复分析笔记

Notes on Complex Analysis

作者：数试 82 裴兆辰

2020 年 4 月 9 日

钱学森书院学业辅导中心

QIAN YUAN XUE FU

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

作品信息

- **标题**：复分析笔记 - *Notes on Complex Analysis*
- **作者**：数试 82 裴兆辰
- **校对排版**：钱院学辅排版组
- **出品时间**：2020 年 4 月 9 日
- **总页数**：18

许可证说明

前言

参与成员

- ➤ **笔记撰写：**数试 82 裴兆辰
- ➤ **第三章排版：**钱 91 谢佳润
- ➤ **整理：**化生 81 高旭帆

目录

第一章

第二章

第三章 柯西积分公式及应用

§3.1 全纯函数的积分表示

可求长曲线. 对 $[a,b]$ 做分割 $\lambda: a=t_0<t_1<...<t_n=b$, 取 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i], i=1,...,n$. 做 Riemann 和：$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k-z_{k-1})$. 设 $d=\|\lambda\|$. $d\to 0$ 时，Riemann 和有极限（略去）. 记 $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$. 故

$$\begin{aligned}R(f)&=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)-\Delta z_k\\&=\sum_{k=1}^{n}(u(\xi_k)+iv(\xi_k))(\Delta x_k+i\Delta y_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}u(\xi_k)\Delta x_k-\sum_{k=1}^{n}v(\xi_k)\Delta y_k+i[(\sum_{k=1}^{n}u(\xi_k)\Delta y_k+\sum_{k=1}^{n}v(\xi_k)\Delta x_k]\end{aligned}$$

故当 u 于 v 在 γ 上连续时，令 $d\to 0$，则 f 的 Riemann 和趋于曲线积分：$\int_\gamma(udx-vdy)+i\int_\gamma vdx-udy$, 即：

定理 3.1.1. *$f=u+iv$ 在可求长曲线 γ 上连续，则有：*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_\gamma(udx-vdy)+i\int_\gamma(vdx+udy).$$

定理 3.1.2. *若 $z=\gamma(t)$ 为光滑的曲线, f 在 γ 上连续, 则: $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$*

证明. 由于 $z=\gamma(t)$ 故 $\gamma'(t)=x'(t)+iy'(t)$.

而 $dx=x'(t)dt, dy=y'(t)dt$，代入 3.1.1 即可得证. □

定理 3.1.3. *若 f,g 在可求长曲线 γ 上连续，则：*

i) $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=-\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$

ii) $\int_\gamma(\alpha f(z)+\beta g(z))\mathrm{d}z=\alpha\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z+\beta\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z,\quad \alpha,\beta\in\mathbb{C}$

iii) $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$. 其中 $\gamma_1\cup\gamma_2=\gamma, \gamma_1\cap\gamma_2=\emptyset$

定理 3.1.4 (长大不等式)**.** *若曲线 γ 的长度为 $L, M=\max_{z\in\gamma}|f(x)|$, 则 $|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z|\le ML$*

证明. 直接利用 Riemann 和验证即可. □

§3.2 *Cauchy* 积分定理

定理 3.2.1 (*Caucy*)**.** 设 D 为 $\mathbb{C}$ 中的单连通域，$f \in H(D)$，且 $f' \in C(D)$, 则对 D 中的任意可求长闭曲线 γ，均有 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

证明. 由 Green 公式以及 C-R 方程直接得到. □

定理 3.2.2. 设 f 是域 D 中的连续函数，γ 是 D 内可求长曲线，则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在一条 D 上的折线 P 使得：

(i) P 和 γ 有相同的起点和终点，P 的其他顶点在 γ 上.

(ii) $|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_P f(z)\mathrm{d}z| < \varepsilon$.

证明. 见 chb 笔记. □

定理 3.2.3 (*Cauchy-Goursat*)**.** 设 D 为 $\mathbb{C}$ 中的单连通域，若 $f \in H(D)$, 则对于 D 中的任意可求长闭曲线 γ，均有 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

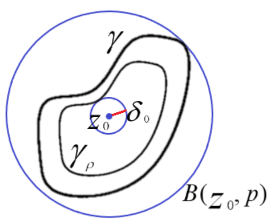
证明. 利用上一定理 3.2.2，见 chb 笔记. □

但定理 3.2.3 的条件仍可以再做减弱：

定理 3.2.4. 设 D 是简单可求长闭曲线 γ 的内部, 若 $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$, 则 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

这一定理的证明现在无法进行，我们对其弱化进行证明：

定理 3.2.4 (*)**.** 设 γ 为 $\mathbb{C}$ 上分段光滑的可求长闭曲线，记 D 为 γ 围成的区域内部，且存在 D 中的点 z_0，使得任意一条从 z_0 发出的射线与 γ 有且只有唯一交点，若 $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$，则 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.



