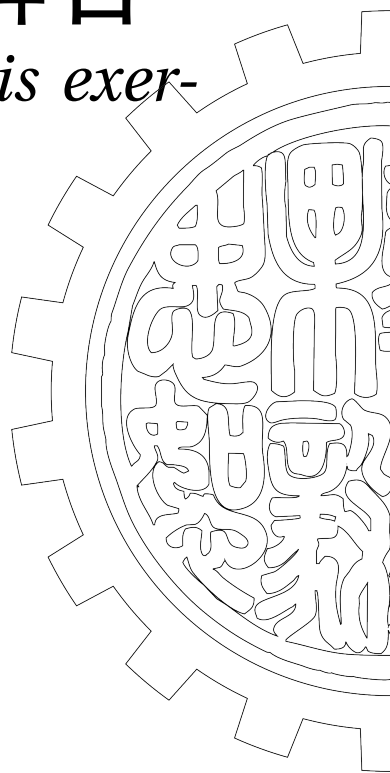


# 实变函数习题解答

*Solutions to real analysis exercises*

作者：数试 82 裴兆辰

2020 年 4 月 21 日



钱学森书院学业辅导中心

QIAN YUAN XUE FU

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

## 作品信息

- 标题：实变函数习题解答 - *Solutions to real analysis exercises*
- 作者：数试 82 裴兆辰
- 校对排版：钱院学辅排版组
- 出品时间：2020 年 4 月 21 日
- 总页数：25

## 许可证说明

 知识共享 (Creative Commons) BY-NC-ND 4.0 协议

本作品采用 **CC 协议** 进行许可。使用者可以在给出作者署名及资料来源的前提下对本作品进行转载，但不得对本作品进行修改，亦不得基于本作品进行二次创作，不得将本作品运用于商业用途。

# 前言



## 参与排版成员

- 第一至五章排版：数试 82 裴兆辰
- 整理：化生 81 高旭帆

# 目录

第一章 集合与点集 . . . . .	1
§1.1 第一组 . . . . .	1
第二章 <i>Lebesgue</i> 测度 . . . . .	3
§2.1 第一组 . . . . .	3
§2.2 第二组 . . . . .	5
第三章 可测函数 . . . . .	7
§3.1 第一组 . . . . .	7
第四章 <i>Lebesgue</i> 积分 . . . . .	12
§4.1 第一组 . . . . .	12
§4.2 第二组 . . . . .	18
第五章 微分与不定积分 . . . . .	23
§5.1 第一组 . . . . .	23

# 第一章 集合与点集



## §1.1 第一组

由于第一章内容较为基础,其中的不少内容在分析中也已有所介绍,故我们只选取少量较典型的题目给出具体的解析。

**练习 3** 设有集合列  $\{A_n\}, \{B_n\}$  试证明:

$$(i) \quad \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} (A_n \cup B_n) = \left( \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} A_n \right) \cup \left( \overline{\lim_{n \rightarrow +\infty}} B_n \right)$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n \cap B_n) = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n \right) \cap \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n \right)$$

**证明** 利用定理 1.3 直接进行叙述即可, 此处省略

**练习 14** 设  $F \subset \mathbb{R}^n$  是有界闭集,  $E$  是  $F$  的一个无限子集, 试证明  $E' \cap F \neq \emptyset$ . 反之, 若  $F \subset \mathbb{R}^n$ , 且对于  $F$  中的任一无限子集  $E$ , 有  $E' \cap F \neq \emptyset$ , 则  $F$  是有界闭集.

**证明** 由于  $F$  是闭集故  $\bar{E} \subset F$ , 故  $E' \subset F$ . 由列紧性原理知  $E' \neq \emptyset$ , 故得证

另一方面, 我们反设  $E$  无界, 则对于任意的正整数  $n$ , 有  $E \cap (B(0, n) \setminus B(0, n-1)) \neq \emptyset$ . 在  $B(0, n) \setminus B(0, n-1)$  中任取一点  $x_k$ , 故点列  $\{x_k\}$  无聚点. 令  $E = \{x_k | k \in \mathbb{N}^*\}$ , 故  $E' = \emptyset$ , 矛盾! 故  $E$  有界.

若  $F$  不为闭集, 则  $F$  中存在一个收敛的不重复点列  $\{y_n\}$ , 有  $y_n \rightarrow y_0$ , 故  $y_0 \in F$ , 矛盾! 故  $F$  为有界闭集

**练习 16** 设  $A, B$  是  $\mathbb{R}$  中的点集, 试证明  $(A \times B)' = (\bar{A} \times B') \cup (A' \times \bar{B})$

**证明** 任取  $A \times B$  中的互异收敛点列  $\{(x_n, y_n)\}$ , 设收敛点为  $(x_0, y_0)$ , 故  $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$ . 我们可以用反证法得到  $(\bar{A} \setminus A') \times (\bar{B} \setminus B') \cup (A \times B)' = \emptyset$  (此处请读者自行补充). 另一方面, 显然  $A \times B', A' \times B, A' \times B' \subset (A \times B)'$ . 综上得证

**练习 18** 设  $f \in C(\mathbb{R}), \{F_k\}$  是  $\mathbb{R}$  中的递减紧集列, 试证明

$$f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k)$$



**证明** 由闭集套定理得  $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$ , 任取  $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ , 故对于任意的正整数  $k$ , 有  $f(x) \in f(F_k)$ , 故  $f(x) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k)$ , 故  $f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k)$ .

任取  $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k)$ , 故对于任意的正整数  $k, y \in f(F_k)$ . 记  $E_k = f^{-1}(y) \cap F_k$ , 故  $E_k$  为闭集, 故  $E_k$  为递减闭集列. 由闭集套定理知存在  $x \in \mathbb{R}$ , 使得  $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} (E_k) = f^{-1}(y) \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ , 故  $y \in f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right)$ . 综上  $f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k)$  ■

**练习 38** 设  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . 若点集  $G_f = \{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}$  是  $[0, 1] \times [0, 1]$  中的闭集, 试证明  $f \in C([0, 1])$

**证明** 记  $\omega(x)$  表示函数  $f(x)$  在  $x$  处的振幅, 记  $M(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow x} f(t), m(x) = \underline{\lim}_{t \rightarrow x} f(t)$ , 即  $\omega(x) = M(x) - m(x)$ . 由分析知识我们可以得到  $f(x)$  在  $x_0$  处连续的充分必要条件是  $\omega(x_0) = 0$ .

若存在  $x_0 \in [0, 1]$ , 满足  $\omega(x_0) \neq 0$ , 那么必有  $f(x_0) \neq M(x_0)$  或  $f(x_0) \neq m(x_0)$ . 不妨设  $f(x_0) \neq M(x_0)$ , 故  $(x_0, M(x_0)) \notin G_f$ . 由定义知存在  $[0, 1]$  中的趋于  $x_0$  的数列  $\{a_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = M(x_0)$ . 故对于任意的  $\epsilon > 0$ , 存在正整数  $n$ , 使得  $\sqrt{(x_0 - a_n)^2 + (M(x_0) - f(a_n))^2} < \epsilon$ , 而  $(a_n, f(a_n)) \in G_f$ , 故  $(x_0, M(x_0))$  不为  $G_f$  的内点, 这与  $G_f$  是  $[0, 1] \times [0, 1]$  中的闭集矛盾! 故假设不成立, 原命题成立. ■

**练习 40** 设  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ , 且  $\bar{A} \cap B = \bar{B} \cap A = \emptyset$ , 试证明存在开集  $G_A, G_B$  使得  $G_A \cap G_B = \emptyset, G_A \supset A, G_B \supset B$ .

**证明** 取  $G_A = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, A) < d(x, B)\}, G_B = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, A) > d(x, B)\}$ , 由于  $d$  是连续函数, 故  $G_A, G_B$  是开集, 显然  $G_A \cap G_B = \emptyset, G_A \supset A, G_B \supset B$  ■



## 第二章 Lebesgue 测度



### §2.1 第一组

**练习 1** 设  $E \subset \mathbb{R}$ , 且存在  $q: 0 < q < 1$ , 使得对任一区间  $(a, b)$ , 都有开区间列  $\{I_n\}$ :

$$E \cap (a, b) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < (b-a)q,$$

试证明  $m(E) = 0$

**证明** 由于  $m^*(E) = m^*\left(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap I_n)$ , 所以只需要证明  $m^*((a, b) \cap E) = 0$

由条件知存在  $I_n(a_n, b_n), (n \in \mathbb{N}), \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E \cap (a, b)$ , s.t.  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) \leq q(b-a)$ . 下面我们对于每个  $(a_n, b_n)$  再做如上操作, 所以存在  $I_n^{(1)} = (a_n^{(1)}, b_n^{(1)}), n \in \mathbb{N}, \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^{(1)} \supset E \cap (a_k, b_k)$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n^{(1)}) < (b_k - a_k)q$ . 我们再对  $k$  求和, 故我们得到了可数多个开集  $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ , s.t.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n \subset \left(E \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)\right)$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} m(J_n) \leq q \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < q^2(b-a)$ , 故  $m^*((a, b) \cap E) < q^2(b-a)$ .

