复变函数与积分变换笔记

Notes on Functions of Complex Variable and Integral Transforms

作者：数试 82 裴兆辰

2020 年 4 月 9 日

钱学森书院学业辅导中心

QIAN YUAN XUE FU

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

作品信息

➤ **标题**：复变函数与积分变换笔记 - *Notes on Functions of Complex Variable and Integral Transforms*

➤ **作者**：数试 82 裴兆辰

➤ **校对排版**：钱院学辅排版组

➤ **出品时间**：2020 年 4 月 9 日

➤ **总页数**：6

目录

第一章

第二章

第三章 柯西积分公式及应用

§3.1 *Cauchy* 积分公式的一些重要推论

定理 3.1.1 (Liouville 定理)**.** 有界整函数必为常数

证明. 设 f 为一有界整函数，其模的上界设为 M. 即 $\forall z\in\mathbb{C}$, 有 $|f(z)|\le M$, 任取 $a\in\mathbb{C}$, 在 $\partial B(a,R)$ 上由 $Cauchy$ 不等式得 $|f(a)|\le \dfrac{M}{R}$, $\forall R>0$. 令 $R\to\infty$ 得 $|f'(a)|=0\Rightarrow f'(a)=0\forall a\in\mathbb{C}$ 故 f 为常数. □

定理 3.1.2 (代数基本定理)**.** 任意复系数多项式 $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ $(a_0\neq 0)$ 在 $\mathbb{C}$ 中必有零点

证明. 略，见 $chb.$ 和史济怀 $(F(x)=\dfrac{1}{P_z})$ □

定理 3.1.3 (Morera)**.** 若 f 是域 $\mathbb{D}$ 上的连续函数，且沿 $\mathbb{D}$ 内任意可求长闭曲线上的积分是 0，那么 f 在 $\mathbb{D}$ 上解析

证明. 见 $chb.$ 笔记 □

习题

eg. Liouville 定理的另一个证明

证明. 设 f 是有界整函数，z_1,z_2 是 $B(0,r)$ 中的任意两点，则：

$$\begin{aligned}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz&=\frac{1}{z_1-z_2}\left(\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-z_1}dz-\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-z_2}dz\right)\\&=\frac{1}{z_2-z_1}\left(f(z_1)-f(z_2)\right)\end{aligned}$$

由于 f 有界. 故存在 $M>0, s.t\quad |f(z)|\le M,\forall z\in\mathbb{C}$

故：

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=r}\frac{f(z)dz}{(z-z_1)(z-z_2)}\right|&\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(z)\cdot zd\theta}{(z-z_1)(z-z_2)}\right|\\&\le\int_0^{2\pi}\frac{M\cdot r}{|z-z_1|\cdot|z-z_2|}d\theta\\&\to 0\quad(r\to\infty)\end{aligned}$$

故：$\displaystyle\int_{|z|=r}\frac{f(z)dz}{(z-z_1)(z-z_2)}=0.$ 故:$f(z_1)=f(z_2)$.
由于 r,z_1,z_2 的任意性，故 $f(z)$ 为常值函数. □

eg. 设 f 为整函数, 若当 $z\to+\infty$ 时.$f(z)=0(|z|^\alpha)\quad \alpha\geq 0$. 证明 f 是次数不超过 $[\alpha]$ 的多项式

证明. 记.$k=[\alpha]+1$
$\Rightarrow \displaystyle\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z^k}=0$. 由于 $f^{(k)}(z)=\dfrac{k!}{z\pi i}\displaystyle\int_{|z|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}d\xi$. 故 $\forall\epsilon>0.\exists R,s.t\quad r>R$ 有 $\left|\dfrac{f(z)}{z^k}\right|<\epsilon, z\in B(0,r)$.（令 $r\to\infty$）
$\Rightarrow \left|f^{(k)}(z)\right|\leq\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{|z-\xi|=r}\left|\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}\right|d\xi=r\epsilon$. 故 $f^{(k)}\equiv 0$. □

eg. 设 f 为整函数，如果 $f(\mathbb{C})\subset\{z\in\mathbb{C};Im\,z>0\}$, 证明 f 为常值函数.

证明. $\Rightarrow\forall z\in\mathbb{C},|f(z)+i|\geq 1$ 令 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)+i}$
故 $g(z)\in H(\mathbb{C})$. 并且 $|g(z)|\leq 1$. 故 g 为常值函数, 故 f 为常值函数 □

eg. 设 f 为整函数. 如果 $f(\mathbb{C})\subset\mathbb{C}\backslash[0,1]$. 证明：$f$ 为常值函数.

证明. 令 $g(z)=\dfrac{f(z)}{1-f(z)}$. 若 $g(z)=r\in\mathbb{R}^+$. 则 $f(z)=\dfrac{r}{r+1}\in[0,1]$. 矛盾
故 $g(z)\subset\mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$. 设 $h(z)=\sqrt{g(z)}$. 显然 h 也为整函数.
故 $h(\mathbb{C})\subset\{z\in\mathbb{C};Im\,z>0\}$. 故 h 为常值函数. 故 f 为常值函数 □

eg (更强形式的 Morera)**.** 设 f 是域 $\mathbb{D}$ 上的连续函数, 若对于任意边界和内部位于 $\mathbb{D}$ 中三角形域 $\triangle$, 总有 $\int_{\partial\triangle}f(z)dz=0$. 证明 $f\in H(\mathbb{D})$.

