# 分析力学笔记

# *Notes on Analytical Mechanics*


作者：规培 92 冯廷龙


2020 年 4 月 9 日


钱学森书院学业辅导中心

QIAN YUAN XUE FU

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

## 作品信息

- ➤ **标题**：分析力学笔记 - *Notes on Analytical Mechanics*
- ➤ **作者**：规培 92 冯廷龙
- ➤ **校对排版**：钱院学辅排版组
- ➤ **出品时间**：2020 年 4 月 9 日
- ➤ **总页数**：12

## 许可证说明

# 目录


**第一章 从矢量力学到分析力学** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **1**

§1.1 自由度与广义坐标 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

§1.2 虚功原理和 D'Alembert 原理 . . . . . . . . . . . . . . . . 1

§1.3 Euler-Lagrange 方程 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

§1.4 弱耗散系统 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

**第二章 最小作用量原理** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **4**

§2.1 泛函与变分 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

§2.2 泛函极值与 Euler-Lagrange 方程 . . . . . . . . . . . . . . 4

§2.3 最小作用量原理与 Lagrange 函数的形式 . . . . . . . . . . . 5

**第三章 对称性与守恒律** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **7**

§3.1 Largrange 函数的性质 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

§3.2 时间平移不变性与能量守恒 . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

§3.3 空间平移不变性与动量守恒 . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

§3.4 空间各向同性与角动量守恒 . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

§3.5 不同参考系中 $E, \vec{p}, \vec{L}$ 间的关系 . . . . . . . . . . . . . . . 9

§3.6 力学相似性 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

# 第一章 从矢量力学到分析力学

## §1.1 自由度与广义坐标

先考虑一个由 $N$ 个质点组成的力学体系, 若关于这个体系有 $k$ 个约束, 则该体系的自由度为 $3N-k$. 由于约束的存在, 原有直角坐标系下描述该体系的坐标 $x_i$ 不再相互独立, 为此引入广义坐标 $q_j(j=1,2,\cdots 3N-k)$, 即该自由度下能描述的该体系的最少个数的相互独立坐标. 显然, 我们可以用广义坐标 $q_j$ 和时间 $t$ 描述原有坐标 $x_i$, 即

$$x_i(q_1,q_2,\cdots q_{3N-k},t) \tag{1.1}$$

则

$$\dot{x}_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial x_i}{\partial t}(\text{已使用爱因斯坦求和指标, 后同}) \tag{1.2}$$

## §1.2 虚功原理和 D'Alembert 原理

对于一个处于力学平衡状态的体系, 考虑其进行一个与所有约束条件自洽的微小位移 $\delta x_i$, 称之为虚位移. 对于每个质点, 其所受外力 $F_i=0$, 故

$$F_i\delta x_i=0 \tag{1.3}$$

由于 $F_i$ 可表示为驱动力 $F_i^a$ 与约束力 $F_i^c$ 的合力, 且一般情况下 $F_i^c\delta x_i=0$(如曲面上运动时 $F_i$ 必须沿法线方向), 故

$$F_i^a\delta x_i=0 \tag{1.4}$$

称此式为虚功原理. 注: 虽然此时 $\delta x_i$ 是约束条件下任取的, 但由于其互相不独立, 故不能从此式中推出 $F_i^a=0$.
考虑一个不属于力学平衡状态的体系, 引入惯性力 $-\dot{p}_i$, 可以得到

$$(F_i^a-\dot{p}_i)\delta x_i=0 \tag{1.5}$$

称此式为 D'Alembert 原理. 由于

$$\delta x_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{1.6}$$

故

$$F_i^a \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j = m_i \frac{\mathrm{d}\dot{x}_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{1.7}$$

令 $Q_j = F_i^a \dfrac{\partial x_i}{\partial q_j}$, 称其为广义力.