以此类推我们重复上面的过程, 可得  $m^*((a, b) \cap E) = 0$  ■

**练习 2** 设  $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n, A_1 \subset A_2, A_1$  是可测集, 且  $m(A_1) = m^*(A_2) < +\infty$ , 试证明  $A_2$  是可测集

**证明** 由于  $A_1$  可测, 故  $m^*(A_2) = m^*(A_1) + m^*(A_2 \setminus A_1)$ , 故  $A_2 \setminus A_1$  是零测集, 故  $A_2 \setminus A_1$  是可测集, 故  $A_2 = A_1 \cup A_2 \setminus A_1$  是可测集 ■

**练习 3** 设  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  都是可测集, 试证明

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) = m^*(A) + m^*(B)$$

**证明** 设  $A, B$  都是可测集, 故

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B \setminus A) = m^*(B) + m^*(A \setminus B),$$

$$m^*(A) = m^*(A \cap B) + m^*(A \setminus B),$$

$$m^*(B) = m^*(A \cap B) + m^*(B \setminus A).$$



联立上述三个式子即得到所证明的式子

**练习 4** 试问: 是否存在闭集  $F, F \subset [a, b]$  且  $F \neq [a, b]$ , 而  $m(F) = b - a$

**证明** 不存在, 假设存在, 记为  $F$ , 记  $F_0 = F \setminus \{a, b\}$ , 故  $F_0 \subsetneq (a, b)$  且  $m(F_0) = b - a$ . 则  $(a, b) \setminus F_0$  为非空开集, 故  $(a, b) \setminus F_0$  可写为  $\mathbb{R}$  中的至少一个开区间的并, 故存在开区间  $(s, t)$ , 满足  $(s, t) \subset (a, b) \setminus F_0$ . 故  $m^*((a, b) \setminus F_0) \geq s - t > 0$ , 显然这个与  $m(F_0) = b - a$  矛盾! 故满足条件的闭集不存在!

**练习 7** 设  $\{E_k\}$  是  $\mathbb{R}^n$  上的可测集合列, 若  $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) < +\infty$ , 试证明

$$m\left(\overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} E_k\right) \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} m(E_k)$$

**证明** 与推论 2.9 的证明类似, 此处省略

**练习 8** 设  $\{E_k\}$  是  $[0, 1]$  中的可测集合列,  $m(E_k) = 1 (k = 1, 2, \dots)$ , 试证明  $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 1$

**证明** 记  $F_k = [0, 1] \setminus E_k$ , 由于  $E_k$  可测, 故  $F_k$  为零测集. 故  $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$  也是零测集

又由题目条件得  $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$  是可测集, 故用  $[0, 1]$  做实验集即得到题目结果

**练习 9** 设  $E_1, E_2, \dots, E_k$  是  $[0, 1]$  中的可测集, 且有  $\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) > k - 1$ , 试证明  $m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) > 0$

**证明** 与 8 类似, 此处省略

**练习 12** 设  $\{B_k\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中递减可测集列,  $m^*(A) < \infty$ , 令  $E_k = A \cap B_k (k = 1, 2, \dots)$ ,  $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ , 试证明  $\lim_{k \rightarrow \infty} m^*(E_k) = m^*(E)$

**证明** 由于  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$  可测, 故  $m^*(A) = m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)^c\right)$   
又由于  $E_k$  可测, 故  $m^*(A) = m^*(E_k) + m^*(A \cap B_k^c)$ , 由于  $\{A \cap B_k^c\}$  是递增集合列, 在此式两端令  $k \rightarrow \infty$ , 由推论 2.17 得  $\lim_{k \rightarrow \infty} m^*(A \cap B_k^c) = m^*\left(A \cap \left(\lim_{k \rightarrow \infty} B_k\right)^c\right) = m^*\left(A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right)^c\right)$ , 直接带入即得证

**练习 14** 试证明点集  $E$  可测的充分必要条件是, 对任给的  $\epsilon > 0$ , 存在开集  $G_1, G_2: G_1 \subset E, G_2 \subset E^c$ , 使得  $m(G_1 \cap G_2) < \epsilon$

**证明**

"  $\Rightarrow$  "

由定理 2.13 得,  $\forall \epsilon > 0$ , 存在开集  $F$  以及闭集  $G$  使得  $F \supset E \supset G$ , 并且  $m(F \setminus E) < \frac{\epsilon}{2}, m(E \setminus G) < \frac{\epsilon}{2}$ , 取  $G_1 = F, G_2 = G^c$ , 故  $m(G_1 \cap G_2) < \epsilon$

"  $\Leftarrow$  "





假设存在这样的集合  $G_1, G_2$ , 记  $F = G_2^c$ , 故显然  $F \subset E$  且  $m(G_1 \setminus F) < \epsilon$ , 故  $m(G_1 \setminus E) < \epsilon$ , 故  $E$  为可测集 ■

**练习 15** 设  $E \subset [0, 1]$  是可测集, 且有  $m(E) \geq \epsilon > 0$ ,  $x_i \in [0, 1]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 其中  $n > \frac{2}{\epsilon}$ , 试证明  $E$  中存在着两个点其距离等于  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  中某两个点间的距离.

**证明** 设  $E_k = E + \{x_k\}$ , ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), 故由定理 2.18 得  $m(E_k) = m(E) \geq \epsilon$ . 故  $\sum_{k=1}^n m^*(E_k) \geq n\epsilon > 2$ , 而  $E_k \subset [0, 2]$ , 故一定存在  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  且  $i \neq j$ , s.t.  $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ . 任取  $x \in E_i \cap E_j$ . 故  $x - x_i, x - x_j \in E$ , 故  $|(x - x_i) - (x - x_j)| = |x_i - x_j|$  ■

**练习 16** 设  $W$  是  $[0, 1]$  中的不可测集, 试证明存在  $\epsilon: 0 < \epsilon < 1$ , 使得对于  $[0, 1]$  中任一满足  $m(E) \geq \epsilon$  的可测集  $E$ ,  $W \cap E$  是不可测集

**证明** 故  $\forall 1 > \epsilon > 0$ , 存在  $E \subset [0, 1]$ ,  $m(E) \leq \epsilon$ , 有  $W \cap E$  可测, 故我们可以取  $\{\epsilon_n\}$ , s.t.  $\epsilon_n \rightarrow 1$ .

设对于  $\epsilon_n$ , 满足上述条件的集合记为  $E_n$ , 记  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , 故  $E$  可测, 且  $m(E) = 1$ , 故  $m^*(W \cap ([0, 1] \setminus E)) = 0$ , 故  $W \cap ([0, 1] \setminus E)$  可测. 而另一方面  $W = \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} (W \cap E_n) \right) \cup (W \cap ([0, 1] \setminus E))$ , 故  $W$  可测, 矛盾! ■

## §2.2 第二组

**练习 1** 设  $\{r_n\}$  是  $\mathbb{R}^1$  中的全体有理数, 令

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2} \right),$$

试证明对  $\mathbb{R}^1$  中的任一闭集  $F$ , 有  $m(G \Delta F) > 0$

**证明** 故  $G$  为开集, 显然  $G \setminus F$  为开集.

若  $G \setminus F \neq \emptyset$ , 则  $G \setminus F$  为  $\mathbb{R}$  上的非空开集, 则  $m(G \setminus F) > 0$ , 故  $m(G \Delta F) > 0$

若  $G \setminus F = \emptyset$ , 则  $G \subset F$ . 若  $F \neq \mathbb{R}$ , 则取  $x \in F^c$ , 显然  $x$  为无理数, 并且为  $F^c$  的内点, 故存在  $\delta > 0$ , 使得  $B(x, \delta) \subset F^c$ . 然而  $\mathbb{Q}$  在  $\mathbb{R}$  中稠密, 故  $B(x, \delta)$  中必包含有理数, 矛盾! 故  $F = \mathbb{R}$ ,  $m(F \setminus G) = m(G^c)$ . 而  $m(G) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$ . 故  $m(G^c) > 0$

综上  $m(G \Delta F) > 0$  ■

**练习 2** 设  $E \subset [a, b]$  是可测集,  $I_k \subset [a, b]$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) 是开区间列, 满足  $m(I_k \cap E) \geq \frac{2}{3} |I_k|$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), 试证明

$$m\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \cap E\right) \geq \frac{1}{3} m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right)$$



