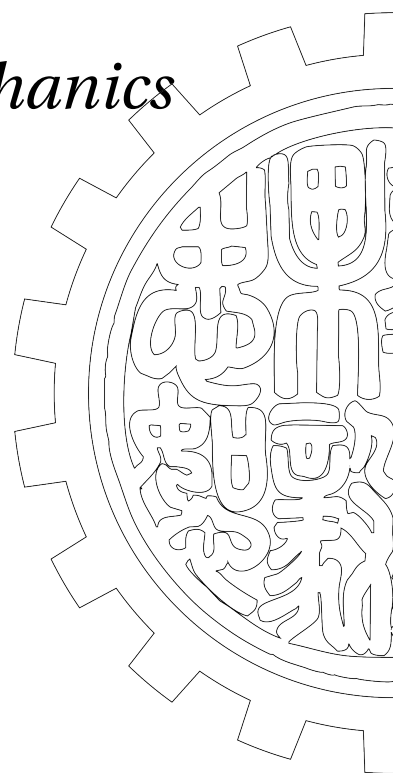


分析力学笔记

Notes on Analytical Mechanics

作者：规培 92 冯廷龙

2020 年 4 月 9 日



钱学森书院学业辅导中心

QIAN YUAN XUE FU

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

作品信息

- 标题：分析力学笔记 - *Notes on Analytical Mechanics*
- 作者：规培 92 冯廷龙
- 校对排版：钱院学辅排版组
- 出品时间：2020 年 4 月 9 日
- 总页数：12

许可证说明

 知识共享 (Creative Commons) BY-NC-ND 4.0 协议

本作品采用 **CC 协议** 进行许可。使用者可以在给出作者署名及资料来源的前提下对本作品进行转载，但不得对本作品进行修改，亦不得基于本作品进行二次创作，不得将本作品运用于商业用途。

目录

第一章 从矢量力学到分析力学	1
§1.1 自由度与广义坐标.	1
§1.2 虚功原理和 D'Alembert 原理	1
§1.3 Euler-Lagrange 方程	2
§1.4 弱耗散系统.	2
第二章 最小作用量原理	4
§2.1 泛函与变分.	4
§2.2 泛函极值与 Euler-Lagrange 方程	4
§2.3 最小作用量原理与 Lagrange 函数的形式	5
第三章 对称性与守恒律	7
§3.1 Lagrange 函数的性质	7
§3.2 时间平移不变性与能量守恒	7
§3.3 空间平移不变性与动量守恒	8
§3.4 空间各向同性与角动量守恒	8
§3.5 不同参考系中 $E, \mathbf{p}, \mathbf{L}$ 间的关系	9
§3.6 力学相似性.	11

第一章 从矢量力学到分析力学



§1.1 自由度与广义坐标

先考虑一个由 N 个质点组成的力学体系, 若关于这个体系有 k 个约束, 则该体系的自由度为 $3N - k$. 由于约束的存在, 原有直角坐标系下描述该体系的坐标 x_i 不再相互独立, 为此引入广义坐标 $q_j (j = 1, 2, \dots, 3N - k)$, 即该自由度下能描述的该体系的最少数目的相互独立坐标. 显然, 我们可以用广义坐标 q_j 和时间 t 描述原有坐标 x_i , 即

$$x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \quad (1.1)$$

则

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (\text{已使用爱因斯坦求和指标, 后同}) \quad (1.2)$$

§1.2 虚功原理和 D'Alembert 原理

对于一个处于力学平衡状态的体系, 考虑其进行一个与所有约束条件自洽的微小位移 δx_i , 称之为虚位移. 对于每个质点, 其所受外力 $F_i = 0$, 故

$$F_i \delta x_i = 0 \quad (1.3)$$

由于 F_i 可表示为驱动力 F_i^a 与约束力 F_i^c 的合力, 且一般情况下 $F_i^c \delta x_i = 0$ (如曲面上运动时 F_i 必须沿法线方向), 故

$$F_i^a \delta x_i = 0 \quad (1.4)$$

称此式为虚功原理. 注: 虽然此时 δx_i 是约束条件下任取的, 但由于其互相不独立, 故不能从此式中推出 $F_i^a = 0$.

考虑一个不属于力学平衡状态的体系, 引入惯性力 $-\dot{p}_i$, 可以得到

$$(F_i^a - \dot{p}_i) \delta x_i = 0 \quad (1.5)$$

称此式为 D'Alembert 原理. 由于

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (1.6)$$



故

$$F_i^a \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j = m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (1.7)$$

令 $Q_j = F_i^a \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$, 称其为广义力.

