 mm)，使得移动轨迹更加平滑、运动状态更加平稳。

**问题 4** 动平台为一般情况时，如图 2 机构简图，建立 Delta 并联机械手运动学模型，即在静坐标系  $O-XYZ$  中，建立主动臂输出角度  $\theta_i$  ( $i=1、2、3$ ) 与动平台几何中心的位置坐标之间的对应关系；进一步，设参数  $R=135\text{mm}$ 、 $r=40\text{mm}$ ， $L_1=180\text{mm}$ 、 $L_2=500\text{mm}$ ，(1) 表 3 给定了主动臂输出角度，求解相应动平台几何中心的位置坐标；(2) 表 4 给出了动平台几何中心的位置坐标，确定相应主动臂输出角度；(3) 为了避免杆件之间不必要的碰撞发生以及杆件和静、动平台之间干涉现象的出现，将主动臂输出角度限制在  $[-0.785\text{ rad}, 1.395\text{ rad}]$ ，给出动平台几何中心的位置坐标可移动的最大坐标空间。

**问题 5** 在问题 4 设计参数下，请规划在保证移动速度、加速度不能产生突变前提下，

动平台几何中心的位置从  $Q_1(-100,-100,-350)$  为起始点, 途经  $Q_2(-100,-100,-500)$ 、 $Q_3(0,0,-550)$ 、 $Q_4(100,100,-500)$ , 最后到放置点  $Q_5(100,100,-350)$  移动轨迹 (坐标单位 mm), 且满足角速度不超过  $17\text{rad/s}$  条件下, 使得机构运行的总时间尽可能地最少的控制策略。

表 1 问题 1 主动臂输出角度 (rad) 五组数据

$\theta_1$	0.6151	0.5261	0.1318	-0.0375	0.0165
$\theta_2$	0.3061	0.2452	0.1318	0.217 5	0.3560
$\theta_3$	0.1185	-0.0512	0.1318	0.476 1	0.5250

表 2 问题 1 动平台质点坐标 (mm) 五组数据

$x$	-260.2063	-261.5946	65.0000	410.4280	393.9817
$y$	-202.4381	-165.2073	112.5833	523.6756	453.0147
$z$	-879.3720	-861.7117	-913.4228	-803.9750	-868.2685

表 3 问题 4 主动臂输出角度 (rad) 五组数据

$\theta_1$	0.625	0.5761	0.1217	-0.0485	0.0185
$\theta_2$	0.336	0.2275	0.1217	0.2275	0.3360
$\theta_3$	0.0185	-0.0485	0.1217	0.5761	0.6250

表 4 问题 4 动平台几何中心的位置坐标 (mm) 五组数据

$x$	-114.1159	236.6863	47.5000	-113.7664	26.4621
$y$	-124.1106	340.4747	82.2724	-125.4361	310.7604
$z$	-353.0902	-268.1699	-566.7311	-485.3679	-513.2918

附 Delta 并联机械手工作视频:

[1] [https://www.iqiyi.com/w\\_19rul800op.html](https://www.iqiyi.com/w_19rul800op.html)

[2] <https://haokan.baidu.com/v?pd=wisenatural&vid=10413563400560827550>