分析力学笔记

Notes on Analytical Mechanics

作者：规培 92 冯廷龙

2020 年 4 月 9 日

钱学森书院学业辅导中心

QIAN YUAN XUE FU

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

作品信息

- **标题：** 分析力学笔记 - *Notes on Analytical Mechanics*
- **作者：** 规培 92 冯廷龙
- **校对排版：** 钱院学辅排版组
- **出品时间：** 2020 年 4 月 9 日
- **总页数：** 22

许可证说明

目录

第一章 从矢量力学到分析力学

§1.1 自由度与广义坐标

先考虑一个由 N 个质点组成的力学体系, 若关于这个体系有 k 个约束, 则该体系的自由度为 $3N-k$. 由于约束的存在, 原有直角坐标系下描述该体系的坐标 x_i 不再相互独立, 为此引入广义坐标 $q_j(j=1,2,\cdots 3N-k)$, 即该自由度下能描述的该体系的最少个数的相互独立坐标. 显然, 我们可以用广义坐标 q_j 和时间 t 描述原有坐标 x_i, 即

$$x_i(q_1,q_2,\cdots q_{3N-k},t) \tag{1.1}$$

则

$$\dot{x}_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial x_i}{\partial t}(\text{已使用爱因斯坦求和指标, 后同}) \tag{1.2}$$

§1.2 虚功原理和 D'Alembert 原理

对于一个处于力学平衡状态的体系, 考虑其进行一个与所有约束条件自洽的微小位移 δx_i, 称之为虚位移. 对于每个质点, 其所受外力 $F_i=0$, 故

$$F_i\delta x_i=0 \tag{1.3}$$

由于 F_i 可表示为驱动力 F_i^a 与约束力 F_i^c 的合力, 且一般情况下 $F_i^c\delta x_i=0$(如曲面上运动时 F_i 必须沿法线方向), 故

$$F_i^a\delta x_i=0 \tag{1.4}$$

称此式为虚功原理. 注: 虽然此时 δx_i 是约束条件下任取的, 但由于其互相不独立, 故不能从此式中推出 $F_i^a=0$.
考虑一个不属于力学平衡状态的体系, 引入惯性力 $-\dot{p}_i$, 可以得到

$$(F_i^a-\dot{p}_i)\delta x_i=0 \tag{1.5}$$

称此式为 D'Alembert 原理. 由于

$$\delta x_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{1.6}$$

故

$$F_i^a\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j=m_i\frac{\mathrm{d}\dot{x}_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{1.7}$$

令 $Q_j=F_i^a\dfrac{\partial x_i}{\partial q_j}$, 称其为广义力.

§1.3 Euler-Lagrange 方程

由于

$$m_i\frac{\mathrm{d}\dot{x}_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}=m_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)-m_i\dot{x}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) \tag{1.8}$$

又由 (1.2) 式可得

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{1.9}$$

将 (1.9) 式代入 (1.8) 式, 整理得

$$m_i\frac{\mathrm{d}\dot{x}_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2\right)}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2\right)}{\partial q_j} \tag{1.10}$$

令动能 $T=\dfrac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2$, 代入 (1.7) 式, 得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right)\delta q_j=0 \tag{1.11}$$

由于此时 δq_j 为任取且相互独立, 故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j=0 \tag{1.12}$$

假设 F_i^a 由一与速度无关的势场提供, 即 $F_i^a=-\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial (T-V)}{\partial q_j}=0 \tag{1.13}$$

令 $L=T-V$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\dfrac{\partial L}{\partial q_j}=0$, 得到 Euler-Lagrange 方程.

§1.4 弱耗散系统

对于一耗散体系,(1.5) 式不在适用. 假设阻力 $F^D=-k_jv_j(j=1,2,3)$, 构造瑞称耗散函数 $F=\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{1}{2}k_jv_{ij}^2(j=1,2,3)$, 显然 $F^D=-\dfrac{\partial F}{\partial v}$. 将广义力中驱动力一项并

入 L(Lagrange 量), 则 $Q_j = F^D \dfrac{\partial x_i}{\partial q_i}$, 即

$$Q_j = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.14}$$

此时 Euler-Lagrange 方程修正为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{1.15}$$

第二章 最小作用量原理

§2.1 泛函与变分

考虑一组曲线 $y(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上的长度 $S=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$, 对于每一个确定的函数 $y(x)$, 都可以在实数集中找到与之唯一对应的数 S, 我们把这种关系称为泛函, 即函数空间向实数集的映射, 记为 $J[y]$,$y(x)$ 成为变量函数,$J[y]$ 称为 $y(x)$ 的泛函. 下面只讨论积分形式的泛函, 可记为 $J[y]:S=\int_{x_1}^{x_2}F(y,y',x)\mathrm{d}x$, 任取一个与 $y(x)$ 相近的函数 (严格定义不给出, 直观上理解即可), 将其与 $y(x)$ 的差记为 $\delta y(x)$, 称为 $y(x)$ 的变分.

