实变函数习题解答

Solutions to real analysis exercises

作者：数试 82 裴兆辰

2020 年 4 月 21 日

钱学森书院学业辅导中心

Qian Yuan Xue Fu

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

作品信息

- ➤ **标题：** 实变函数习题解答 - *Solutions to real analysis exercises*
- ➤ **作者：** 数试 82 裴兆辰
- ➤ **校对排版：** 钱院学辅排版组
- ➤ **出品时间：** 2020 年 4 月 21 日
- ➤ **总页数：** 14

目录

第一章

第二章

第三章

第四章 *Lebesgue*积分

§4.1 第一组

练习 2 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上非负可积，$f(0)=0$, 且 $f'(0)$ 存在，试证明存在积分

$$\int_{[0,\infty)}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$$

证明 设 $f'(0)=a$, 故 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\ s.t.\ \forall x\in\ [o,\delta_{x_0})$, 有 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\epsilon$
故

$$\int_{[0,\infty)}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{[0,\delta)}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{[\delta,\infty)}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\leq\int_{[0,\delta)}(a+\epsilon)\,\mathrm{d}x+\int_{[\delta,\infty)}\frac{f(x)}{\delta}\,\mathrm{d}x$$

$$\leq(a+\epsilon)\delta+\frac{1}{\delta}\int_{[\delta,\infty)}f(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$$

■

练习 3 设 $f(x)$ 是 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数，若存在 $E_k\subset E,m(E\setminus E_K)<1/k(k=1,2,\ldots)$，使得极限

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x$$

存在，试证明 $f(x)$ 在 E 上可积

证明 显然 $m\left(E\setminus(\cup_{k=1}^{\infty}E_k)\right)=0$, 设 $F_k=E_k\setminus(\cup_{j=1}^{k-1}E_j),(k=1,2,\ldots)$, 故 $F_i\cap F_j=\emptyset(i\neq j)$ 且 $\cup_{k=1}^{\infty}E_k=\cup_{k=1}^{\infty}F_k$, 由书中推论 4.7 得

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{F_k}f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

另一方面 $F_k\subset E\setminus\left(\cup_{j=1}^{k-1}E_j\right)$, 故 $m(F_k)<\frac{1}{k-1}$, 故 $\lim\limits_{k\to+\infty}m(F_k)=0$
另一方面

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{F_k}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{E_n}f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

故

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{F_k}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_{E_n}f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

故

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_{E_n} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

■

练习 4 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上非负可积函数，令

$$F(x) = \int_{(-\infty,x]} f(t)\mathrm{d}t, x\in\mathbb{R}$$

若 $F\in L(\mathbb{R})$, 试证明 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 0$

证明 由于 $f(x)\in L(\mathbb{R})$, 则 $\forall\epsilon>0$, 存在 N , $s.t.$

$$\int_{\{x:|x|>N\}} f(x)\,\mathrm{d}x < \epsilon\,,$$

又由于 $F(x)$ 是单调递增的，故对于 $y>N$, 有

$$F(y) \le \int_y^{y+1} f(x)\,\mathrm{d}x \;\le\; \int_{\{x:|x|>N\}} f(x)\,\mathrm{d}x < \epsilon\,,$$

故 $\lim\limits_{y\to\infty} F(y)=0$. 又由于 $F(x)$ 单调递增且非负，故 $F(x)\equiv 0$, $a.e.\ x\in\mathbb{R}$.

故 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 0$ ■

练习 5 设 $f_k(x)(k=1,2,...)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上非负可积函数列，若对任意可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 都有

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \le \int_E f_{k+1}(x)\mathrm{d}x$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x$$

证明 令 $E_k=\{x\in\mathbb{R}^n|f_k(x)>f_{k+1}(x)\}$, 故 E_k 可测，显然我们可以得到

$$\int_{E_k}\big(f_{k+1}(x)-f_k(x)\big)\,\mathrm{d}x = 0$$

故 $m(E_k)=0$, 设 $F=\cup_{k=1}^{\infty}E_k$, 故 $m(F)=0$, 由 Levi 定理得

$$\lim_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty}\int_{E\setminus F} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_{E\setminus F}\lim_{k\to+\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{k\to+\infty} f_k(x)\mathrm{d}x$$

■

练习 6 略 (由 Hölden 不等式直接得到)

