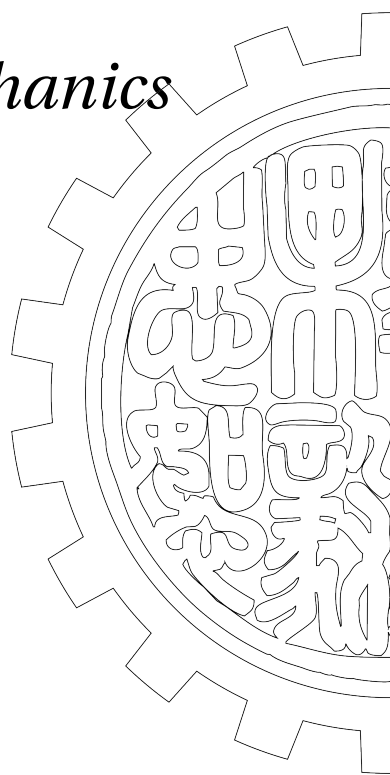


# 分析力学笔记

*Notes on Analytical Mechanics*

作者：规培 92 冯廷龙

2020 年 4 月 22 日



钱学森书院学业辅导中心

QIAN YUAN XUE FU

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

### 作品信息

- 标题：分析力学笔记 - *Notes on Analytical Mechanics*
- 作者：规培 92 冯廷龙
- 校对排版：钱院学辅排版组
- 出品时间：2020 年 4 月 22 日
- 总页数：24

### 许可证说明

 知识共享 (Creative Commons) BY-NC-ND 4.0 协议

本作品采用 **CC 协议** 进行许可。使用者可以在给出作者署名及资料来源的前提下对本作品进行转载，但不得对本作品进行修改，亦不得基于本作品进行二次创作，不得将本作品运用于商业用途。

本作品已发布于 **GitHub** 之上，发布地址为：

<https://qyxf.site/bookhub>

本作品的版本号为 1.0。

# 编者说明



规培 92 冯廷龙  
2020 年 4 月 22 日



QIAN YUAN XUE FU

# 目录

第一章 从矢量力学到分析力学 . . . . .	1
§1.1 自由度与广义坐标. . . . .	1
§1.2 虚功原理和 D'Alembert 原理 . . . . .	1
§1.3 Euler-Lagrange 方程 . . . . .	2
§1.4 弱耗散系统. . . . .	2
第二章 最小作用量原理 . . . . .	4
§2.1 泛函与变分. . . . .	4
§2.2 泛函极值与 Euler-Lagrange 方程 . . . . .	4
§2.3 最小作用量原理与 Lagrange 函数的形式 . . . . .	5
第三章 对称性与守恒律 . . . . .	7
§3.1 Lagrange 函数的性质 . . . . .	7
§3.2 时间平移不变性与能量守恒 . . . . .	7
§3.3 空间平移不变性与动量守恒 . . . . .	8
§3.4 空间各向同性与角动量守恒 . . . . .	8
§3.5 不同参考系中 $E, \mathbf{p}, \mathbf{L}$ 间的关系 . . . . .	9
§3.6 力学相似性. . . . .	11
第四章 正则方程 . . . . .	13
§4.1 Legendre 变换与 Hamilton 方程 . . . . .	13
§4.2 Poisson 括号 . . . . .	14
第五章 Maupertuis 原理 . . . . .	17
§5.1 从最小作用量原理到正则方程 . . . . .	17
§5.2 Maupertuis 原理 . . . . .	18
第六章 Hamilton-Jacob 方程 . . . . .	19
§6.1 正则变换 . . . . .	19
§6.2 Hamilton-Jacob 方程 . . . . .	20
§6.3 分离变量 . . . . .	21



# 第一章 从矢量力学到分析力学



## §1.1 自由度与广义坐标

先考虑一个由  $N$  个质点组成的力学体系, 若关于这个体系有  $k$  个约束, 则该体系的自由度为  $3N - k$ . 由于约束的存在, 原有直角坐标系下描述该体系的坐标  $x_i$  不再相互独立, 为此引入广义坐标  $q_j (j = 1, 2, \dots, 3N - k)$ , 即该自由度下能描述的该体系的最少个数的相互独立坐标. 显然, 我们可以用广义坐标  $q_j$  和时间  $t$  描述原有坐标  $x_i$ , 即

$$x_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t) \quad (1.1)$$

则

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \quad (\text{已使用爱因斯坦求和指标, 后同}) \quad (1.2)$$

## §1.2 虚功原理和 D'Alembert 原理

对于一个处于力学平衡状态的体系, 考虑其进行一个与所有约束条件自洽的微小位移  $\delta x_i$ , 称之为虚位移. 对于每个质点, 其所受外力  $F_i = 0$ , 故

$$F_i \delta x_i = 0 \quad (1.3)$$

由于  $F_i$  可表示为驱动力  $F_i^a$  与约束力  $F_i^c$  的合力, 且一般情况下  $F_i^c \delta x_i = 0$  (如曲面上运动时  $F_i$  必须沿法线方向), 故

$$F_i^a \delta x_i = 0 \quad (1.4)$$

称此式为虚功原理. 注: 虽然此时  $\delta x_i$  是约束条件下任取的, 但由于其互相不独立, 故不能从此式中推出  $F_i^a = 0$ .

