Реализация математических операций в интервальных и нечетких числах в Python

Интервальные числа

Интервальное число – это нечеткое множество с функцией принадлежности, равной 1 на отрезке [a, b] и равной 0 вне этого отрезка. Интервальное число – частный случай нечеткого множества. Хотя для интервальных чисел не выполняется одно из важных свойств нечетких множеств – непрерывность перехода от «непринадлежности к множеству» к «принадлежности», это математическое понятие позволяет успешно моделировать разброс результатов косвенных измерений и погрешности других расчетов в прикладных научных исследованиях.

Интервальные числа часто используются для описания результатов измерений, поскольку измерение всегда проводится с некоторой неопределенностью.

Формулы для основных операций в интервальных числах

$$\tilde{a} + \tilde{b} = [a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2],$$

$$\tilde{a} - \tilde{b} = [a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1],$$

$$k \times \tilde{a} = k \times [a_1, a_2] = f(x) = \begin{cases} [ka_1, ka_2], & k > 0 \\ [ka_1, ka_2], & k < 0 \end{cases},$$

$$\tilde{a} \times \tilde{b} = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] = \left[\min_{i,j}(a_i \times b_j), \max_{i,j}(a_i \times b_j)\right],$$

$$\tilde{a}/\tilde{b} = [a_1, a_2]/[b_1, b_2] = [a_1, a_2] \times [1/b_2, 1/b_1].$$

Нечеткие числа

Нечеткое множество представляет собой совокупность элементов произвольной природы, относительно которых нельзя с полной определенностью утверждать принадлежит ли тот или иной элемент рассматриваемой совокупности данному множеству или нет.

Функция принадлежности треугольного нечеткого числа

$$\boldsymbol{\mu_A(x; a, b, c)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \boldsymbol{x \le a}, \\ \dfrac{\boldsymbol{x-a}}{\boldsymbol{b-a}}, & \boldsymbol{a \le x \le b}, \\ \dfrac{\boldsymbol{c-x}}{\boldsymbol{c-b}}, & \boldsymbol{b \le x \le c}, \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{x \ge c}. \end{cases}$$

Формулы для основных операций в треугольных нечетких числах

$A \pm B = C = \{z, \mu_C(z)\}$, где

$$\mu_C(z) = sup_{z=x\pm y}\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\}.$$

$A \times B = C = \{z, \mu_C(z)\}$, где

$$\mu_C(z) = sup_{z=x\times y}\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\}.$$

$A/B = C = \{z, \mu_C(z)\}$, где

$$\mu_C(z) = sup_{z=x/y}\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\}.$$

$\max\{A, B\} = C = \{z, \mu_C(z)\}$, где

$$\mu_C(z) = sup_{z=\max\{x,y\}}\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\}.$$

$\min\{A, B\} = C = \{z, \mu_C(z)\}$, где

$$\mu_C(z) = sup_{z=\min\{x,y\}}\{\min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\}.$$

$\mu_B(x) = \mu_A(x)^k \quad (\forall x \in X).$

Производные в нечетких числах

Производная в четкой точке:

$\tilde{f}'(a) = \frac{d}{dx}\tilde{f}(x)|_{x \in a},$

$$\mu_{f'(\tilde{a})}(z) = \max_{z=f(x)}\{\mu_{\tilde{a}}(x)\}.$$

Производная в нечеткой точке:

$$\tilde{f}'(\tilde{a}) = \frac{d}{dx}\tilde{f}(x)|_{x\in\tilde{a}},$$

$$\mu_{f'(\tilde{a})}(z) = \max_{z=f(x)}\{\mu_{\tilde{a}}(x)\}.$$

Интегралы в нечетких числах

Интеграл в четких границах:

$$\tilde{I}(a,b) = \int_a^b \tilde{f}(x)\,dx.$$

$$I_i(a,b) = \int_a^b f_i(x)\,dx, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Интеграл в нечетких границах:

$$\tilde{I}(\tilde{a},\tilde{b}) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \tilde{f}(x)\,dx,$$

$$\mu_{\tilde{I}(\tilde{a},\tilde{b})}(z) = \max_z\{\min\{\mu_{\tilde{a}}(x),\mu_{\tilde{b}}(x)\}\},$$

$$z = \int_{a_i}^{b_j} \tilde{f}(t)\,dt.$$

Информационные источники

«ИНТЕРВАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МЕТОД ИХ РЕШЕНИЯ» – В.И. Левин

«Нечеткое моделирование в средеMATLAB и fuzzyTECH» – Александр Леоненков