证明. 思路同 *Cauchy-Gousart*. 此处省略 □

eg. $\displaystyle\int_{|z|=a}\frac{e^z}{z^2+a^2}.(a\in(\mathbb{R})^+)$.

解.

$$\begin{aligned}&\int_{|z|=a}\frac{e^z}{z^2+a^2}\\=&\int_{|z|=a}\frac{e^z}{(z+ai)(z-ai)}dz=\frac{1}{2ai}\int_{|z|=a}\left(\frac{e^z}{z-ai}-\frac{e^z}{z+ai}\right)dz\\=&\frac{2\pi i}{2ai}\left((e^z)|_{z=ai}-(e^z)|_{z=-ai}\right)=\frac{2\pi i}{a}\sin a\end{aligned}$$

eg. 设 $f\in H(\{z:r<|z|<+\infty\})$. 且 $\displaystyle\lim_{z\to\infty}z\cdot f(z)=A$. 证明：$\displaystyle\int_{|z|=R}f(z)dz\to 2\pi iA$, $(R\to\infty)$.

证明. 由条件得.$\forall \epsilon > 0, \exists R_0 > r, s.t. |z| \ge R_0$ 时, 有 $|zf(z) - A| < \epsilon$. 故:

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=R} f(z)dz - 2\pi i A\right| &= \left|\int_{|z|=R} f(z)dz - \int_{|z|=R} \frac{A}{z}dz\right| \\ &= \left|\int_{|z|=R} (f(z) - \frac{A}{z})dz\right| \le \int_{|z|=R} \left|f(z) - \frac{A}{z}\right| dz \\ &\le \int_{|z|=R} \frac{\epsilon}{R} dz = 2\pi\epsilon\end{aligned}$$

□

eg. 无界区域的 Cauchy 积分公式:
设 γ 为 $\mathbb{C}$ 中的有限的可求长闭曲线，设 γ 围成的区域为 D. 记 $\Omega = \mathbb{C} \backslash (D \cup \gamma)$
设 $f \in C(\Omega \cup \gamma) \cap H(\Omega)$，且 $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = f(\infty) \in \mathbb{C}$. 则 $f(z) = f(\infty) - \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$.

证明. 任取 $z \in \Omega. \exists R > 0, s.t.\ \gamma \cup \{z\} \subset B(0, R)$.
由 $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$.
取 $\xi \in \{z : |z| = R\}$. 令 $R \to +\infty$, $\dfrac{f(\xi)}{\xi - z} \cdot \xi \to f(\infty)$
由前例子可得 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \to f(\infty)$, $R \to +\infty$
故 $f(z) = f(\infty) - \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ □

eg (Painlevé 原理). 设 D 为域，$\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ 是 D 中的 n 条可求长闭曲线，若 $f \in C(D) \cap H(D \backslash \bigcup\limits_{k=1}^{n} \gamma_k)$ 则 $f \in H(D)$.

证明. 利用定理 3.2.4 及 *Morera* 定理即可，略 □

§3.2 最大模原理

定理 3.2.1 (平均值定理). 设 $f \in H(B(z_0, r)) \cap C(\overline{B(z_0, r)})$. 则 : $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$.

证明. 由 *Cauchy* 积分公式得 $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$
记 $\xi = z_0 + re^{i\theta} \Rightarrow d\xi = ire^{i\theta} d\theta = i(\xi - z_0) d\theta$
$\Rightarrow f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$ □

定理 3.2.2 (最大模定理). 设 Ω 为区域 $f \in H(\Omega)$. 则 $|f|$ 在 Ω 内有最大值当且仅当 f 为常函数

证明. 此处给出利用区域连通性与平均值原理的证法，见 *chb* 笔记. 略
具体可见方企勤《复变函数》 □

定理 3.2.3. 设 $D \subset \mathbb{C}$ 为有界域. 设 f 为非常值函数. $f \in H(D) \cap C(D)$. 则 f 的最大模在且只在 ∂D 上取到

证明. 由定理 *3.6.2* 可直接得到. 略 □

定理 3.2.4 (Schwarz 引理)**.** 设 $f \in H(B(0,1))$, 且有 $\forall z \in B(0,1)$, $|f(z)| \le 1$, $f(0)=0$. 则 $\forall z \in B(0,1)$ 有 $|f(z)| \le |z|, |f'(0)| \le 1$. 并且若存在 $z_0 \in B(0,1)$ $z_0 \ne 0$, 有 $|f(z_0)| = |z_0|$, 或 $|f'(0)| = 1$, 则 $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $s.t.$ $\forall z \in B(0,1)$ 有 $f(z) = e^{i\theta} \cdot z$

证明. 略. 见 *chb* 笔记以及方企勤《复变函数》 □

§3.3 非齐次 *Cauchy* 积分公式 *

定理 3.3.1. 设 $\gamma_0, \gamma_1 \dots \gamma_n$ 是 $n+1$ 条可求长简单闭曲线,$\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$ 在 r_0 的内部. $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$ 中的任一条均在其余的 $n-1$ 条的外部. 设 D 是这 $n+1$ 条曲线围成的区域, 若 $f \in C^1(D)$. 则 $\forall z \in D$. 有 : $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D} \dfrac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \dfrac{1}{2\pi i}\int_D \dfrac{\partial f(\xi)}{\partial \bar{\xi}} \dfrac{1}{\xi - z} d\xi \bigwedge d\bar{\xi}$

证明. 见史济怀《复变函数》 □