考虑一个不属于力学平衡状态的体系, 引入惯性力  $-\dot{p}_i$ , 可以得到

$$(F_i^a - \dot{p}_i) \delta x_i = 0 \quad (1.5)$$

称此式为 D'Alembert 原理. 由于

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (1.6)$$



故

$$F_i^a \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j = m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (1.7)$$

令  $Q_j = F_i^a \frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ , 称其为广义力.

### §1.3 Euler-Lagrange 方程

由于

$$m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = m_i \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{x}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \quad (1.8)$$

又由 (1.2) 式可得

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (1.9)$$

将 (1.9) 式代入 (1.8) 式, 整理得

$$m_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial (\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (\frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2)}{\partial q_j} \quad (1.10)$$

令动能  $T = \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$ , 代入 (1.7) 式, 得

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right) \delta q_j = 0 \quad (1.11)$$

由于此时  $\delta q_j$  为任取且相互独立, 故

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0 \quad (1.12)$$

假设  $F_i^a$  由一与速度无关的势场提供, 即  $F_i^a = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$ , 则

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0 \quad (1.13)$$

令  $L = T - V$ , 即  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$ , 得到 Euler-Lagrange 方程.

### §1.4 弱耗散系统

对于一耗散体系, (1.5) 式不在适用. 假设阻力  $F^D = -k_j v_j (j = 1, 2, 3)$ , 构造瑞称耗散函数  $F = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} k_j v_{ij}^2 (j = 1, 2, 3)$ , 显然  $F^D = -\frac{\partial F}{\partial v}$ . 将广义力中驱动力一项并



入  $L$  (Lagrange 量), 则  $Q_j = F^D \frac{\partial x_i}{\partial q_i}$ , 即

$$Q_j = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \quad (1.14)$$

此时 Euler-Lagrange 方程修正为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (1.15)$$





## 第二章 最小作用量原理



### §2.1 泛函与变分

考虑一组曲线  $y(x)$  在区间  $[x_1, x_2]$  上的长度  $S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$ , 对于每一个确定的函数  $y(x)$ , 都可以在实数集中找到与之唯一对应的数  $S$ , 我们把这种关系称为泛函, 即函数空间向实数集的映射, 记为  $J[y]$ ,  $y(x)$  成为变量函数,  $J[y]$  称为  $y(x)$  的泛函. 下面只讨论积分形式的泛函, 可记为  $J[y] : S = \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) dx$ , 任取一个与  $y(x)$  相近的函数 (严格定义不给出, 直观上理解即可), 将其与  $y(x)$  的差记为  $\delta y(x)$ , 称为  $y(x)$  的变分.

### §2.2 泛函极值与 Euler-Lagrange 方程

考虑一组  $x_1, x_2$  两端函数值固定的函数, 若要使两端点之间的弧长最短, 等价于求积分  $S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2} dx$  的最小值, 这就是一个最简单的泛函极值问题. 类比函数极值可以得到泛函  $J[y]$  的最小值, 即  $\forall y(x), J[y + \delta y] - J[y] \geq 0$  恒成立, 代入一般表达式为

$$J[y + \delta y] - J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F[y + \delta y, y' + (\delta y)', x] dx - \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x) dx \quad (2.1)$$

Taylor 展开得到

$$J[y + \delta y] - J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} (\delta y)' \right] dx + \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \delta y + \frac{\partial}{\partial y'} (\delta y)' \right]^2 F dx + \dots \quad (2.2)$$

记  $\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} (\delta y)' \right] dx$  为  $\delta J[y]$ , 称为  $J[y]$  的一级变分. 类比函数极值可以得到泛函极值的必要条件是一级变分  $\delta J[y] = 0$  即

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} (\delta y)' \right] dx = 0 \quad (2.3)$$

对其进行分部积分, 得

$$\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0 \quad (2.4)$$



考虑边界条件  $\delta y(x_1) = \delta y(x_2) = 0$  (两端固定), 又由于右式  $\delta y$  可任取, 我们不加证明地指出 (变分学基本引理可以证明这个结论)

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (2.5)$$

得到泛函极值的 Euler-Lagrange 方程. 有关数学的介绍就到这里, 如果有兴趣可以参考泛函分析课本.

## §2.3 最小作用量原理与 Lagrange 函数的形式

下面介绍分析力学中最重要的原理: 最小作用量原理. 简而言之, 任意一个只存在完整约束的力学系统, 都可以用它的广义坐标  $q_j$  的泛函  $S$  表示其运动路径, 称其为力学系统的作用量, 可以写成  $S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_j, \dot{q}_j, t) dt$  的形式, 当  $S$  取极小值时确定的运动路径为这个系统真实的运动路径, 式中  $L(q_j, \dot{q}_j, t)$  称为 Lagrange 函数. 与前述泛函极值的 Euler-Lagrange 方程推导类似, 我们可以得到

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j dt = 0 \quad (2.6)$$

前述变分法基本引理对这个和式依然有效, 得到  $j$  个方程 ( $j$  是自由量)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (2.7)$$

这就是分析力学中的 Euler-Lagrange 方程. 下面讨论 Lagrange 函数的形式.