证明. 由于我们增加的条件,故 γ 可写为 $z=z_0+\gamma(t), a\le t\le b$. 记 $p=\max_{a\le t\le b}|\lambda(t)|, q=\max_{a\le t\le b}|\lambda'(t)|$. 闭区间分段连续保证有最值（光滑保证）由于 f 在 $\bar{D}$ 上连续，故一致连续，即 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0\ s.t. z_1,z_2\in\bar{D}, |z_1-z_2|<\delta$ 时，$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$ 取 $\delta_0=\min\{\delta,p\}$, 故 $\frac{\delta_0}{p}<1$, 取 $\rho\ s.t. 1-\frac{\delta_0}{p}<\rho<1$

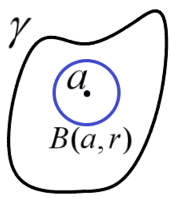
记曲线 $\gamma_\rho: z=z_0+\rho\lambda(t), a\le t\le b$, 则 $\gamma_\rho\subset D$. 由定理 3.2.3 得 $\int_{\gamma_\rho}f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f(z_0+\rho\lambda(t))\rho\lambda'(t)dt=0\Rightarrow\int_a^b f(z_0+\rho\lambda(t))\lambda'(t)dt=0$. 由于 $|(z_0+\rho\lambda(t))-(z_0+\lambda(t))|=(1-\rho)|\lambda(t)|\le(1-\rho)p<\delta_0<\delta$ 故 $|f(z_0+\rho\lambda(t))-f(z_0+\lambda(t))|<\varepsilon$. 故

$$\begin{aligned}|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z|&=|\int_a^b f(z_0+\lambda(t))\lambda'(t)dt|\\&=|\int_a^b[f(z_0+\lambda(t))-f(z_0+\rho\lambda(t))]\lambda'(t)dt|\\&\le\int_a^b|f(z_0+\rho\lambda(t))-f(z_0+\lambda(t))||\lambda'(t)|dt\\&<\varepsilon q(b-a)\end{aligned}$$

由 ε 的任意性得 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0$.

□

定理 3.2.5 (多连同区域的 *Cauchy* 积分公式)**.** 略.



eg. 计算积分 $\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}, n\in\mathbb{Z}$, a 在 γ 围成区域内部.

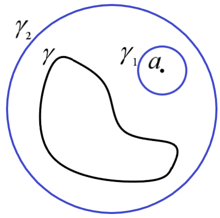
解. 故 $\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\int_{|z-a|=r}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\int_0^\pi\frac{re^{i\theta}id\theta}{(re^{i\theta})^n}=ir^{1-n}\int_0^{2\pi}(e^{i\theta})^{1-n}d\theta$.

若 $n\ne1$, 则 $\int_0^{2\pi}(e^{i\theta})^{1-n}d\theta$ 为复积分, 值为 0; 若 $n=1$, 则 $\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=i\int_0^{2\pi}1d\theta=2\pi i$.

eg. 计算积分 $\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{z-a}$.

解. *(1)* a 在 γ 围成区域内部，结果同上，$\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=2\pi i$.

(2) a 在 γ 围成区域外部，故 $\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\int_{\gamma_2}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}-\int_{\gamma_1}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=0$.



§3.3　全纯函数的原函数

定理 3.3.1. 设 f 在域 D 中连续，且对于 D 中任意可求长闭曲线，均有 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$, 那么 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 是 D 上的全纯函数且在 D 中有 $F'(z) = f(z)$.

定理 3.3.2. 见 *chb* 笔记，略.

定理 3.3.3. 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域。$f \in H(D)$。那么 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 是 f 在 D 中的一个原函数

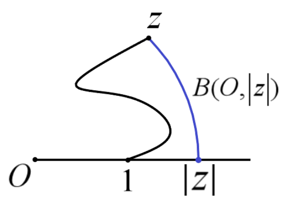
定理 3.3.4 (*Newton-Leibniz*)**.** 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域。$f \in H(D)$。Ψ 是 f 的一个原函数。则 $\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi = \Psi(z) - \Psi(z_0)$

若 D 为 $\mathbb{C}$ 中的多连通区域 $f \in H(D)$。一般的 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 为一个多值函数。值受连接 z_0 与 z 的曲线控制。

令 $D = \mathbb{C}|0.f(z) = \dfrac{1}{z} \in H(D)$。考虑积分 $\int_1^z \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\xi}$。对于连接 1 与 z 的曲线 γ:

- 若 γ 不围绕 O 点。

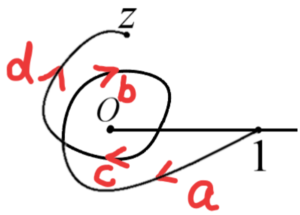
$$\int_1^z \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = \int_1^{|z|} = \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_0^{\arg z} \frac{\mathrm{d}(|z|e^{i\theta})}{|z|e^{i\theta}} = \log|Z| + i\arg z = \log Z$$



