复分析笔记

Notes on Complex Analysis

作者：数试 82 裴兆辰

2020 年 5 月 27 日

钱学森书院学业辅导中心

QIAN YUAN XUE FU

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

作品信息

- **标题**：复分析笔记 - *Notes on Complex Analysis*
- **作者**：数试 82 裴兆辰
- **校对排版**：钱院学辅排版组
- **出品时间**：2020 年 5 月 27 日
- **总页数**：42

许可证说明

本作品已发布于 GitHub 之上，发布地址为：

https://qyxf.site/bookhub

本作品的版本号为 1.0。

前言

复变函数（作为数学专业课常被称为“复分析”，Complex Analysis）是数学系专业课程中的必修课，也是基础课，是我们在后续阶段的学习以及研究中必不可少的一大块内容，具体而言复变函数是复流形、解析数论等学科进行理论研究的必备工具。

本笔记内容以数学专业以及数学试验班（H）培养计划中大二下学期陈红斌老师教授的“复变函数”课程为基础，并连同其他与本科阶段复变函数基本内容有关的书籍整理而成，其中的知识内容安排大体与授课内容详略相当，但部分内容作者根据自身的理解对知识点的详略略作调整亦或是有所补充。作者希望本笔记可以帮助大家从庞杂的定理内容中整理出一个较为清晰的知识体系，以及完善定理在具体问题中的应用以达到更从容的面对考试的目的。

本笔记在许多定理的证明上并不做详细叙述，但会指出该定理的证明在课堂笔记中或是某本参考书中有所体现。定理证明的省略并不意味着定理的证明没有参考价值，反而这是我认为的这门学科中最精髓的部分，这部分充分体现了复分析与实分析的不同，这种对比性有助于更好地理解复分析这门学科。

笔记中某些内容可能难度较高，超出了课程范围内的要求，作者已对相关内容进行（*）标注，供读者选读。若是具有能力的同学能够从中有所启发、有所收获，作者甚是欣慰与感激。

数试 82 裴兆辰
2020 年 5 月 27 日

目录

第一章 **1**

第二章 **2**

第三章 柯西积分公式及应用 **3**

§3.1 全纯函数的积分表示 3

§3.2 *Cauchy* 积分定理 4

§3.3 全纯函数的原函数. 6

§3.4 *Cauchy* 积分公式 7

§3.5 *Cauchy* 积分公式的一些重要推论 10

§3.6 最大模原理. 12

§3.7 非齐次 *Cauchy* 积分公式 * 13

第四章 解析函数的 Taylor 展开及其应用 **14**

§4.1 Weierstrass 定理 14

§4.2 幂函数 16

§4.3 解析函数的 Taylor 展开 19

§4.4 Laurent 级数. 20

§4.5 孤立奇点 21

§4.6 相关的其他结论以及习题列举 22

第五章 留数定理与辐角定理 **31**

5.0.1 亚纯函数的原式 31

5.0.2 例题 33

第六章 **36**

§6.1 自同构群 II 36

§6.2 Schwarz-Christoffel 公式与边界对应定理 37

第七章 **39**

第一章

第二章

第三章 柯西积分公式及应用

§3.1 全纯函数的积分表示

可求长曲线. 对 $[a,b]$ 做分割 $\lambda : a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$, 取 $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i], i = 1,...,n$. 做 Riemann 和：$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$. 设 $d = \|\lambda\|$. $d \to 0$ 时，Riemann 和有极限（略去）. 记 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. 故

$$\begin{aligned}
R(f) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) - \Delta z_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} (u(\xi_k) + iv(\xi_k))(\Delta x_k + i\Delta y_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)\Delta y_k + i[(\sum_{k=1}^{n} u(\xi_k)\Delta y_k + \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k)\Delta x_k]
\end{aligned}$$

故当 u 于 v 在 γ 上连续时，令 $d \to 0$，则 f 的 Riemann 和趋于曲线积分：$\int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma vdx - udy$, 即：

定理 3.1.1. $f = u + iv$ 在可求长曲线 γ 上连续，则有：

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (vdx + udy).$$

定理 3.1.2. 若 $z = \gamma(t)$ 为光滑的曲线,f 在 γ 上连续,则:$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

证明. 由于 $z = \gamma(t)$ 故 $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

而 $dx = x'(t)dt, dy = y'(t)dt$，代入 3.1.1 即可得证. □

定理 3.1.3. 若 f, g 在可求长曲线 γ 上连续，则：

i) $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$

ii) $\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))\mathrm{d}z = \alpha\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z + \beta\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

iii) $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$. 其中 $\gamma_1 \cup \gamma_2 = \gamma, \gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$

定理 3.1.4 (长大不等式)**.** 若曲线 γ 的长度为 $L, M = \max_{z\in\gamma} |f(x)|$, 则 $|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z| \le ML$

证明. 直接利用 Riemann 和验证即可. □

§3.2 *Cauchy* 积分定理

定理 3.2.1 (*Cauhcy*)**.** 设 D 为 $\mathbb{C}$ 中的单连通域，$f \in H(D)$，且 $f' \in C(D)$, 则对 D 中的任意可求长闭曲线 γ，均有 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

证明. 由 Green 公式以及 C-R 方程直接得到. □

定理 3.2.2. 设 f 是域 D 中的连续函数，γ 是 D 内可求长曲线，则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在一条 D 上的折线 P 使得：

(i) P 和 γ 有相同的起点和终点，P 的其他顶点在 γ 上.

(ii) $|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z - \int_P f(z)\mathrm{d}z| < \varepsilon$.

证明. 见 chb 笔记. □

定理 3.2.3 (*Cauchy-Goursat*)**.** 设 D 为 $\mathbb{C}$ 中的单连通域，若 $f \in H(D)$, 则对于 D 中的任意可求长闭曲线 γ，均有 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

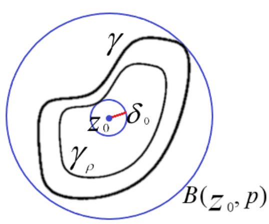
证明. 利用上一定理 3.2.2，见 chb 笔记. □

但定理 3.2.3 的条件仍可以再做减弱：

定理 3.2.4. 设 D 是简单可求长闭曲线 γ 的内部,若 $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$,则 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

这一定理的证明现在无法进行，我们对其弱化进行证明：

定理 3.2.4 (*)**.** 设 γ 为 $\mathbb{C}$ 上分段光滑的可求长闭曲线，记 D 为 γ 围成的区域内部，且存在 D 中的点 z_0，使得任意一条从 z_0 发出的射线与 γ 有且只有唯一交点，若 $f \in H(D) \cap C(\bar{D})$，则 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.



证明. 由于我们增加的条件，故 γ 可写为 $z=z_0+\gamma(t), a\le t\le b$. 记 $p=\max_{a\le t\le b}|\lambda(t)|, q=\max_{a\le t\le b}|\lambda'(t)|$. 闭区间分段连续保证有最值（光滑保证）由于 f 在 $\bar{D}$ 上连续，故一致连续，即 $\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0\ s.t. z_1,z_2\in\bar{D},|z_1-z_2|<\delta$ 时，$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$ 取 $\delta_0=\min\{\delta,p\}$, 故 $\frac{\delta_0}{p}<1$, 取 $\rho\ s.t. 1-\frac{\delta_0}{p}<\rho<1$

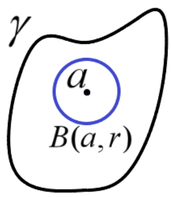
记曲线 $\gamma_\rho: z=z_0+\rho\lambda(t), a\le t\le b$, 则 $\gamma_\rho\subset D$. 由定理 3.2.3 得 $\int_{\gamma_\rho}f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f(z_0+\rho\lambda(t))\rho\lambda'(t)dt=0\Rightarrow\int_a^b f(z_0+\rho\lambda(t))\lambda'(t)dt=0$. 由于 $|(z_0+\rho\lambda(t))-(z_0+\lambda(t))|=(1-\rho)|\lambda(t)|\le(1-\rho)p<\delta_0<\delta$ 故 $|f(z_0+\rho\lambda(t))-f(z_0+\lambda(t))|<\varepsilon$. 故

$$
\begin{aligned}
|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z| &= |\int_a^b f(z_0+\lambda(t))\lambda'(t)dt| \\
&= |\int_a^b [f(z_0+\lambda(t))-f(z_0+\rho\lambda(t))]\lambda'(t)dt| \\
&\le \int_a^b |f(z_0+\rho\lambda(t))-f(z_0+\lambda(t))||\lambda'(t)|dt \\
&< \varepsilon q(b-a)
\end{aligned}
$$

由 ε 的任意性得 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0$.

□

定理 3.2.5 (多连同区域的 *Cauchy* 积分公式)**.** 略.



e.g 计算积分 $\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}, n\in\mathbb{Z}$, a 在 γ 围成区域内部.