练习 7 假设有定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x)$，如果对于任意的 $\epsilon>0$, 存在 $g,h\in L(\mathbb{R}^n)$, 满足 $g(x)\le f(x)\le h(x), (x\in\mathbb{R}^n)$, 并且使得

$$\int_{\mathbb{R}^n}(h(x)-g(x))\mathrm{d}x < \epsilon$$

, 试证明 $f\in L(\mathbb{R}^n)$

证明 故 $\forall k\in\mathbb{N}^*$, 存在可积函数 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$, $s.t.\ g_k(x)\le f_k(x)\le h_k(x),\ x\in\mathbb{R}^n$, 且

$$\int_{\mathbb{R}^n}\big(h_k(x)-g_k(x)\big)\,\mathrm{d}x<\frac{1}{k}$$

故

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|h_k(x)-g_k(x)|\mathrm{d}x=0$$

设 $g(x)=\overline{\lim}_{k\to+\infty}g_k(x)$. 故 $h_k(x)\ge g(x),\ a.e.\ x\in E$, 故

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|h_k(x)-g(x)|\mathrm{d}x=0$$

故 $\{h_k(x)\}$ 依测度收敛于 $g(x)$，故由不等式关系立即得到 $\{h_k(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$, 故存在子列 $\{h_{k_i}(x)\}$, $s.t.\ \lim\limits_{i\to+\infty}h_{k_i}(x)=f(x),\quad a.e.\ x\in\mathbb{R}^n$. 故 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，由积分的单调性得到 $f\in L(\mathbb{R}^n)$ ■

练习 8 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中测度有限的可测集列，且有

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}|\chi_{E_k}(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0,$$

试证明存在可测集 E，使得 $f(x)=\chi_E(x),\quad$ a.e. $x\in\mathbb{R}^n$.

证明 故函数列 $\{\chi_{E_k}(x)\}$ 依测度收敛到 $f(x)$, 由 Riesz 定理, 存在子列 $\{\chi_{E_{k_i}}(x)\}$, $s.t.$

$$\lim_{i\to\infty}\chi_{E_{k_i}}(x)=f(x)\,,\quad a.e.\ x\in\mathbb{R}^n$$

设 $E=\cap_{i=1}^{\infty}E_{k_i}$, 故 $\chi_E(x)=f(x)\,,\quad a.e.\ x\in\mathbb{R}^n$ ■

练习 9 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递增函数，试证明对 $E\subset[0,1], m(E)=t$, 有

$$\int_{[0,t]}f(x)\mathrm{d}x\le\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

证明 设 $E_1=E\cap[0,t], E_2=E\cap[t,1]\,, E_3=E^c\cap[0,t]\,, E_4=E^c\cap[t,1]$, 故 $m(E_2)=m(E_3)$. 另一方面，$\forall x\in E_3, y\in E_2$, 有 $f(y)\ge f(x)$, 故

$$\int_{[0,t]}f(x)\mathrm{d}x=\int_{E_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_2}f(x)\mathrm{d}x\le\int_{E_1}f(x)\mathrm{d}x+m(E_2)f(t)$$

$$=\int_{E_1}f(x)\mathrm{d}x+m(E_3)f(t)\le\int_{E_1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{E_3}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

■

练习 10 设 $f\in L(\mathbb{R}^n)$，$E\in\mathbb{R}^n$ 是紧集，试证明

$$\lim_{|y|\to\infty}\int_{E+\{y\}}|f(x)|\,\mathrm{d}x=0$$

证明 由于 $f \in L(\mathbb{R}^n)$, 故 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $R > 0,\ s.t.\ \int_{|x|>R} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \epsilon$. 由于 E 为紧集，故存在 $R_0 > 0,\ s.t.\ E \subset B(0, R_0)$,

故当 $|y| > R + R_0$ 时，$\forall x \in E + \{y\}$, 有 $|x| > R$, 故

$$\int_{E+\{y\}} |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_{|x|>R} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \epsilon$$

■

练习 17 设 $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_k \supset \ldots$, $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$,$f \in L(E_k)(k = 1, 2, \ldots)$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$$

证明 设 $f_k(x) = f(x)\chi_{E_k}(x)$, 由集合的递减性得 $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x) = f(x)\chi_E(x)$, 并且 $|\ f_k(x)\ | \le |\ f_1(x)\ |, \forall k \in \mathbb{N}$ 由于 $f_1(x) \in L(E_1)$, 由控制收敛原理得

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{E_1} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_{E_1} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_{E_1} f(x)\chi_E(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$$

■

练习 18 设 $f \in L(E)$, 且 $f(x) > 0 (x \in E)$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty} \int_E (f(x))^{1/k}\mathrm{d}x = m(E)$$