§1.3 Euler-Lagrange 方程

由于

$$m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = m_i \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \quad (1.8)$$

又由 (1.2) 式可得

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (1.9)$$

将 (1.9) 式代入 (1.8) 式, 整理得

$$m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial (\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2)}{\partial q_j} \quad (1.10)$$

令动能 $T = \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$, 代入 (1.7) 式, 得

$$\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0 \quad (1.11)$$

由于此时 δq_j 为任取且相互独立, 故

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0 \quad (1.12)$$

假设 F_i^a 由一与速度无关的势场提供, 即 $F_i^a = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$, 则

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0 \quad (1.13)$$

令 $L = T - V$, 即 $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, 得到 Euler-Lagrange 方程.

§1.4 弱耗散系统

对于一耗散体系, (1.5) 式不在适用. 假设阻力 $F^D = -k_j v_j (j = 1, 2, 3)$, 构造瑞称耗散函数 $F = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} k_j v_{ij}^2 (j = 1, 2, 3)$, 显然 $F^D = -\frac{\partial F}{\partial v}$. 将广义力中驱动力一项并



入 L (Lagrange 量), 则 $Q_j = F^D \frac{\partial x_i}{\partial q_i}$, 即

$$Q_j = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.14)$$

此时 Euler-Lagrange 方程修正为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (1.15)$$



第二章 最小作用量原理



§2.1 泛函与变分

考虑一组曲线 $y(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的长度 $S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$, 对于每一个确定的函数 $y(x)$, 都可以在实数集中找到与之唯一对应的数 S , 我们把这种关系称为泛函, 即函数空间向实数集的映射, 记为 $J[y]$, $y(x)$ 成为变量函数, $J[y]$ 称为 $y(x)$ 的泛函. 下面只讨论积分形式的泛函, 可记为 $J[y] : S = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) dx$, 任取一个与 $y(x)$ 相近的函数 (严格定义不给出, 直观上理解即可), 将其与 $y(x)$ 的差记为 $\delta y(x)$, 称为 $y(x)$ 的变分.

§2.2 泛函极值与 Euler-Lagrange 方程

考虑一组 x_1, x_2 两端函数值固定的函数, 若要使两端点之间的弧长最短, 等价于求积分 $S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$ 的最小值, 这就是一个最简单的泛函极值问题. 类比函数极值可以得到泛函 $J[y]$ 的最小值, 即 $\forall y(x), J[y + \delta y] - J[y] \geq 0$ 恒成立, 代入一般表达式为

$$J[y + \delta y] - J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F[y + \delta y, y' + (\delta y)', x] dx - \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) dx \quad (2.1)$$

Taylor 展开得到

$$J[y + \delta y] - J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} (\delta y)' \right] dx + \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \delta y + \frac{\partial}{\partial y'} (\delta y)' \right]^2 F dx + \dots \quad (2.2)$$

记 $\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} (\delta y)' \right] dx$ 为 $\delta J[y]$, 称为 $J[y]$ 的一级变分. 类比函数极值可以得到泛函极值的必要条件是一级变分 $\delta J[y] = 0$ 即

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} (\delta y)' \right] dx = 0 \quad (2.3)$$

对其进行分部积分, 得

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0 \quad (2.4)$$



考虑边界条件 $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$ (两端固定), 又由于右式 δy 可任取, 我们不加证明地指出 (变分学基本引理可以证明这个结论)

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (2.5)$$

得到泛函极值的 Euler-Lagrange 方程. 有关数学的介绍就到这里, 如果有兴趣可以参考泛函分析课本.

§2.3 最小作用量原理与 Lagrange 函数的形式

下面介绍分析力学中最重要的原理: 最小作用量原理. 简而言之, 任意一个只存在完整约束的力学系统, 都可以用它的广义坐标 q_j 的泛函 S 表示其运动路径, 称其为力学系统的作用量, 可以写成 $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt$ 的形式, 当 S 取极小值时确定的运动路径为这个系统真实的运动路径, 式中 $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ 称为 Lagrange 函数. 与前述泛函极值的 Euler-Lagrange 方程推导类似, 我们可以得到

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j dt = 0 \quad (2.6)$$

前述变分法基本引理对这个和式依然有效, 得到 j 个方程 (j 是自由量)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (2.7)$$

这就是分析力学中的 Euler-Lagrange 方程. 下面讨论 Lagrange 函数的形式.