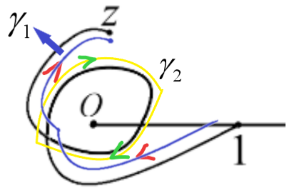
- 若 γ 围绕 O 点。则 $\gamma = \widehat{abcd}$。考虑 $\gamma_1 = \widehat{ad}, \gamma_2 = \widehat{cb}$。故 γ' 是不围绕 O 点的连线 1 与 z 的曲线。

  故对于如图所示的 γ，有

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \log z + 2\pi i$$



故对于一般的曲线 γ，$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \log z + R\cdot 2\pi i = Log z$。$k$ 为曲线 γ 绕原点所转圈数。



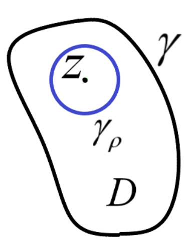
以上给出了 $\log z$ 的另一种定义。

§3.4 *Cauchy* 积分公式

定理 3.4.1. 设 D 是用简单可求长闭曲线 γ 围成的区域。若 $f\in H(D)\cap C(\bar{D})$。那么对任意的 $z\in D$ 均有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$$

证明. 任取 $z\in D$。由于 f 在 z 处连续，故 $\forall\epsilon>0$，存在 $\sigma>0.s.t.|z-\xi|<\sigma$ 时，$|f(z)-f(\xi)|<\epsilon$。取 $\rho<\sigma, s.t.B(z,\rho)\subset D$。记 $\gamma_\rho = \xi:|\xi - z|<\rho$ 设由 γ 与 γ_ρ 新城的二连通区域为 D'，则 $\frac{f(\xi}{\xi - z}\in H(D')\cap C(\bar{D}')$



于是有 $\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \int_{\gamma\rho}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$，又由于 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma\rho}\frac{\mathrm{d}z}{\xi - z} = 1$，故 $f(z) = \int_{\gamma\rho}\frac{f(z)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$，故，

$$\begin{aligned}
|f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi| &= \frac{1}{2\pi}|\int_{\gamma\rho}\frac{f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi-\int_{\gamma\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi| \\
&= \frac{1}{2\pi}|\int_{\gamma\rho}\frac{f(z)-f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma\rho}\frac{|f(z)-f(\xi)|}{|\xi-z|}\mathrm{d}\xi \le \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\rho\frac{\epsilon}{\rho} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

□

于是有 $\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi = \int_{\gamma\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$,又由于 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma\rho}\frac{\mathrm{d}z}{\xi-z}=1$,故 $f(z)=\int_{\gamma\rho}\frac{f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$,故,

$$\begin{aligned}
|f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi| &= \frac{1}{2\pi}|\int_{\gamma\rho}\frac{f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi-\int_{\gamma\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi| \\
&= \frac{1}{2\pi}|\int_{\gamma\rho}\frac{f(z)-f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma\rho}\frac{|f(z)-f(\xi)|}{|\xi-z|}\mathrm{d}\xi \le \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\rho\frac{\epsilon}{\rho} \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

定理 3.4.2. *设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中可求长曲线,g 是 γ 上的连续函数,那么由 Cauchy 型积分确定的函数:*

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{g(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$$

在 $\mathbb{C}|\gamma$ 上有任意阶导数。

证明. 见史济怀《复变函数》。 □

定理 3.4.3. *设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的域,若 $f\in\mathbb{H}(D)\cap\mathbb{C}(D)$,那么 f 在 D 上有任意阶导数且对任意的 $z\in D$,有:*

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi,\qquad n=1,2,\dots$$

证明. 在定理 3.4.2 中令 $g(z)=f(Z)$ 即可。 □

定理 3.4.4. *若 f 在 D 上解析,则 f 在 D 上有任意阶导数。*

证明. 任取 $z_0\in D$,存在充分小的 $\delta, s.t$,$\bar{B}(z_0,\delta)\subset D$。由定理 3.4.3.$f$ 在 $B(z_0,\delta)$ 中有任意阶导数。又由于 z_0 是任意的,故 f 在 D 中有任意阶导数 □

eg. 计算积分 $\int_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}$

法 *1*：原式 $=\int_{|z|=2}\dfrac{\frac{\mathrm{d}z}{z^2+16}}{z^2}$，令 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+16}$。$f(z)$ 在 $|z|=2$ 内部解析：由定理 *3.4.3* 得

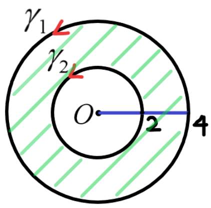
$$\int_{|z|=2}\frac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z=2\pi i f'(0)=0$$

法 *2*：$\int_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}=\dfrac{1}{16}(\int_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^2}-\int_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^2+16})=0$

定理 3.4.5. 设 $r_0,r_1...r_k$ 是 $k+1$ 条可求长简单闭曲线。$r_1,r_2...r_k$ 都存在 r_0 内部。$r_1,r_2...r_k$ 中每条都在其他 $k-1$ 条外部。D 是由这 $k+1$ 条曲线围成的区域。D 的边界 r 由 $r_0,r_1...r_k$ 组成。若 $f\in H(D)\cap C(\bar{D})$，则 $\forall z\in D$，有,$f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$，且 f 有任意阶导数。