证明 设 $E_1 = \{x \in E : f(x) \ge 1\}$, $E_2 = \{x \in E : f(x) < 1\}$, 故在 E_1 中 $\{f(x)^{1/k}\}$ 是递减列，且 $|f(x)^{1/k}| \le f(x)$, $k \in \mathbb{N}^*$, 由 Levi 定理得

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_1} f(x)^{1/k}\mathrm{d}x = \int_{E_1} 1\ \mathrm{d}x = m(E_1)$$

又由于 $f_n(x) \in L(E)$, 故由递减型的 Levi 定理也可得

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_2} f(x)^{1/k}\mathrm{d}x = \int_{E_2} 1\ \mathrm{d}x = m(E_2)$$

■

练习 19 设 $\{f_n(x)(n = 1, 2, \ldots)\}$ 是 $[0, 1]$ 上的非负可积函数列，且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, 1]$ 上依测度收敛于 $f(x)$, 若有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x,$$

试证明对 $[0,1]$ 的任意可测子集 E，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

证明 由书上 P158 页注得

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]}|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$$

故

$$0\le\int_E|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x\le\int_{[0,1]}|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x\to 0(k\to+\infty)$$

■

练习 21 **(依测度收敛型的 Fatou 引理)** 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的非负可测函数列，试证明

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\le\varliminf_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$$

证明 由 Fatou 引理，得

$$\int_E\varliminf_{k\to+\infty}f_k(x)\mathrm{d}x\le\varliminf_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$$

由下极限定义可知，存在 $\{f_k(x)\}$ 的一个子列 $\{f_{k_i}(x)\}$，s.t.

$$\lim_{k\to+\infty}f_{k_i}(x)=\varliminf_{k\to+\infty}f_k(x)$$

故

$$\int_E\lim_{i\to+\infty}f_{k_i}(x)\mathrm{d}x=\int_E\varliminf_{k\to+\infty}f_k(x)\mathrm{d}x$$

另一方面，显然函数列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $\{f(x)\}$，由 Riesz 定理得 $\{f_{k_i}(x)\}$，存在一个子列 $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$,s.t. $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$。故

$$\int_E\lim_{i\to+\infty}f_{k_i}(x)\mathrm{d}x=\int_E\lim_{j\to+\infty}f_{k_{i_j}}(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

综上

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\le\varliminf_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$$

■

练习 23 设 $f\in L(\mathbb{R}^n)$,$f_k\in L(\mathbb{R}^n)(k=1,2,\dots)$ 且对于任意可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 有

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\le\int_E f_{k+1}(x)\mathrm{d}x(k=1,2,\dots),$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

试证明 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x), a.e. x\in\mathbb{R}^n$

证明 类似于之前第五题的过程我们可以得到 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上几乎处处单调，设不单调点集为 F, 故 $m(F)=0$, 设 $F(x)=\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$, $x\in E\setminus F$. 故 $F(x)\in L(\mathbb{R}^n)$

由与 $f_k(x)\in L(\mathbb{R}^n)$, 故 Levi 定理得

$$\lim_{k\to+\infty}\int_E\big(f_k(x)-f_1(x)\big)\mathrm{d}x=\lim_{k\to+\infty}\int_{E\setminus F}\big(f_k(x)-f_1(x)\big)\mathrm{d}x=\int_{E\setminus F}\lim_{k\to+\infty}\big(f_k(x)-f_1(x)\big)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{E\setminus F}F(x)-f_1(x)\mathrm{d}x=\int_E F(x)-f_1(x)\mathrm{d}x$$

又由于 $F(x), f_1(x)\in L(\mathbb{R}^n)$, 故

$$\int_E F(x)-f_1(x)\mathrm{d}x=\int_E F(x)\mathrm{d}x-\int_E f_1(x)\mathrm{d}x$$

故

$$\int_E F(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x\,,$$

故 $f(x)=F(x),\quad a.e.\ x\in\mathbb{R}^n$ ■

练习 26 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数，若对于每一点 $x\in\mathbb{R}$, 右极限都存在试证明 $f(x)$ 在任一区间 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的.