首先注意到 $L(q_j, \dot{q}_j, t)$ 的选取具有任意性, 假如令其增加一项某个关于坐标和时间的函数的全导数, 即 $L' = L + \frac{d}{dt} f(q, t)$, 代入作用量, 得到

$$\delta S' = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_j, \dot{q}_j, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} [f(q + \delta q, t) - f(q, t)] dt \quad (2.8)$$

第二项可化为

$$\frac{\partial f}{\partial q} \delta q(t_2) - \frac{\partial f}{\partial q} \delta q(t_1) = 0 (\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0) \quad (2.9)$$

故其对导出 Euler-Lagrange 方程无影响, 即 L 与 L' 等价.

接下来从最简单的情况开始讨论, 即例子在惯性系 K 中的自由运动. 显然运动只与 $|\mathbf{v}_0|$ 有关, 所以可以认为 Lagrange 函数只含 \mathbf{v}^2 , 即 $L(\mathbf{v}_0^2)$. 然后, 令 K 相对于惯性系 K' 以无穷小的速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 移动, 则质点在 K' 系中速度 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}$, 在 K' 系中 $L' = L(\mathbf{v}_0^2 + 2\mathbf{v}_0\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2)$, 略去高阶小量 $\boldsymbol{\varepsilon}^2$ 得到 $L' = L(\mathbf{v}_0^2 + 2\mathbf{v}_0\boldsymbol{\varepsilon})$. 由伽利略相对



性原理知, 相同的运动在不同惯性系中的 Lagrange 函数等价, 即 $L' - L$ 为某个只含坐标和时间的函数对时间的全导数 $\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}, t)$, 由于

$$L' - L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_0^2} \cdot 2\mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 2 \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_0^2} \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.10)$$

所以 $2 \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_0^2}$ 为常量, 定义这个常量为质量, 记作 m , 则

$$L(\mathbf{v}_0^2) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 \quad (2.11)$$

2.11 式即为质点在惯性系中自由运动时的 Lagrange 函数. 不考虑质点间相互作用, 由 N 个质点组成的体系有

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \quad (2.12)$$

如果考虑封闭体系质点的相互作用, 则应在 L 后附加一项, 这一项与所有质点的位置有关

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 - V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \quad (2.13)$$

于是我们得到了封闭质点系的 Lagrange 函数, 若使用广义坐标, 则

$$L = \sum_{i,j} \frac{1}{2} a_{ij}(q) \cdot \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q_1, q_2, \dots, q_f) \quad (2.14)$$

附: 物理学的公理化

分析力学与矢量力学最大的不同在于它是一个公理化体系, 是高度数学化的. 这个公理是最小作用量原理和 Lagrange 函数的形式. 我们导出 Lagrange 函数形式的时候并非通过严格的推导, 而是寻求必要的条件"连蒙带猜", 所以它的形式也是分析力学的公理. 公理到此就没有了, 理论上说, 依靠公理可以严格导出整个分析力学体系, 这也是为什么分析力学是四大力学中最美丽动人的一个了.



第三章 对称性与守恒律



§3.1 Lagrange 函数的性质

我们已经知道将系统的 Lagrange 函数代入 Euler-Lagrange 方程即可得到体系的运动方程, 而通过研究 E-L 方程还可以发现 Lagrange 函数一些有用的性质. 由 $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \delta \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) dt$ 知, 若 $L' = L + \frac{d}{dt} f(q, t)$, 则

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \delta \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\delta q \frac{\partial f}{\partial q} \right) dt \quad (3.1)$$

第二项可化为

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\delta q \frac{\partial f}{\partial q} \right) dt = \left. \frac{\partial f}{\partial q} \delta q \right|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (3.2)$$

故于 Lagrange 函数而言, 增加一项关于坐标和时间的函数的全导数并不影响运动方程. 这将是一个有用的性质, 下面正式进入对称性与守恒量部分.

§3.2 时间平移不变性与能量守恒

若一个体系的 Lagrange 函数不显含 t , 则称其具有时间平移不变性 (时间平移对称性), 则其关于时间的全导数

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \quad (3.3)$$

则

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \dot{q} \quad (3.4)$$

代入 E-L 方程, 得

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) \quad (3.5)$$

由于 T 是关于 \dot{q} 的 2 次齐次函数, 由 Euler 定理得

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (2T) \quad (3.6)$$



故

$$\frac{d}{dt}(2T - L) = 0 \quad (3.7)$$

即

$$T + V = \text{Const} \quad (3.8)$$

令 $T + V = E$. 称 E 为体系的能量, 得到能量守恒定律.