解

故 $\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\int_{|z-a|=r}\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\int_0^\pi\frac{re^{i\theta}id\theta}{(re^{i\theta})^n}=ir^{1-n}\int_0^{2\pi}(e^{i\theta})^{1-n}d\theta$.

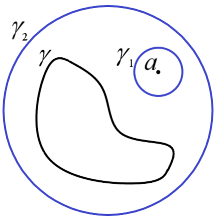
若 $n\ne1$, 则 $\int_0^{2\pi}(e^{i\theta})^{1-n}d\theta$ 为复积分，值为 0; 若 $n=1$, 则 $\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=i\int_0^{2\pi}1d\theta=2\pi i$.

e.g 计算积分 $\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{z-a}$.

解

(1) a 在 γ 围成区域内部，结果同上，$\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=2\pi i$.

(2) a 在 γ 围成区域外部，故 $\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=\int_{\gamma_2}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}-\int_{\gamma_1}\frac{\mathrm{d}z}{z-a}=0$.



§3.3 全纯函数的原函数

定理 3.3.1. 设 f 在域 D 中连续，且对于 D 中任意可求长闭曲线，均有 $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$，那么 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 是 D 上的全纯函数且在 D 中有 $F'(z) = f(z)$.

定理 3.3.2. 见 *chb* 笔记，略.

定理 3.3.3. 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域。$f \in H(D)$。那么 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 是 f 在 D 中的一个原函数

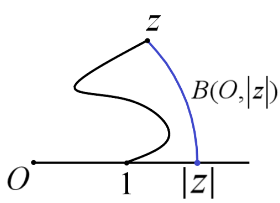
定理 3.3.4 (*Newton-Leibniz*)**.** 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的单连通域。$f \in H(D)$。Ψ 是 f 的一个原函数。则 $\int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi = \Psi(z) - \Psi(z_0)$

若 D 为 $\mathbb{C}$ 中的多连通区域 $f \in H(D)$。一般的 $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\mathrm{d}\xi$ 为一个多值函数。值受连接 z_0 与 z 的曲线控制。

令 $D = \mathbb{C}|0. f(z) = \dfrac{1}{z} \in H(D)$。考虑积分 $\int_1^z \dfrac{\mathrm{d}\xi}{\xi}$。对于连接 1 与 z 的曲线 γ:

- 若 γ 不围绕 O 点。

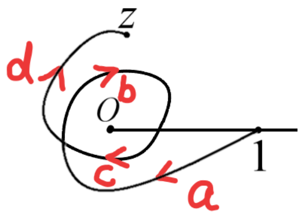
$$\int_1^z \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = \int_1^{|z|} = \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_0^{\arg z} \frac{\mathrm{d}(|z|e^{i\theta})}{|z|e^{i\theta}} = \log|Z| + i\arg z = \log Z$$



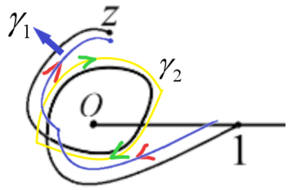
- 若 γ 围绕 O 点。则 $\gamma = \overset{\frown}{abcd}$。考虑 $\gamma_1 = \overset{\frown}{ad}, \gamma_2 = \overset{\frown}{cb}$。故 γ' 是不围绕 O 点的连线 1 与 z 的曲线。

  故对于如图所示的 γ，有

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \log z + 2\pi i$$



故对于一般的曲线 γ，$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \log z + R\cdot 2\pi i = Log z$。$k$ 为曲线 γ 绕原点所转圈数。



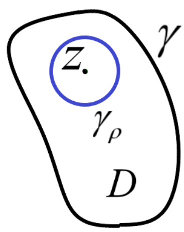
以上给出了 $\log z$ 的另一种定义。

§3.4 *Cauchy* 积分公式

定理 3.4.1. 设 D 是用简单可求长闭曲线 γ 围成的区域。若 $f \in H(D)\cap C(\bar{D})$。那么对任意的 $z\in D$ 均有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$$

证明. 任取 $z\in D$。由于 f 在 z 处连续，故 $\forall \epsilon > 0$，存在 $\sigma > 0. s.t. |z-\xi| < \sigma$ 时，$|f(z) - f(\xi)| < \epsilon$。取 $\rho < \sigma, s.t. B(z,\rho)\subset D$。记 $\gamma_\rho = \xi : |\xi - z| < \rho$ 设由 γ 与 γ_ρ 新城的二连通区域为 D'，则 $\frac{f(\xi}{\xi - z} \in H(D')\cap C(\bar{D}')$



于是有 $\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \int_{\gamma\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$，又由于 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma\rho}\frac{\mathrm{d}z}{\xi - z} = 1$，故 $f(z) = \int_{\gamma\rho}\frac{f(z)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$，故，

$$
\begin{aligned}
|f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi| &= \frac{1}{2\pi}|\int_{\gamma\rho}\frac{f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi-\int_{\gamma\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi| \\
&= \frac{1}{2\pi}|\int_{\gamma\rho}\frac{f(z)-f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma\rho}\frac{|f(z)-f(\xi)|}{|\xi-z|}\mathrm{d}\xi \le \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\rho\frac{\epsilon}{\rho} \\
&= \epsilon
\end{aligned}
$$

□

于是有 $\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi = \int_{\gamma\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$, 又由于 $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma\rho}\frac{\mathrm{d}z}{\xi-z}=1$, 故 $f(z)=\int_{\gamma\rho}\frac{f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$, 故,

$$
\begin{aligned}
|f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi| &= \frac{1}{2\pi}|\int_{\gamma\rho}\frac{f(z)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi-\int_{\gamma\rho}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi| \\
&= \frac{1}{2\pi}|\int_{\gamma\rho}\frac{f(z)-f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma\rho}\frac{|f(z)-f(\xi)|}{|\xi-z|}\mathrm{d}\xi \le \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\rho\frac{\epsilon}{\rho} \\
&= \epsilon
\end{aligned}
$$

定理 3.4.2. 设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中可求长曲线，g 是 γ 上的连续函数，那么由 Cauchy 型积分确定的函数：

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{g(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$$

在 $\mathbb{C}|\gamma$ 上有任意阶导数。

证明. 见史济怀《复变函数》。 □

定理 3.4.3. 设 D 是由可求长简单闭曲线 γ 围成的域，若 $f\in\mathbb{H}(D)\cap\mathbb{C}(D)$，那么 f 在 D 上有任意阶导数且对任意的 $z\in D$，有：

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi,\qquad n=1,2,\ldots$$

证明. 在定理 3.4.2 中令 $g(z)=f(Z)$ 即可。 □

定理 3.4.4. 若 f 在 D 上解析，则 f 在 D 上有任意阶导数。

证明. 任取 $z_0\in D$，存在充分小的 $\delta, s.t$，$\bar{B}(z_0,\delta)\subset D$。由定理 3.4.3.$f$ 在 $B(z_0,\delta)$ 中有任意阶导数。又由于 z_0 是任意的，故 f 在 D 中有任意阶导数 □

e.g 计算积分 $\int_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}$

法 1：原式 $=\int_{|z|=2}\dfrac{\frac{\mathrm{d}z}{z^2+16}}{z^2}$，令 $f(z)=\dfrac{1}{z^2+16}$。$f(z)$ 在 $|z|=2$ 内部解析：由定理 3.4.3 得

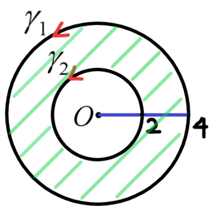
$$\int_{|z|=2}\frac{f(z)}{z^2}\mathrm{d}z=2\pi i f'(0)=0$$

法 2：$\int_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}=\dfrac{1}{16}(\int_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^2}-\int_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^2+16})=0$

定理 3.4.5. 设 $r_0,r_1...r_k$ 是 $k+1$ 条可求长简单闭曲线。$r_1,r_2...r_k$ 都存在 r_0 内部。$r_1,r_2...r_k$ 中每条都在其他 $k-1$ 条外部。D 是由这 $k+1$ 条曲线围成的区域。D 的边界 r 由 $r_0,r_1...r_k$ 组成。若 $f\in H(D)\cap C(\bar{D})$，则 $\forall z\in D$，有,$f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\int_\gamma\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$，且 f 有任意阶导数。

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi!}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi,n=1,2,...$$

e.g 计算积分 $\int_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}$



以原点为圆心做半径大于 4，半径为 R 得圆，则在圆环 $z:2\le|z|\le R$ 上 $f(z)=\dfrac{1}{z^3+1}$ 解析。故

$$\begin{aligned}\int_\gamma\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}&=(\int_{\gamma1}+\int_{\gamma2})\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}\\&=2\pi i(\frac{1}{z^3-1})'|_{z=-4}\\&=-\frac{32}{1323}\pi i\end{aligned}$$