证明 $\forall\epsilon>0,\forall x_0\in\mathbb{R}$, 存在 $\delta_{x_0}>0$, $s.t.\forall x\in(x_0,x_0+\delta_{x_0})$, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$

记 $I_{x_0}=(x_0,x_0+\delta_{x_0})$ ，显然 $f(x)$ 在 I_{x_0} 中连续，记 $E=\cup_{x_0\in[a,b]}I_{x_0}$,$F=[a,b]\setminus E$ ，故 $D(f)\subset F$, 由定义得 F 没有聚点，故 F 是可列集, 得 $D(f)$ 是零测集 ■

给出另一个解法: 由课本第 20 页例 12 可直接得到。

练习 27 设 $E\subset[0,1]$, 试证明 $\chi_E(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积的充要条件是 $m(\overline{E}\setminus\mathring{E})=0$

证明 任取 $x\in\overline{E}\setminus\mathring{E}$, 故 $\forall>0$, 记 $I_\delta=(x-\delta,x+\delta)$, 故 $I_\delta\cap E\ne\varnothing$, $I_\delta\cap E^c\ne\varnothing$, 故 $\chi_E(I_\delta)=\{0,1\}$, 故 $\overline{E}\setminus\mathring{E}\subset D(f)$, 而 $\overline{E}^c$ 和 $\mathring{E}$ 均为开集，故 $f(x)$ 在 $\overline{E}$ 和 $\mathring{E}$ 上连续，故 $D(f)=\overline{E}\setminus\mathring{E}$, 故 f Riemann 可积当且仅当 $m(\overline{E}\setminus\mathring{E})=0$ ■

§4.2 第二组

练习 1 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值可积函数，令 $0<q\leq b-a$，记 $\Gamma=\{E\subset[a,b]: m(E)\geq q\}$, 试证明

$$\inf_{E\in\Gamma}\left\{\int_E f(x)\mathrm{d}x\right\}>0$$

证明 假设不成立,则存在 Γ 中的集合列 $\{E_n\}$ $s.t.$ $\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x<\frac{1}{2^n}$ 令 $S=\overline{\lim}_{n\to+\infty}E_n$，故 $m(S)\geq q$, 则

$$\int_S f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\chi_S(x)\mathrm{d}x\leq\int_E f(x)*\chi_{(\cup_{k=n}^{\infty}E_k)}(x)\mathrm{d}x\leq\sum_{k=n}^{\infty}\int_{E_k}f(x)\mathrm{d}x\leq\frac{1}{2^{n-1}},\forall n\in\mathbb{N}$$

令 $n\to\infty$，故 $\int_S f(x)\mathrm{d}x=0$，故 $f(x)=0,\ a.e.\ x\in S$，与假设矛盾！ ■

练习 2 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值可积函数,$\{E_n\}$ 是 $[a,b]$ 中的可测子集列，若有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x=0$$

试证明 $m(E_n)\to 0(n\to\infty)$

证明 设 $E=\overline{\lim}_{k\to+\infty}E_k$, 故存在 $\{E_{n_k}\}$ $s.t.$ $E_{n_k}\to E_k$ 且 $\{E_{n_k}\}$ 是单增集合列，故由 Levi 定理得

$$0=\lim_{k\to+\infty}\int_{E_{n_k}}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to+\infty}\int_{\cup_{j=1}^{\infty}E_j}f(x)*\chi_{E_{n_k}}(x)\mathrm{d}x=\int_{\cup_{j=1}^{\infty}E_j}\lim_{k\to+\infty}f(x)*\chi_{E_{n_k}}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\cup_{j=1}^{\infty}E_j}f(x)*\chi_E(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

由于 $f(x)$ 为正值，故 $m(E)=0$, 故 $\lim_{k\to\infty}m(E_k)=0$，故 $m(F)=0$, 由 Levi 定理得

$$\lim_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}$$

■

练习 3 设 $f:[0,1]\to[0,\infty)$ 是可测函数，试证明

$$\left(\int_{[0,1]}f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{[0,1]}ln(f(x))\mathrm{d}x\right)\leq\int_{[0,1]}f(x)ln(f(x))\mathrm{d}x$$

练习 6 设 $f(x),f_k(x)(k=1,2,\ldots)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的非负可积函数，且有

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\ a.e.\ ;\quad \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

试证明对于 E 中的任意一个可测子集 e，有

$$\lim_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\mathrm{d}x=\int_e f(x)\mathrm{d}x$$

证明 设 $g_k(x)=\underline{\lim}_{n\geq k} f_n(x)$, 故 $\{f_n(x)\}$ 是递增函数列，由于

$$\lim_{k\to+\infty} g_k(x) \ = \ \overline{\lim_{k\to+\infty}} f_k(x) \ = f(x)\,, \quad a.e.\ x\in E\,,$$