## §1.3 Euler-Lagrange 方程

由于

$$m_i \frac{\mathrm{d}\dot{x}_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) - m_i \dot{x}_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) \tag{1.8}$$

又由 (1.2) 式可得

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{1.9}$$

将 (1.9) 式代入 (1.8) 式, 整理得

$$m_i \frac{\mathrm{d}\dot{x}_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2\right)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial\left(\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2\right)}{\partial q_j} \tag{1.10}$$

令动能 $T = \dfrac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2$, 代入 (1.7) 式, 得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j = 0 \tag{1.11}$$

由于此时 $\delta q_j$ 为任取且相互独立, 故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0 \tag{1.12}$$

假设 $F_i^a$ 由一与速度无关的势场提供, 即 $F_i^a = -\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0 \tag{1.13}$$

令 $L = T - V$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, 得到 Euler-Lagrange 方程.

## §1.4 弱耗散系统

对于一耗散体系,(1.5) 式不在适用. 假设阻力 $F^D = -k_j v_j (j = 1,2,3)$, 构造瑞称耗散函数 $F = \sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{1}{2}k_j v_{ij}^2 (j = 1,2,3)$, 显然 $F^D = -\dfrac{\partial F}{\partial v}$. 将广义力中驱动力一项并

入 $L$(Lagrange 量), 则 $Q_j = F^D \dfrac{\partial x_i}{\partial q_i}$, 即

$$Q_j = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.14}$$

此时 Euler-Lagrange 方程修正为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{1.15}$$

# 第二章 最小作用量原理

## §2.1 泛函与变分

考虑一组曲线 $y(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上的长度 $S=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$, 对于每一个确定的函数 $y(x)$, 都可以在实数集中找到与之唯一对应的数 $S$, 我们把这种关系称为泛函, 即函数空间向实数集的映射, 记为 $J[y]$,$y(x)$ 成为变量函数,$J[y]$ 称为 $y(x)$ 的泛函. 下面只讨论积分形式的泛函, 可记为 $J[y]:S=\int_{x_1}^{x_2}F(y,y',x)\mathrm{d}x$, 任取一个与 $y(x)$ 相近的函数 (严格定义不给出, 直观上理解即可), 将其与 $y(x)$ 的差记为 $\delta y(x)$, 称为 $y(x)$ 的变分.

## §2.2 泛函极值与 Euler-Lagrange 方程

考虑一组 $x_1,x_2$ 两端函数值固定的函数, 若要使两端点之间的弧长最短, 等价于求积分 $S=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$ 的最小值, 这就是一个最简单的泛函极值问题. 类比函数极值可以得到泛函 $J[y]$ 的最小值, 即 $\forall y(x), J[y+\delta y]-J[y]\geqslant 0$ 恒成立, 代入一般表达式为

$$J[y+\delta y]-J[y]=\int_{x_1}^{x_2}F[y+\delta y,y'+(\delta y)',x]\mathrm{d}x-\int_{x_1}^{x_2}F(y,y',x)\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

Taylor 展开得到

$$J[y+\delta y]-J[y]=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)'\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\delta y+\frac{\partial}{\partial y'}(\delta y)'\right]^2F\mathrm{d}x+\cdots \tag{2.2}$$

记 $\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)'\right]\mathrm{d}x$ 为 $\delta J[y]$, 称为 $J[y]$ 的一级变分. 类比函数极值可以得到泛函极值的必要条件是一级变分 $\delta J[y]=0$ 即

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)'\right]\mathrm{d}x=0 \tag{2.3}$$

对其进行分部积分, 得

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x=0 \tag{2.4}$$

考虑边界条件 $\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0$(两端固定), 又由于右式 $\delta y$ 可任取, 我们不加证明地指出 (变分学基本引理可以证明这个结论)

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \tag{2.5}$$

得到泛函极值的 Euler-Lagrange 方程. 有关数学的介绍就到这里, 如果有兴趣可以参考泛函分析课本.