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi!}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi,n=1,2,...$$

eg. 计算积分 $\int_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}$



以原点为圆心做半径大于 *4*，半径为 R 得圆，则在圆环 $z:2\le|z|\le R$ 上 $f(z)=\dfrac{1}{z^3+1}$ 解析。故

$$\begin{aligned}\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}&=(\int_{\gamma1}+\int_{\gamma2})\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}\\&=2\pi i(\frac{1}{z^3-1})'|_{z=-4}\\&=-\frac{32}{1323}\pi i\end{aligned}$$

故

$$\int_{|z|=2}=\frac{32}{1323}\pi i+\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}\tag{3.1}$$

由于 $|z|=R$ 时有 $|(z^3-1)(z+3)^2|\le(R^3-1)(R-4)^2$，故由长大不等式得：

$$|\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}|<\frac{2\pi R}{(R^3-1)(R-4)^2}\to 0(R\to+\infty)$$

故在 *(1)* 中令 $R\to+\infty$，得 $\int_{|z|=R}\dfrac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}=\dfrac{32}{1323}\pi i$

§3.5 *Cauchy* 积分公式的一些重要推论

定理 3.5.1 (*Liouville* 定理)**.** 有界整函数必为常数

证明. 设 f 为一有界整函数，其模的上界设为 M. 即 $\forall z\in\mathbb{C}$, 有 $|f(z)|\le M$, 任取 $a\in\mathbb{C}$, 在 $\partial B(a,R)$ 上由 *Cauchy* 不等式得 $|f(a)|\le\dfrac{M}{R}$, $\forall R>0$. 令 $R\to\infty$ 得 $|f'(a)|=0\Rightarrow f'(a)=0\forall a\in\mathbb{C}$ 故 f 为常数. □

定理 3.5.2 (代数基本定理)**.** 任意复系数多项式 $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ $(a_0\neq 0)$ 在 $\mathbb{C}$ 中必有零点

证明. 略，见 *chb.* 和史济怀 $(F(x)=\dfrac{1}{P_z})$ □

定理 3.5.3 (*Morera*)**.** 若 f 是域 $\mathbb{D}$ 上的连续函数，且沿 $\mathbb{D}$ 内任意可求长闭曲线上的积分是 *0*，那么 f 在 $\mathbb{D}$ 上解析

证明. 见 *chb.* 笔记 □

习题

eg. Liouville 定理的另一个证明

证明. 设 f 是有界整函数，z_1,z_2 是 $B(0,r)$ 中的任意两点，则：

$$\begin{aligned}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\mathrm{d}z&=\frac{1}{z_1-z_2}\left(\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-z_1}\mathrm{d}z-\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-z_2}\mathrm{d}z\right)\\&=\frac{1}{z_2-z_1}\left(f(z_1)-f(z_2)\right)\end{aligned}$$

由于 f 有界. 故存在 $M>0, s.t\quad |f(z)|\le M,\forall z\in\mathbb{C}$
故：

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=r}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_1)(z-z_2)}\right|&\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(z)\cdot zd\theta}{(z-z_1)(z-z_2)}\right|\\&\le\int_0^{2\pi}\frac{M\cdot r}{|z-z_1|\cdot|z-z_2|}d\theta\\&\to 0\quad(r\to\infty)\end{aligned}$$

故：$\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_1)(z-z_2)}=0.$ 故:$f(z_1)=f(z_2)$.
由于 r,z_1,z_2 的任意性，故 $f(z)$ 为常值函数. □

eg. 设 f 为整函数, 若当 $z\to+\infty$ 时.$f(z)=0(|z|^{\alpha})\quad\alpha\ge 0$. 证明 f 是次数不超过 $[\alpha]$ 的多项式

证明. 记.$k=[\alpha]+1$

$\Rightarrow \lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^k}=0$. 由于 $f^{(k)}(z)=\frac{k!}{z\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}\mathrm{d}\xi$. 故 $\forall\epsilon>0.\exists R, s.t\quad r>R$ 有

$\left|\frac{f(z)}{z^k}\right|<\epsilon, z\in B(0,r)$.（令 $r\to\infty$）

$\Rightarrow \left|f^{(k)}(z)\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_{|z-\xi|=r}\left|\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}\right|\mathrm{d}\xi=r\epsilon$. 故 $f^{(k)}\equiv 0$. □

eg. 设 f 为整函数，如果 $f(\mathbb{C})\subset\{z\in\mathbb{C}; Im\ z>0\}$, 证明 f 为常值函数.

证明. $\Rightarrow \forall z\in\mathbb{C}, |f(z)+i|\ge 1$ 令 $g(z)=\frac{1}{f(z)+i}$

故 $g(z)\in H(\mathbb{C})$. 并且 $|g(z)|\le 1$. 故 g 为常值函数, 故 f 为常值函数 □

eg. 设 f 为整函数. 如果 $f(\mathbb{C})\subset\mathbb{C}\backslash[0,1]$. 证明：$f$ 为常值函数.