由 Levi 定理得，对于 E 中的任意可测集 e，有

$$\lim_{k\to+\infty}\int_e g_k(x)\mathrm{d}x \ = \ \int_e \lim_{k\to+\infty} g_k(x)\mathrm{d}x \ = \ \int_e f(x)\mathrm{d}x$$

故

$$\lim_{k\to+\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x \ = \ \int_E f(x)\mathrm{d}x \ = \lim_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$$

故

$$\lim_{k\to+\infty}\int_E \big(f_k(x)-g_k(x)\big)\,\mathrm{d}x \ =0\,,$$

故

$$\lim_{k\to+\infty}\int_e \big(f_k(x)-g_k(x)\big)\,\mathrm{d}x \ =0\,,$$

故

$$\lim_{k\to+\infty}\int_e g_k(x)\mathrm{d}x \ = \lim_{k\to+\infty}\int_e f_k(x)\mathrm{d}x$$

■

练习 7 设 $f(x)$ 是是 $E\subset\mathbb{R}^1$ 上的正值可测函数， $a>1$ ，试证明 $a^{f(x)}$ 在 E 上可积当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k m\big(\{x\in E: f(x)\geq k\}\big)<\infty$$

证明 利用 Abel 变换 (交换求和号次序), 我们可以进行如下转换：

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} a^k m(\{x\in E: f(x)\geq k\})\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a^k\sum_{n=k}^{\infty} m\big(\,\{\,x\in E: f(x)\in[n,n+1]\,\}\,\big)\right)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a^k\right) m\big(\,\{\,x\in E: f(x)\in[n,n+1]\,\}\,\big)\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+1}-1}{a-1} m\big(\,\{\,x\in E: f(x)\in[n,n+1]\,\}\,\big)
\end{aligned}$$

另一方面，在 $f(x)\in[n,n+1]$ 时，有 $a^n \le a^{f(x)} \le a * a^n$,$a^n \le \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \le \frac{a}{a-1}a^n$

故

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k m(\{x\in E: f(x)\ge k\}) \iff \sum_{n=0}^{\infty} a^n m(\{\, x\in E: f(x)\in[n,n+1]\,\}) \iff a^{f(x)}\in L(E)$$

■

练习 11 设 $f\in L(\mathbb{R}^1)$ 且记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $x\in\mathbb{R}^1$. 若 F(x) 是 $\mathbb{R}^1$ 上的递增函数，试证明 $f(x)>0$, $a.e.\ x\in\mathbb{R}^1$

证明 设 G 是 $\mathbb{R}^1$ 上的开集，故 G 可以写为可列个不交开集的并，故 $G=\cup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$. 由于 $f\in L(\mathbb{R}^1)$，故 $\int_G f(t)\mathrm{d}t<+\infty$, 故

$$\int_G f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{b_n} f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(F(b_n)-F(a_n))\ge 0\,.$$

故对于开集 G，有 $\int_G f(t)\mathrm{d}t\ge 0$

设 F 为 G_δ 集，故 $F=\cap_{k=1}^{\infty}F_k$, 其中 F_k 为开集，若 $\int_F f(t)\mathrm{d}t<0$, 记 $H_n=\cap_{k=1}^{\infty}F_k$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}H_n=F$, 由之前的结论得 $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{H_n}(x)\mathrm{d}x\ge 0$

设 $a_n=\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_{H_n}(x)\mathrm{d}x$ 故 $a_n>0$, 并且单调递减，由 $f(x)\in L(\mathbb{R})$ 和控制收敛原理得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}\left(f(x)\chi_{H_n}(x)\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}} f(x)\chi_F(x)\mathrm{d}x<0\,,$$

矛盾！故对于 F_δ 集 F，有 $\int_F f(t)\mathrm{d}t\ge 0$

对于任意可测集 E, 做 E 的等测包，设 $E=G\setminus Z$, 其中 G 为 G_δ 集，$m(Z)=0$, $G\supset Z$, 故

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_G f(x)\mathrm{d}x-\int_Z f(x)\mathrm{d}x=\int_G f(x)\mathrm{d}x\ge 0\,,$$

故对于 $\mathbb{R}$ 上的任意可测集 E, 有 $\int_E f(x)\mathrm{d}x\ge 0$，故 $f(x)\ge 0,\ \ a.e.\ x\in\mathbb{R}$ ■

练习 15 设 $E_k\subset[a,b]$ 且 $m(E_k)\le\delta>0$ $(k=1,2,\ldots)$, $\{a_k\}$ 是一实数列且满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\,a_k\,|\,\chi_{E_k}(x)<+\infty,\quad a.e.\ x\in[a,b]$$