故

$$\int_{|z|=2}=\frac{32}{1323}\pi i+\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}\tag{3.1}$$

由于 $|z|=R$ 时有 $|(z^3-1)(z+3)^2|\le(R^3-1)(R-4)^2$，故由长大不等式得：

$$|\int_{|z|=R}\frac{\mathrm{d}z}{(z^3-1)(z+4)^2}|<\frac{2\pi R}{(R^3-1)(R-4)^2}\to0(R\to+\infty)$$

故在 (1) 中令 $R\to+\infty$，得 $\int_{|z|=R}\frac{dz}{(z^3-1)(z+4)^2}=\frac{32}{1323}\pi i$

§3.5 *Cauchy* 积分公式的一些重要推论

定理 3.5.1 (*Liouville* 定理)**.** 有界整函数必为常数

证明. 设 f 为一有界整函数，其模的上界设为 M. 即 $\forall z\in\mathbb{C}$, 有 $|f(z)|\le M$, 任取 $a\in\mathbb{C}$, 在 $\partial B(a,R)$ 上由 *Cauchy* 不等式得 $|f(a)|\le\frac{M}{R}$, $\forall R>0$. 令 $R\to\infty$ 得 $|f'(a)|=0\Rightarrow f'(a)=0\forall a\in\mathbb{C}$ 故 f 为常数. □

定理 3.5.2 (代数基本定理)**.** 任意复系数多项式 $P(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ $(a_0\neq0)$ 在 $\mathbb{C}$ 中必有零点

证明. 略，见 *chb.* 和史济怀 $(F(x)=\frac{1}{P_z})$ □

定理 3.5.3 (*Morera*)**.** 若 f 是域 $\mathbb{D}$ 上的连续函数，且沿 $\mathbb{D}$ 内任意可求长闭曲线上的积分是 0，那么 f 在 $\mathbb{D}$ 上解析

证明. 见 *chb.* 笔记 □

习题

e.g *Liouville* 定理的另一个证明

证明. 设 f 是有界整函数，z_1,z_2 是 $B(0,r)$ 中的任意两点，则：

$$\begin{aligned}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}dz&=\frac{1}{z_1-z_2}\left(\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-z_1}dz-\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-z_2}dz\right)\\&=\frac{1}{z_2-z_1}\left(f(z_1)-f(z_2)\right)\end{aligned}$$

由于 f 有界. 故存在 $M>0, s.t\quad |f(z)|\le M,\forall z\in\mathbb{C}$

故：

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=r}\frac{f(z)dz}{(z-z_1)(z-z_2)}\right|&\le\int_0^{2\pi}\left|\frac{f(z)\cdot zd\theta}{(z-z_1)(z-z_2)}\right|\\&\le\int_0^{2\pi}\frac{M\cdot r}{|z-z_1|\cdot|z-z_2|}d\theta\\&\to0\quad(r\to\infty)\end{aligned}$$

故：$\int_{|z|=r}\frac{f(z)dz}{(z-z_1)(z-z_2)}=0.\quad$ 故:$f(z_1)=f(z_2)$.

由于 r,z_1,z_2 的任意性，故 $f(z)$ 为常值函数. □

e.g 设 f 为整函数, 若当 $z\to+\infty$ 时.$f(z)=0(|z|^{\alpha})$ $\alpha\geq 0$. 证明 f 是次数不超过 $[\alpha]$ 的多项式

证明. 记.$k=[\alpha]+1$

$\Rightarrow \lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{f(z)}{z^k}=0$. 由于 $f^{(k)}(z)=\dfrac{k!}{z\pi i}\displaystyle\int_{|z|=R}\dfrac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}\mathrm{d}\xi$. 故 $\forall\epsilon>0.\exists R,s.t\quad r>R$ 有 $\left|\dfrac{f(z)}{z^k}\right|<\epsilon, z\in B(0,r)$.（令 $r\to\infty$）

$\Rightarrow \left|f^{(k)}(z)\right|\leq\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{|z-\xi|=r}\left|\dfrac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}\right|\mathrm{d}\xi=r\epsilon$. 故 $f^{(k)}\equiv 0$. □

e.g 设 f 为整函数，如果 $f(\mathbb{C})\subset\{z\in\mathbb{C};Im\ z>0\}$, 证明 f 为常值函数.

证明. $\Rightarrow\forall z\in\mathbb{C},|f(z)+i|\geq 1$ 令 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)+i}$

故 $g(z)\in H(\mathbb{C})$. 并且 $|g(z)|\leq 1$. 故 g 为常值函数, 故 f 为常值函数 □

e.g 设 f 为整函数. 如果 $f(\mathbb{C})\subset\mathbb{C}\backslash[0,1]$. 证明: f 为常值函数.

证明. 令 $g(z)=\dfrac{f(z)}{1-f(z)}$. 若 $g(z)=r\in\mathbb{R}^{+}$. 则 $f(z)=\dfrac{r}{r+1}\in[0,1]$. 矛盾

故 $g(z)\subset\mathbb{C}\backslash[0,+\infty)$. 设 $h(z)=\sqrt{g(z)}$. 显然 h 也为整函数.

故 $h(\mathbb{C})\subset\{z\in\mathbb{C};Im\ z>0\}$. 故 h 为常值函数. 故 f 为常值函数 □

e.g (**更强形式的** *Morera*) 设 f 是域 $\mathbb{D}$ 上的连续函数, 若对于任意边界和内部位于 $\mathbb{D}$ 中三角形域 $\triangle$, 总有 $\int_{\partial\triangle}f(z)\mathrm{d}z=0$. 证明 $f\in H(\mathbb{D})$.

证明. 思路同 *Cauchy-Gousart*. 此处省略 □

e.g $\displaystyle\int_{|z|=a}\frac{e^z}{z^2+a^2}.(a\in(\mathbb{R})^{+})$.

解

$$
\begin{aligned}
&\int_{|z|=a}\frac{e^z}{z^2+a^2}\\
=&\int_{|z|=a}\frac{e^z}{(z+ai)(z-ai)}\mathrm{d}z=\frac{1}{2ai}\int_{|z|=a}\left(\frac{e^z}{z-ai}-\frac{e^z}{z+ai}\right)\mathrm{d}z\\
=&\frac{2\pi i}{2ai}\left((e^z)|_{z=ai}-(e^z)|_{z=-ai}\right)=\frac{2\pi i}{a}\sin a
\end{aligned}
$$

e.g 设 $f\in H(\{z:r<|z|<+\infty\})$. 且 $\lim\limits_{z\to\infty} z\cdot f(z)=A$. 证明：$\int_{|z|=R} f(z)\mathrm{d}z \to 2\pi i A$, $(R\to\infty)$.

证明. 由条件得.$\forall \epsilon>0, \exists R_0>r, s.t. |z|\geq R_0$ 时，有 $|zf(z)-A|<\epsilon$. 故：

$$\begin{aligned}\left|\int_{|z|=R} f(z)\mathrm{d}z-2\pi i A\right| &= \left|\int_{|z|=R} f(z)\mathrm{d}z-\int_{|z|=R}\frac{A}{z}\mathrm{d}z\right| \\ &= \left|\int_{|z|=R}(f(z)-\frac{A}{z})\mathrm{d}z\right| \leq \int_{|z|=R}\left|f(z)-\frac{A}{z}\right|\mathrm{d}z \\ &\leq \int_{|z|=R}\frac{\epsilon}{R}\mathrm{d}z=2\pi\epsilon\end{aligned}$$

□

e.g 无界区域的 *Cauchy* 积分公式：

设 γ 为 $\mathbb{C}$ 中的有限的可求长闭曲线，设 γ 围成的区域为 D. 记 $\Omega=\mathbb{C}\backslash(D\cup\gamma)$

设 $f\in C(\Omega\cup\gamma)\cap H(\Omega)$，且 $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z)=f(\infty)\in\mathbb{C}$. 则 $f(z)=f(\infty)-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$.

证明. 任取 $z\in\Omega.\exists R>0, s.t. \gamma\cup\{z\}\subset B(0,R)$.

由 $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$.

取 $\xi\in\{z:|z|=R\}$. 令 $R\to+\infty$, $\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}\cdot\xi \to f(\infty)$

由前例子可得 $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi \to f(\infty)$, $R\to+\infty$

故 $f(z)=f(\infty)-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$ □

e.g (Painlevé 原理) 设 D 为域，$\gamma_1,\gamma_2\dots\gamma_n$ 是 D 中的 n 条可求长闭曲线，若 $f\in C(D)\cap H(D\backslash\bigcup\limits_{k=1}^{n}\gamma_k)$ 则 $f\in H(D)$.

证明. 利用定理 3.2.4 及 *Morera* 定理即可，略 □

§3.6 最大模原理

定理 3.6.1 (平均值定理). 设 $f\in H(B(z_0,r))\cap C(\overline{B(z_0,r)})$. 则：$f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta$.