## §2.3 最小作用量原理与 Lagrange 函数的形式

下面介绍分析力学中最重要的原理: 最小作用量原理. 简而言之, 任意一个只存在完整约束的力学系统, 都可以用它的广义坐标 $q_j$ 的泛函 $S$ 表示其运动路径, 称其为力学系统的作用量, 可以写成 $S=\int_{t_1}^{t_2}L(q_j,\dot{q}_j,t)\mathrm{d}t$ 的形式, 当 $S$ 取极小值时确定的运动路径为这个系统真实的运动路径, 式中 $L(q_j,\dot{q}_j,t)$ 称为 Lagrange 函数. 与前述泛函极值的 Euler-Lagrange 方程推导类似, 我们可以得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right]\delta q_j\mathrm{d}t=0 \tag{2.6}$$

前述变分法基本引理对这个和式依然有效, 得到 $j$ 个方程 ($j$ 是自由量)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \tag{2.7}$$

这就是分析力学中的 Euler-Lagrange 方程. 下面讨论 Lagrange 函数的形式.
首先注意到 $L(q_j,\dot{q}_j,t)$ 的选取具有任意性, 假如令其增加一项某个关于坐标和时间的函数的全导数, 即 $L'=L+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(q,t)$, 代入作用量, 得到

$$\delta S'=\int_{t_1}^{t_2}\delta L(q_j,\dot{q}_j,t)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(q+\delta q,t)-f(q,t)]\mathrm{d}t \tag{2.8}$$

第二项可化为

$$\frac{\partial f}{\partial q}\delta q(t_2)-\frac{\partial f}{\partial q}\delta q(t_1)=0(\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0) \tag{2.9}$$

故其对导出 Euler-Lagrange 方程无影响, 即 $L$ 与 $L'$ 等价.
接下来从最简单的情况开始讨论, 即例子在惯性系 $K$ 中的自由运动. 显然运动只与 $|\boldsymbol{v_0}|$ 有关, 所以可以认为 Lagrange 函数只含 $\boldsymbol{v}^2$, 即 $L(\boldsymbol{v_0}^2)$. 然后, 令 $K$ 相对于惯性系 $K'$ 以无穷小的速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 移动, 则质点在 $K'$ 系中速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v_0}+\boldsymbol{\varepsilon}$, 在 $K'$ 系中 $L'=L(\boldsymbol{v_0}^2+2\boldsymbol{v_0}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}^2)$, 略去高阶小量 $\boldsymbol{\varepsilon}^2$ 得到 $L'=L(\boldsymbol{v_0}^2+2\boldsymbol{v_0}\boldsymbol{\varepsilon})$. 由伽利略相对

性原理知, 相同的运动在不同惯性系中的 Lagrange 函数等价, 即 $L' - L$ 为某个只含坐标和时间的函数对时间的全导数 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\boldsymbol{x}, t)$, 由于

$$L' - L = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_0}^2} \cdot 2\boldsymbol{v_0} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 2\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_0}^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \tag{2.10}$$

所以 $2\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_0}^2}$ 为常量, 定义这个常量为质量, 记作 $m$, 则

$$L(\boldsymbol{v_0}^2) = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v_0}^2 \tag{2.11}$$

2.11 式即为质点在惯性系中自由运动时的 Lagrange 函数. 不考虑质点间相互作用, 由 $N$ 个质点组成的体系有

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v_i}^2 \tag{2.12}$$

如果考虑封闭体系质点的相互作用, 则应在 $L$ 后附加一项, 这一项与所有质点的位置有关

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \boldsymbol{v_i}^2 - V(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \cdots \boldsymbol{x_N}) \tag{2.13}$$

于是我们得到了封闭质点系的 Lagrange 函数, 若使用广义坐标, 则

$$L = \sum_{i,j} \frac{1}{2} a_{ij}(q) \cdot \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q_1, q_2, \cdots q_f) \tag{2.14}$$

## 附: 物理学的公理化

分析力学与矢量力学最大的不同在于它是一个公理化体系, 是高度数学化的. 这个公理是最小作用量原理和 Lagrange 函数的形式. 我们导出 Lagrange 函数形式的时候并非通过严格的推导, 而是寻求必要的条件" 连蒙带猜", 所以它的形式也是分析力学的公理. 公理到此就没有了, 理论上说, 依靠公理可以严格导出整个分析力学体系, 这也是为什么分析力学是四大力学中最美丽动人的一个了.