证明. 令 $g(z)=\frac{f(z)}{1-f(z)}$. 若 $g(z)=r\in\mathbb{R}^+$. 则 $f(z)=\frac{r}{r+1}\in[0,1]$. 矛盾

故 $g(z)\subset\mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$. 设 $h(z)=\sqrt{g(z)}$. 显然 h 也为整函数.

故 $h(\mathbb{C})\subset\{z\in\mathbb{C}; Im\ z>0\}$. 故 h 为常值函数. 故 f 为常值函数 □

eg (更强形式的 *Morera*)**.** 设 f 是域 $\mathbb{D}$ 上的连续函数, 若对于任意边界和内部位于 $\mathbb{D}$ 中三角形域 $\triangle$, 总有 $\int_{\partial\triangle}f(z)\mathrm{d}z=0$. 证明 $f\in H(\mathbb{D})$.

证明. 思路同 *Cauchy-Gousart*. 此处省略 □

eg. $\int_{|z|=a}\frac{e^z}{z^2+a^2}.(a\in(\mathbb{R})^+)$.

解.

$$\begin{aligned}
&\int_{|z|=a}\frac{e^z}{z^2+a^2}\\
=&\int_{|z|=a}\frac{e^z}{(z+ai)(z-ai)}\mathrm{d}z=\frac{1}{2ai}\int_{|z|=a}\left(\frac{e^z}{z-ai}-\frac{e^z}{z+ai}\right)\mathrm{d}z\\
=&\frac{2\pi i}{2ai}\left((e^z)|_{z=ai}-(e^z)|_{z=-ai}\right)=\frac{2\pi i}{a}\sin a
\end{aligned}$$

eg. 设 $f\in H(\{z: r<|z|<+\infty\})$. 且 $\lim_{z\to\infty}z\cdot f(z)=A$. 证明：$\int_{|z|=R}f(z)\mathrm{d}z\to 2\pi iA$, $(R\to\infty)$.

证明. 由条件得.$\forall\epsilon>0,\exists R_0>r, s.t.|z|\ge R_0$ 时, 有 $|zf(z)-A|<\epsilon$. 故：

$$\begin{aligned}
\left|\int_{|z|=R}f(z)\mathrm{d}z-2\pi iA\right|&=\left|\int_{|z|=R}f(z)\mathrm{d}z-\int_{|z|=R}\frac{A}{z}\mathrm{d}z\right|\\
&=\left|\int_{|z|=R}(f(z)-\frac{A}{z})\mathrm{d}z\right|\le\int_{|z|=R}\left|f(z)-\frac{A}{z}\right|\mathrm{d}z\\
&\le\int_{|z|=R}\frac{\epsilon}{R}\mathrm{d}z=2\pi\epsilon
\end{aligned}$$

□

eg. 无界区域的 Cauchy 积分公式：
设 γ 为 $\mathbb{C}$ 中的有限的可求长闭曲线，设 γ 围成的区域为 D. 记 $\Omega=\mathbb{C}\backslash(D\cup\gamma)$
设 $f\in C(\Omega\cup\gamma)\cap H(\Omega)$，且 $\lim\limits_{|z|\to\infty}f(z)=f(\infty)\in\mathbb{C}$. 则 $f(z)=f(\infty)-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$.

证明. 任取 $z\in\Omega.\exists R>0,s.t.\ \gamma\cup\{z\}\subset B(0,R)$.
由 $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$.
取 $\xi\in\{z:|z|=R\}$. 令 $R\to+\infty$, $\frac{f(\xi)}{\xi-z}\cdot\xi\ \to f(\infty)$
由前例子可得 $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\ \to f(\infty)$, $R\to+\infty$
故 $f(z)=f(\infty)-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$ □

eg (Painlevé 原理)**.** 设 D 为域，$\gamma_1,\gamma_2\dots\gamma_n$ 是 D 中的 n 条可求长闭曲线，若 $f\in C(D)\cap H(D\backslash\bigcup\limits_{k=1}^n\gamma_k)$ 则 $f\in H(D)$.

证明. 利用定理 3.2.4 及 *Morera* 定理即可，略 □

§3.6 最大模原理

定理 3.6.1 (平均值定理)**.** 设 $f\in H(B(z_0,r))\cap C(\overline{B(z_0,r)})$. 则 : $f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta$.