§2.2 泛函极值与 Euler-Lagrange 方程

考虑一组 x_1,x_2 两端函数值固定的函数, 若要使两端点之间的弧长最短, 等价于求积分 $S=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$ 的最小值, 这就是一个最简单的泛函极值问题. 类比函数极值可以得到泛函 $J[y]$ 的最小值, 即 $\forall y(x), J[y+\delta y]-J[y]\geqslant 0$ 恒成立, 代入一般表达式为

$$J[y+\delta y]-J[y]=\int_{x_1}^{x_2}F[y+\delta y,y'+(\delta y)',x]\mathrm{d}x-\int_{x_1}^{x_2}F(y,y',x)\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

Taylor 展开得到

$$J[y+\delta y]-J[y]=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)'\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\delta y+\frac{\partial}{\partial y'}(\delta y)'\right]^2F\mathrm{d}x+\cdots \tag{2.2}$$

记 $\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)'\right]\mathrm{d}x$ 为 $\delta J[y]$, 称为 $J[y]$ 的一级变分. 类比函数极值可以得到泛函极值的必要条件是一级变分 $\delta J[y]=0$ 即

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)'\right]\mathrm{d}x=0 \tag{2.3}$$

对其进行分部积分, 得

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x=0 \tag{2.4}$$

考虑边界条件 $\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0$(两端固定), 又由于右式 δy 可任取, 我们不加证明地指出 (变分学基本引理可以证明这个结论)

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \tag{2.5}$$

得到泛函极值的 Euler-Lagrange 方程. 有关数学的介绍就到这里, 如果有兴趣可以参考泛函分析课本.

§2.3 最小作用量原理与 Lagrange 函数的形式

下面介绍分析力学中最重要的原理: 最小作用量原理. 简而言之, 任意一个只存在完整约束的力学系统, 都可以用它的广义坐标 q_j 的泛函 S 表示其运动路径, 称其为力学系统的作用量, 可以写成 $S=\int_{t_1}^{t_2}L(q_j,\dot{q}_j,t)\mathrm{d}t$ 的形式, 当 S 取极小值时确定的运动路径为这个系统真实的运动路径, 式中 $L(q_j,\dot{q}_j,t)$ 称为 Lagrange 函数. 与前述泛函极值的 Euler-Lagrange 方程推导类似, 我们可以得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right]\delta q_j\mathrm{d}t=0 \tag{2.6}$$

前述变分法基本引理对这个和式依然有效, 得到 j 个方程 (j 是自由量)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \tag{2.7}$$

这就是分析力学中的 Euler-Lagrange 方程. 下面讨论 Lagrange 函数的形式.
首先注意到 $L(q_j,\dot{q}_j,t)$ 的选取具有任意性, 假如令其增加一项某个关于坐标和时间的函数的全导数, 即 $L'=L+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(q,t)$, 代入作用量, 得到

$$\delta S'=\int_{t_1}^{t_2}\delta L(q_j,\dot{q}_j,t)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(q+\delta q,t)-f(q,t)]\mathrm{d}t \tag{2.8}$$

第二项可化为

$$\frac{\partial f}{\partial q}\delta q(t_2)-\frac{\partial f}{\partial q}\delta q(t_1)=0(\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0) \tag{2.9}$$

故其对导出 Euler-Lagrange 方程无影响, 即 L 与 L' 等价.
接下来从最简单的情况开始讨论, 即例子在惯性系 K 中的自由运动. 显然运动只与 $|\boldsymbol{v_0}|$ 有关, 所以可以认为 Lagrange 函数只含 $\boldsymbol{v}^2$, 即 $L(\boldsymbol{v_0}^2)$. 然后, 令 K 相对于惯性系 K' 以无穷小的速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 移动, 则质点在 K' 系中速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v_0}+\boldsymbol{\varepsilon}$, 在 K' 系中 $L'=L(\boldsymbol{v_0}^2+2\boldsymbol{v_0}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}^2)$, 略去高阶小量 $\boldsymbol{\varepsilon}^2$ 得到 $L'=L(\boldsymbol{v_0}^2+2\boldsymbol{v_0}\boldsymbol{\varepsilon})$. 由伽利略相对

性原理知, 相同的运动在不同惯性系中的 Lagrange 函数等价, 即 $L'-L$ 为某个只含坐标和时间的函数对时间的全导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\boldsymbol{x},t)$, 由于

$$L'-L=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_0}^2}\cdot 2\boldsymbol{v_0}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}=2\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_0}^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{2.10}$$

所以 $2\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_0}^2}$ 为常量, 定义这个常量为质量, 记作 m, 则

$$L(\boldsymbol{v_0}^2)=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v_0}^2 \tag{2.11}$$