§3.3 空间平移不变性与动量守恒

若一个体系的 Lagrange 函数不显含位置坐标 \mathbf{x}_i , 则称其具有空间平移不变性, 则

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i} \delta \mathbf{x}_i = 0 \quad (3.9)$$

代入 E-L 方程, 得

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \right) \delta \mathbf{x}_i = 0 \quad (3.10)$$

由于 $\delta \mathbf{x}_i$ 是任意的, 故

$$\sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \right) = 0 \quad (3.11)$$

即

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} = \text{Const} = \mathbf{p} \quad (3.12)$$

称 \mathbf{p} 为系统的动量, 得到动量守恒定律. 若用广义坐标 q_j 代替 \mathbf{x}_i , 即可得到广义动量 $\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{Const}$

§3.4 空间各向同性与角动量守恒

若将一个体系旋转一个微小角度 $\delta \phi$, 而其 Lagrange 函数不发生变化, 则称其具有空间各向同性. 显然

$$\delta \mathbf{x} = |\delta \phi| |\mathbf{x}| \sin \theta, \quad \theta = \langle \delta \phi, \mathbf{x} \rangle \quad (3.13)$$

故

$$\delta \mathbf{x} = \delta \phi \times \mathbf{x}, \quad \delta \mathbf{v} = \delta \phi \times \mathbf{v} \quad (3.14)$$

由于

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i} \delta \mathbf{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \delta \mathbf{v}_i = 0 \quad (3.15)$$



故

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i}(\delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x}_i) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i}(\delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{v}_i) = 0 \quad (3.16)$$

代入 E-L 方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \right) (\delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x}_i) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \left[\frac{d}{dt} (\delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x}_i) - \frac{d}{dt} (\delta \boldsymbol{\phi}) \times \mathbf{x}_i \right] = 0 \quad (3.17)$$

显然 $\frac{d}{dt}(\delta \boldsymbol{\phi}) = 0$, 故

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \right) (\delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x}_i) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \left[\frac{d}{dt} (\delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x}_i) \right] = 0 \quad (3.18)$$

即

$$\frac{d}{dt} [\delta \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i)] = \frac{d}{dt} (\mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i) \cdot \delta \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (3.19)$$

由于 $\delta \boldsymbol{\phi}$ 是任意的, 故

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i) = 0 \quad (3.20)$$

得到

$$\mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i = \text{Const} = \mathbf{L} \quad (3.21)$$

称 \mathbf{L} 为系统的角动量, 得到角动量守恒定律.

§3.5 不同参考系中 $E, \mathbf{p}, \mathbf{L}$ 间的关系

假设参考系 K' 相对于惯性系 K , 以 \mathbf{V} 运动, 即

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \quad (3.22)$$

则系统的动量为

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_{0i} = m_i \mathbf{v}'_i + \sum_i m_i \mathbf{V} \quad (3.23)$$

若在 K' 系中系统动量为 0, 即 $\mathbf{p}' = 0$, 只需令

$$\mathbf{V} = \frac{m_i \mathbf{v}_{0i}}{\sum_i m_i} \quad (3.24)$$

称其为质心速度 \mathbf{V}_c , 显然, 它对时间的原函数是

$$\mathbf{x}_c = \frac{m_i \mathbf{x}_{0i}}{\sum_i m_i} \quad (3.25)$$

称其为质心坐标 \mathbf{x}_c . 下文称 $\sum m_i$ 为 μ . 对于能量 E , 有

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{0i}^2 + V \\ &= \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}'_i^2 + m_i \mathbf{v}'_i \mathbf{V} + \frac{1}{2} \mu \mathbf{V}^2 + V \end{aligned} \quad (3.26)$$



对于 $\mathbf{V} = \mathbf{V}_c$ (即质心系), 有

$$E_0 = E' + \frac{1}{2}\mu V_c^2 \quad (3.27)$$

对于角动量 \mathbf{L} , 有

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{x}_{0i} \times m_i \mathbf{v}_{0i} \quad (3.28)$$

在质心系中, 有

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{x}'_i \times m_i \mathbf{v}_{0i} + \mathbf{x}_c \times m_i \mathbf{v}_{0i} \quad (3.29)$$

即

$$\mathbf{L}_0 = \sum \mathbf{x}'_i \times \mu \mathbf{V}_c + \mathbf{x}_c \times \mu \mathbf{V}_c \quad (3.30)$$

由于 $\mu = \sum_i m_i$, $\mathbf{x}_c = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_{0i}}{\mu}$, $\mathbf{V}_c = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_{0i}}{\mu}$, 所以

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}' + \frac{(\sum_i m_i \mathbf{x}_{0i}) \times (\sum_i m_i \mathbf{v}_{0i})}{\sum_i m_i} \quad (3.31)$$

其中 \mathbf{L}_0 的第二项成为内禀角动量.