证明. 由 *Cauchy* 积分公式得 $f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\mathrm{d}\xi$
记 $\xi=z_0+re^{i\theta}\Rightarrow\mathrm{d}\xi=ire^{i\theta}d\theta=i(\xi-z_0)d\theta$
$\Rightarrow f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta$ □

定理 3.6.2 (最大模定理)**.** 设 Ω 为区域 $f\in H(\Omega)$. 则 $|f|$ 在 Ω 内有最大值当且仅当 f 为常函数

证明. 此处给出利用区域连通性与平均值原理的证法，见 *chb* 笔记. 略
具体可见方企勤《复变函数》 □

定理 3.6.3. 设 $D\subset\mathbb{C}$ 为有界域. 设 f 为非常值函数. $f\in H(D)\cap C(D)$. 则 f 的最大模在且只在 ∂D 上取到

证明. 由定理 *3.6.2* 可直接得到. 略 □

定理 3.6.4 (Schwarz 引理)**.** 设 $f \in H(B(0,1))$, 且有 $\forall z \in B(0,1)$, $|f(z)| \le 1$, $f(0) = 0$. 则 $\forall z \in B(0,1)$ 有 $|f(z)| \le |z|, |f'(0)| \le 1$. 并且若存在 $z_0 \in B(0,1)$ $z_0 \ne 0$, 有 $|f(z_0)| = |z_0|$, 或 $|f'(0)| = 1$, 则 $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $s.t.$ $\forall z \in B(0,1)$ 有 $f(z) = e^{i\theta} \cdot z$

证明. 略. 见 *chb* 笔记以及方企勤《复变函数》 □

§3.7 非齐次 *Cauchy* 积分公式 *

定理 3.7.1. 设 $\gamma_0, \gamma_1 \dots \gamma_n$ 是 $n+1$ 条可求长简单闭曲线,$\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$ 在 r_0 的内部. $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$ 中的任一条均在其余的 $n-1$ 条的外部. 设 D 是这 $n+1$ 条曲线围成的区域, 若 $f \in C^1(D)$. 则 $\forall z \in D$. 有 : $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D} \dfrac{f(\xi)}{\xi - z} \mathrm{d}\xi + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{D} \dfrac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \dfrac{1}{\xi - z} \mathrm{d}\xi \bigwedge d\bar{\xi}$

证明. 见史济怀《复变函数》 □

第四章 解析函数的 Taylor 展开及其应用

§4.1 Weierstrass 定理

对于复数上的数列，其收敛性可以类似于 $\mathbb{R}^2$ 中点集的收敛性即可得到. 同样的我们有柯西收敛原理, 此处略去

对于复数上的数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, 类似于实数中的常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. 可以定义绝对收敛和条件收敛, 以及级数极限的存在性和柯西收敛原理.

下面讨论对于复变函数上的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$:

定理 4.1.1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 是定义在 $\mathbb{E}$ 上的级数. 我们说 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\mathbb{E}$ 上一致收敛到 $f(z)$.(记为 $\sum_{k=1}^{n} f_k(z) \Rightarrow f(z)$), 指 $\forall \epsilon > 0, \exists . N \in \mathbb{N}^* \quad s.t. \forall n > N$. 有 $\left|S_n(z) - f(z)\right| < \epsilon, \forall z \in E$, 其中 $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$.

定理 4.1.2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\mathbb{E}$ 上一致收敛的充要条件是 $\forall \epsilon > 0, \exists . N \in \mathbb{N}^* \quad s.t. \forall n > N. \forall p \in N$ 有 $\left|\sum_{i=1}^{p} f_{n+i}(z)\right| < \epsilon$. 对 $\forall z \in \mathbb{E}$ 均成立.

证明. 略. □

定理 4.1.3 (函数项级数的 weierstass 判别法，略)**.**

定理 4.1.4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \Rightarrow f(z). z \in \mathbb{E}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n \in C(E)$. 则 $f \in C(E)$.

证明. $\forall \epsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \quad s.t.\ n > N$ 时 $\left|f(z) - S_n(z)\right| < \dfrac{\epsilon}{3}\ \forall z \in \mathbb{E}$.
对于给定的大于 N 的 n_0. 显然 $S_{n_0} \in C(\mathbb{E})$. 现任取一个 $a \in \mathbb{E}$. 故 S_{n_0} 在 a 处连续.
故 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0. \quad s.t. \forall z \in B(z, \delta)$ 有 $\left|f(z) - f(a)\right| < \dfrac{\epsilon}{3}$.
于是 $z \in \mathbb{E} \bigcap B(a, \delta)$ 时有：
$\left|f(z) - f(a)\right| \leq \left|f(z) - S_{n_0}(z)\right| + \left|S_{n_0}(z) - S_{u_0}(a)\right| + \left|S_{u_0}(a) - f(a)\right| < \epsilon$ □

定理 4.1.5. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_u(z)$. 在可求长曲线 γ 上一致收敛到 $f(z)$, 若 $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n \in C(\gamma)$, 则 $\int_\gamma f(z)dz = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)dz$.

证明. 由定理 *4.1.4*. $f \in C(\gamma)$.
由于 $f_k \rightrightarrows f$. 故 $\forall \epsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}^* \quad s.t.\ n > N$ 时，有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right| < \epsilon. \forall z \in \gamma$. 故 $n > N$ 时有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\int_\gamma f_k(z)dz - \int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_\gamma \left(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)\right)dz\right| < \epsilon \cdot |\gamma|$ □

定理 4.1.6. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_a(z)$ 在区域 $\mathbb{D}$ 的任一紧子集 K 上一致收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_a(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上是内闭一致收敛的.