2.11 式即为质点在惯性系中自由运动时的 Lagrange 函数. 不考虑质点间相互作用, 由 N 个质点组成的体系有

$$L=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v_i}^2 \tag{2.12}$$

如果考虑封闭体系质点的相互作用, 则应在 L 后附加一项, 这一项与所有质点的位置有关

$$L=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v_i}^2-V(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\cdots\boldsymbol{x_N}) \tag{2.13}$$

于是我们得到了封闭质点系的 Lagrange 函数, 若使用广义坐标, 则

$$L=\sum_{i,j}\frac{1}{2}a_{ij}(q)\cdot\dot{q}_i\dot{q}_j-V(q_1,q_2,\cdots q_f) \tag{2.14}$$

附: 物理学的公理化

分析力学与矢量力学最大的不同在于它是一个公理化体系, 是高度数学化的. 这个公理是最小作用量原理和 Lagrange 函数的形式. 我们导出 Lagrange 函数形式的时候并非通过严格的推导, 而是寻求必要的条件" 连蒙带猜", 所以它的形式也是分析力学的公理. 公理到此就没有了, 理论上说, 依靠公理可以严格导出整个分析力学体系, 这也是为什么分析力学是四大力学中最美丽动人的一个了.

第三章 对称性与守恒律

§3.1 Largrange 函数的性质

我们已经知道将系统的 Largrange 函数代入 Euler-Largrange 方程即可得到体系的运动方程, 而通过研究 E-L 方程还可以发现 Largrange 函数一些有用的性质. 由 $\delta S=\int_{t_1}^{t_2}(\delta q\frac{\partial L}{\partial q}+\delta\dot{q}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}})\,\mathrm{d}t$ 知, 若 $L'=L+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(q,t)$, 则

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}(\delta q\frac{\partial L}{\partial q}+\delta\dot{q}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}})\,\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\mathrm{d}t \tag{3.1}$$

第二项可化为

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t=\frac{\partial f}{\partial q}\delta q\bigg|_{t_1}^{t_2}=0 \tag{3.2}$$

故于 Largrange 函数而言, 增加一项关于坐标和时间的函数的全导数并不影响运动方程. 这将是一个有用的性质, 下面正式进入对称性与守恒量部分.

§3.2 时间平移不变性与能量守恒

若一个体系的 Largrange 函数不显含 t, 则称其具有时间平移不变性（时间平移对称性）, 则其关于时间的全导数

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial L}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\ddot{q} \tag{3.3}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial L}{\partial q}\dot{q}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\dot{q}\right)-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)\right]\dot{q} \tag{3.4}$$

代入 E-L 方程, 得

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\dot{q}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\dot{q}\right) \tag{3.5}$$

由于 T 是关于 $\dot{q}$ 的 2 次齐次函数, 由 Euler 定理得

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2T) \tag{3.6}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2T-L)=0 \tag{3.7}$$

即

$$T+V=Const \tag{3.8}$$

令 $T+V=E$. 称 E 为体系的能量, 得到能量守恒定律.

§3.3 空间平移不变性与动量守恒

若一个体系的 Largrange 函数不显含位置坐标 $\boldsymbol{x}_i$, 则称其具有空间平移不变性, 则

$$\partial L=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_i}\delta \boldsymbol{x}_i=0 \tag{3.9}$$

代入 E-L 方程, 得

$$\partial L=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\right)\delta \boldsymbol{x}_i=0 \tag{3.10}$$

由于 $\delta\boldsymbol{x}_i$ 是任意的, 故

$$\sum_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\right)=0 \tag{3.11}$$

即

$$\sum_i\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}=Const=\boldsymbol{p} \tag{3.12}$$

称 $\boldsymbol{p}$ 为系统的动量, 得到动量守恒定律. 若用广义坐标 q_j 代替 $\boldsymbol{x}_i$, 即可得到广义动量 $\sum_j\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}_j}=Const$

§3.4 空间各向同性与角动量守恒

若将一个体系旋转一个微小角度 $\delta\phi$, 而其 Largrange 函数不发生变化, 则称其具有空间各向同性. 显然

$$\delta\boldsymbol{x}=|\delta\boldsymbol{\phi}||\boldsymbol{x}|\sin\theta,\quad \theta=\langle\delta\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{x}\rangle \tag{3.13}$$

故

$$\delta\boldsymbol{x}=\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{x},\quad \delta\boldsymbol{v}=\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{v} \tag{3.14}$$

由于

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_i}\delta \boldsymbol{x}_i+\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\delta \boldsymbol{v}_i=0 \tag{3.15}$$