首先注意到  $L(q_j, \dot{q}_j, t)$  的选取具有任意性, 假如令其增加一项某个关于坐标和时间的函数的全导数, 即  $L' = L + \frac{d}{dt} f(q, t)$ , 代入作用量, 得到

$$\delta S' = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_j, \dot{q}_j, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} [f(q + \delta q, t) - f(q, t)] dt \quad (2.8)$$

第二项可化为

$$\frac{\partial f}{\partial q} \delta q(t_2) - \frac{\partial f}{\partial q} \delta q(t_1) = 0 (\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0) \quad (2.9)$$

故其对导出 Euler-Lagrange 方程无影响, 即  $L$  与  $L'$  等价.

接下来从最简单的情况开始讨论, 即例子在惯性系  $K$  中的自由运动. 显然运动只与  $|\mathbf{v}_0|$  有关, 所以可以认为 Lagrange 函数只含  $\mathbf{v}^2$ , 即  $L(\mathbf{v}_0^2)$ . 然后, 令  $K$  相对于惯性系  $K'$  以无穷小的速度  $\boldsymbol{\varepsilon}$  移动, 则质点在  $K'$  系中速度  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}$ , 在  $K'$  系中  $L' = L(\mathbf{v}_0^2 + 2\mathbf{v}_0\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2)$ , 略去高阶小量  $\boldsymbol{\varepsilon}^2$  得到  $L' = L(\mathbf{v}_0^2 + 2\mathbf{v}_0\boldsymbol{\varepsilon})$ . 由伽利略相对



性原理知, 相同的运动在不同惯性系中的 Lagrange 函数等价, 即  $L' - L$  为某个只含坐标和时间的函数对时间的全导数  $\frac{d}{dt}f(\mathbf{x}, t)$ , 由于

$$L' - L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_0^2} \cdot 2\mathbf{v}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 2 \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_0^2} \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (2.10)$$

所以  $2 \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_0^2}$  为常量, 定义这个常量为质量, 记作  $m$ , 则

$$L(\mathbf{v}_0^2) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 \quad (2.11)$$

2.11 式即为质点在惯性系中自由运动时的 Lagrange 函数. 不考虑质点间相互作用, 由  $N$  个质点组成的体系有

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 \quad (2.12)$$

如果考虑封闭体系质点的相互作用, 则应在  $L$  后附加一项, 这一项与所有质点的位置有关

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2 - V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \quad (2.13)$$

于是我们得到了封闭质点系的 Lagrange 函数, 若使用广义坐标, 则

$$L = \sum_{i,j} \frac{1}{2} a_{ij}(q) \cdot \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q_1, q_2, \dots, q_f) \quad (2.14)$$

## 附: 物理学的公理化

分析力学与矢量力学最大的不同在于它是一个公理化体系, 是高度数学化的. 这个公理是最小作用量原理和 Lagrange 函数的形式. 我们导出 Lagrange 函数形式的时候并非通过严格的推导, 而是寻求必要的条件"连蒙带猜", 所以它的形式也是分析力学的公理. 公理到此就没有了, 理论上说, 依靠公理可以严格导出整个分析力学体系, 这也是为什么分析力学是四大力学中最美丽动人的一个了.



# 第三章 对称性与守恒律



## §3.1 Lagrange 函数的性质

我们已经知道将系统的 Lagrange 函数代入 Euler-Lagrange 方程即可得到体系的运动方程, 而通过研究 E-L 方程还可以发现 Lagrange 函数一些有用的性质. 由  $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \delta \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) dt$  知, 若  $L' = L + \frac{d}{dt} f(q, t)$ , 则

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\delta q \frac{\partial L}{\partial q} + \delta \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \delta q \frac{\partial f}{\partial q} \right) dt \quad (3.1)$$

第二项可化为

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \delta q \frac{\partial f}{\partial q} \right) dt = \left. \frac{\partial f}{\partial q} \delta q \right|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad (3.2)$$

故于 Lagrange 函数而言, 增加一项关于坐标和时间的函数的全导数并不影响运动方程. 这将是一个有用的性质, 下面正式进入对称性与守恒量部分.

## §3.2 时间平移不变性与能量守恒

若一个体系的 Lagrange 函数不显含  $t$ , 则称其具有时间平移不变性 (时间平移对称性), 则其关于时间的全导数

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \quad (3.3)$$

则

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) - \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \dot{q} \quad (3.4)$$

代入 E-L 方程, 得

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) \quad (3.5)$$

由于  $T$  是关于  $\dot{q}$  的 2 次齐次函数, 由 Euler 定理得

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} (2T) \quad (3.6)$$



故

$$\frac{d}{dt}(2T - L) = 0 \quad (3.7)$$

即

$$T + V = \text{Const} \quad (3.8)$$

令  $T + V = E$ . 称  $E$  为体系的能量, 得到能量守恒定律.