证明. 类似于实值函数中的例子，函数项级数 $1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$, $f_k(z) = z^k - z^{k-1}$ 部分和为 z^k 显然下单位球上内闭一致收敛，但不一致收敛 □

定理 4.1.7 (Weierstrass I)**.** 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域. 若 $f_n \in C(D), n = 1, 2 \ldots$, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$ 则 $f \in H(D)$, 并且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在上内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$. $\quad k \in \mathbb{N}$.

证明. 任取 $z_0 \in D$，由于 D 为开集，故存在 $\delta > 0, \quad s.t.\ \overline{B(z_0, \delta)} \subset D$
由定理 *4.1.4*，$f \in C(\overline{B(z_0, \delta)})$ 在 $B(z_0, \delta)$ 中任做一个可求长闭曲线 r，由定理 *4.1.5* 和定理 *3.2.4* 得 $\int_r f(z)dz = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_r f_n(z)dz = 0$. 故由 *Morera* 定理得 $f \in H(B(z_0, \delta))$
故 $f \in H(D)$
任取 $\xi \in \partial B(z_0, \delta), \forall z \in B(z_0, \frac{\delta}{2})$. 有 $\left|\frac{1}{(\xi - z)^{k+1}}\right| \le (\frac{2}{\delta})^{k+1}$
由一致收敛性得,$\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, $\quad s.t.\ \forall n > N, \forall \xi \in \partial B(z_0, \delta)$, 有:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f_j(\xi) - f(\xi)\right| < \frac{\epsilon}{k! \cdot \delta}(\frac{\delta}{2})^{k+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{f_j(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} - \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} < \frac{\epsilon}{k! \cdot \delta}$$

故当 $z \in B(z_0, \frac{\delta}{2})$ 时，有:

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n} f_j^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)\right| &= \frac{k!}{2\pi} \cdot \left|\sum_{j=1}^{n}\int_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{f_j(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{k+1}} - \int_{|\xi - z_0| = \delta} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z)^{k+1}}\right| \\
&\le \frac{k!}{2\pi}\int_{|\xi - z_0| = \delta}\left|\sum_{j=1}^{n} \frac{f_j(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} - \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\right| d\xi \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

故 $\sum_{j=1}^{n} f_j^{(k)}(z) \Rightarrow f^{(k)}(z), z \in B(z_0, \frac{\delta}{2})$，对于 D 的任一紧集 K,K 有有限开球覆盖 $SI_k S_{k=1}^n$, 故 $\sum_{j=1}^{n} f_j^{(k)} \Rightarrow f^{(k)}(z), z \in K$. □

定理 4.1.8 (Weierstrass II). 设 D 为有界区域，对于函数列 $\{f_n(z)\}$. 有 $f_n(z) \in H(D)\bigcap C(\overline{D})$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 ∂D 上一致收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\overline{D}$ 上一致收敛.

证明. $\forall \epsilon > 0, \exists N, s.t. n \geq N, p \geq 1$ 时，有 $\left|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)\right| < \epsilon$. 对任意 $z \in \partial D$ 均成立，由最大模定理，上述不等式在 $\overline{D}$ 上成立，故级数在 $\overline{D}$ 上一致收敛 □

§4.2 幂函数

幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \ldots$

其中 $a_0, a_1 \ldots$ 均为复常数,做平移 $\omega = z - z_0$, 得 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \ldots(*)$.

定理 4.2.1. （收敛半径）（收敛圆）. 用数分中定义，略

定理 4.2.2. 级数 $(*)$ 存在收敛半径 $R = (\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$, 则：

(1) 当 $R = 0$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 只在 $z = 0$ 处收敛.

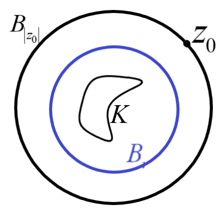
(2) 当 $R = +\infty$ 时，$\sum_{n\neq 0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\mathbb{C}$ 上收敛.

(3) 当 $0 < R < +\infty$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $\{z : |z| < R\}$ 中收敛. 在 $\{z : |z| > R\}$ 中发散.

证明. 同数学分析中的讨论，此处略去 □

定理 4.2.3 (Abel I). 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ 在 $z = z_0 \neq 0$ 处收敛，则在 $\{z : |z| < z_0\}$ 中内闭一致收敛.