证明. 由 *Cauchy* 积分公式得 $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-z_0|=r}\dfrac{f(\xi)}{\xi-z_0}\mathrm{d}\xi$

记 $\xi=z_0+re^{i\theta}\Rightarrow \mathrm{d}\xi=ire^{i\theta}d\theta=i(\xi-z_0)d\theta$

$\Rightarrow f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})d\theta$ □

定理 3.6.2 (最大模定理)**.** 设 Ω 为区域 $f\in H(\Omega)$. 则 $|f|$ 在 Ω 内有最大值当且仅当 f 为常函数

证明. 此处给出利用区域连通性与平均值原理的证法，见 *chb* 笔记. 略

具体可见方企勤《复变函数》 □

定理 3.6.3. 设 $D\subset\mathbb{C}$ 为有界域. 设 f 为非常值函数. $f\in H(D)\cap C(D)$. 则 f 的最大模在且只在 ∂D 上取到

证明. 由定理 *3.6.2* 可直接得到. 略 □

定理 3.6.4 (Schwarz 引理)**.** 设 $f\in H(B(0,1))$, 且有 $\forall z\in B(0,1)$, $|f(z)|\le 1$, $f(0)=0$. 则 $\forall z\in B(0,1)$ 有 $|f(z)|\le|z|$, $|f'(0)|\le 1$. 并且若存在 $z_0\in B(0,1)$ $z_0\neq 0$, 有 $|f(z_0)|=|z_0|$, 或 $|f'(0)|=1$, 则 $\exists\theta\in\mathbb{R}$, $s.t.$ $\forall z\in B(0,1)$ 有 $f(z)=e^{i\theta}\cdot z$

证明. 略. 见 *chb* 笔记以及方企勤《复变函数》 □

§3.7 非齐次 *Cauchy* 积分公式 *

定理 3.7.1. 设 $\gamma_0,\gamma_1\dots\gamma_n$ 是 $n+1$ 条可求长简单闭曲线,$\gamma_1,\gamma_2\dots\gamma_n$ 在 r_0 的内部. $\gamma_1,\gamma_2\dots\gamma_n$ 中的任一条均在其余的 $n-1$ 条的外部. 设 D 是这 $n+1$ 条曲线围成的区域, 若 $f\in C^1(D)$. 则 $\forall z\in D$. 有: $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial D}\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi+\dfrac{1}{2\pi i}\int_D\dfrac{\partial f(\xi)}{\partial\bar{\xi}}\dfrac{1}{\xi-z}\mathrm{d}\xi\bigwedge d\bar{\xi}$

证明. 见史济怀《复变函数》 □

第四章 解析函数的Taylor展开及其应用

§4.1 Weierstrass 定理

对于复数上的数列，其收敛性可以类似于 $\mathbb{R}^2$ 中点集的收敛性即可得到. 同样的我们有柯西收敛原理, 此处略去

对于复数上的数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, 类似于实数中的常数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. 可以定义绝对收敛和条件收敛, 以及级数极限的存在性和柯西收敛原理.

下面讨论对于复变函数上的函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$:

定理 4.1.1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 是定义在 $\mathbb{E}$ 上的级数. 我们说 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\mathbb{E}$ 上一致收敛到 $f(z)$.(记为 $\sum_{k=1}^{n} f_k(z) \Rightarrow f(z)$), 指 $\forall \epsilon > 0, \exists. N \in \mathbb{N}^* \quad s.t. \forall n > N$. 有 $\left|S_n(z) - f(z)\right| < \epsilon, \forall z \in E$, 其中 $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$.

定理 4.1.2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\mathbb{E}$ 上一致收敛的充要条件是 $\forall \epsilon > 0, \exists. N \in \mathbb{N}^* \quad s.t. \forall n > N. \forall p \in N$ 有 $\left|\sum_{i=1}^{p} f_{n+i}(z)\right| < \epsilon$. 对 $\forall z \in \mathbb{E}$ 均成立.

证明. 略. □

定理 4.1.3 (函数项级数的 weierstass 判别法，略)**.**

定理 4.1.4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \Rightarrow f(z). z \in \mathbb{E}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n \in C(E)$. 则 $f \in C(E)$.

证明. $\forall \epsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \quad s.t.\ n > N$ 时 $\left|f(z) - S_n(z)\right| < \dfrac{\epsilon}{3}\ \forall z \in \mathbb{E}$.
对于给定的大于 N 的 n_0. 显然 $S_{n_0} \in C(\mathbb{E})$. 现任取一个 $a \in \mathbb{E}$. 故 S_{n_0} 在 a 处连续.
故 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0. \quad s.t. \forall z \in B(z, \delta)$ 有 $\left|f(z) - f(a)\right| < \dfrac{\epsilon}{3}$.
于是 $z \in \mathbb{E} \bigcap B(a, \delta)$ 时有：
$\left|f(z) - f(a)\right| \leqslant \left|f(z) - S_{n_0}(z)\right| + \left|S_{n_0}(z) - S_{u_0}(a)\right| + \left|S_{u_0}(a) - f(a)\right| < \epsilon$ □

定理 4.1.5. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_u(z)$. 在可求长曲线 γ 上一致收敛到 $f(z)$, 若 $\forall n\in\mathbb{N}^*, f_n\in C(\gamma)$, 则 $\int_\gamma f(z)dz=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)dz$.

证明. 由定理 *4.1.4.* $f\in C(\gamma)$.
由于 $f_k\Rightarrow f$. 故 $\forall\epsilon>0.\exists N\in\mathbb{N}^*\quad s.t.\ n>N$ 时，有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)-f(z)\right|<\epsilon.\forall z\in\gamma$. 故 $n>N$ 时有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\int_\gamma f_k(z)dz-\int_\gamma f(z)dz\right|=\left|\int_\gamma\left(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)-f(z)\right)dz\right|<\epsilon\cdot|\gamma|$ □

定理 4.1.6. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_a(z)$ 在区域 $\mathbb{D}$ 的任一紧子集 K 上一致收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_a(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上是内闭一致收敛的.

证明. 类似于实值函数中的例子，函数项级数 $1+\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$, $f_k(z)=z^k-z^{k-1}$ 部分和为 z^k 显然下单位球上内闭一致收敛，但不一致收敛 □

定理 4.1.7 (Weierstrass I)**.** 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中的域. 若 $f_n\in C(D), n=1,2\dots$, 并且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $f(z)$ 则 $f\in H(D)$, 并且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$ 在上内闭一致收敛到 $f^{(k)}(z)$. $\quad k\in\mathbb{N}$.

证明. 任取 $z_0\in D$，由于 D 为开集，故存在 $\delta>0,\quad s.t.\ \overline{B(z_0,\delta)}\subset D$
由定理 *4.1.4*，$f\in C(\overline{B(z_0,\delta)})$ 在 $B(z_0,\delta)$ 中任做一个可求长闭曲线 r，由定理 *4.1.5* 和定理 *3.2.4* 得 $\int_r f(z)dz=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_r f_n(z)dz=0$. 故由 *Morera* 定理得 $f\in H(B(z_0,\delta))$
故 $f\in H(D)$
任取 $\xi\in\partial B(z_0,\delta),\forall z\in B(z_0,\frac{\delta}{2})$. 有 $\left|\frac{1}{(\xi-z)^{k+1}}\right|\leqslant(\frac{2}{\delta})^{k+1}$
由一致收敛性得,$\forall\epsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*,\quad s.t.\ \forall n>N,\forall\xi\in\partial B(z_0,\delta)$, 有:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f_j(\xi)-f(\xi)\right|<\frac{\epsilon}{k!\cdot\delta}(\frac{\delta}{2})^{k+1}$$
$$\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}\frac{f_j(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}-\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}<\frac{\epsilon}{k!\cdot\delta}$$

故当 $z\in B(z_0,\frac{\delta}{2})$ 时，有:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n} f_j^{(k)}(z)-f^{(k)}(z)\right|&=\frac{k!}{2\pi}\cdot\left|\sum_{j=1}^{n}\int_{|\xi-z_0|=\delta}\frac{f_j(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{k+1}}-\int_{|\xi-z_0|=\delta}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z)^{k+1}}\right|\\&\leqslant\frac{k!}{2\pi}\int_{|\xi-z_0|=\delta}\left|\sum_{j=1}^{n}\frac{f_j(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}-\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{k+1}}\right|d\xi\\&<\epsilon\end{aligned}$$

故 $\sum_{j=1}^{n} f_j^{(k)}(z) \Rightarrow f^{(k)}(z), z\in B(z_0,\frac{\delta}{2})$，对于 D 的任一紧集 K,K 有有限开球覆盖 $SI_kS_{k=1}^n$, 故 $\sum_{j=1}^{n} f_j^{(k)} \Rightarrow f^{(k)}(z), z\in K.$ □

定理 4.1.8 (Weierstrass II)**.** 设 D 为有界区域，对于函数列 $\{f_n(z)\}$. 有 $f_n(z)\in H(D)\bigcap C(\overline{D})$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 ∂D 上一致收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 在 $\overline{D}$ 上一致收敛.