### §3.3 空间平移不变性与动量守恒

若一个体系的 Lagrange 函数不显含位置坐标  $\mathbf{x}_i$ , 则称其具有空间平移不变性, 则

$$\partial L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i} \delta \mathbf{x}_i = 0 \quad (3.9)$$

代入 E-L 方程, 得

$$\partial L = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \right) \delta \mathbf{x}_i = 0 \quad (3.10)$$

由于  $\delta \mathbf{x}_i$  是任意的, 故

$$\sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \right) = 0 \quad (3.11)$$

即

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} = \text{Const} = \mathbf{p} \quad (3.12)$$

称  $\mathbf{p}$  为系统的动量, 得到动量守恒定律. 若用广义坐标  $q_j$  代替  $\mathbf{x}_i$ , 即可得到广义动量  $\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \text{Const}$

### §3.4 空间各向同性与角动量守恒

若将一个体系旋转一个微小角度  $\delta \phi$ , 而其 Lagrange 函数不发生变化, 则称其具有空间各向同性. 显然

$$\delta \mathbf{x} = |\delta \phi| |\mathbf{x}| \sin \theta, \quad \theta = \langle \delta \phi, \mathbf{x} \rangle \quad (3.13)$$

故

$$\delta \mathbf{x} = \delta \phi \times \mathbf{x}, \quad \delta \mathbf{v} = \delta \phi \times \mathbf{v} \quad (3.14)$$

由于

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i} \delta \mathbf{x}_i + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \delta \mathbf{v}_i = 0 \quad (3.15)$$



故

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i}(\delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x}_i) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i}(\delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{v}_i) = 0 \quad (3.16)$$

代入 E-L 方程

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \right) (\delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x}_i) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \left[ \frac{d}{dt} (\delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x}_i) - \frac{d}{dt} (\delta \boldsymbol{\phi}) \times \mathbf{x}_i \right] = 0 \quad (3.17)$$

显然  $\frac{d}{dt}(\delta \boldsymbol{\phi}) = 0$ , 故

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \right) (\delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x}_i) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \left[ \frac{d}{dt} (\delta \boldsymbol{\phi} \times \mathbf{x}_i) \right] = 0 \quad (3.18)$$

即

$$\frac{d}{dt} [\delta \boldsymbol{\phi} \cdot (\mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i)] = \frac{d}{dt} (\mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i) \cdot \delta \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (3.19)$$

由于  $\delta \boldsymbol{\phi}$  是任意的, 故

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i) = 0 \quad (3.20)$$

得到

$$\mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i = \text{Const} = \mathbf{L} \quad (3.21)$$

称  $\mathbf{L}$  为系统的角动量, 得到角动量守恒定律.

## §3.5 不同参考系中 $E, \mathbf{p}, \mathbf{L}$ 间的关系

假设参考系  $K'$  相对于惯性系  $K$ , 以  $\mathbf{V}$  运动, 即

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + \mathbf{V} \quad (3.22)$$

则系统的动量为

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_{0i} = m_i \mathbf{v}'_i + \sum_i m_i \mathbf{V} \quad (3.23)$$

若在  $K'$  系中系统动量为 0, 即  $\mathbf{p}' = 0$ , 只需令

$$\mathbf{V} = \frac{m_i \mathbf{v}_{0i}}{\sum_i m_i} \quad (3.24)$$

称其为质心速度  $\mathbf{V}_c$ , 显然, 它对时间的原函数是

$$\mathbf{x}_c = \frac{m_i \mathbf{x}_{0i}}{\sum_i m_i} \quad (3.25)$$

称其为质心坐标  $\mathbf{x}_c$ . 下文称  $\sum m_i$  为  $\mu$ . 对于能量  $E$ , 有

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{0i}^2 + V \\ &= \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}'_i^2 + m_i \mathbf{v}'_i \mathbf{V} + \frac{1}{2} \mu \mathbf{V}^2 + V \end{aligned} \quad (3.26)$$



对于  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_c$  (即质心系), 有

$$E_0 = E' + \frac{1}{2}\mu V_c^2 \quad (3.27)$$

对于角动量  $\mathbf{L}$ , 有

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{x}_{0i} \times m_i \mathbf{v}_{0i} \quad (3.28)$$

在质心系中, 有

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{x}'_i \times m_i \mathbf{v}_{0i} + \mathbf{x}_c \times m_i \mathbf{v}_{0i} \quad (3.29)$$

即

$$\mathbf{L}_0 = m_i \mathbf{x}'_i \times \mathbf{v}'_i + \mathbf{x}_c \times \mu \mathbf{V}_c \quad (3.30)$$

由于  $\mu = \sum_i m_i$ ,  $\mathbf{x}_c = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_{0i}}{\mu}$ ,  $\mathbf{V}_c = \frac{\sum_i m_i \mathbf{v}_{0i}}{\mu}$ , 所以

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}' + \frac{(\sum_i m_i \mathbf{x}_{0i}) \times (\sum_i m_i \mathbf{v}_{0i})}{\sum_i m_i} \quad (3.31)$$

其中  $\mathbf{L}_0$  的第一项成为内禀角动量.