**证明** 略

**练习 3** 设  $\{E_n\}$  是  $[0, 1]$  中的互不相同的可测集合列, 且存在  $\epsilon > 0, m(E_n) \geq \epsilon (n = 1, 2, \dots)$ , 试问是否存在子列  $\{E_{n_i}\}$ , 使得  $m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n_i}\right) > 0$

**证明** 设  $E_{2n} = \left[0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right], E_{2n-1} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1}, 1\right], n \in \mathbb{N}^*$ . 故  $m(E_k) > \frac{1}{2}$ . 而对于任一子列  $\{E_{n_i}\}, \bigcap_{i=1}^{\infty} E_{n_i} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

**练习 4** 设  $\{E_n\}$  是  $[0, 1]$  中的可测集合列, 且满足  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} m(E_n) = 1$ , 试证明对  $0 < a < 1$ , 必存在  $\{E_{n_k}\}$ , 使得  $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\right) > a$

**证明** 故  $\forall \epsilon > 0$ , 存在子列  $\{E_{n_k}\}$ , 使得  $m(E_{n_k}) > 1 - \frac{\epsilon}{2^k}$ . 记  $F_n = [0, 1] \setminus E_n$ , 故  $m(F_k) < \frac{\epsilon}{2^k}$ . 故  $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}\right) = 1 - m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_{n_k}\right) > 1 - \sum_{k=1}^{\infty} m(F_{n_k}) > 1 - \epsilon$

**练习 5** 设  $m^*(E) < \infty$ , 试证明存在  $G_\delta$  集  $H: H \subset E$ , 使得对于任一可测集  $A$ , 都有  $m^*(E \cap A) = m(H \cap A)$

**证明** 对于任一可测集  $A$ , 有  $m^*(E \cap A) = m^*(E) - m^*(E \setminus A)$ . 由定理 2.15 得存在  $G_\delta$  集  $H_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \supset E$ , 其中  $I_k$  是开集, 使得  $m(H_0) = m^*(E)$ , 故

$$m^*(E \cap A) \geq m(H_0) - m^*\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} (I_k \setminus A)\right) = m(H_0 \cap A).$$

而  $(H_0 \cap A) \setminus (E \cap A) \subset H_0 \setminus E$ , 故  $(H_0 \cap A) \setminus (E \cap A)$  是零测集, 是可测集. 故

$$m^*(E \cap A) = m(H_0 \cap A)$$

**练习 6** 设  $A, B \subset \mathbb{R}, A \cup B$  是可测集, 且  $m(A \cup B) < \infty$ , 若  $m(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$ , 试证明  $A, B$  均为可测集

**证明** 做  $A, B$  的等测包  $A_1, B_1$ , 故  $A_1, B_1$  是  $G_\delta$  集,  $A_1 \supset A, B_1 \supset B, m(A_1) = m^*(A), m(B_1) = m^*(B_1)$ . 故

$$m(A_1) + m(B_1) \geq m(A_1 \cup B_1) \geq m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B) = m(A_1) + m(B_1).$$

故上述不等号均取为等号, 故  $m^*((A_1 \cup B_1) \setminus (A \cup B)) = 0$ , 故  $A_1 \setminus A, B_1 \setminus B$  均为零测集, 故  $A, B$  均为可测集



# 第三章 可测函数



## §3.1 第一组

**练习 1** 设有指标集  $I$ ,  $f_\alpha(x) : \alpha$  是  $\mathbb{R}^n$  上的可测函数, 试问: 函数  $S(x) = \sup\{f_\alpha(x) \mid \alpha \in I\}$  在  $\mathbb{R}^n$  上是可测的吗?

**证明** 不一定

设  $I$  是  $\mathbb{R}^n$  上的不可测集, 且记  $W = \{x_\alpha \mid \alpha \in I\}$ , 设  $f_\alpha(x) = \frac{1}{|x-x_\alpha|}$ ,  $\alpha \in I$ , 故  $f_\alpha(x)$  是  $\mathbb{R}^n$  上的可测函数, 故  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid S(x) = +\infty\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_\alpha(x) = +\infty\} = W$  是不可测集, 故  $S(x)$  是不可测含函数 ■

**练习 2** 设  $z = f(x, y)$  是  $\mathbb{R}^2$  上的连续函数,  $g_1(x), g_2(x)$  是  $[a, b]$  上的实值可测函数, 试证明  $F(x) = f(g_1(x), g_2(x))$  是  $[a, b]$  上的可测函数

**证明** 由简单函数逼近定理得, 存在函数列  $\{\phi_k(x)\}, \{\psi_k(x)\}$ , s.t.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k(x) = g_1(x), \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k(x) = g_2(x)$$

故  $f(\phi_k(x), \psi_k(x))$  也是在  $[a, b]$  上的简单可测函数列, 由于  $z = f(x, y)$  是  $\mathbb{R}^2$  上的连续函数, 故  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\phi_k(x), \psi_k(x)) = f(g_1(x), g_2(x))$ , 故得证 ■

**练习 3** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上存在右导数  $f'_+(x)$ , 试证明  $f'_+(x)$  是  $[a, b]$  上的可测函数

**证明** 故  $f(x)$  是右连续的, 即  $\forall \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$ , s.t.  $|f(x+\delta) - f(x)| < \epsilon$ , 故  $\forall \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$ , s.t.  $\forall x_1, x_2 \in (x, x+\delta)$ , 有  $|f(x_1) - f(x_2)| < 2\epsilon$ , 故  $f(x)$  在  $(x, x+\delta)$  上连续, 故  $f$  的不可测点集是零测集, 故  $f(x)$  可测, 故  $f(x + \frac{1}{n})$  可测, 又由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)) = f'_+(x)$ , 故  $f'_+(x)$  可测 ■

**练习 4** 设  $f(x)$  是  $E \subset \mathbb{R}^n$  上几乎处处有限的可测函数,  $m(E) < +\infty$ , 试证明对任意的  $\epsilon > 0$ , 存在  $E$  上的有界可测函数  $g(x)$ , 使得

$$m(\{x \in E : |f(x) - g(x)| > 0\}) < \epsilon$$

**证明** 设  $E_k = \{x \in E : |f(x)| > k\}$ , 故  $\{E_k\}$  是递减集合列, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = m(\{x \in E : |f(x)| = \infty\}) = 0$$



故  $\forall \epsilon > 0$ , 存在  $k_0 \in \mathbb{N}^*$ , s.t.  $m(E_{k_0}) < \epsilon$ , 记

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \setminus E_{k_0} \\ 0 & x \in E_{k_0} \end{cases}$$

显然  $g(x)$  可测且有界, 且  $m(\{x \in E: |f(x) - g(x)| > 0\}) < \epsilon$  ■

**练习 5** 设  $f(x)$  以及  $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$  都是  $A \subset \mathbb{R}$  上几乎处处有限的可测函数, 对任给的  $\epsilon > 0$ , 存在  $A$  的可测子集  $B: m(A \setminus B) < \epsilon$ , 使得  $f_n(x)$  在  $B$  上一致收敛于  $f(x)$ , 试证明  $f_n(x)$  在  $A$  上几乎处处收敛于  $f(x)$

**证明**  $\forall n \in \mathbb{N}$  存在  $A$  的可测子集  $B_n$ , s.t.  $m(A \setminus B_n) < \frac{1}{2^n}$ , 使得  $f_k(x)$  在  $B_n$  上一致收敛于  $f(x)$ , 设  $B = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A \setminus B_n$ , 故  $m(B) = 0$ , 且  $A \setminus B = \varliminf_{k \rightarrow +\infty} B_k \subset B_n, \forall n \in \mathbb{N}$ , 故  $\{f_k(x)\}$  的不收敛点集一定在  $B$  中, 故  $f_n(x)$  在  $A$  上几乎处处收敛于  $f(x)$  ■

**练习 6** 设  $\{f_n(x)\}$  是  $E \subset \mathbb{R}^n$  上的实值可测函数列,  $m(E) < +\infty$ , 试证明  $\lim_{j \rightarrow \infty} f_k(x) = 0, a.e. x \in E$  的充分必要条件是: 对任意的  $\epsilon > 0$  有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m \left( \left\{ x \in E: \sup_{k \geq j} |f_k(x)| \geq \epsilon \right\} \right) = 0$$

**证明** 设  $E_j(\epsilon) = \left\{ x \in E: \sup_{k \geq j} |f_k(x)| \geq \epsilon \right\}$ , 显然对于给定的  $\epsilon, \{E_j(\epsilon)\}$  是递增集合列