证明. $\forall \epsilon>0, \exists N,\ s.t.\ n\geqslant N, p\geqslant 1$ 时，有 $\left|f_{n+1}(z)+f_{n+2}(z)+\cdots+f_{n+p}(z)\right|<\epsilon.$ 对任意 $z\in\partial D$ 均成立，由最大模定理，上述不等式在 $\overline{D}$ 上成立，故级数在 $\overline{D}$ 上一致收敛 □

§4.2 幂函数

幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\ldots$

其中 $a_0,a_1\ldots$ 均为复常数,做平移 $\omega=z-z_0$, 得 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\ldots(*).$

定理 4.2.1. （收敛半径）（收敛圆）. 用数分中定义，略

定理 4.2.2. 级数 $(*)$ 存在收敛半径 $R=(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$, 则：

(1) 当 $R=0$ 时，$\sum_{n\equiv 0}^{\infty} a_nz^n$ 只在 $z=0$ 处收敛.

(2) 当 $R=+\infty$ 时，$\sum_{n\neq 0}^{\infty} a_nz^n$ 在 $\mathbb{C}$ 上收敛.

(3) 当 $0<R<+\infty$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n$ 在 $\{z:|z|<R\}$ 中收敛. 在 $\{z:|z|>R\}$ 中发散.

证明. 同数学分析中的讨论，此处略去 □

定理 4.2.3 (*Abel* I)**.** 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot z^n$ 在 $z=z_0\neq 0$ 处收敛，则在 $\{z:|z|<z_0\}$ 中内闭一致收敛.

证明. 设 K 为 $\{z:|z|<|z_0|\}$ 中的一个紧集，取 $r<|z_0|$，使得 $k\subset B(0,r)$ 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nz_0^n$ 收敛，故 $\left|a_nz_0^n\right|\to 0$ 故存在 $M\in\mathbb{R}.\ s.t.\ \left|a_nz_0^n\right|<M$

故当 $z\in k$ 时, $\left|a_k\cdot a^k\right|=\left|a_n\cdot z_o^k\cdot\frac{z^k}{z_0^k}\right|\leqslant M\left(\left|\frac{z}{z_0}\right|\right)^k$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ 时收敛的，故由 *Weierstrass* 判别法得 $\sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n$ 在 k 中一致收敛。

□

由定理 *4.2.3* 以及 *Weierstrass* 定理可以得到:

定理 4.2.4. 幂级数在其收敛圆内确定了一个全纯函数

那么在收敛圆圆周上的收敛性如何呢?

e.g 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛半径为 1, 它在收敛圆周 $|z|=1$ 上处处发散.

e.g 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径为 1, 它在收敛圆周 $|z|=1$ 上处处收敛.

e.g 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$ 的收敛半径为 1, 它在收敛圆周 $|z|=1$ 上在 $z=e^{i\theta}(0<\theta<2\pi)$ 处收敛, 在 1 处发散.

证明. 显然 $z=1$ 时级数时发散的

当 $\theta\neq 0$ 时 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos n\theta}{n}+i\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin n\theta}{n}$ 由实数项级数的 *Dirichlet* 判别法,

得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos n\theta}{n}, \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin n\theta}{n}$ 收敛

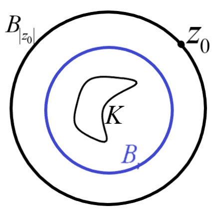
□

由上述例子可知，收敛圆周上的收敛性无法确定

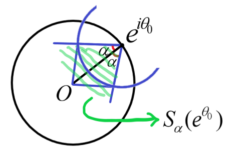
这也是我们下面要探讨的问题

设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ 的收敛半径为 R,我们来研究 $\xi\in B(z_0,R)$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(\xi-z_0)^n$ 与和函数 f 的关系: 令 $\omega=\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}$ 故 $\omega\in B(0,1)$, 级数可改写为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\omega^n, b_n= a_n(\xi-z_0)^n$, 故新的幂级数的收敛半径为 1，故以下我们在收敛半径为 1 的情况下做讨论.

定理 4.2.5 (*)**.** 设 g 是定义在单位圆中的函数, $e^{i\theta_0}$ 是单位圆上的一点, 记 $S_\alpha(e^{i\theta_0})$ 为以 $e^{i\theta_0}$ 为顶点, 以 $e^{i\theta_0}$ 点对应的极径在单位圆内侧向两侧张出的张角为 2α 的角形区域 $(\alpha<\frac{\pi}{2})$



若 z 在 $S_\alpha(e^{i\theta_0})$ 中趋于 $e^{i\theta_0}$ 时 $g(z)$ 有极限 C 则称 g 在 θ_0 处有非切向极限 C, 记为 $\lim\limits_{\substack{z\to e^{i\theta_0}\\ z\in S_\alpha(e^{i\theta_0})}} g(z)=C$



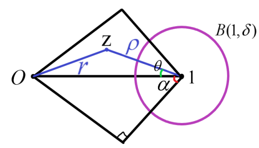
定理 4.2.6 (*). *(Abel* II) 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 $R=1$，且级数在 $z=1$ 处收敛于 S，则 f 在 $z=1$ 处有非切向极限 S

证明. 记 $\sigma_{n,\rho}=\sum\limits_{i=1}^{p} a_{n+i}$ 由条件得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛.
故 $\forall\epsilon>0$, $\exists$ 正整数 N, $s.t.$ 当 $n>N$ 时，对任意自然数 p 有 $|\sigma_{n,p}|<\epsilon$
由于

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p} a_{n+i}\cdot z^{n+i} &= \sum_{i=1}^{p-1}(\sigma_{n,i+1}-\sigma_{n,i})z^{n+1+i}+\sigma_{n,1}z^{n+1}\\ &=\sum_{i+1}^{p-1}\sigma_{n,i}z^{n+i}\cdot(1-z)+\sigma_{n,p}z^{n+p}\\ &= z^{n+1}(1-z)\cdot\sum_{i=1}^{p-1}(\sigma_{n,i}\cdot z^{i-1})+\sigma_{n,p}\cdot z^{n+p}\end{aligned}$$

故当 $|z|<1, n>N.$ 时有:$\left|\sum\limits_{i=1}^{p} a_{n+i}\cdot z^{n+i}\right|<\epsilon\cdot|1-z|\cdot\sum\limits_{n=p}^{\infty}|z^n|+\epsilon=\epsilon\left(\dfrac{|1-z|}{1-|z|}+1\right)$
任取 $z\in S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)$ 记 $|z|=r, |1-z|=\rho$ 则由余弦定理得 $r^2=1+\rho-2\rho\cos\theta$

故 $\dfrac{|1-z|}{1-|z|}=\dfrac{\rho}{1-r}=\dfrac{\rho(1+r)}{1-r^2}\leqslant\dfrac{2\rho}{2\rho\cos\theta-\rho^2}=\dfrac{2}{2\cos\theta-\rho}$
又由于 $z\in B(1,\delta)$. 故 $\rho<\delta<\cos\alpha<\cos\theta$ 故 $\dfrac{|1-z|}{1-|z|}<\dfrac{2}{\cos\alpha}$
故 $\left|\sum\limits_{i=1}^{p} a_{n+i}\cdot z^{n+i}\right|<\epsilon(\dfrac{2}{\cos\alpha}+1)$, 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)$



上一致收敛设和函数为 f, 由一致收敛性得 f 在 $S_\alpha(1)\cap B(1,\delta)$ 上连续，故 $\lim\limits_{\substack{z\in S_\alpha(1)\\ z\to 1}} f(z)=f(1)=S$

□

e.g　计算级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$ 的和.

显然收敛半径为 1 且和函数 $f(z)\in H(D)$,故 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$,得 $f'(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^{n-1}=\dfrac{1}{1-z}$
由此得 $f(z)=-log(1-z), |z|<1$.

前面分析得在 $|z|=1$ 上除 $z=1$ 均收敛,故由定理 4.2.9 得当 $z=e^{i\theta}0<\theta<2\pi$ 时，有：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{in\theta}}{n}=-log(1-e^{i\theta})=-log|1-e^{i\theta}|-i\,arg(1-e^{i\theta})$ (*).