下面看转动参考系的情况. 假设参考系  $K$  相对于  $K'$  以  $\boldsymbol{\Omega}$  的角速度转动, 显然有

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} \quad (3.32)$$

我们直接考虑 Lagrange 函数的形式, 先看  $K'$  系,

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 - V = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}' + \mathbf{v})^2 - V = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 + m\mathbf{v}' \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2}m\mathbf{V}^2 - V \quad (3.33)$$

由于  $\mathbf{V}^2(t)$  可看成时间的全导数, 故略去, 得

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 + m \frac{d}{dt}(\mathbf{x}' \cdot \mathbf{V}) - m\mathbf{x} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{V}) - V \quad (3.34)$$

即

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}'^2 - m\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{V}} - V \quad (3.35)$$

由于  $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}'}) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}'}$ , 所以

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}') = -m\dot{\mathbf{V}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.36)$$

其中, 称  $-m\dot{\mathbf{V}}$  为平动引起的惯性力. 再考虑  $K$  系的情况, 将(3.32)式代入(3.35)式, 得

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + m\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) + \frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 - m\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{V}} - V \quad (3.37)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{x} + m\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \times \boldsymbol{\Omega} - m\dot{\mathbf{V}} - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.39)$$



整理得

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} - m\dot{\mathbf{V}} + 2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \times \boldsymbol{\Omega} - m\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{x} \quad (3.40)$$

其中  $2m(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega})$  称为科里奥利力,  $m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}) \times \boldsymbol{\Omega}$  称为惯性离心力. 再考虑能量的情况:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} - L \quad (3.41)$$

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - \frac{1}{2} m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 + m\mathbf{x}' \dot{\mathbf{V}} + V \quad (3.42)$$

假设  $K'$  相对于  $K_0$  无平动加速度, 则

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - \frac{1}{2} m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2 + V \quad (3.43)$$

称  $-\frac{1}{2} m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2$  为惯性离心力势能. 代入(3.32)式, 得

$$E = E_0 - \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{L} \quad (3.44)$$

## §3.6 力学相似性

考虑变换  $x' = \lambda_1 x$ ,  $t' = \lambda_2 t$ , 假设  $V(x_1, x_2, \dots, x_N)$  是  $k$  次齐次函数, 则

$$V(x'_1, x'_2, \dots, x'_N) = \lambda_1^k V(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (3.45)$$

同理,

$$T(v'_1, v'_2, \dots, v'_N) = \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^k T(v_1, v_2, \dots, v_N) \quad (3.46)$$

若

$$\lambda_2 = \lambda_1^{1-\frac{k}{2}} \quad (3.47)$$

则 Lagrange 函数只是整体乘一个系数, 运动方程不变, 一个有价值的应用是

$$\frac{t'}{t} = \left( \frac{x'}{x} \right)^{1-\frac{k}{2}} \quad (3.48)$$

$k = -1$  时, 得到开普勒第三定律. 另一个应用与能量平均值有关, 由于

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \mathbf{x}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{x}_i \quad (3.49)$$

两边对时间求平均, 得

$$2\langle T \rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \mathbf{x}_i \right) \frac{1}{t} + k\langle V \rangle \quad (3.50)$$

由于  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \mathbf{x}_i \right) \frac{1}{t} = 0$ , 所以

$$2\langle T \rangle = k\langle V \rangle \quad (3.51)$$

称其为位力定理.





## 附：齐次函数的 Euler 定理

定义：  $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_i) = \lambda^k f(x_1, x_2, \dots, x_i)$ , 则  $f(x_1, x_2, \dots, x_i)$  为  $k$  次齐次函数.

两边对  $\lambda$  求偏导, 得

$$\sum_i \frac{\partial f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_i)}{\partial(\lambda x_i)} \frac{\partial(\lambda x_i)}{\partial \lambda} = k \lambda^{k-1} f(x_1, x_2, \dots, x_i) \quad (3.52)$$

$$\sum_i \frac{\partial f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_i)}{\partial(\lambda x_i)} \cdot \lambda x_i = k \lambda^k f(x_1, x_2, \dots, x_i) \quad (3.53)$$

令  $\lambda = 1$ , 得

$$\sum_i \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_i)}{\partial x_i} \cdot \lambda x_i = k f(x_1, x_2, \dots, x_i) \quad (3.54)$$



# 第四章 正则方程



## §4.1 Legendre 变换与 Hamilton 方程

我们已经知道, Lagrange 力学是使用广义坐标  $q_i$  和广义速度  $\dot{q}_i$  来描述系统的力学状态的, 而接下来要讲述的方法则是使用广义坐标  $q_i$  和广义动量  $p_i$ , 即 Hamilton 力学, 为此, 我们需要从 Lagrange 力学出发, 使用 Legendre 变换以实现变量代换, 考虑一个系统的 Lagrange 函数的微分, 即

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (4.1)$$

代入 Euler-Lagrange 方程, 得

$$dL = \frac{d}{dt} \left( \frac{L}{\dot{q}_i} \right) dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (4.2)$$