证明. 设 K 为 $\{z : |z| < |z_0|\}$ 中的一个紧集，取 $r < |z_0|$，使得 $k \subset B(0,r)$ 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ 收敛，故 $\left|a_n z_0^n\right| \to 0$ 故存在 $M \in \mathbb{R}. s.t. \left|a_n z_0^n\right| < M$



故当 $z \in k$ 时, $\left|a_k \cdot a^k\right| = \left|a_n \cdot z_o^k \cdot \frac{z^k}{z_0^k}\right| \leq M\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|\right)^k$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ 时收敛的，故由 *Weierstrass* 判别法得 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 k

中一致收敛

□

由定理 *4.2.3* 以及 *Weierstrass* 定理可以得到:

定理 4.2.4. 幂级数在其收敛圆内确定了一个全纯函数
那么在收敛圆圆周上的收敛性如何呢?

eg. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛半径为 1, 它在收敛圆周 $|z|=1$ 上处处发散.

eg. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径为 1, 它在收敛圆周 $|z|=1$ 上处处收敛.

eg. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 的收敛半径为 1, 它在收敛圆周 $|z|=1$ 上在 $z=e^{i\theta}(0<\theta<2\pi)$ 处收敛, 在 1 处发散.

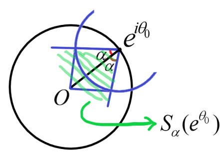
证明. 显然 $z=1$ 时级数时发散的
当 $\theta\neq 0$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}+i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$ 由实数项级数的 *Dirichlet* 判别法，得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\theta}{n}, \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n}$ 收敛

□

由上述例子可知，收敛圆周上的收敛性无法确定
这也是我们下面要探讨的问题
设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R,我们来研究 $\xi\in B(z_0,R)$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi-z_0)^n$ 与和函数 f 的关系: 令 $\omega=\frac{z-z_0}{\xi-z_0}$ 故 $\omega\in B(0,1)$, 级数可改写为 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\omega^n, b_n = a_n(\xi-z_0)^n$, 故新的幂级数的收敛半径为 1，故以下我们在收敛半径为 1 的情况下做讨论.

定理 4.2.5 (*). 设 g 是定义在单位圆中的函数, $e^{i\theta_0}$ 是单位圆上的一点, 记 $S_\alpha(e^{i\theta_0})$ 为以 $e^{i\theta_0}$ 为顶点，以 $e^{i\theta_0}$ 点对应的极径在单位圆内侧向两侧张出的张角为 2α 的角形区域 $(\alpha<\frac{\pi}{2})$

若 z 在 $S_\alpha(e^{i\theta_0})$ 中趋于 $e^{i\theta_0}$ 时 $g(z)$ 有极限 C 则称 g 在 θ_0 处有非切向极限 C, 记为 $\lim_{\substack{z\to e^{i\theta_0}\\ z\in S_\alpha(e^{i\theta_0})}} g(z)=C$



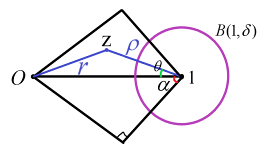
定理 4.2.6 (*). (Abel II) 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 $R=1$，且级数在 $z=1$ 处收敛于 S，则 f 在 $z=1$ 处有非切向极限 S

证明. 记 $\sigma_{n,\rho}=\sum_{i=1}^{p}a_{n+i}$ 由条件得 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛.
故 $\forall\epsilon>0$, $\exists$ 正整数 N, $s.t.$ 当 $n>N$ 时，对任意自然数 p 有 $|\sigma_{n,p}|<\epsilon$
由于

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}a_{n+i}\cdot z^{n+i}&=\sum_{i=1}^{p-1}(\sigma_{n,i+1}-\sigma_{n,i})z^{n+1+i}+\sigma_{n,1}z^{n+1}\\&=\sum_{i+1}^{p-1}\sigma_{n,i}z^{n+i}\cdot(1-z)+\sigma_{n,p}z^{n+p}\\&=z^{n+1}(1-z)\cdot\sum_{i=1}^{p-1}(\sigma_{n,i}\cdot z^{i-1})+\sigma_{n,p}\cdot z^{n+p}\end{aligned}$$

故当 $|z|<1,n>N.$ 时有:$\left|\sum_{i=1}^{p}a_{n+i}\cdot z^{n+i}\right|<\epsilon\cdot|1-z|\cdot\sum_{n=p}^{\infty}|z^n|+\epsilon=\epsilon\left(\frac{|1-z|}{1-|z|}+1\right)$
任取 $z\in S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)$ 记 $|z|=r,|1-z|=\rho$ 则由余弦定理得 $r^2=1+\rho-2\rho\cos\theta$

故 $\frac{|1-z|}{1-|z|}=\frac{\rho}{1-r}=\frac{\rho(1+r)}{1-r^2}\le\frac{2\rho}{2\rho\cos\theta-\rho^2}=\frac{2}{2\cos\theta-\rho}$
又由于 $z\in B(1,\delta)$. 故 $\rho<\delta<\cos\alpha<\cos\theta$ 故 $\frac{|1-z|}{1-|z|}<\frac{2}{\cos\alpha}$



故 $\left|\sum_{i=1}^{p}a_{n+i}\cdot z^{n+i}\right|<\epsilon(\frac{2}{\cos\alpha}+1)$, 故 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在 $S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)$
上一致收敛设和函数为 f, 由一致收敛性得 f 在 $S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)$ 上连续，故
$\lim_{\substack{z\in S_\alpha(1)\\z\to1}}f(z)=f(1)=S$

□