试证明 $\sum_{k=1}^{\infty}|\,a_k\,|<+\infty$

证明 令

$$f(x):=\sum_{k=1}^{\infty}|\,a_k\,|\,\chi_{E_k}(x)\,,$$

故 f(x) 在 [a,b] 上几乎处处有限,记 $A_k=\{x\in[a,b]: f(x)>k\}, k\in\mathbb{N}$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}m(A_k)=0$ 故存在 k_0 , $s.t.\ m(A_{k_0}\cap E_k)<\frac{\delta}{2}$, 故 $x\in[a,b]\setminus A_{k_0}$ 时，有 $f(x)<k_0$, 故

$$\frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|\,a_k\,|\le\sum_{k=1}^{\infty}|\,a_k\,|*m(E_k\setminus A_{k_0})=\int_{[a,b]\setminus A_{k_0}}|\,a_k\,|\,\chi_{E_k}(x)\,\mathrm{d}x\le k_0(b-a)$$

故 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ 收敛 ■

练习 18 设 $E \subset [0,1]\times[0,1]$ 是可测集，记

$$E_x = \{y \in [0,1] : (x,y) \in [0,1]^2\}$$

$$E_y = \{x \in [0,1] : (x,y) \in [0,1]^2\}$$

若有 $m(E_x)=0, \quad a.e.\ x \in [0,1]$ 试证明

$$m(\,\{y : m(E_y = 1)\}\,) \le \frac{1}{2}$$

证明 反设 $m(\,\{y : m(E_y = 1)\}\,) > \frac{1}{2}$, 则

$$m(E) = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 m(E_y)dy = \int_0^1 \left(\int_{\{y:m(E_y)=1\}} 1\ \mathrm{d}y + \int_{\{y:m(E_y)<1\}} m(E_y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x > \frac{1}{2}$$

而另一方面，我们有

$$m(E) = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 m(E_x)dx = \int_0^1 \left(\int_{\{y:m(E_x)>0\}} m(E_x)\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y < \frac{1}{2},$$

矛盾！ ■

练习 21 设 $f(x), g(x)$ 是 E 上的非负可测函数，且有 $fg \in L(E)$, 令 $E_y = \{x \in E : g(x) \ge y\}$ 试证明

$$F(y)\ =\ \int_{E_y} f(x)\mathrm{d}x$$

对一切 $y>0$ 均存在，且有

$$\int_0^{\infty} F(y)\mathrm{d}y = \int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

证明 当 $y>0$ 时，有

$$\int_{E_y} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\int_{E_y} f(x)y\mathrm{d}x \le \frac{1}{y}\int_{E_y} f(x)g(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{y}\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x < +\infty\,,$$

故 F(y) 对 y>0 存在.

$$\int_0^{\infty} F(y)\mathrm{d}y = \int_0^{\infty}\int_{G_y} f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\infty}\int_E f(x)\chi_{E_y}(x)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_E f(x)\int_0^{\infty} \chi_{E_y}(x)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \int_E f(x)\int_0^{g(x)} 1\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

■

练习 22 设 $f \in L(E)$,$f_k \in L(E)(k=1,2,\ldots)$ 且有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, , $x \in E$, 以及

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|\,\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

, 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0$$

证明 **我们先证明一个很好用的定理 (控制收敛原理的推广)**

$\{f_k(x)\},\{g_k(x)\}$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数列, 且 $|f_k(x)|\le g_k(x)$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$, $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x)=g(x)$, 又有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$

定理的证明：有条件得 $g_k(x)+f_k(x),(g_k(x)-f_k(x)$ 均为非负可测函数列

由 Fatou 引理得：

$$\int_E \varliminf_{k\to+\infty}(g_k(x)+f_k(x))\mathrm{d}x\le \varliminf_{k\to+\infty}\int_E(g_k(x)+f_k(x))\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x+\varliminf_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_E \varliminf_{k\to+\infty}(g_k(x)-f_k(x))\mathrm{d}x\le \varliminf_{k\to+\infty}\int_E(g_k(x)-f_k(x))\mathrm{d}x=\int_E g(x)\mathrm{d}x-\varlimsup_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x,$$

故

$$\varliminf_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\ \ge\ \int_E f(x)\mathrm{d}x\ \ge\ \varlimsup_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$$

可得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

本题的证明：在上一定理中取 $f_k(x)=|f_k(x)-f(x)|$, $g_k(x)=|f_k(x)|+|f(x)|$, 利用定理直接得证 ■