定义  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  为广义动量, 则

$$dL = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (4.3)$$

变换右边第二项, 得

$$dL = \dot{p}_i dq_i + d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (4.4)$$

$$d(p_i \dot{q}_i - L) = \dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (4.5)$$

令  $p_i \dot{q}_i - L = H$ , 称其为 Hamilton 量, 则

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad (4.6)$$

称此式为 Hamilton 方程, 亦称正则方程, 称  $p_i, q_i$  为一对共轭变量  
我们注意到, 由 (4.5) 式得

$$\frac{dH}{dt} = \dot{q}_i \dot{p}_i - \dot{p}_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (4.7)$$



又由 (4.6) 式得

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (4.8)$$

所以

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (4.9)$$

即若 Lagrange 函数不显含时间, 则 Hamilton 函数亦不显含时间, 且其对时间得变化率为 0. 考虑 Hamilton 函数的物理意义是用  $p_i, q_i$  表示的系统的总能量, 我们得到能量守恒定律.

## §4.2 Poisson 括号

考虑一个变量为  $p_i, q_i, t$  的力学量  $f$  对时间的导数, 即

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.10)$$

代入正则方程, 得

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.11)$$

定义  $H, f$  的 Poisson 括号  $\{H, f\} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i}$ , 则

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (4.12)$$

若力学量  $f$  对时间的变化率为 0, 称其为系统得运动积分 (守恒量), 若  $f$  为运动积分, 则

$$\{H, f\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (4.13)$$

特别地, 当  $f$  不显含时间时, 有

$$\{H, f\} = 0 \quad (4.14)$$

对于任意两个函数  $f, g$  也有 Poisson 括号  $\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}$ , Poisson 括号有许多性质, 下面直接列举, 略去证明

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (4.15)$$

$$\{f, c\} = 0 \quad (c \text{ 为常数}) \quad (4.16)$$

$$\{c_1 f_1 + c_2 f_2, g\} = c_1 \{f_1, g\} + c_2 \{f_2, g\} \quad (4.17)$$



$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} \quad (4.19)$$

特别地, 对于  $g = q_k, p_k$  时, Poisson 括号化为偏导数, 即

$$\{f, q_k\} = \frac{\partial f}{\partial p_k}, \quad \{f, p_k\} = -\frac{\partial f}{\partial q_k} \quad (4.20)$$

再令  $f = p_i, q_i$ , 得到

$$\{p_i, q_i\} = \delta_{ik}, \quad \{p_i, p_k\} = 0, \{q_i, q_k\} = 0 \quad (4.21)$$

Poisson 括号的一个重要性质是所谓 Jacob 恒等式, 即

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \quad (4.22)$$

我们来简单地证明一下, 注意到左边和式一定是由  $f, g, h$  的二阶偏导数组成的, 只要证明不存在  $f, g, h$  中任意一个函数的二阶偏导数, 即得证, 先考虑  $f$ , 令  $D_1(\phi) = \{g, \phi\}$ ,  $D_2(\phi) = \{h, \phi\}$ , 则含  $f$  的二阶偏导数的项为

$$D_1(D_1(f)) - D_2(D_1(f)) = (D_1 D_2 - D_2 D_1)f \quad (4.23)$$

因为  $D_1, D_2$  可以写成

$$D_1 = \xi_k \frac{\partial}{\partial X_k}, \quad D_2 = \eta_k \frac{\partial}{\partial X_k} \quad (4.24)$$

其中  $\xi_k, \eta_k$  为变量  $X_k$  的任意函数, 则

$$D_1 D_2 - D_2 D_1 = \left( \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial X_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial X_k} \right) \frac{\partial}{\partial X_l} \quad (4.25)$$

不存在二阶偏导数项, 所以式中不存在  $f$  的二阶偏导数, 同理可证不存在  $g, h$  的二阶偏导数, Jacob 恒等式得证.

Jacob 恒等式的一个重要应用是所谓 Poisson 定理, 即: 任意 2 个运动积分的 Poisson 括号一定是运动积分, 若  $f, g$  不显含时间, 则证明很易, 只需令 (4.22) 式中  $h = H$ , 即

$$\{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \{H, \{f, g\}\} = 0 \quad (4.26)$$

由 (4.14) 式, 得

$$\{H, \{f, g\}\} = 0 \quad (4.27)$$

即  $\{f, g\}$  为运动积分, 若  $f, g$  显含时间, 则将其对时间求偏导, 得

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} \quad (4.28)$$



代入 (4.13) 式, 得

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \{g, \{H, f\}\} - \{f, \{H, g\}\} \quad (4.29)$$

运用 Jacob 恒等式, 化简得

$$\{H, \{f, g\}\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = 0 \quad (4.30)$$

得证.