故
$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_i}(\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{x}_i)+\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}(\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{v}_i)=0 \tag{3.16}$$
代入 E-L 方程
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\right)(\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{x}_i)+\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{x}_i)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\boldsymbol{\phi})\times\boldsymbol{x}_i\right]=0 \tag{3.17}$$
显然 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\boldsymbol{\phi})=0$, 故
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\right)(\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{x}_i)+\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{x}_i)\right]=0 \tag{3.18}$$
即
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\delta\boldsymbol{\phi}\cdot(\boldsymbol{x}_i\times\boldsymbol{p}_i)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}_i\times\boldsymbol{p}_i)\cdot\delta\boldsymbol{\phi}=0 \tag{3.19}$$
由于 $\delta\boldsymbol{\phi}$ 是任意的, 故
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}_i\times\boldsymbol{p}_i)=0 \tag{3.20}$$
得到
$$\boldsymbol{x}_i\times\boldsymbol{p}_i=Const=\boldsymbol{L} \tag{3.21}$$
称 $\boldsymbol{L}$ 为系统的角动量, 得到角动量守恒定律.

§3.5 不同参考系中 $E,\boldsymbol{p},\boldsymbol{L}$ 间的关系

假设参考系 K' 相对于惯性系 K, 以 $\boldsymbol{V}$ 运动, 即
$$\boldsymbol{v_0}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{V} \tag{3.22}$$
则系统的动量为
$$\boldsymbol{p}_i=m_i\boldsymbol{v_0}_i=m_i\boldsymbol{v}'_i+\sum_i m_i\boldsymbol{V} \tag{3.23}$$
若在 K' 系中系统动量为 0, 即 $\boldsymbol{p}'=0$, 只需令
$$\boldsymbol{V}=\frac{m_i\boldsymbol{v_0}_i}{\sum_i m_i} \tag{3.24}$$
称其为质心速度 $\boldsymbol{V}_c$, 显然, 它对时间的原函数是
$$\boldsymbol{x}_c=\frac{m_i\boldsymbol{x_0}_i}{\sum_i m_i} \tag{3.25}$$
称其为质心坐标 $\boldsymbol{x}_c$. 下文称 $\sum m_i$ 为 μ. 对于能量 E, 有
$$\begin{aligned}E_0&=\frac{1}{2}m_i{\boldsymbol{v_0}_i}^2+V\\&=\frac{1}{2}m_i{\boldsymbol{v}'_i}^2+m_iv'_i\boldsymbol{V}+\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{V}+V\end{aligned} \tag{3.26}$$

对于 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_c$（即质心系），有

$$E_0=E'+\frac{1}{2}\mu{\boldsymbol{V}_c}^2 \tag{3.27}$$

对于角动量 $\boldsymbol{L}$, 有

$$\boldsymbol{L_0}=\boldsymbol{x_0}_i\times m_i\boldsymbol{v_0}_i \tag{3.28}$$

在质心系中, 有

$$\boldsymbol{L_0}=\boldsymbol{x}'_i\times m_i\boldsymbol{v_0}_i+\boldsymbol{x}_c\times m_i\boldsymbol{v_0}_i \tag{3.29}$$

即

$$\boldsymbol{L_0}=\sum\boldsymbol{x}'_i\times\mu\boldsymbol{V_c}+\boldsymbol{x}_c\times\mu\boldsymbol{V_c} \tag{3.30}$$

由于 $\mu=\sum_i m_i$, $x_c=\frac{\boldsymbol{x}_i m_i}{\mu}$, $V_c=\frac{m_i v_{0i}}{\mu}$, 所以

$$\boldsymbol{L_0}=\boldsymbol{L}'+\frac{(m_i\boldsymbol{x_0}_i)\times(m_j\boldsymbol{v_0}_j)}{\sum_i m_i} \tag{3.31}$$

其中 $\boldsymbol{L_0}$ 的第二项成为内禀角动量.

下面看转动参考系的情况. 假设参考系 K 相对于 K' 以 $\boldsymbol{\Omega}$ 的角速度转动, 显然有

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x} \tag{3.32}$$

我们直接考虑 Largrange 函数的形式, 先看 K' 系,

$$L=\frac{1}{2}m{\boldsymbol{v_0}}^2-V=\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v})^2-V=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}'^2+m\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}+\frac{1}{2}m\boldsymbol{V}^2-V \tag{3.33}$$

由于 $\boldsymbol{V}^2(t)$ 可看成时间的全导数, 故略去, 得

$$L=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}'^2+m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{V})-m\boldsymbol{x}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{V})-V \tag{3.34}$$

即

$$L=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}'^2-m\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{V}}-V \tag{3.35}$$

由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}'}\right)=\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{x}'}$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}')=-m\dot{\boldsymbol{V}}-\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}} \tag{3.36}$$