# 第三章 对称性与守恒律

## §3.1 Largrange 函数的性质

我们已经知道将系统的 Largrange 函数代入 Euler-Largrange 方程即可得到体系的运动方程, 而通过研究 E-L 方程还可以发现 Largrange 函数一些有用的性质. 由 $\delta S=\int_{t_1}^{t_2}(\delta q\frac{\partial L}{\partial q}+\delta\dot{q}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}})\,\mathrm{d}t$ 知, 若 $L'=L+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(q,t)$, 则

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}(\delta q\frac{\partial L}{\partial q}+\delta\dot{q}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}})\,\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\mathrm{d}t \tag{3.1}$$

第二项可化为

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t=\frac{\partial f}{\partial q}\delta q\bigg|_{t_1}^{t_2}=0 \tag{3.2}$$

故于 Largrange 函数而言, 增加一项关于坐标和时间的函数的全导数并不影响运动方程. 这将是一个有用的性质, 下面正式进入对称性与守恒量部分.

## §3.2 时间平移不变性与能量守恒

若一个体系的 Largrange 函数不显含 $t$, 则称其具有时间平移不变性（时间平移对称性）, 则其关于时间的全导数

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial L}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\ddot{q} \tag{3.3}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial L}{\partial q}\dot{q}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\dot{q}\right)-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)\right]\dot{q} \tag{3.4}$$

代入 E-L 方程, 得

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\dot{q}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\dot{q}\right) \tag{3.5}$$

由于 $T$ 是关于 $\dot{q}$ 的 2 次齐次函数, 由 Euler 定理得

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2T) \tag{3.6}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2T-L)=0 \tag{3.7}$$

即

$$T+V=Const \tag{3.8}$$

令 $T+V=E$. 称 $E$ 为体系的能量, 得到能量守恒定律.

## §3.3　空间平移不变性与动量守恒

若一个体系的 Largrange 函数不显含位置坐标 $\vec{x}_i$, 则称其具有空间平移不变性, 则

$$\partial L=\frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i}\delta\vec{x}_i=0 \tag{3.9}$$

代入 E-L 方程, 得

$$\partial L=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right)\delta\vec{x}_i=0 \tag{3.10}$$

由于 $\delta\vec{x}_i$ 是任意的, 故

$$\sum_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right)=0 \tag{3.11}$$

即

$$\sum_i\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}=Const=\vec{p} \tag{3.12}$$

称 $\vec{p}$ 为系统的动量, 得到动量守恒定律. 若用广义坐标 $q_j$ 代替 $\vec{x}_i$, 即可得到广义动量 $\sum_j\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=Const$

## §3.4　空间各向同性与角动量守恒

若将一个体系旋转一个微小角度 $\delta\phi$, 而其 Largrange 函数不发生变化, 则称其具有空间各向同性. 显然

$$\delta\vec{x}=|\delta\vec{\phi}||\vec{x}|\sin\theta,\quad \theta=\langle\delta\vec{\phi},\vec{x}\rangle \tag{3.13}$$

故

$$\delta\vec{x}=\delta\vec{\phi}\times\vec{x},\quad \delta\vec{v}=\delta\vec{\phi}\times\vec{v} \tag{3.14}$$

由于

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i}\delta\vec{x}_i+\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\delta\vec{v}_i=0 \tag{3.15}$$

故

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i}(\delta\vec{\phi}\times\vec{x}_i)+\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}(\delta\vec{\phi}\times\vec{v}_i)=0 \tag{3.16}$$

代入 E-L 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right)(\delta\vec{\phi}\times\vec{x}_i)+\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\vec{\phi}\times\vec{x}_i)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\vec{\phi})\times\vec{x}_i\right]=0 \tag{3.17}$$

显然 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\vec{\phi})=0$, 故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\right)(\delta\vec{\phi}\times\vec{x}_i)+\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\vec{\phi}\times\vec{x}_i)\right]=0 \tag{3.18}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\delta\vec{\phi}\cdot(\vec{x}_i\times\vec{p}_i)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{x}_i\times\vec{p}_i)\cdot\delta\vec{\phi}=0 \tag{3.19}$$

由于 $\delta\vec{\phi}$ 是任意的, 故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{x}_i\times\vec{p}_i)=0 \tag{3.20}$$

得到

$$\vec{x}_i\times\vec{p}_i=Const=\vec{L} \tag{3.21}$$

称 $\vec{L}$ 为系统的角动量, 得到角动量守恒定律.