# 第五章 Maupertuis 原理



## §5.1 从最小作用量原理到正则方程

由定义我们知道  $s = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ , 现在, 让我们从另一个角度看最小作用量原理, 若用作用量  $S$  表示运动轨道固定, 起点  $q(t_0)$  固定, 但终点  $q(t)$  变化的表示系统运动的量, 对  $S$  变分, 得到

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \quad (5.1)$$

由于轨道符合 Euler-Lagrange 方程, 故积分项为 0, 取  $\delta q_i(t_1) = 0, \delta q_i(t_2) = \delta q_i$ , 有

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = p_i \delta q_i \quad (5.2)$$

所以

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad (5.3)$$

由定义知

$$\frac{dS}{dt} = L, \quad \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + p_i \dot{q}_i \quad (5.4)$$

所以

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -(p_i \dot{q}_i - L) = -H \quad (5.5)$$

由 (5.3), (5.5) 式得 (将  $S$  看作坐标和时间的函数)

$$dS = p_i d\dot{q}_i - H dt \quad (5.6)$$

$$S = \int (p_i d\dot{q}_i - H dt) \quad (5.7)$$

对其变分, 得

$$\delta S = \int \left[ \delta p_i d\dot{q}_i + p_i d\delta \dot{q}_i - \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i + \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt \right] \quad (5.8)$$

$$\delta S = \int \left( d\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt \right) \delta p_i + p_i \delta \dot{q}_i \Big| - \int \left( dp_i + \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} dt \right) \delta q_i \quad (5.9)$$



由于  $\delta S = 0, \delta q_i = 0$ , 所以

$$dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt, \quad dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} dt \quad (5.10)$$

即正则方程

## §5.2 Maupertuis 原理

对于一个保守体系,  $H = E = \text{Const}$ , 由 (5.7) 式得

$$S = \int p_i dq_i - E(t - t_0) \quad (5.11)$$

称  $\int p_i dq_i$  为简约作用量, 记为  $S_0$ , 对  $S$  变分, 得

$$\delta S = \delta S_0 - E \delta t \quad (5.12)$$

由 (5.5) 式可得

$$\delta S = -H \delta t - E \delta t \quad (5.13)$$

故对于保守体系, 我们得到

$$\delta S_0 = \delta \int p_i dq_i = 0 \quad (5.14)$$

在此基础上, 由  $E\left(q, \frac{dq}{dt}\right) = E$  反解出  $dt$  并代入定义式  $p_i = \frac{\partial L(q, \frac{dq}{dt})}{\partial \dot{q}_i}$ , 结合 (5.14) 式可得到系统的轨道方程, 称此原理为 Maupertais 原理。当 Lagrange 函数形式可写成 (2.14) 式时, 可得

$$p_i = a_{ij}(q) \dot{q}_j \quad (5.15)$$

$$E = \frac{1}{2} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j + V(q) \quad (5.16)$$

由 (5.16) 式解出

$$dt = \sqrt{\frac{a_{ij}(q) dq_i dq_j}{2(E - V)}} \quad (5.17)$$

代入 (5.15), (5.14) 式可得

$$\delta S_0 = \int \sqrt{2a_{ij}(q) dq_i dq_j (E - V)} = 0 \quad (5.18)$$

由此可确定运动轨道方程, 对 (5.16) 式积分, 得

$$\int \sqrt{\frac{a_{ij}(q) dq_i dq_j}{2(E - V)}} = t - t_0 \quad (5.19)$$

(5.19)(5.18) 式共同确定系统的运动状态



# 第六章 Hamilton-Jacob 方程



## §6.1 正则变换

考虑一组从旧得坐标、动量向新的坐标、动量的变换

$$P = P(p, q, t), \quad Q = Q(p, q, t), \quad H = H(P, Q, t) \quad (6.1)$$

若其满足正则方程

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad (6.2)$$

则称该变换为正则变换，由于其满足 Hamilton 方程，其必满足

$$\delta \int (p_i dq_i - h dt) = \delta \int (P_i dQ_i - H dt) = 0 \quad (6.3)$$

由此得到

$$p_i dq_i - h dt - P_i dQ_i - H dt + dF \quad (6.4)$$

其中函数  $F$  在两积分极限时之差为对变分不起作用的常数，整理得

$$dF = \dot{p}_i dq_i - P_i dQ_i + (H - h) dt \quad (6.5)$$

所以

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial F}{\partial Q_i} = -P_i, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = H - h \quad (6.6)$$

我们还可以对 (6.5) 式进行 Legendre 变换，以得到不同变量表示得像  $F$  一样得函数（称其为母函数），如：

$$d\Phi = d(F + P_i Q_i) = p_i dq_i + Q_i dP_i + (H - h) dt \quad (6.7)$$

得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} = p_i, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial P_i} = Q_i, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H - h \quad (6.8)$$

正则变换得一个重要性质是 Poisson 括号不变，即

$$\{f, g\}_{PQ} = \{f, g\}_{p,q} \quad (6.9)$$





证明如下:

$$\begin{aligned}
 \{f, g\}_{PQ} &= \frac{\partial f}{\partial P_i} \frac{\partial g}{\partial Q_i} - \frac{\partial f}{\partial Q_i} \frac{\partial g}{\partial P_i} \\
 &= \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial P_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial P_i} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial Q_i} + \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_i} \right) \\
 &\quad - \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial Q_i} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_i} \right) \left( \frac{\partial g}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial P_i} + \frac{\partial g}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial P_i} \right) \\
 &= \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \{p_i, p_j\}_{PQ} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_j} \{q_i, p_j\}_{PQ} \\
 &\quad + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \{p_i, q_j\}_{PQ} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial q_j} \{q_i, q_j\}_{PQ} \\
 &= \left( \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \delta_{ij} \\
 &= \{f, g\}_{p,q}
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