其中, 称 $m\dot{\boldsymbol{V}}$ 为平动引起的惯性力. 再考虑 K 系的情况, 将(3.32)式代入(3.35)式, 得

$$L=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2+m\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})^2-m\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{V}}-V \tag{3.37}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}}\right)=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+m\dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{x}+m\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{x}}=m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})+m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{\Omega}-m\dot{\boldsymbol{V}}-\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}} \tag{3.39}$$

整理得

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}-m\dot{\boldsymbol{V}}+2m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})+m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{\Omega}-m\dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{x} \tag{3.40}$$

其中 $2m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})$ 称为科里奥利力,$m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})$ 称为惯性离心力. 再考虑能量的情况：

$$E=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}-L \tag{3.41}$$

$$E=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2-\frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})^2+m\boldsymbol{x}'\dot{\boldsymbol{V}}+V \tag{3.42}$$

假设 K' 相对于 K_0 无平动加速度, 则

$$E=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2-\frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})^2+V \tag{3.43}$$

称 $-\frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})^2$ 为惯性离心力势能. 代入(3.32)式, 得

$$E=E_0-\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{L} \tag{3.44}$$

§3.6 力学相似性

考虑变换 $x'=\lambda_1 x,\ t'=\lambda_2 t$, 假设 $V(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 是 k 次齐次函数, 则

$$V(x_1',x_2',\cdots,x_N')=\lambda_1^k V(x_1,x_2,\cdots,x_N) \tag{3.45}$$

同理,

$$T(v_1',v_2',\cdots,v_N')=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k T(v_1,v_2,\cdots,v_N) \tag{3.46}$$

若

$$\lambda_2=\lambda_1^{1-\frac{k}{2}} \tag{3.47}$$

则 Largrange 函数只是整体乘一个系数, 运动方程不变, 一个有价值的应用是

$$\frac{t'}{t}=\left(\frac{x'}{x}\right)^{1-\frac{k}{2}} \tag{3.48}$$

$k=-1$ 时, 得到开普勒第三定律. 另一个应用与能量平均值有关, 由于

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\boldsymbol{v}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\boldsymbol{x}_i\right)-\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_i}\boldsymbol{x}_i \tag{3.49}$$

两边对时间求平均, 得

$$2\langle T\rangle=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\boldsymbol{x}_i\right)\frac{1}{t}+k\langle V\rangle \tag{3.50}$$

由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\boldsymbol{x}_i\right)\frac{1}{t}=0$, 所以

$$2\langle T\rangle=k\langle V\rangle \tag{3.51}$$

称其为位力定理.

附：齐次函数的 Euler 定理

定义：$f(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_i)=\lambda^k f(x_1,x_2,\dots,x_i)$, 则 $f(x_1,x_2,\dots,x_i)$ 为 k 次齐次函数.

两边对 λ 求偏导, 得

$$\sum_i \frac{\partial f(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_i)}{\partial(\lambda x_i)}\frac{\partial(\lambda x_i)}{\partial\lambda}=k\lambda^{k-1}f(x_1,x_2,\dots,x_i) \tag{3.52}$$

$$\sum_i \frac{\partial f(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_i)}{\partial(\lambda x_i)}\cdot\lambda x_i=k\lambda^{k}f(x_1,x_2,\dots,x_i) \tag{3.53}$$

令 $\lambda=1$, 得

$$\sum_i \frac{\partial f(x_1,x_2,\dots,x_i)}{\partial x_i}\cdot\lambda x_i=kf(x_1,x_2,\dots,x_i) \tag{3.54}$$

第四章 正则方程

§4.1 Legendre 变换与 Hamilton 方程

我们已经知道，Largrange 力学是使用广义坐标 q_i 和广义速度 $\dot{q}_i$ 来描述系统的力学状态的，而接下来要讲述的方法则是使用广义坐标 q_i 和广义动量 p_i，即 Hamilton 力学，为此，我们需要从 Largrange 力学出发，使用 Legendre 变换以实现变量代换，考虑一个系统的 Largrange 函数的微分，即

$$\mathrm{d}L=\frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

代入 Eluer-Largrange 方程，得

$$\mathrm{d}L=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{L}{\partial \dot{q}_i}\right)\mathrm{d}q_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{4.2}$$

定义 $p_i=\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 为广义动量，则

$$\mathrm{d}L=\dot{p}_i\mathrm{d}q_i+p_i d\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{4.3}$$

变换右边第二项，得

$$\mathrm{d}L=\dot{p}_i\mathrm{d}q_i+d\left(p_i\dot{q}_i\right)-\dot{q}_i\mathrm{d}p_i+\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{4.4}$$

$$\mathrm{d}\left(p_i\dot{q}_i-L\right)=\dot{q}i\mathrm{d}p_i-\dot{p}_i\mathrm{d}q_i-\frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{4.5}$$