由几何关系得 $|1-e^{i\theta}| = 2\sin\frac{\theta}{2}, arg(1-e^{i\theta}) = -\phi$

故由 (*) 式以及比较实虚部得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosn\theta}{n} = -log(2\sin\frac{\theta}{2}), \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}$

特别地，$\theta=\pi$ 时得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = log2; \theta = \pi/2$ 时得 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \pi/4.$

§4.3 解析函数的 Taylor 展开

定理 4.3.1. (Taylor) (略)

证明. 对于此定理有两种不同证法。详见史济怀《复变函数》及 Stein《Complex Analysis》. □

定理 4.3.2. *由 4.3.1 以及 4.2.4 得 f 在 z_0 处解析的充要条件为 f 在 z_0 的邻域内可展为幂级数：$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.*

定理 4.3.3. *z_0 为 f 的 m 阶零点的充要条件是 f 在 z_0 的邻域内可写成 $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$。其中 g 在 z_0 处解析，且 $g(z_0) \neq 0$.*

证明. 略. □

定理 4.3.4. (零点独立性定理) *设 D 为 $\mathbb{C}$ 中的域, $f \in H(D)$, 若 $f \not\equiv 0$, 且 $f(a) = 0$, 则存在 $\delta > 0, s.t.\ \forall z \in B(z_0,\delta)\{z_0\}$ 有 $f(z) \neq 0$.*

证明. 略. 史济怀. 方企勤.Stein 给出了两种不同的证明方法. □

定理 4.3.5. (唯一性定理) *设 D 为 $\mathbb{C}$ 中的域，$f_1, f_2 \in H(D)$. 若存在极限在 D 中的点列 z_n $s.t.$ $f_1(z_n) = f_2(z_n), n = 1,2,\ldots$，则在 D 中有 $f_1 \equiv f_2$.*

证明. 略. □

e.g $\sin^2 z + \cos^2 z \equiv 1, z \in \mathbb{C}$

证明. 取点列 $\{a_n\}$：$a_n = \frac{1}{n}$，得 $a_n \to 0$. 故由 4.3.7 得证. □

e.g 证明：$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}$

证明. 由 Stirling 公式得，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 的收敛半径为 $R=+\infty$，显然 e^z 与 $f(z)$ 均为整函数，且在实轴上相等，由 4.3.7 得证. □

利用这样的方法，我们可以将 Taylor 公式从 $\mathbb{R}$ 上扩张到 $\mathbb{C}$ 上.

§4.4 Laurent 级数

定理 4.4.1. *(Laurent 级数. 主要部分.)* 略.

定理 4.4.2. *(Laurent)* 若 Laurent 级数的收敛域圆环 $D=\{z:r<|z-z_0|<R\}$，那么它在 D 中绝对收敛且内闭一致收敛，那么它的和函数在 D 中解析.

定理 4.4.3. *(Laurent)* 设 $D=\{z:r<|z|<R\}$. 若 $f\in H(D)$，则 f 在 D 中可以展为 Laurent 级数，$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, z\in D$，其中 $a_n=\frac{1}{2\pi_i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$，其中 $\gamma_\rho=\{\xi:|\xi-z_0|=\rho\}(r<\rho<R)$，并且展开式唯一.

这个定理是 4.4.2 的逆定理，证明略.

e.g $f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ 在以 0 为圆心的圆形去心邻域上是否可展为 Laurent 级数？

解

取 $\{z_n\}, z_n=\frac{1}{n\pi}, n\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\sin\frac{1}{z_n}=0$. 故有一列趋于 0 的 f 的奇点. 故 f 在 0 的去心邻域内不可展为 Laurent 级数.

e.g 设 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$，设求在 $D_1=\{z:1<|z|<2\}, D_2=\{z:2<|z|<+\infty$ 上的 Laurent 展式.

解

$z\in D_1$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)}&=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}\\&=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\\&=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{2})^n-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n\\&=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{z^{n+1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}\end{aligned}$$

$z \in D_2$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \\ &= -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= -\frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}\end{aligned}$$

§4.5 孤立奇点

三种奇点：可去奇点、极点、本性奇点.

定理 4.5.1. 设 $a \in \mathbb{C}, f(z) \in H(B(a,R)\backslash\{a\})$ 则下列三个命题等价.

(1) a 是 $f(z)$ 的可去奇点.

(2) $f(z)$ 在 $B(a,\delta)$ 上有界.

(3) $f(z)$ 在 a 处的 Laurent 展式的主部为 *0.*

定理 4.5.2. 设 $a \in \mathbb{C}, f(z) \in H(B(a,R)\backslash\{a\})$ 则下列三个命题等价.

(1) a 是 $f(z)$ 的极点（m 阶）.

(2) $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$，其中 $m \in \mathbb{N}$，$g(z)$ 在 $B(a,\delta)$ 上解析且不为 $0(\delta \le R)$.

(3) $f(z)$ 的 Laurent 展式中主部中只有有限多个系数不为 $0(\forall n > m, a_n = 0)$.

定理 4.5.3. 设 $a \in \mathbb{C}, f \in H(B(a,R)\backslash\{a\})$，则 a 是 f 的本性奇点的充要条件是 $f(z)$ 的 Laurent 展式主部中有无穷多项的系数不为 *0.*

上述三个定理的证明详见方企勤《复变函数》.

定理 4.5.4. *(WeierStrass)* 若 a 是 f 的一个本性奇点，则对于 $z = a$ 的任一邻域 $B(a,\delta)$，有 $f(B(a,\delta)) = \mathbb{C}$.

证明. 略. 见笔记. □

§4.6 相关的其他结论以及习题列举

定理 4.6.1. *(解析延拓定理).* 设区域 Ω 可被一条可求长曲线 γ 分为两个区域 Ω_1 和 Ω_2，$\Omega\backslash\gamma=\Omega_1\cup\Omega_2, \Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing$. 设 $f\in C(\Omega), f\in H(\Omega_i), i=1,2$，则 $f(z)\in H(\Omega)$.

证明. 任取 Ω 上的一条曲线 C,不妨设 $C\not\subset\Omega_1, C\not\subset\Omega_2$,故 $\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz$.

由定理 3.2.4 和 Mereron 定理得证. □

注意与 *Painlevé* 原理的区别.

定理 4.6.2. *(解析延拓定理).* 设区域 Ω_j 被一条可求长曲线 γ 分为两个区域 Ω_1 和 $\Omega_2, \Omega\backslash\gamma=\Omega_1\cup\Omega_2, \Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing$. 设 $f_i\in C(\Omega_i\cup\gamma)\cap H(\Omega_i), i=1,2, f_1(z)=f_2(z), z\in\gamma$. 设

$$F(z)=\begin{cases} f_1(z), & z\in\Omega_1\cup\gamma \\ f_2(z), & z\in\Omega_2\end{cases}$$

则 $F(z)\in H(\Omega)$

证明. 证明过程同 4.6.1. □

定理 4.6.3. *(Schwarz 反射原理)* 设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 上的区域，记 $I=\{z:z\in\Omega, Imz=0\}$，且 $I\neq\varnothing$. 记 $\Omega^+=\{z\in\Omega:Imz>0\}, \Omega^-=\{\bar{z}:z\in\Omega^+\}$. 设 $f\in H(\Omega^+)\cap C(\Omega^+\cap I)$ 且 $f(I)\subset\mathbb{R}$，则存在 $F\in H(\Omega^+\cup\Omega^-\cup I)$, *s.t.* $F(z)=f(z), z\in\Omega^+$

证明. 略. 见方企勤《复变函数》. □

定理 4.6.4. 设 $F(z,s)\in C(\Omega\times[0,1])$，$\Omega$ 为 $\mathbb{C}$ 中开集，若 $F(z,s)$ 对每个 s，对 z 都是解析的，则定义在 Ω 上的函数 $f(z):\overset{\Delta}{=}\int_0^1 F(z,s)\mathrm{d}s$ 是解析的.

证明. 略. 见 Stein 即 chb 笔记. □

定理 4.6.5. 设 $f\in f(\omega)$，ω 为开集，$k\in\omega$ 为紧集，则存在 $\omega-k$ 中的有线条可求长 $r_1, r_2......r_n$，使得

$$f(z)=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\int_{r_n}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$$

证明. 设 $d = c\cdot d(k,\omega^c)$，其中 c 为常数且 $0<c<\frac{1}{\sqrt{2}}$，考虑边平行于轴的边长为 d 的正方形组成的网格。故在 $\Omega - K$ 中必定包含一个完整的方格，并且与 k 相交的方格不与 Ω 相交。

设 Q 为与 K 相交的方格的全集，由于 K 是紧集，故 Q 为有限集，设 $Q = Q_1, Q_2......Q_n$ 我们取 $r_1, r_2......r_n$ 为 Q 中的方格中所有只属于唯一方格的方格边框。如图

任取 K 中非方格边框的一点 z，存在 $1\le j\le m, s.t. z\in Q_j, z\notin Q_k(k\ne j)$ 故由 *Cauchy* 积分公式得

$$f(z) = \int_{\partial Q_k}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi = \delta_{n-j}\cdot f(z)$$

故

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m}\int_{\partial Q_k}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$$

而由于在对每个 Q_k 的边界进行线积分的时候，对于除去 $r_1, r_2......r_n$ 之外的 Q 中方格边框均正向反向各积分一次，故

$$f(z) = \int_{r_k}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\mathrm{d}\xi$$

