Assignment 1

Will Crichton (wcrichto)

Problem 1

Part 1:

$$\begin{aligned}
\textsf{Property } p1 &::= \quad (> 0 \ \wedge < 5) \ \vee = 10 \\
p2 &::= \quad =' X' \vee =' Y' \\
p3 &::= \quad \varepsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textsf{Schema } \tau 1 &::= \quad \textsf{num}\langle p1 \rangle \\
\tau 2 &::= \quad \left\{ '\textsf{a}' : \textsf{bool}, '\textsf{b}' : \textsf{string}\langle p2 \rangle \right\} \\
\tau 3 &::= \quad \left[\left\{ '\textsf{x}' : \textsf{num}\langle p3 \rangle \right\} \right]
\end{aligned}$$

Part 2:

$$\frac{}{\textsf{false} \sim \textsf{bool}} \ (\text{S-Bool-False}) \qquad \frac{}{\textsf{true} \sim \textsf{bool}} \ (\text{S-Bool-True}) \qquad \frac{n \in \mathbb{Z}}{n \sim \textsf{num}} \ (\text{S-Num})$$

$$\frac{a \in \{'a' \ldots ' z', ' A' \ldots ' Z'\}}{a^+ \sim \textsf{string}} \ (\text{S-String}) \qquad \frac{n \sim \textsf{num} \quad (n > 0 \wedge n < 5) \vee n = 10}{n \sim \tau} \ (\text{S-Num-Correct})$$

$$\frac{v1 \sim \textsf{bool} \quad v2 \sim \textsf{string} \quad v2 =' X' \vee v2 =' Y'}{\{'a' : v1, 'b' : v2\} \sim \tau} \ (\text{S-Dict-Correct})$$

$$\frac{v1 \sim \textsf{num}}{[(\{'x' : v1\})^*] \sim \tau} \ (\text{S-Array-Correct})$$

Problem 2

Part 1:

$$\frac{}{(\varepsilon, j) \mapsto (\varepsilon, j)}\ (\textsc{D-Epsilon}) \qquad \frac{j \sim \{s : j'\}}{(.sa, j) \mapsto (a, j_s)}\ (\textsc{D-Dict-Extract})$$

$$\frac{j \sim [j']}{(|a, j) \mapsto (\varepsilon, [j_a])}\ (\textsc{D-Maps-Over-Array})$$

$$\frac{j \sim [\{s : j'\}] \wedge a = .sa'}{(|a, j) \mapsto (a', [j[0]_s, j[1]_s, \ldots, j[|j| - 1]_s])}\ (\textsc{D-Maps-Over-Array-of-Dicts})$$

$$\frac{j \sim [[j']] \wedge a = [n]a'}{(|a, j) \mapsto (a', [j[0][n], j[1][n], \ldots, j[|j| - 1][n]])}\ (\textsc{D-Maps-Over-Array-of-Array})$$

Part 2:

$$\frac{j \sim \tau}{\varepsilon \sim \tau}\ (\textsc{V-Epsilon}) \qquad \frac{a \sim \tau \quad j \sim \tau}{.sa \sim \{\mathsf{string} : j\}}\ (\textsc{V-String}) \qquad \frac{a \sim \tau \quad j \sim \tau}{[n]a \sim [j]}\ (\textsc{V-Index})$$

$$\frac{a \sim \tau \quad j \sim \tau}{|a \sim [j]}\ (\textsc{V-Maps-Over-Array})$$

Accessor safety: for all a, j, τ, if $a \sim \tau$ and $j \sim \tau$, then there exists a j' such that $(a, j) \overset{*}{\mapsto} \varepsilon, j'$.

证明. 1. 当 $a = \varepsilon \wedge j \sim \tau$ 时，根据 $\mathbf{V-Epsilon}$ 有 $a \sim \tau$. 此时存在 $j' = j$，使得 $(a, j) \mapsto (\varepsilon, j')$. 故命题对于 $a = \varepsilon$ 成立.

2. 假设对于现有的 a, j, τ，$a \sim \tau \wedge j \sim \tau$，存在 j' 使得 $(a, j) \overset{*}{\mapsto} (\varepsilon, j')$.

3. 对于 $.sa$ 与 $\{(\mathsf{string} : j)^*\} \sim \{\mathsf{string} : j\}$,根据 $\mathbf{V-String}$ 有 $.sa \sim \{\mathsf{string} : j\}$,根据 $\mathbf{D-Dict-Extract}$ 有 $(.sa, \{(\mathsf{string} : j)^*\}) \mapsto (a, j_s) \overset{*}{\mapsto} (\varepsilon, j')$，其中 $j_s \sim \tau$. 故命题对 $.sa$ 成立.

4. 对于 $[n]a$ 与 $[j^*] \sim [j]$, 根据 $\mathbf{V-Index}$ 有 $[n]a \sim [j]$, 根据 $\mathbf{D-Array-Extract}$ 有 $([n]a, [j^*]) \mapsto (a, j_n) \overset{*}{\mapsto} (\varepsilon, j')$，其中 $j_n \sim \tau$. 故命题对 $[n]a$ 成立.

5. 对于 $|a$ 与 $[j^*] \sim [j]$，根据 $\mathbf{V-Maps-Over-Array}$ 有 $|a \sim [j]$，根据 $|a$ 的定义和归纳假设有 $(|a, [j]) \overset{*}{\mapsto} (\varepsilon, [j_a])$. 故命题对 $|a$ 成立.

综上，命题得证.

$\square$