令 $p_i\dot{q}_i-L=H$，称其为 Hamilton 量，则

$$\frac{\partial H}{\partial p_i}=\dot{q}_i,\frac{\partial H}{\partial q_i}=-\dot{p}_i \tag{4.6}$$

称此式为 Hamilton 方程，亦称正则方程，称 p_i,q_i 为一对共轭变量

我们注意到，由 (4.5) 式得

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\dot{q}_i\dot{p}_i-\dot{p}_i\dot{q}_i-\frac{\partial L}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t} \tag{4.7}$$

又由 (4.6) 式得

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t} \tag{4.8}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t} \tag{4.9}$$

即若 Largrange 函数不显含时间，则 Hamilton 函数亦不显含时间，且其对时间得变化率为 0. 考虑 Hamilton 函数的物理意义是用 p_i,q_i 表示的系统的总能量, 我们得到能量守恒定律.

§4.2 Poisson 括号

考虑一个变量为 p_i,q_i,t 的力学量 f 对时间的导数，即

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.10}$$

代入正则方程，得

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}+\frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.11}$$

定义 H,f 的 Poisson 括号 $\{H,f\}=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\dfrac{\partial f}{\partial q_i}-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\dfrac{\partial f}{\partial p_i}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\{H,f\}+\frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.12}$$

若力学量 f 对时间的变化率为 0，称其为系统得运动积分（守恒量），若 f 为运动积分，则

$$\{H,f\}+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{4.13}$$

特别地，当 f 不显含时间时，有

$$\{H,f\}=0 \tag{4.14}$$

对于任意两个函数 f,g 也有 Poisson 括号 $\{f,g\}=\dfrac{\partial f}{\partial p_i}\dfrac{\partial g}{\partial q_i}-\dfrac{\partial f}{\partial q_i}\dfrac{\partial g}{\partial p_i}$,Poisson 括号有许多性质，下面直接列举，略去证明

$$\{f,g\}=-\{g,f\} \tag{4.15}$$

$$\{f,c\}=0 \quad (c\text{为常数}) \tag{4.16}$$

$$\{c_1f_1+c_2f_2,g\}=c_1\{f_1,g\}+c_2\{f_2,g\} \tag{4.17}$$

$$\{f_1f_2,g\}=f_1\{f_2,g\}+f_2\{f_1,g\} \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}=\{\frac{\partial f}{\partial t},g\}+\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\} \tag{4.19}$$

特别地，对于 $g=q_k,p_k$ 时，Poisson 括号化为偏导数，即

$$\{f,q_k\}=\frac{\partial f}{\partial p_k},\quad \{f,p_k\}=-\frac{\partial f}{\partial q_k} \tag{4.20}$$

再令 $f=p_i,q_i$，得到

$$\{p_i,q_i\}=\delta_{ik},\quad \{p_i,p_k\}=0,\{q_i,q_k\}=0 \tag{4.21}$$

Poisson 括号的一个重要性质是所谓 Jacob 恒等式，即

$$\big\{f,\{g,h\}\big\}+\big\{g,\{h,f\}\big\}+\big\{h,\{f,g\}\big\}=0 \tag{4.22}$$

我们来简单地证明一下，注意到左边和式一定是由 f,g,h 的二阶偏导数组成的，只要证明不存在 f,g,h 中任意一个函数的二阶偏导数，即得证，先考虑 f，令 $D_1(\phi)=\{g,\phi\},\quad D_2(\phi)=\{h,\phi\}$, 则含 f 的二阶偏导数的项为

$$D_1\big(D_1(f)\big)-D_2\big(D_1(f)\big)=(D_1D_2-D_2D_1)f \tag{4.23}$$

因为 D_1,D_2 可以写成

$$D_1=\xi_k\frac{\partial}{\partial X_k},\quad D_2=\eta_k\frac{\partial}{\partial X_k} \tag{4.24}$$

其中 ξ_k,η_k 为变量 X_k 的任意函数，则

$$D_1D_2-D_2D_1=\left(\xi_k\frac{\partial\eta_l}{\partial X_k}-\eta_k\frac{\partial\xi_l}{\partial X_k}\right)\frac{\partial}{\partial X_l} \tag{4.25}$$

不存在二阶偏导数项，所以式中不存在 f 的二阶偏导数，同理可证不存在 g,h 的二阶偏导数，Jacob 恒等式得证.