" $\Rightarrow$ "

假设结论不成立, 则存在  $\epsilon_0$ , s.t.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m \left( \left\{ x \in E: \sup_{k \geq j} |f_k(x)| \geq \epsilon_0 > 0 \right\} \right) = a > 0,$$

则当  $j$  充分大时有  $m \left( \left\{ x \in E: \sup_{k \geq j} |f_k(x)| \geq \epsilon \right\} \right) > \frac{a}{2} > 0$ , 故  $\{f_n(x)\}$  存在一个子列  $\{f_{n_k}(x)\}$ , 使得  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 有  $m(\{x \in E: |f_{n_k}(x)| \geq \epsilon\}) > 0$ , 这与  $\lim_{j \rightarrow \infty} f_k(x) = 0, a.e. x \in E$  矛盾, 故假设不成立

" $\Leftarrow$ "

类似于必要性的证明使用反证法可以得到, 此处略去 ■

我们再给出一种不用反证法的做法, 同样的我们只给出一个方向的证明, 另一个方向大致同理

**证明** 由书中 P11 例 8 我们可知函数列  $\{f_n(x)\}$  的不收敛于 0 的点集为

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{ x: |f_n(x)| \geq \frac{1}{k} \right\}$$



" $\Rightarrow$ "

故由条件得  $m(D) = 0$ , 推出  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 有  $m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \{x: |f_n(x)| \geq \frac{1}{k}\}\right) = 0$ ,

即  $m\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \{x: |f_n(x)| \geq \frac{1}{k}\}\right) = 0$ , 故得证. ■

**练习 7** 设  $f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$  是  $[a, b]$  上几乎处处有限的可测函数, 且有  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$  a.e.  $x \in [a, b]$ , 试证明存在  $E_n \supset [a, b] (n = 1, 2, \dots)$ , 使得

$$m\left([a, b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0,$$

而  $\{f_k(x)\}$  在每个  $E_n$  上一致收敛于  $f(x)$

**证明** 不难看出题目满足 Egrov 定理的条件, 所以对于  $\delta_n = \frac{1}{n}$ , 存在  $E_n \subset [a, b]$ , 使得  $m([a, b] \setminus E_n) < \frac{1}{n}, \{f_n(x)\}$  在  $E_n$  上一致收敛于  $f(x)$ , 因为  $m([a, b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq m([a, b] \setminus E_n) < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$ , 所以  $m\left([a, b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$  ■

**练习 8** 设  $\{f_k(x)\}$  在  $E$  上依测度收敛于  $f(x)$ ,  $\{g_k(x)\}$  在  $E$  上依测度收敛于  $g(x)$ , 试证明  $\{f_k(x) + g_k(x)\}$  在  $E$  上依测度收敛于  $f(x) + g(x)$

**证明** 具体证明过程此处忽略, 具体可以仿照书中定理 3.13 的过程进行操作 ■

**练习 9** 设  $m(E) < +\infty, f(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$  是  $E$  上几乎处处有限的可测函数, 试证明  $\{f_k(x)\}$  在  $E$  上依测度收敛于  $f(x)$  的充分必要条件是

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf_{\alpha > 0} \{\alpha + m(\{x \in E: |f_k(x) - f(x)| > \alpha\})\} = 0$$

**证明**

" $\Rightarrow$ "

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf_{\alpha > 0} \{\alpha + m(\{x \in E: |f_k(x) - f(x)| > \alpha\})\} \\ & \leq \inf_{\alpha > 0} \lim_{k \rightarrow +\infty} \{\alpha + m(\{x \in E: |f_k(x) - f(x)| > \alpha\})\} \\ & = \inf_{\alpha > 0} \{\alpha + 0\} = 0 \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ "

记  $b_k = \inf_{\alpha > 0} \{\alpha + m(\{x \in E: |f_k(x) - f(x)| > \alpha\})\}$ , 则由条件知  $b_k \rightarrow 0$ . 显然对于任意的  $k \in \mathbb{N}$ , 存在  $\{a_k\}$ , s.t.  $b_k \leq a_k + m(\{x \in E: |f_k(x) - f(x)| > a_k\}) < b_k + \frac{1}{k}$ , 令  $k \rightarrow +\infty$ , 则  $a_k \rightarrow 0$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} m(\{x \in E: |f_k(x) - f(x)| > a_k\}) = 0$ , 故对于任意的  $\epsilon > 0$ , 有  $\lim_{k \rightarrow \infty} m(\{x \in E: |f_k(x) - f(x)| > \epsilon\}) = 0$ , 得证 ■



**练习 10** 设  $f_n(x) (n=1, 2, \dots)$  是  $[0, 1]$  上的递增函数, 且  $\{f_n(x)\}$  在  $[0, 1]$  上依测度收敛于  $f(x)$ , 试证明在  $f(x)$  的连续点  $x_0$  上, 有  $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0) \ (n \rightarrow \infty)$

此题利用反证法是不难得到的, 但这种方法便失去了分析的意义, 下面我们给出利用所学定理直接进行证明的方法:

**证明** 由于  $x_0$  是  $f(x)$  的连续点, 故  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ s.t. } \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \text{ 有 } |f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{18}$ .

由 Riesz 定理,  $f_n(x)$  有子列  $f_{n_k}(x)$  在  $[0, 1]$  上几乎处处收敛于  $f(x)$ .

由 Egrov 定理, 存在  $[0, 1]$  的子集  $E_\delta$ , 满足  $m(E_\delta) < \frac{\delta}{2}, \text{ s.t. } \{f_{n_k}(x)\}$  在  $[0, 1] \setminus E_\delta$  上一致收敛于  $f(x)$ .

则当  $k$  充分大时有  $m\left\{x \in [0, 1] : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{\epsilon}{9}\right\} < \frac{\delta}{2}$ , 故存在  $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0), x_2 \in (x_0, x_0 + \delta), \text{ s.t. } |f_{n_k}(x_1) - f(x_1)| < \frac{\epsilon}{9}, |f_{n_k}(x_2) - f(x_2)| < \frac{\epsilon}{9}$ . 所以我们得到  $|f_{n_k}(x_1) - f_{n_k}(x_2)| \leq |f_{n_k}(x_1) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f_{n_k}(x_2)| < \frac{\epsilon}{3}$ .

又由于  $f_{n_k}(x)$  是递增函数, 则  $|f_{n_k}(x_1) - f_{n_k}(x_0)| \leq |f_{n_k}(x_1) - f_{n_k}(x_2)| < \frac{\epsilon}{3}$ , 故  $|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| \leq |f_{n_k}(x_1) - f_{n_k}(x_0)| + |f_{n_k}(x_1) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_0)| < \epsilon$ , 所以  $\{f_{n_k}(x)\}$  在  $x_0$  处收敛于  $f(x_0)$ .

另一方面, 由于  $\{x \in [0, 1] : |f_n(x) - f_{n_k}(x)| > \epsilon\} \subset \left\{x \in [0, 1] : |f(x) - f_{n_k}(x)| > \frac{\epsilon}{2}\right\} \cup \left\{x \in [0, 1] : |f(x) - f_n(x)| > \frac{\epsilon}{2}\right\}$ . 而当  $k$  充分大时,  $x_0 \notin \left\{x \in [0, 1] : |f(x) - f_{n_k}(x)| > \frac{\epsilon}{2}\right\}$ , 故当  $n$  与  $k$  均充分大时, 有  $|f_n(x_0) - f_{n_k}(x_0)| \leq \epsilon$ , 故当  $n$  充分大时  $|f_n(x_0) - f(x_0)| < 2\epsilon$ , 得证

**练习 11** 设  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 且对任意的  $\epsilon > 0$ , 存在  $\mathbb{R}^n$  中的开集  $G, m(G) < \epsilon$ , 使得  $f \in C(\mathbb{R}^n \setminus G)$ , 试证明  $f(x)$  是  $\mathbb{R}^n$  上的可测函数

**证明** 略

**练习 12** 设  $\{f_k(x)\}$  与  $\{g_k(x)\}$  在  $E$  上依测度收敛于 0, 试证明  $\{f_k(x)g_k(x)\}$  在  $E$  上依测度收敛于 0

**证明** 具体证明过程此处忽略, 具体可以仿照上面第八题的过程进行操作。(提示: 类似于第 8 题加法的情况将  $\epsilon$  拆为两个  $\epsilon/2$  的和, 那么对于此题乘法的情况呢?)

**练习 15** 设  $\{f_n(x)\}$  是  $[a, b]$  上的可测函数列,  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的实值函数, 若对任意的  $\epsilon > 0$  都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m^*\{x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\} = 0,$$

试问  $f(x)$  是  $E$  上的可测函数吗?