而可得 $r_k \in \Omega/k, k = 1,2.....m$，显然 $r_1, r_2......r_n$ 首尾相连得到了一条 Ω/k 中的可求长闭曲线 □

e.g 设 $G = z\in C, 0<\arg z<\frac{\pi}{4}$，设 $f\in H(G)\cup C(\bar{G})$。若 f 在实轴上区间 $[a,b]$ 恒为 0，则 $f(x)\equiv 0, x\in G$

证明. 在 $[a,b]$ 下方做延拓（如图），

有 $\partial G\cap\partial D = [a,b]$。做 $f_1 : D\cup[a,b]\to 0, f_1(z)\equiv 0, z\in D\cup[a,b]$。故 $\forall z\in[a,b]$ 有 $f_1(z) = f(z) = 0$。记 $G\cup D\cup[a,b] = M$，故由解析延拓定理得存在 $F(z)\in H(M)$ 且 $f_1(z) = F(z), z\in D\cup[a,b], F(z) = f(z), z\in G$，显然存在一个 M 中的点列 Z_n，且有极限点 $a\in M^o$，并且 $F(Z_n) = 0\forall n\in N$ 由零点孤立性定理得 $f(z)\equiv 0, z\in M$，故 $f(z)\equiv 0, z\in G$

类似于上一例题的推理过程，对于区域 G，设 $f\in H(G)\cap C(\bar{G})$，若存在一条可求长连续曲线 $r\in\partial G$, 有 $f(z)\equiv 0, z\in r$，并且可以在 r 的异于 G 一侧做一区域 E，使得 $r\in\partial E$，且 $E\cap G = \phi$，完全与上一例题中的过程相同可得 $f(z)\equiv 0, \forall z\in G$ □

e.g 设 $f_n(z) \in H(D)$,D 为中区域,$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ 在 D 内一致收敛,证明:$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ 在 D 内内闭一致收敛。

证明. 任取 D 中的紧集 K，设 $d = d(\partial D, k)$，记 $\rho = \frac{d}{2}$

故 $z \in k$ 时

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f'_{n+i}(z)\right| = \sum_{i=1}^{p}\left|\int_{|\xi - z|=\rho}\frac{f_i(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi - z)^2}\right| \cdot \frac{1}{2\pi}$$

$$\leq \int_{|\xi - z|=\rho}\frac{\sum_{i=1}^{p}|f_i(\xi)|}{|(\xi - z)^2|}|\mathrm{d}\xi| \cdot \frac{1}{2\pi} \leq \frac{\epsilon}{\rho}$$

□

e.g 写出 $e^{\frac{1}{1-z}}$，在 $|z| < 1$ 和 $1 < z < +\infty$ 的部分 *Laurent* 展式

设 $f(z) = e^z$，显然 f 为常函数，故 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$，可以利用 4.3.7 将 R 上的展开到 D 上可得 $f(\frac{1}{1-z}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{1}{1-z})^n$，当 $|z| < 1$ 时，有如下错误解法。

解（错误）

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + o|z|^2$$

$$\Rightarrow f(\frac{1}{1-z}) = 1 + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}(\frac{1}{1-z})^2 + \ldots\ldots$$

做到这里你就发现做不下去了，为什么？因为 $(\frac{1}{1-z})^n = 1 + o(|z|)$

解（正确）考虑展开 $e^{\frac{z}{1-z}}$

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n = z + z^2 + o|z|^2 = o(1)$$

$$\Rightarrow f(\frac{z}{1-z}) = 1 + \frac{z}{1-z} + \frac{1}{2}(\frac{z}{1-z})^2) + o|z|^2$$

$$= 1 + (z + z^2 + o|z|^2) + \frac{1}{2}(z + z^2 + o|z|^2)^2 + o|z|^2$$

$$= 1 + z + \frac{3}{2}z^2 + o|z|^2$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{1-z}} = e + ez + \frac{3e}{2}z^2 + o|z|^2$$

当 $1 < |z| < +\infty$ 时，同上述讨论。

e.g 若 $f(z)$ 在 $0 < |z-a| < R$ 上解析，f 不为常值函数，且圆环上有一列点 $z_n \to a$，有 $f(z_n) = 0$。证明：a 为 $f(z)$ 的本性奇点。

证明. 若 a 为可去奇点，则 $\lim_{z\to a} f(z)$ 存在，故 $\lim_{z\to a} f(z)=0$，补充定义 $f(a)=0$ 故 f 在 $|z-a|<R$ 上解析。由零点孤立性定理得 $f(z)\equiv 0, 0\le|z-a|<R$ 矛盾，

若 a 为极点，故 $\lim_{z\to a} f(z)=+\infty$，而 $\lim_{n\to\infty} f(z_n)=0$ 矛盾！ □

e.g 设 $f(z)$ 在圆环 $0<r<|z-a|<R<+\infty$ 内解析，在闭圆环 $r\le|z-a|\le R$ 上连续，且 $f(Re^{i\Theta})=0,(0\le\theta\le 2\pi)$。证明：$f(z)\equiv 0(r<|z-a|<R)$

解 1

设 $F(z)=f(\frac{r^2}{\bar{z}}), z\in\{z|\frac{r^2}{R}\le|z-a|\le r\}$，显然，$F(z)$ 在 $\{z|\frac{r^2}{R}<|z-a|<r\}$ 上解析，在 $\{z|\frac{r^2}{R}\le|z-a|<r\}$ 上连续。并且当 $|z|=r$ 时，$F(z)=f(\frac{r^2}{\bar{z}})=f(z)$。$|z|=\frac{r^2}{R}$ 时，$F(z)=0.$

设 $D=\{z|\frac{r^2}{R}\le|z-a|<r\}$，故由解析延拓定理得存在 $F_1\in H(D)\cap C(\bar{D})$。并且 $F_1(z)=F(z)z\in\{z|\frac{r^2}{R}\le|z-a|\le r\}$，且 $F_1(z)=f(z)z\in\{z|\frac{r^2}{R}\le|z-a|\le r\}$。

又由于 $\partial D=\{z:|z|=\frac{r^2}{R}$ 或 $R\}$。$\Rightarrow \forall z\in\partial D$ 有 $F_1(D)=0$ 故最大模存理 $F_1(z)\equiv 0 z\in\bar{D}$ 故 $f(z)\equiv 0.(r<|z-a|<R)$

解 2

同 4.6.5 第一个例子

e.g 若 $f\in H(\{z:0<|z-a|<k\})$ 且 $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$。证明：a 是 $f(z)$ 的可去奇点。

证明. 显然 a 是 $g(z)=(z-a)f(z)$ 的可去奇点。利用定理 4.5.1，再直接讨论 *Laurent* 级数的系数即可 □

e.g 若 f 为整函数，并且 ∞ 为 f 的可去奇点，证明 f 为常值函数。

证明. 由定理 4.5.1 得 f 在 ∞ 处的 *Laurent* 展开式中幂次大于 0 的系数均为 0。又由于 f 为整函数，故 $f(z)$ 为常数。 □

e.g 设 $f\in H(B(a,R)|\{a\})$，且不为常值函数。记 $u(z)=Ref(z)$，若 $u(z)$ 有界，则 a 是 f 的可去奇点。

解 1

由 *Laurent* 级数系数公式得 $1\le n$ 时，$G_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} f(z)(z-a)^{n-1}\mathrm{d}z \quad (0<\rho<R)$

另一方面

$$\begin{aligned}
G_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} f(z)(z-a)^{n-1}\mathrm{d}z \quad (0<\rho<R)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} (\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{C_k}\cdot\overline{(z-a)^k})(z-a)^{n-1}\mathrm{d}z \quad (0<\rho<R)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} \sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{C_k}\cdot\rho^{n+k-1}(\frac{z-a}{|z-a|})^{n-1}\mathrm{d}z \quad (0<\rho<R)\\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\overline{C_k}\int_0^{2\pi}\rho^{k+n}e^{i(n-k)\theta}\mathrm{d}\theta = \overline{C_n}\rho^{2n}
\end{aligned}$$

故我们可得 $C_{-n}+\overline{C_n}\rho^{2n} = \frac{1}{\pi i}\int_{|z-a|=\rho} u(z)(z-a)^{n-1}\mathrm{d}z$

故 $|C_{-n}+\overline{C_n}\rho^{2n}| \le \frac{1}{\pi}|\int_{|z-a|=\rho} u(z)(z-a)^{n-1}\mathrm{d}z| < \frac{2\pi\rho}{\pi}\cdot M\cdot\rho^{n-1} = 2M\rho^n(1\le n)$

当 $\rho\to 0$。得 $C_{-n}=0(1\le n)$。故 a 为 $f(z)$ 可去奇点。

解 2

设 $F(z)=e^{f(z)}$，故 $F(z)$ 在 $B(a,R)\{a\}$ 上有界。故 $|F(z)=e^{u(z)}\le e^M|$。故由定理 4.5.1 得。a 为 $F(z)$ 的可去奇点，补充定义 $F(a)$ 使得 $F(z)\in H(B(a,R))$