Jacob 恒等式的一个重要应用是所谓 Poisson 定理，即：任意 2 个运动积分的 Poisson 括号一定是运动积分，若 f,g 不显含时间，则证明很易，只需令 (4.22) 式中 $h=H$，即

$$\big\{f,\{g,H\}\big\}+\big\{g,\{H,f\}\big\}+\big\{H,\{f,g\}\big\}=0 \tag{4.26}$$

由 (4.14) 式，得

$$\big\{H,\{f,g\}\big\}=0 \tag{4.27}$$

即 $\{f,g\}$ 为运动积分，若 f,g 显含时间，则将其对时间求偏导，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}=\{\frac{\partial f}{\partial t},g\}+\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\} \tag{4.28}$$

代入 (4.13) 式，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}=\big\{g,\{H,f\}\big\}-\big\{f,\{H,g\}\big\} \tag{4.29}$$

运用 Jacob 恒等式，化简得

$$\big\{H,\{f,g\}\big\}+\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}=0 \tag{4.30}$$

得证.

第五章 Maupertuis 原理

§5.1 从最小作用量原理到正则方程

由定义我们知道 $s=\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t$, 现在，让我们从另一个角度看最小作用量原理，若用作用量 S 表示运动轨道固定，起点 $q(t_0)$ 固定，但终点 $q(t)$ 变化的表示系统运动的量，对 S 变分，得到

$$\partial S=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\partial q_i\bigg|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{d}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q\mathrm{d}t \tag{5.1}$$

由于轨道符合 Euler-Largrange 方程，故积分项为 0，取 $\delta q_i(t_1)=0,\delta q_i(t_2)=\delta q_i$，有

$$\partial S=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\partial q_i=p_i\delta q_i \tag{5.2}$$

所以

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i \tag{5.3}$$

由定义知

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=L,\quad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i=\frac{\partial S}{\partial t}+p_i\dot{q}_i \tag{5.4}$$

所以

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-(p_i\dot{q}_i-L)=-H \tag{5.5}$$

由 (5.3), (5.5) 式得（将 S 看作坐标和时间的函数）

$$\mathrm{d}S=p_i d\dot{q}_i-H\mathrm{d}t \tag{5.6}$$

$$S=\int(p_i d\dot{q}_i-H\mathrm{d}t) \tag{5.7}$$

对其变分，得

$$\delta S=\int\left[\delta p_i\mathrm{d}q_i+p_i d\delta q_i-\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right)\mathrm{d}t\right] \tag{5.8}$$

$$\delta S=\int\left(\mathrm{d}q_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}t\right)\delta p_i+p_i\delta q_i\bigg|-\int\left(\mathrm{d}p_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}t\right)\delta q_i \tag{5.9}$$

由于 $\delta S=0,\delta q_i=0$, 所以

$$\mathrm{d}q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}p_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}t \tag{5.10}$$

即正则方程

§5.2 Maupertuis 原理

对于一个保守体系，$H=E=Const$, 由 (5.7) 式得

$$S=\int p_i\mathrm{d}q_i-E(t-t_0) \tag{5.11}$$

称 $\int p_i\mathrm{d}q_i$ 为简约作用量，记为 S_0，对 S 变分，得

$$\delta S=\delta S_0-E\delta t \tag{5.12}$$

由 (5.5) 式可得

$$\delta S=-H\delta t-E\delta t \tag{5.13}$$

故对于保守体系，我们得到

$$\delta S_0=\delta\int p_i\mathrm{d}q_i=0 \tag{5.14}$$

在此基础上，由 $E\left(q,\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)=E$ 反解出 $\mathrm{d}t$ 并代入定义式 $p_i=\dfrac{\partial L(q,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t})}{\partial\dot{q}_i}$, 结合 (5.14) 式可得到系统的轨道方程，称此原理为 Maupertais 原理。当 Largrange 函数形式可写成 (2.14) 式时，可得

$$p_i=a_{ij}(q)\dot{q}_i \tag{5.15}$$

$$E=\frac{1}{2}a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j+V(q) \tag{5.16}$$

由 (5.16) 式解出

$$\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{a_{ij}(q)\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_j}{2(E-V)}} \tag{5.17}$$

代入 (5.15),(5.14) 式可得

$$\delta S_0=\int\sqrt{2a_{ij}(q)\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_j(E-V)}=0 \tag{5.18}$$

由此可确定运动轨道方程，对 (5.16) 式积分，得

$$\int\sqrt{\frac{a_{ij}(q)\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_j}{2(E-V)}}=t-t_0 \tag{5.19}$$

(5.19)(5.18) 式共同确定系统的运动状态

第六章 Hamilton-Jacob 方程

§6.1 正则变换

考虑一组从旧得坐标、动量向新的坐标、动量的变换

$$P = P(p, q, t), \quad Q = Q(p, q, t), \quad H = H(P, Q, t) \tag{6.1}$$

若其满足正则方程

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \tag{6.2}$$

则称该变换为正则变换，由于其满足 Hamilton 方程，其必满足

$$\delta \int (p_i \mathrm{d}q_i - h \mathrm{d}t) = \delta \int (P_i \mathrm{d}Q_i - H \mathrm{d}t) = 0 \tag{6.3}$$