**证明**  $\forall k \in \mathbb{N}$ , 存在数列  $\{n_k\}$ , s.t.  $m^*(E_k) < \frac{1}{2^{n_k}}$ , 其中  $E_k = \{x \in [a, b] : |f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{2^n}\}$ ,



根据题目条件,  $m^*\left(\overline{\lim_{k \rightarrow \infty} E_k}\right) = 0$ .

故  $a.e. x \in [a, b]$ , 有  $x \in \varliminf_{k \rightarrow \infty} E_k^c$ , 即  $a.e. x \in [a, b]$ , 存在正整数  $K_x$ , s.t. 当  $k > K_x$  时, 有  $x \in E_k^c$ . 故当  $k > K_x$  时, 有  $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2k}$ , 故  $f_{n_k}(x)$  在  $[a, b]$  上几乎处处收敛于  $f(x)$ , 故  $f(x)$  可测 ■

**练习 16** 设  $f(x), f_k(x), (k = 1, 2, 3, \dots)$  是  $E \subset \mathbb{R}$  上的实值可测函数, 若对任给的  $\epsilon > 0$ , 必有

$$\lim_{j \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} \{x : |f_k(x) - f(x)| > \epsilon\}\right) = 0,$$

试证明对任给的  $\delta > 0$ , 存在  $e \subset E$  且  $m(e) < \delta$ , 使得  $\{f_k(x)\}$  在  $E \setminus e$  上一致收敛于  $f(x)$

**证明** 完全类似于定理 3.12 的证明, 此处略去 ■



## 第四章 Lebesgue 积分



### §4.1 第一组

**练习 2** 设  $f(x)$  在  $[0, \infty)$  上非负可积,  $f(0) = 0$ , 且  $f'(0)$  存在, 试证明存在积分

$$\int_{[0, \infty)} \frac{f(x)}{x} dx$$

**证明** 设  $f'(0) = a$ , 故  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , s.t.  $\forall x \in [0, \delta_{x_0})$ , 有  $\left| \frac{f(x)}{x} \right| < \epsilon$

故

$$\begin{aligned} \int_{[0, \infty)} \frac{f(x)}{x} dx &= \int_{[0, \delta)} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{[\delta, \infty)} \frac{f(x)}{x} dx \leq \int_{[0, \delta)} (a + \epsilon) dx + \int_{[\delta, \infty)} \frac{f(x)}{\delta} dx \\ &\leq (a + \epsilon)\delta + \frac{1}{\delta} \int_{[\delta, \infty)} f(x) dx < +\infty \end{aligned}$$

■

**练习 3** 设  $f(x)$  是  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  上的非负可测函数, 若存在  $E_k \subset E, m(E \setminus E_k) < 1/k (k = 1, 2, \dots)$ , 使得极限

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_k} f(x) dx$$

存在, 试证明  $f(x)$  在  $E$  上可积

**证明** 显然  $m\left(E \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)\right) = 0$ , 设  $F_k = E_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\right), (k = 1, 2, \dots)$ , 故  $F_i \cap F_j = \emptyset (i \neq j)$  且  $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ , 由书中推论 4.7 得

$$\int_E f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{F_k} f(x) dx,$$

另一方面  $F_k \subset E \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} E_j\right)$ , 故  $m(F_k) < \frac{1}{k-1}$ , 故  $\lim_{k \rightarrow +\infty} m(F_k) = 0$

又有

$$\sum_{k=1}^n \int_{F_k} f(x) dx = \int_{E_n} f(x) dx,$$





故

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_{F_k} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} f(x) dx,$$

故

$$\int_E f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} f(x) dx < +\infty$$

**练习 4** 设  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上非负可积函数, 令

$$F(x) = \int_{(-\infty, x]} f(t) dt, x \in \mathbb{R}$$

若  $F \in L(\mathbb{R})$ , 试证明  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$

**证明** 由于  $f(x) \in L(\mathbb{R})$ , 则  $\forall \epsilon > 0$ , 存在  $N$ , s.t.

$$\int_{\{x: |x| > N\}} f(x) dx < \epsilon,$$

又由于  $F(x)$  是单调递增的, 故对于  $y > N$ , 有

$$F(y) = \int_y^{y+1} f(x) dx \leq \int_{\{x: |x| > N\}} f(x) dx < \epsilon,$$

故  $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = 0$ .

又由于  $F(x)$  单调递增且非负, 故  $F(x) \equiv 0$ , a.e.  $x \in \mathbb{R}$ . 故  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0$  ■

**练习 5** 设  $f_k(x) (k=1, 2, \dots)$  是  $\mathbb{R}^n$  上非负可积函数列, 若对任意可测集  $E \subset \mathbb{R}^n$  都有

$$\int_E f_k(x) dx \leq \int_E f_{k+1}(x) dx$$

试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx$$

**证明** 令  $E_k = \{x \in \mathbb{R}^n | f_k(x) > f_{k+1}(x)\}$ , 故  $E_k$  可测, 显然我们可以得到

$$\int_{E_k} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) dx = 0$$

故  $m(E_k) = 0$ , 设  $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ , 故  $m(F) = 0$ , 由 Levi 定理得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E \setminus F} f_k(x) dx = \int_{E \setminus F} \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) dx = \int_E \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) dx$$



**练习 6** 略 (由 Hölder 不等式直接得到)

**练习 7** 假设有定义在  $\mathbb{R}^n$  上的函数  $f(x)$ , 如果对于任意的  $\epsilon > 0$ , 存在  $g, h \in L(\mathbb{R}^n)$ , 满足  $g(x) \leq f(x) \leq h(x), (x \in \mathbb{R}^n)$ , 并且使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} (h(x) - g(x)) dx < \epsilon$$

, 试证明  $f \in L(\mathbb{R}^n)$

**证明** 故  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ , 存在可积函数  $g_k(x)$  和  $h_k(x)$ , s.t.  $g_k(x) \leq f(x) \leq h_k(x), x \in \mathbb{R}^n$ , 且

$$\int_{\mathbb{R}^n} (h_k(x) - g_k(x)) dx < \frac{1}{k}$$

故

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |h_k(x) - g_k(x)| dx = 0$$

设  $g(x) = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} g_k(x)$ . 故  $h_k(x) \geq g(x)$ , a.e.  $x \in E$ , 故

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |h_k(x) - g(x)| dx = 0$$

故  $\{h_k(x)\}$  依测度收敛于  $g(x)$ , 故由不等式关系立即得到  $\{h_k(x)\}$  依测度收敛于  $f(x)$ , 故存在子列  $\{h_{k_i}(x)\}$ , s.t.  $\lim_{i \rightarrow +\infty} h_{k_i}(x) = f(x)$ , a.e.  $x \in \mathbb{R}^n$ . 故  $f(x)$  是  $\mathbb{R}^n$  上的可测函数, 由积分的单调性得到  $f \in L(\mathbb{R}^n)$  ■

**练习 8** 设  $\{E_k\}$  是  $\mathbb{R}^n$  中测度有限的可测集列, 且有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\chi_{E_k}(x) - f(x)| dx = 0,$$

试证明存在可测集  $E$ , 使得  $f(x) = \chi_E(x)$ , a.e.  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**证明** 故函数列  $\{\chi_{E_k}(x)\}$  依测度收敛到  $f(x)$ , 由 Riesz 定理, 存在子列  $\{\chi_{E_{k_i}}(x)\}$ , s.t.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \chi_{E_{k_i}}(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n$$

设  $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_{k_i}$ , 故  $\chi_E(x) = f(x)$ , a.e.  $x \in \mathbb{R}^n$  ■

**练习 9** 设  $f(x)$  是  $[0, 1]$  上的递增函数, 试证明对  $E \subset [0, 1], m(E) = t$ , 有

$$\int_{[0, t]} f(x) dx \leq \int_E f(x) dx$$

**证明** 设  $E_1 = E \cap [0, t], E_2 = E \cap [t, 1], E_3 = E^c \cap [0, t], E_4 = E^c \cap [t, 1]$ , 故  $m(E_2) =$



$m(E_3)$ . 另一方面,  $\forall x \in E_3, y \in E_2$ , 有  $f(y) \geq f(x)$ , 故

$$\begin{aligned} \int_{[0,t]} f(x) dx &= \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_2} f(x) dx \leq \int_{E_1} f(x) dx + m(E_2) f(t) \\ &= \int_{E_1} f(x) dx + m(E_3) f(t) \leq \int_{E_1} f(x) dx + \int_{E_3} f(x) dx = \int_E f(x) dx \end{aligned}$$

**练习 10** 设  $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ,  $E \in \mathbb{R}^n$  是紧集, 试证明

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \int_{E+\{y\}} |f(x)| dx = 0$$