## §6.2 Hamilton-Jacob 方程

由 (5.5) 式可得

$$\frac{\partial}{\partial t} S + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0 \tag{6.11}$$

称其为 Hamilton-Jacob 方程, 对于自由度为  $s$  的系统, 我们不加证明地指出, 解的形式为

$$S = f(q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s; t) + A \tag{6.12}$$

其中  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  与  $A$  为任意常数, 以  $f$  为母函数进行正则变换, 以  $\alpha_i$  为新动量,  $\beta_i$  为新坐标, 由 (6.8) 式得

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} + h = H \tag{6.13}$$

由于  $f$  满足 Hamilton-Jacob 方程, 故

$$H = \frac{\partial f}{\partial t} + h = \frac{\partial S}{\partial t} + h = 0 \tag{6.14}$$

由正则方程,

$$\dot{\alpha}_i = 0, \dot{\beta}_i = 0 \tag{6.15}$$

即,  $\alpha_i, \beta_i$  为常数, 同时利用  $s$  个方程

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i \tag{6.16}$$



可将坐标  $q$  用  $2s$  个常数和  $t$  表示出来, 运动方程得解. 由此总结求解力学问题的方法:

(1) 列出 Hamilton-Jacob 方程

(2) 求出函数  $S$  包含常数  $\alpha_1, \dots, \alpha_s, A$ .

(3) 将  $S$  对  $\alpha_i$  求偏导得到  $\beta_i$

(4) 由 (6.16) 式反解出  $q$  作为  $2s$  个常数和  $t$  的函数

(5)  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$  得到  $p$  关于时间的函数.

### §6.3 分离变量

有时为了得到  $S$ , 可利用分离变量的方法. 假设某一坐标  $q$ , 与  $\frac{\partial S}{\partial q}$ , 在 Hamilton-Jacob 方程中仅以组合  $\varphi(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1})$  形式出现, 即方程可写为

$$\Phi \left\{ q_i, t, \frac{\partial S}{\partial q_i}, \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi \left( q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1} \right) \right\} = 0 \quad (6.17)$$

则  $S$  可写为

$$S = S'(q_i, t) + S_1(q_1) \quad (6.18)$$

代入 (6.17) 式, 得

$$\Phi \left\{ q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \varphi \left( q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1} \right) \right\} = 0 \quad (6.19)$$

假设 (6.18) 式已得, 则  $q_1$  变化不应影响 (6.19) 式成立, 故

$$\varphi \left( q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1} \right) = \alpha_1 \quad (6.20)$$

$$\Phi \left\{ q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha_1 \right\} = 0 \quad (6.21)$$

由 (6.20) 式可求出  $S_1(q_1)$ , 依次类推将  $S$  完全求解。



# 参考书目



- [1] L.D. 朗道,E.M. 栗弗席兹. 力学 [M]. 北京: 高等教育出版社,2007
- [2] 刘川. 理论力学 [M]. 北京: 北京大学出版社,2019
- [3] 吴崇试, 高春媛. 数学物理方法 [M]. 北京: 北京大学出版社,2019



# 发布说明





为了使这份精心制作的笔记以更好的面貌呈现在同学们的面前，钱院学辅组织了一些同学用  $\text{\LaTeX}$  进行排版。在此对他们表示衷心的感谢！

## 参与排版成员

- 第 1-2 章排版：计试 81 朱吉羽
- 第 3 章排版：计试 71 韩意
- 第 4-6 章排版：钱 91 谢佳润

这份资料的下载地址：<https://github.com/qyxf/BookHub/notes-on-analytical-mechanics-v1.0.pdf>。若想获取更多学辅资料，可以关注 <https://qyxf.site/bookhub>。

如果对笔记有意见和建议，可以联系作者规培 92 冯廷龙同学（✉邮箱：[RobinFeng@stu.xjtu.edu.cn](mailto:RobinFeng@stu.xjtu.edu.cn)）；也可以通过以下方式联系我们：

-  钱院学辅信息发布站：<https://qyxf.site>
-  钱院学辅邮箱：[qianyuanxuefu@163.com](mailto:qianyuanxuefu@163.com)

同时欢迎同学们扫码加入我们的 QQ 群：



群名称：钱院学辅交流分享群  
群 号：852768981



群名称：钱院科粉群1.0  
群 号：979670536



QIAN YUAN XUE FU

- 钱院学辅交流分享群：有钱院优秀的学长学姐为大家答疑平日学习中的问题，分享学习资料和经验；
- 钱院科粉群：分享科研资源、公开课、最新科技评论，转发创新竞赛相关信息，就科研方法、学习提供答疑。

期待与大家的见面！

钱院学辅  
2020年4月22日