## §3.5 不同参考系中 $E,\vec{p},\vec{L}$ 间的关系

假设参考系 $K'$ 相对于惯性系 $K$, 以 $\vec{V}$ 运动, 即

$$\vec{v}_0=\vec{v}'+\vec{V} \tag{3.22}$$

则系统的动量为

$$\vec{p}_i=m_i\vec{v}_{0i}=m_i\vec{v}'_i+\sum_i m_i\vec{V} \tag{3.23}$$

若在 $K'$ 系中系统动量为 0, 即 $\vec{p}'=0$, 只需令

$$\vec{V}=\frac{m_i\vec{v}_{0i}}{\sum_i m_i} \tag{3.24}$$

称其为质心速度 $\vec{V}_c$, 显然, 它对时间的原函数是

$$\vec{x}_c=\frac{m_i\vec{x}_{0i}}{\sum_i m_i} \tag{3.25}$$

称其为质心坐标 $\vec{x}_c$. 下文称 $\sum m_i$ 为 $\mu$. 对于能量 $E$, 有

$$\begin{aligned}E_0 &= \frac{1}{2}m_i\vec{v}_{0i}^{\,2}+V\\ &= \frac{1}{2}m_i\vec{v}'^{2}_i+m_iv'_i\vec{V}+\frac{1}{2}\mu\vec{V}+V\end{aligned}\tag{3.26}$$

对于 $\vec{V}=\vec{V}_c$（即质心系）, 有

$$E_0=E'+\frac{1}{2}\mu\vec{V}_c^2\tag{3.27}$$

对于角动量 $\vec{L}$, 有

$$\vec{L}_0=\vec{x}_{0i}\times m_i\vec{v}_{0i}\tag{3.28}$$

在质心系中, 有

$$\vec{L}_0=\vec{x}'_i\times m_i\vec{v}_{0i}+\vec{x}_c\times m_i\vec{v}_{0i}\tag{3.29}$$

即

$$\vec{L}_0=\sum\vec{x}'_i\times\mu\vec{V}_c+\vec{x}_c\times\mu\vec{V}_c\tag{3.30}$$

由于 $\mu=\sum_i m_i$, $x_c=\frac{\vec{x}_im_i}{\mu}$, $V_c=\frac{m_iv_{0i}}{\mu}$, 所以

$$\vec{L}_0=\vec{L}'+\frac{(m_i\vec{x}_{0i})\times(m_j\vec{v}_{0j})}{\sum_i m_i}\tag{3.31}$$

其中 $\vec{L}_0$ 的第二项成为内禀角动量.

下面看转动参考系的情况. 假设参考系 $K$ 相对于 $K'$ 以 $\vec{\Omega}$ 的角速度转动, 显然有

$$\vec{v}'=\vec{v}+\vec{\Omega}\times\vec{x}\tag{3.32}$$

我们直接考虑 Largrange 函数的形式, 先看 $K'$ 系,

$$L=\frac{1}{2}m\vec{v}_0^{\,2}-V=\frac{1}{2}m(\vec{v}'+\vec{v})^2-V=\frac{1}{2}m\vec{v}'^{\,2}+m\vec{v}'\cdot\vec{V}+\frac{1}{2}m\vec{V}^2-V\tag{3.33}$$

由于 $\vec{V}^2(t)$ 可看成时间的全导数, 故略去, 得

$$L=\frac{1}{2}m\vec{v}'^{\,2}+m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{x}'\cdot\vec{V})-m\vec{x}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{V})-V\tag{3.34}$$

即

$$L=\frac{1}{2}m\vec{v}'^{\,2}-m\vec{x}\cdot\vec{V}-V\tag{3.35}$$

由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\vec{v}'}\right)=\frac{\partial L}{\partial\vec{x}'}$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}')=-m\vec{V}-\frac{\partial V}{\partial\vec{x}}\tag{3.36}$$