**证明** 由于  $f \in L(\mathbb{R}^n)$ , 故  $\forall \epsilon > 0$ , 存在  $R > 0$ , s.t.  $\int_{|x|>R} |f(x)| dx < \epsilon$ . 由于  $E$  为紧集, 故存在  $R_0 > 0$ , s.t.  $E \subset B(0, R_0)$ ,

故当  $|y| > R + R_0$  时,  $\forall x \in E + \{y\}$ , 有  $|x| > R$ , 故

$$\int_{E+\{y\}} |f(x)| dx \leq \int_{|x|>R} |f(x)| dx < \epsilon$$

**练习 17** 设  $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_k \supset \dots$ ,  $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ ,  $f \in L(E_k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), 试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x) dx = \int_E f(x) dx$$

**证明** 设  $f_k(x) = f(x)\chi_{E_k}(x)$ , 由集合的递减性得  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = f(x)\chi_E(x)$ , 并且  $|f_k(x)| \leq |f_1(x)|$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  由于  $f_1(x) \in L(E_1)$ , 由控制收敛原理得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_1} f_k(x) dx = \int_{E_1} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx = \int_{E_1} f(x)\chi_E(x) dx = \int_E f(x) dx$$

**练习 18** 设  $f \in L(E)$ , 且  $f(x) > 0$  ( $x \in E$ ), 试证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E (f(x))^{1/k} dx = m(E)$$

**证明** 设  $E_1 = \{x \in E : f(x) \geq 1\}$ ,  $E_2 = \{x \in E : f(x) < 1\}$ , 故在  $E_1$  中  $\{f(x)^{1/k}\}$  是递减列, 且  $|f(x)^{1/k}| \leq f(x)$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , 由 Levi 定理得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_1} f(x)^{1/k} dx = \int_{E_1} 1 dx = m(E_1)$$



又由于  $f_n(x) \in L(E)$ , 故由递减型的 Levi 定理也可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_2} f(x)^{1/k} dx = \int_{E_2} 1 dx = m(E_2)$$

**练习 19** 设  $\{f_n(x) (n=1, 2, \dots)\}$  是  $[0, 1]$  上的非负可积函数列, 且  $\{f_n(x)\}$  在  $[0, 1]$  上依测度收敛于  $f(x)$ , 若有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, 1]} f_n(x) dx = \int_{[0, 1]} f(x) dx,$$

试证明对  $[0, 1]$  的任意可测子集  $E$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x) dx = \int_E f(x) dx$$

**证明** 由书上 P158 页注得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0, 1]} |f_k(x) - f(x)| dx = 0$$

故

$$0 \leq \int_E |f_k(x) - f(x)| dx \leq \int_{[0, 1]} |f_k(x) - f(x)| dx \rightarrow 0 (k \rightarrow +\infty)$$

**练习 21** (依测度收敛型的 Fatou 引理) 设  $\{f_k(x)\}$  是  $E$  上依测度收敛于  $f(x)$  的非负可测函数列, 试证明

$$\int_E f(x) dx \leq \varliminf_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k(x) dx$$

**证明** 由 Fatou 引理, 得

$$\int_E \varliminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) dx \leq \varliminf_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k(x) dx$$

由下极限定义可知, 存在  $\{f_k(x)\}$  的一个子列  $\{f_{k_i}(x)\}$ , s.t.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f_{k_i}(x) = \varliminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$$

故

$$\int_E \lim_{i \rightarrow +\infty} f_{k_i}(x) dx = \int_E \varliminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) dx$$



另一方面, 显然函数列  $\{f_{k_i}(x)\}$  在  $E$  上依测度收敛于  $\{f(x)\}$ , 由 Riesz 定理得  $\{f_{k_i}(x)\}$ , 存在一个子列  $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$ , s.t.  $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$  在  $E$  上几乎处处收敛于  $f(x)$ 。故

$$\int_E \lim_{i \rightarrow +\infty} f_{k_i}(x) dx = \int_E \lim_{j \rightarrow +\infty} f_{k_{i_j}}(x) dx = \int_E f(x) dx$$

综上

$$\int_E f(x) dx \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k(x) dx$$

**练习 23** 设  $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ,  $f_k \in L(\mathbb{R}^n)$  ( $k=1, 2, \dots$ ) 且对于任意可测集  $E \subset \mathbb{R}^n$  有

$$\int_E f_k(x) dx \leq \int_E f_{k+1}(x) dx \quad (k=1, 2, \dots),$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx,$$

试证明  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ , a.e.  $x \in \mathbb{R}^n$

**证明** 类似于之前第五题的过程我们可以得到  $\{f_k(x)\}$  在  $E$  上几乎处处单调, 设不单调点集为  $F$ , 故  $m(F) = 0$ , 设  $F(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ ,  $x \in E \setminus F$ . 故  $F(x) \in L(\mathbb{R}^n)$

由与  $f_k(x) \in L(\mathbb{R}^n)$ , 故 Levi 定理得

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E (f_k(x) - f_1(x)) dx &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E \setminus F} (f_k(x) - f_1(x)) dx = \int_{E \setminus F} \lim_{k \rightarrow +\infty} (f_k(x) - f_1(x)) dx \\ &= \int_{E \setminus F} F(x) - f_1(x) dx = \int_E F(x) - f_1(x) dx \end{aligned}$$

又由于  $F(x), f_1(x) \in L(\mathbb{R}^n)$ , 故

$$\int_E F(x) - f_1(x) dx = \int_E F(x) dx - \int_E f_1(x) dx$$

故

$$\int_E F(x) dx = \int_E f(x) dx,$$

故  $f(x) = F(x)$ , a.e.  $x \in \mathbb{R}^n$

**练习 26** 设  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的有界函数, 若对于每一点  $x \in \mathbb{R}$ , 右极限都存在试证明  $f(x)$  在任一区间  $[a, b]$  上是 Riemann 可积的.

**证明**  $\forall \epsilon > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$ , 存在  $\delta_{x_0} > 0$ , s.t.  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta_{x_0})$ , 有  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

记  $I_{x_0} = (x_0, x_0 + \delta_{x_0})$ , 显然  $f(x)$  在  $I_{x_0}$  中连续, 记  $E = \bigcup_{x_0 \in [a, b]} I_{x_0}$ ,  $F = [a, b] \setminus E$ , 故  $D(f) \subset F$ , 由定义得  $F$  没有聚点, 故  $F$  是可列集, 得  $D(f)$  是零测集

给出另一个解法: 由课本第 20 页例 12 可直接得到。



**练习 27** 设  $E \subset [0, 1]$ , 试证明  $\chi_E(x)$  在  $[0, 1]$  上 Riemann 可积的充要条件是  $m(\bar{E} \setminus \mathring{E}) = 0$

**证明** 任取  $x \in \bar{E} \setminus \mathring{E}$ , 故  $\forall \delta > 0$ , 记  $I_\delta = (x - \delta, x + \delta)$ , 故  $I_\delta \cap E \neq \emptyset, I_\delta \cap E^c \neq \emptyset$ , 故  $\chi_E(I_\delta) = \{0, 1\}$ , 故  $\bar{E} \setminus \mathring{E} \subset D(f)$ , 而  $\bar{E}^c$  和  $\mathring{E}$  均为开集, 故  $f(x)$  在  $\bar{E}$  和  $\mathring{E}$  上连续, 故  $D(f) = \bar{E} \setminus \mathring{E}$ , 故  $f$  Riemann 可积当且仅当  $m(\bar{E} \setminus \mathring{E}) = 0$  ■

## §4.2 第二组

**练习 1** 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的正值可积函数, 令  $0 < q \leq b - a$ , 记  $\Gamma = \{E \subset [a, b] : m(E) \geq q\}$ , 试证明

$$\inf_{E \in \Gamma} \left\{ \int_E f(x) dx \right\} > 0$$

**证明** 假设不成立, 则存在  $\Gamma$  中的集合列  $\{E_n\}$  s.t.  $\int_{E_n} f(x) dx < \frac{1}{2^n}$  令  $S = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} E_n$ , 故  $m(S) \geq q$ , 则

$$\int_S f(x) dx = \int_E f(x) \chi_S(x) dx \leq \int_E f(x) \chi_{\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\right)}(x) dx \leq \sum_{k=n}^{\infty} \int_{E_k} f(x) dx \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 故  $\int_S f(x) dx = 0$ , 故  $f(x) = 0$ , a.e.  $x \in S$ , 与假设矛盾! ■

**练习 2** 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的正值可积函数,  $\{E_n\}$  是  $[a, b]$  中的可测子集列, 若有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f(x) dx = 0$$