由此得到

$$p_i \mathrm{d}q_i - h \mathrm{d}t - P_i \mathrm{d}Q_i - H \mathrm{d}t + \mathrm{d}F \tag{6.4}$$

其中函数 F 在两积分极限时之差为对变分不起作用的常数，整理得

$$\mathrm{d}F = \dot{p}_i \mathrm{d}q_i - P_i \mathrm{d}Q_i + (H - h) \mathrm{d}t \tag{6.5}$$

所以

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial F}{\partial Q_i} = -P_i, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = H - h \tag{6.6}$$

我们还可以对 (6.5) 式进行 Legendre 变换，以得到不同变量表示得像 F 一样得函数（称其为母函数），如：

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}(F + P_i Q_i) = p_i \mathrm{d}q_i + Q_i \mathrm{d}P_i + (H - h) \mathrm{d}t \tag{6.7}$$

得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} = Q_i, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H - h \tag{6.8}$$

正则变换得一个重要性质是 Poisson 括号不变，即

$$\{f, g\}_{P,Q} = \{f, g\}_{p,q} \tag{6.9}$$

证明如下:

$$
\begin{aligned}
\{f,g\}_{P,Q} =& \frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial Q_i} - \frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial g}{\partial P_i} \\
=& \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial P_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial P_i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right) \\
&-\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial Q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\right) \\
=& \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\{p_i,p_j\}_{P,Q} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\{q_i,p_j\}_{P,Q} \\
&+ \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\{q_i,q_j\}_{P,Q} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\{p_i,p_j\}_{P,Q} \\
=& \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right)\delta_{ij} \\
=& \{f,g\}_{p,q}
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

§6.2 Hamilton-Jacob 方程

由 (5.5) 式可得

$$\frac{\partial}{\partial t}S + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0 \tag{6.11}$$

称其为 Hamilton-Jacob 方程，对于自由度为 s 的系统，我们不加证明地指出，解的形式为

$$S = f(q_1,\cdots,q_s;\alpha_1,\cdots,\alpha_s;t) + A \tag{6.12}$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 A 为任意常数，以 f 为母函数进行正则变换，以 α_i 为新动量，β_i 为新坐标，由 (6.8) 式得

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} + h = H \tag{6.13}$$

由于 f 满足 Hamilton-Jacob 方程，故

$$H = \frac{\partial f}{\partial t} + h = \frac{\partial S}{\partial t} + h = 0 \tag{6.14}$$

由正则方程，

$$\dot{\alpha}_i = 0, \dot{\beta}_i = 0 \tag{6.15}$$

即，α_i, β_i 为常数，同时利用 s 个方程

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i \tag{6.16}$$

可将坐标 q 用 $2s$ 个常数和时间 t 表示出来，运动方程得解. 由此总结求解力学问题的方法：

(1) 列出 Hamilton-Jacob 方程

(2) 求出函数 S 包含常数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,A$.

(3) 将 S 对 α_i 求偏导得到 β_i

(4) 由 (6.16) 式反解出 q 作为 $2s$ 个常数和 t 的函数

(5) $p_i=\dfrac{\partial S}{\partial q_i}$ 得到 p 关于时间的函数.

§6.3 分离变量

有时为了得到 S，可利用分离变量的方法. 假设某一坐标 q，与 $\dfrac{\partial S}{\partial q}$，在 Hamilton-Jacob 方程中仅以组合 $\varphi(q_1,\dfrac{\partial S}{\partial q_1})$ 形式出现，即方程可写为

$$\Phi\left\{q_i,t,\frac{\partial S}{\partial q_i},\frac{\partial S}{\partial t},\varphi\left(q_1,\frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right\}=0 \tag{6.17}$$

则 S 可写为

$$S=S'(q_i,t)+S_1(q_1) \tag{6.18}$$

代入 (6.17) 式，得

$$\Phi\left\{q_i,t,\frac{\partial S'}{\partial q_i},\frac{\partial S'}{\partial t},\varphi\left(q_1,\frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)\right\}=0 \tag{6.19}$$

假设 (6.18) 式已得，则 q_1 变化不应影响 (6.19) 式成立，故

$$\varphi\left(q_1,\frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)=\alpha_1 \tag{6.20}$$

$$\Phi\left\{q_i,t,\frac{\partial S'}{\partial q_i},\frac{\partial S'}{\partial t},\alpha_1\right\}=0 \tag{6.21}$$

由 (6.20) 式可求出 $S_1(q_1)$, 依次类推将 S 完全求解

参考书目

[1] L.D. 朗道，E.M. 粟弗席兹. 力学 [M]. 北京: 高等教育出版社,2007

[2] 刘川. 理论力学 [M]. 北京: 北京大学出版社,2019

[3] 吴崇试, 高春媛. 数学物理方法 [M]. 北京: 北京大学出版社,2019