下面看转动参考系的情况. 假设参考系 K 相对于 K' 以 $\boldsymbol{\Omega}$ 的角速度转动, 显然有

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} \quad (3.32)$$

我们直接考虑 Lagrange 函数的形式, 先看 K' 系,

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 - V = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}' + \mathbf{v})^2 - V = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 + m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2}m\mathbf{V}^2 - V \quad (3.33)$$

由于 $\mathbf{V}^2(t)$ 可看成时间的全导数, 故略去, 得

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 + m \frac{d}{dt}(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{V}) - m\mathbf{x} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{V}) - V \quad (3.34)$$

即

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 - m\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{V}} - V \quad (3.35)$$

由于 $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}'}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}'}$, 所以

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}') = -m\dot{\mathbf{V}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.36)$$

其中, 称 $m\dot{\mathbf{V}}$ 为平动引起的惯性力. 再考虑 K 系的情况, 将(3.32)式代入(3.35)式, 得

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + m\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 - m\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{V}} - V \quad (3.37)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{x} + m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \times \boldsymbol{\Omega} - m\dot{\mathbf{V}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.39)$$



整理得

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} - m\dot{\mathbf{V}} + 2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \times \boldsymbol{\Omega} - m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{x} \quad (3.40)$$

其中 $2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega})$ 称为科里奥利力, $m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})$ 称为惯性离心力. 再考虑能量的情况:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} - L \quad (3.41)$$

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - \frac{1}{2} m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 + m\mathbf{x}' \cdot \dot{\mathbf{V}} + V \quad (3.42)$$

假设 K' 相对于 K_0 无平动加速度, 则

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - \frac{1}{2} m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 + V \quad (3.43)$$

称 $-\frac{1}{2} m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2$ 为惯性离心力势能. 代入(3.32)式, 得

$$E = E_0 - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L} \quad (3.44)$$

§3.6 力学相似性

考虑变换 $x' = \lambda_1 x$, $t' = \lambda_2 t$, 假设 $V(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 是 k 次齐次函数, 则

$$V(x'_1, x'_2, \dots, x'_N) = \lambda_1^k V(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (3.45)$$

同理,

$$T(v'_1, v'_2, \dots, v'_N) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^k T(v_1, v_2, \dots, v_N) \quad (3.46)$$

若

$$\lambda_2 = \lambda_1^{1-\frac{k}{2}} \quad (3.47)$$

则 Lagrange 函数只是整体乘一个系数, 运动方程不变, 一个有价值的应用是

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{x'}{x} \right)^{1-\frac{k}{2}} \quad (3.48)$$

$k = -1$ 时, 得到开普勒第三定律. 另一个应用与能量平均值有关, 由于

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \mathbf{x}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{x}_i \quad (3.49)$$

两边对时间求平均, 得

$$2\langle T \rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \mathbf{x}_i \right) \frac{1}{t} + k\langle V \rangle \quad (3.50)$$

由于 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \mathbf{x}_i \right) \frac{1}{t} = 0$, 所以

$$2\langle T \rangle = k\langle V \rangle \quad (3.51)$$

称其为位力定理.



附：齐次函数的 Euler 定理

定义： $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_i) = \lambda^k f(x_1, x_2, \dots, x_i)$, 则 $f(x_1, x_2, \dots, x_i)$ 为 k 次齐次函数.

两边对 λ 求偏导, 得

$$\sum_i \frac{\partial f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_i)}{\partial(\lambda x_i)} \frac{\partial(\lambda x_i)}{\partial \lambda} = k \lambda^{k-1} f(x_1, x_2, \dots, x_i) \quad (3.52)$$

$$\sum_i \frac{\partial f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_i)}{\partial(\lambda x_i)} \cdot \lambda x_i = k \lambda^k f(x_1, x_2, \dots, x_i) \quad (3.53)$$

令 $\lambda = 1$, 得

$$\sum_i \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_i)}{\partial x_i} \cdot \lambda x_i = k f(x_1, x_2, \dots, x_i) \quad (3.54)$$