试证明  $m(E_n) \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$

**证明** 设  $E = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} E_k$ , 故存在  $\{E_{n_k}\}$  s.t.  $E_{n_k} \rightarrow E$  且  $\{E_{n_k}\}$  是单增集合列, 故由 Levi 定理得

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{E_{n_k}} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j} f(x) \chi_{E_{n_k}}(x) dx \\ &= \int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j} \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x) \chi_{E_{n_k}}(x) dx = \int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j} f(x) \chi_E(x) dx = \int_E f(x) dx \end{aligned}$$

由于  $f(x)$  为正值, 故  $m(E) = 0$ , 故  $\lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = 0$ , 故  $m(F) = 0$ , 由 Levi 定理得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k(x) dx$$



**练习 3** 设  $f: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  是可测函数, 试证明

$$\left( \int_{[0,1]} f(x) dx \right) \left( \int_{[0,1]} \ln(f(x)) dx \right) \leq \int_{[0,1]} f(x) \ln(f(x)) dx$$

**练习 6** 设  $f(x), f_k(x) (k=1, 2, \dots)$  是  $E \subset \mathbb{R}^n$  上的非负可积函数, 且有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \text{ a.e. }; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx,$$

试证明对于  $E$  中的任意一个可测子集  $e$ , 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_e f_k(x) dx = \int_e f(x) dx$$

**证明** 设  $g_k(x) = \inf_{n \geq k} f_n(x)$ , 故  $\{f_n(x)\}$  是递增函数列, 由于

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g_k(x) = \varliminf_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = f(x), \quad \text{a.e. } x \in E,$$

由 Levi 定理得, 对于  $E$  中的任意可测集  $e$ , 有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_e g_k(x) dx = \int_e \lim_{k \rightarrow +\infty} g_k(x) dx = \int_e f(x) dx$$

故

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E g_k(x) dx = \int_E f(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k(x) dx$$

故

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E (f_k(x) - g_k(x)) dx = 0,$$

故

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_e (f_k(x) - g_k(x)) dx = 0,$$

故

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_e g_k(x) dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_e f_k(x) dx$$

**练习 7** 设  $f(x)$  是  $E \subset \mathbb{R}^1$  上的正值可测函数,  $a > 1$ , 试证明  $a^{f(x)}$  在  $E$  上可积当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k m(\{x \in E : f(x) \geq k\}) < \infty$$

**证明** 利用 Abel 变换 (交换求和号次序), 我们可以进行如下转换:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k m(\{x \in E : f(x) \geq k\})$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left( a^k \sum_{n=k}^{\infty} m(\{x \in E: f(x) \in [n, n+1]\}) \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a^k \right) m(\{x \in E: f(x) \in [n, n+1]\}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} m(\{x \in E: f(x) \in [n, n+1]\})
\end{aligned}$$

另一方面, 在  $f(x) \in [n, n+1]$  时, 有  $a^n \leq a^{f(x)} \leq a * a^n, a^n \leq \frac{a^{n+1}-1}{a-1} \leq \frac{a}{a-1} a^n$

故

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k m(\{x \in E: f(x) \geq k\}) \iff \sum_{n=0}^{\infty} a^n m(\{x \in E: f(x) \in [n, n+1]\}) \iff a^{f(x)} \in L(E)$$

■

**练习 11** 设  $f \in L(\mathbb{R}^1)$  且记  $F(x) = \int_0^x f(t)dt, x \in \mathbb{R}^1$ . 若  $F(x)$  是  $\mathbb{R}^1$  上的递增函数, 试证明  $f(x) > 0, a.e. x \in \mathbb{R}^1$

**证明** 设  $G$  是  $\mathbb{R}^1$  上的开集, 故  $G$  可以写为可列个不交开集的并, 故  $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ . 由于  $f \in L(\mathbb{R}^1)$ , 故  $\int_G f(t)dt < +\infty$ , 故

$$\int_G f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} (F(b_n) - F(a_n)) \geq 0.$$

故对于开集  $G$ , 有  $\int_G f(t)dt \geq 0$

设  $F$  为  $G_\delta$  集, 故  $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ , 其中  $F_k$  为开集, 若  $\int_F f(t)dt < 0$ , 记  $H_n = \bigcap_{k=1}^n F_k$ ,

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = F$ , 由之前的结论得  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} f(x) \chi_{H_n}(x) dx \geq 0$

设  $a_n = \int_{\mathbb{R}} f(x) \chi_{H_n}(x) dx$  故  $a_n > 0$ , 并且单调递减, 由  $f(x) \in L(\mathbb{R})$  和控制收敛原理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) \chi_{H_n}(x)) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \chi_F(x) dx < 0,$$

矛盾! 故对于  $F_\delta$  集  $F$ , 有  $\int_F f(t)dt \geq 0$

对于任意可测集  $E$ , 做  $E$  的等测包, 设  $E = G \setminus Z$ , 其中  $G$  为  $G_\delta$  集,  $m(Z) = 0, G \supset Z$ , 故

$$\int_E f(x)dx = \int_G f(x)dx - \int_Z f(x)dx = \int_G f(x)dx \geq 0,$$

故对于  $\mathbb{R}$  上的任意可测集  $E$ , 有  $\int_E f(x)dx \geq 0$ , 故  $f(x) \geq 0, a.e. x \in \mathbb{R}$

■

**练习 15** 设  $E_k \subset [a, b]$  且  $m(E_k) \leq \delta > 0 (k = 1, 2, \dots)$ ,  $\{a_k\}$  是一实数列且满足

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \chi_{E_k}(x) < +\infty, \quad a.e. x \in [a, b]$$





试证明  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < +\infty$

**证明** 令

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \chi_{E_k}(x),$$

故  $f(x)$  在  $[a, b]$  上几乎处处有限, 记  $A_k = \{x \in [a, b] : f(x) > k\}, k \in \mathbb{N}$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} m(A_k) = 0$  故存在  $k_0$ , s.t.  $m(A_{k_0} \cap E_k) < \frac{\delta}{2}$ , 故  $x \in [a, b] \setminus A_{k_0}$  时, 有  $f(x) < k_0$ , 故

$$\frac{\delta}{2} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| * m(E_k \setminus A_{k_0}) = \int_{[a, b] \setminus A_{k_0}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \chi_{E_k}(x) dx \leq k_0(b-a)$$

故  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  收敛

**练习 18** 设  $E \subset [0, 1] \times [0, 1]$  是可测集, 记

$$E_x = \{y \in [0, 1] : (x, y) \in [0, 1]^2\}$$

$$E_y = \{x \in [0, 1] : (x, y) \in [0, 1]^2\}$$

若有  $m(E_x) = 0$ , a.e.  $x \in [0, 1]$  试证明

$$m(\{y : m(E_y) = 1\}) \leq \frac{1}{2}$$

**证明** 反设  $m(\{y : m(E_y) = 1\}) > \frac{1}{2}$ , 则

$$m(E) = \int_0^1 dx \int_0^1 \chi_{E_y}(y) dy = \int_0^1 \left( \int_{\{y : m(E_y)=1\}} 1 dy + \int_{\{y : m(E_y)<1\}} \chi_{E_y}(y) dy \right) dx > \frac{1}{2}$$

而另一方面, 我们有

$$m(E) = \int_0^1 dy \int_0^1 \chi_{E_x}(x) dx = \int_0^1 \left( \int_{\{y : m(E_x)>0\}} \chi_{E_x}(x) dx \right) dy < \frac{1}{2},$$

矛盾!