其中, 称 $m\dot{\vec{V}}$ 为平动引起的惯性力. 再考虑 $K$ 系的情况, 将(3.32)式代入(3.35)式, 得

$$L=\frac{1}{2}m\vec{v}^2+m\vec{v}\cdot(\vec{\Omega}\times\vec{x})+\frac{1}{2}m(\vec{\Omega}\times\vec{x})^2-m\vec{x}\cdot\dot{\vec{V}}-V \tag{3.37}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}\right)=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}+m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{x}+m\vec{\Omega}\times\vec{v} \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\vec{x}}=m(\vec{v}\times\vec{\Omega})+m(\vec{\Omega}\times\vec{x})\times\vec{\Omega}-m\dot{\vec{V}}-\frac{\partial V}{\partial\vec{x}} \tag{3.39}$$

整理得

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial V}{\partial\vec{x}}-m\dot{\vec{V}}+2m(\vec{v}\times\vec{\Omega})+m(\vec{\Omega}\times\vec{x})\times\vec{\Omega}-m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{x} \tag{3.40}$$

其中 $2m(\vec{v}\times\vec{\Omega})$ 称为科里奥利力,$m(\vec{\Omega}\times\vec{x})$ 称为惯性离心力. 再考虑能量的情况:

$$E=\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}\vec{v}-L \tag{3.41}$$

$$E_0=\frac{1}{2}m\vec{v}^2-\frac{1}{2}m(\vec{\Omega}\times\vec{x})^2+m\vec{x}'\dot{\vec{V}}+V \tag{3.42}$$

假设 $K'$ 相对于 $K_0$ 无平动加速度, 则

$$E_0=\frac{1}{2}m\vec{v}^2-\frac{1}{2}m(\vec{\Omega}\times\vec{x})^2+V \tag{3.43}$$

称 $-\frac{1}{2}m(\vec{\Omega}\times\vec{x})^2$ 为惯性离心力势能. 代入(3.32)式, 得

$$E=E_0-\vec{\Omega}\cdot\vec{L} \tag{3.44}$$

## §3.6 力学相似性

考虑变换 $x'=\lambda_1 x,\ t'=\lambda_2 t$, 假设 $V(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 是 $k$ 次齐次函数, 则

$$V(x_1',x_2',\cdots,x_N')=\lambda_1^k V(x_1,x_2,\cdots,x_N) \tag{3.45}$$

同理,

$$T(v_1',v_2',\cdots,v_N')=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k T(v_1,v_2,\cdots,v_N) \tag{3.46}$$

若

$$\lambda_2=\lambda_1^{1-\frac{k}{2}} \tag{3.47}$$

则 Largrange 函数只是整体乘一个系数, 运动方程不变, 一个有价值的应用是

$$\frac{t'}{t}=\left(\frac{x'}{x}\right)^{1-\frac{k}{2}} \tag{3.48}$$

$k=-1$ 时, 得到开普勒第三定律. 另一个应用与能量平均值有关, 由于

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\vec{v}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\vec{x}_i\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_i}\vec{x}_i \tag{3.49}$$

两边对时间求平均, 得

$$2\langle T\rangle = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\vec{x}_i\right)\frac{1}{t} + k\langle V\rangle \tag{3.50}$$

由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i}\vec{x}_i\right)\frac{1}{t}=0$, 所以

$$2\langle T\rangle = k\langle V\rangle \tag{3.51}$$

称其为位力定理.

# 附：齐次函数的 Euler 定理

定义： $f(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_i)=\lambda^k f(x_1,x_2,\dots,x_i)$, 则 $f(x_1,x_2,\dots,x_i)$ 为 $k$ 次齐次函数.

两边对 $\lambda$ 求偏导, 得

$$\sum_i \frac{\partial f(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_i)}{\partial(\lambda x_i)}\frac{\partial(\lambda x_i)}{\partial\lambda} = k\lambda^{k-1}f(x_1,x_2,\dots,x_i) \tag{3.52}$$

$$\sum_i \frac{\partial f(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_i)}{\partial(\lambda x_i)}\cdot\lambda x_i = k\lambda^{k}f(x_1,x_2,\dots,x_i) \tag{3.53}$$

令 $\lambda=1$, 得

$$\sum_i \frac{\partial f(x_1,x_2,\dots,x_i)}{\partial x_i}\cdot\lambda x_i = kf(x_1,x_2,\dots,x_i) \tag{3.54}$$