**练习 21** 设  $f(x), g(x)$  是  $E$  上的非负可测函数, 且有  $f \hat{u} g \in L(E)$ , 令  $E_y = \{x \in E : g(x) \geq y\}$  试证明

$$F(y) = \int_{E_y} f(x) dx$$

对一切  $y > 0$  均存在, 且有

$$\int_0^{\infty} F(y) dy = \int_E f(x) g(x) dx$$



**证明** 当  $y > 0$  时, 有

$$\int_{E_y} f(x) dx = \frac{1}{y} \int_{E_y} f(x) y dx \leq \frac{1}{y} \int_{E_y} f(x) g(x) dx \leq \frac{1}{y} \int_E f(x) g(x) dx < +\infty,$$

故  $F(y)$  对  $y > 0$  存在.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty F(y) dy &= \int_0^\infty \int_{G_y} f(x) dx dy = \int_0^\infty \int_E f(x) \chi_{E_y}(x) dx dy = \int_E f(x) \int_0^\infty \chi_{E_y}(x) dy dx \\ &= \int_E f(x) \int_0^{g(x)} 1 dy dx = \int_E f(x) g(x) dx \end{aligned}$$

**练习 22** 设  $f \in L(E)$ ,  $f_k \in L(E) (k = 1, 2, \dots)$  且有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ,  $x \in E$ , 以及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n(x)| dx = \int_E f(x) dx$$

, 试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n(x) - f(x)| dx = 0$$

**证明** 我们先证明一个很好用的定理 (控制收敛原理的推广)

$\{f_k(x)\}, \{g_k(x)\}$  是  $E \subset \mathbb{R}^n$  上的非负可测函数列, 且  $|f_k(x)| \leq g_k(x)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = g(x)$ , 又有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k(x) dx = \int_E g(x) dx$ , 则  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx$

定理的证明: 有条件得  $g_k(x) + f_k(x), (g_k(x) - f_k(x))$  均为非负可测函数列  
由 Fatou 引理得:

$$\int_E \lim_{k \rightarrow +\infty} (g_k(x) + f_k(x)) dx \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E (g_k(x) + f_k(x)) dx = \int_E g(x) dx + \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k(x) dx,$$

$$\int_E \lim_{k \rightarrow +\infty} (g_k(x) - f_k(x)) dx \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E (g_k(x) - f_k(x)) dx = \int_E g(x) dx - \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k(x) dx,$$

故

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k(x) dx \geq \int_E f(x) dx \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \int_E f_k(x) dx$$

可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k(x) dx = \int_E f(x) dx$$

本题的证明: 在上一定理中取  $f_k(x) = |f_k(x) - f(x)|$ ,  $g_k(x) = |f_k(x)| + |f(x)|$ , 利用定理直接得证



# 第五章 微分与不定积分



## §5.1 第一组

**练习 1** 设  $E$  是  $\mathbb{R}$  中的一族区间的并集, 试证  $E$  是可测集.

**证明** 设  $E = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} I_\alpha$ , 其中  $I_\alpha$  为开区间或闭区间或半开闭区间, 不妨设  $m(E) < +\infty$ , 令  $\mathcal{B} = \{I \subset \mathbb{R} : I \text{ 是某个 } I_\alpha \text{ 中的区间的子集}\}$ , 故  $\mathcal{B}$  是  $E$  的一个 Vitali 覆盖, 由 Vitali 定理得存在不交的区间列  $\{I_k\}$ , s.t.  $m\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = 0$ . 设  $I_k \subset I_{\alpha_k}$ , 故

$$E = \left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{\alpha_k}\right), \quad \alpha_k \in \mathcal{A}$$

故  $E$  可测

**练习 2** 设  $\{x_n\} \subset [a, b]$ , 试做  $[a, b]$  上的递增函数, 使得其不连续点恰为  $\{x_n\}$

**证明** 记

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & x \geq x_n \\ 0 & x < x_n \end{cases}$$

由于  $f_n(x)$  是单调递增的, 且函数项级数  $\sum_{k=1}^n f_k(x)$  关于  $n$  一致有上界 2, 故由定义式显然得到, 函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  是一致收敛的, 且和函数存在, 记为  $f(x)$ , 故  $f(x) \leq 2$ .

由一致连续性显然得到  $f(x)$  在除去  $\{x_n\}$  之外的点是连续的. 令  $g(x) = f(x), x \in [a, b] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_k\}$ , 而  $g(x)$  在  $x_n$  处的取值我们可以根据  $g(x)$  在  $[a, b] \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_k\}$  上的函数值进行定义, 使得  $g(x)$  在  $x_n$  处是右连续的, 故  $g(x)$  为递增函数. 请读者自行证明  $g(x)$  在  $x_n$  处不是左连续的. 故我们构造的  $g(x)$  即为满足要求的函数.

**练习 3** 设  $f(x)$  是  $(a, b)$  上的递增函数,  $E \subset (a, b)$ , 若对任给  $\epsilon > 0$ , 存在  $(a_i, b_i) \subset (a, b)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), 使得

$$\bigcup_i (a_i, b_i) \supset E, \quad \sum_i [f(b_i) - f(a_i)] < \epsilon,$$



试证明  $f'(x) = 0$  a.e.  $x \in E$

**证明** 记  $E_\alpha^{(i)}$  为  $(a_i, b_i)$  中所有开区间构成的开区间族, 记  $E_\alpha^{(i)} = \{I_\alpha^{(i)} : \alpha \in \mathcal{A}_i\}$ , 其中  $I_\alpha^{(i)}$  为开区间, 故  $\bigcup_{i=1}^{+\infty} \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_i} I_\alpha^{(i)}$  是  $E$  的 Vitali 覆盖. 由 Vitali 定理, 存在两两不交的子开区间列  $\{I_k\}$ , s.t.  $\{I_k\}$  满足  $m(E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k) = 0$ . 由  $I_k$  的选取方式知存在唯一的  $i$  使得  $I_k \in E_\alpha^{(i)}$ , 记  $I_k = (c_k, d_k)$ , 故由单调性得

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (f(d_k) - f(c_k)) \leq \sum_i (f(b_i) - f(a_i)) < \epsilon$$

故由 Lebesgue 定理得

$$\int_E f'(x) dx = \int_{\bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k} f'(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} f'(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} (f(d_k) - f(c_k)) < \epsilon$$

**练习 4** 设  $f(x)$  在  $[0, a]$  上是有界变差函数, 试证明函数

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, F(0) = 0$$

是  $[0, a]$  上的有界变差函数。

**证明** 由于  $f$  是有界变差函数, 故由 Jordan 分解定理,  $f(x) = g(x) - h(x)$ , 其中  $g(x)$  和  $h(x)$  为递增函数. 故  $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt - \frac{1}{x} \int_0^x h(t) dt$ . 设  $G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt, H(x) = \frac{1}{x} \int_0^x h(t) dt$ . 设  $h > 0$ , 则:

$$\begin{aligned} G(x+h) - G(x) &= \frac{1}{x+h} \int_0^{x+h} g(t) dt - \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt \\ &= \frac{-h}{x(x+h)} \int_0^x g(t) dt + \frac{1}{x+h} \int_x^{x+h} g(t) dt \\ &\geq \frac{h}{x+h} g(x) - \frac{h}{x(x+h)} \int_0^x g(t) dt \\ &= \frac{h}{x(x+h)} \int_0^x (g(x) - g(t)) dt \geq 0 \end{aligned}$$

故  $G(x)$  是递增的, 同理  $H(x)$  是递增的, 故由 Jordan 分解定理得  $F(x)$  是有界变差函数。

**练习 5** 设  $\{f_k(x)\}$  是  $[a, b]$  上的有界变差函数列, 且有

$$\bigvee_a^b(f_k) \leq M \quad (k=1, 2, \dots); \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad x \in [a, b]$$



试证明  $f \in BV([a, b])$ , 且满足  $\bigvee_a^b(f) \leq M$

**证明** 任取  $[a, b]$  的分割  $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$ , 故

$$\sum_{i=1}^k |f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i)| \leq \bigvee_a^b(f_n) \leq M,$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 即可得到  $\sum_{i=1}^k |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq M$ , 得证 ■

**练习 9** 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的非负绝对连续函数, 试证明  $f^p(x) (p > 1)$  是  $[a, b]$  上的绝对连续函数

**证明** 利用介质性立即得到, 此处省略. ■

**练习 10** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上递增, 且有  $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ , 试证明  $f(x)$  在  $[a, b]$  上绝对连续

**证明** 设  $F(x) = f(x) - f(a) - \int_a^x f'(t) dt$ .

设  $y > x$ , 故  $F(y) - F(x) = f(y) - f(x) - \int_x^y f'(t) dt$ . 由 Lebesgue 定理得  $F(y) - F(x) \geq 0$ , 故  $F$  单增, 而  $F(a) = F(b) = 0$ , 故  $F(x) \equiv 0, x \in [a, b]$ . 故  $f(x) \in AC([a, b])$

**练习 11** 设  $f \in BV([a, b])$ , 若有  $\int_a^b |f'(x)| dx = \bigvee_a^b(f)$ , 试证明  $f \in AC([a, b])$

**证明**  $F(x) = \int_a^x |f'(x)| dx - \bigvee_a^x(f)$ , 故  $F(a) = F(b) = 0$ . 由前面的例题得到  $\frac{d}{dx} \bigvee_a^x(f) = |f'(x)|, a.e. x \in [a, b]$ . 同样地由 Lebesgue 定理得  $F(x)$  是单调的, 故  $F(x) \equiv 0, x \in [a, b]$ .

故  $\bigvee_a^x(f) \in AC([a, b])$ , 而对于  $[a, b]$  中的任意开区间  $(x_i, y_i)$  有  $|f(y_i) - f(x_i)| \leq \bigvee_{x_i}^{y_i}(f)$ , 故  $f \in AC([a, b])$  ■