又有 $|F(z)|=e^{u(z)}\ge e^{-M}>0$。故在 a 的邻域内对数函数可取出单值解析分支。故 a 是 $f(z)=\lg F(z)$ 的可去奇点。

解 3

记 $F(z)=\frac{f(z)}{f(z)-2M}$。故在 $B(a,R)\{a\}$ 上有 $|F(z)|\le 1$ 故 a 是 $F(z)$ 的可去奇点。补充定义 $F(a)$ 使得 $F(z)\in H(B(a,R))$。

由最大模原理得 $|F(a)|<1$。而可解出 $f(z)=\frac{2MF(z)}{1-F(z)}$。故由表达式得 $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 存在。故 a 为 $f(z)$ 的可去奇点。

定理 4.6.6. *设 $f\in f(\omega)$，ω 为开集，$k\in\omega$ 为紧集，则存在 $\omega-k$ 中的有线条可求长 $r_1,r_2......r_n$，使得*

$$f(z)=\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\int_{r_n}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$$

证明. 设 $d=c\cdot d(k,\omega^c)$，其中 c 为常数且 $0<c<\frac{1}{\sqrt{2}}$，考虑边平行于轴的边长为 d 的正方形组成的网格。故在 $\Omega-K$ 中必定包含一个完整的方格，并且与 k 相交的方格不与 Ω 相交。

设 Q 为与 K 相交的方格的全集，由于 K 是紧集，故 Q 为有限集，设 $Q=Q_1,Q_2......Q_n$ 我们取 $r_1,r_2......r_n$ 为 Q 中的方格中所有只属于唯一方格的方格边框。如图

任取 K 中非方格边框的一点 z，存在 $1\le j\le m, s.t. z\in Q_j, z\notin Q_k(k\ne j)$ 故由 *Cauchy* 积分公式得

$$f(z)=\int_{\partial Q_k}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\delta_{n-j}\cdot f(z)$$

故

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}\int_{\partial Q_k}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$$

而由于在对每个 Q_k 的边界进行线积分的时候，对于除去 $r_1,r_2......r_n$ 之外的 Q 中方格边框均正向反向各积分一次，故

$$f(z)=\int_{r_k}\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi$$

而可得 $r_k\in\Omega/k,k=1,2.....m$，显然 $r_1,r_2......r_n$ 首尾相连得到了一条 Ω/k 中的可求长闭曲线 □

e.g 设 $G=z\in C,0<\arg z<\frac{\pi}{4}$，设 $f\in H(G)\cup C(\bar{G})$。若 f 在实轴上区间 $[a,b]$ 恒为 0，则 $f(x)\equiv 0,x\in G$

证明. 在 $[a,b]$ 下方做延拓（如图），

有 $\partial G\cap\partial D=[a,b]$。做 $f_1:D\cup[a,b]\to 0,f_1(z)\equiv 0,z\in D\cup[a,b]$。故 $\forall z\in[a,b]$ 有 $f_1(z)=f(z)=0$。记 $G\cup D\cup[a,b]=M$，故由解析延拓定理得存在 $F(z)\in H(M)$ 且 $f_1(z)=F(z),z\in D\cup[a,b],F(z)=f(z),z\in G$，显然存在一个 M 中的点列 Z_n，且有极限点 $a\in M^o$，并且 $F(Z_n)=0\forall n\in N$ 由零点孤立性定理得 $f(z)\equiv 0,z\in M$，故 $f(z)\equiv 0,z\in G$

类似于上一例题的推理过程，对于区域 G，设 $f\in H(G)\cap C(\bar{G})$，若存在一条可求长连续曲线 $r\in\partial G$, 有 $f(z)\equiv 0,z\in r$，并且可以在 r 的异于 G 一侧做一区域 E，使得 $r\in\partial E$，且 $E\cap G=\phi$，完全与上一例题中的过程相同可得 $f(z)\equiv 0,\forall z\in G$ □

e.g 设 $f_n(z)\in H(D)$,D 为中区域,$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ 在 D 内一致收敛,证明:$\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$ 在 D 内内闭一致收敛。

证明. 任取 D 中的紧集 K，设 $d=d(\partial D,k)$，记 $\rho=\frac{d}{2}$

故 $z\in k$ 时

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f'_{n+i}(z)\right|=\sum_{i=1}^{p}\left|\int_{|\xi-z|=\rho}\frac{f_i(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi-z)^2}\right|\cdot\frac{1}{2\pi}$$

$$\leq\int_{|\xi-z|=\rho}\frac{\sum_{i=1}^{p}|f_i(\xi)|}{|(\xi-z)^2|}|\mathrm{d}\xi|\cdot\frac{1}{2\pi}\leq\frac{\epsilon}{\rho}$$

□

e.g 写出 $e^{\frac{1}{1-z}}$，在 $|z|<1$ 和 $1<z<+\infty$ 的部分 *Laurent* 展式

设 $f(z)=e^z$，显然 f 为常函数，故 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$，可以利用 4.3.7 将 R 上的展开到 D 上可得 $f(\frac{1}{1-z})=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{1}{1-z})^n$，当 $|z|<1$ 时，有如下错误解法。

解（错误）

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=1+z+z^2+o|z|^2$$

$$\Rightarrow f(\frac{1}{1-z})=1+\frac{1}{1-z}+\frac{1}{2}(\frac{1}{1-z})^2+\ldots\ldots$$

做到这里你就发现做不下去了，为什么？因为 $(\frac{1}{1-z})^n=1+o(|z|)$

解（正确） 考虑展开 $e^{\frac{z}{1-z}}$

$$\frac{z}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty}z^n=z+z^2+o|z|^2=o(1)$$

$$\Rightarrow f(\frac{z}{1-z})=1+\frac{z}{1-z}+\frac{1}{2}(\frac{z}{1-z})^2)+o|z|^2$$

$$=1+(z+z^2+o|z|^2)+\frac{1}{2}(z+z^2+o|z|^2)^2+o|z|^2$$

$$=1+z+\frac{3}{2}z^2+o|z|^2$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{1-z}}=e+ez+\frac{3e}{2}z^2+o|z|^2$$

当 $1<|z|<+\infty$ 时，同上述讨论。

e.g 若 $f(z)$ 在 $0<|z-a|<R$ 上解析，f 不为常值函数，且圆环上有一列点 $z_n\to a$，有 $f(z_n)=0$。证明：a 为 $f(z)$ 的本性奇点。

证明. 若 a 为可去奇点，则 $\lim\limits_{z\to a}f(z)$ 存在，故 $\lim\limits_{z\to a}f(z)=0$，补充定义 $f(a)=0$ 故 f 在 $|z-a|<R$ 上解析。由零点孤立性定理得 $f(z)\equiv 0, 0\le|z-a|<R$ 矛盾，

若 a 为极点，故 $\lim\limits_{z\to a}f(z)=+\infty$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=0$ 矛盾！ □

e.g 设 $f(z)$ 在圆环 $0<r<|z-a|<R<+\infty$ 内解析，在闭圆环 $r\le|z-a|\le R$ 上连续，且 $f(Re^{i\Theta})=0,(0\le\theta\le 2\pi)$。证明：$f(z)\equiv 0(r<|z-a|<R)$

解 1

设 $F(z)=f(\frac{r^2}{\bar{z}}), z\in\{z|\frac{r^2}{R}\le|z-a|\le r\}$，显然，$F(z)$ 在 $\{z|\frac{r^2}{R}<|z-a|<r\}$ 上解析，在 $\{z|\frac{r^2}{R}\le|z-a|<r\}$ 上连续。并且当 $|z|=r$ 时，$F(z)=f(\frac{r^2}{\bar{z}})=f(z)$。$|z|=\frac{r^2}{R}$ 时，$F(z)=0.$

设 $D=\{z|\frac{r^2}{R}\le|z-a|<r\}$，故由解析延拓定理得存在 $F_1\in H(D)\cap C(\bar{D})$。并且 $F_1(z)=F(z)z\in\{z|\frac{r^2}{R}\le|z-a|\le r\}$，且 $F_1(z)=f(z)z\in\{z|\frac{r^2}{R}\le|z-a|\le r\}$。

又由于 $\partial D=\{z:|z|=\frac{r^2}{R}$ 或 $R\}$。$\Rightarrow\forall z\in\partial D$ 有 $F_1(D)=0$ 故最大模存理 $F_1(z)\equiv 0 z\in\bar{D}$ 故 $f(z)\equiv 0.(r<|z-a|<R)$

解 2

同 4.6.5 第一个例子

e.g 若 $f\in H(\{z:0<|z-a|<k\})$ 且 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=0$。证明：$a$ 是 $f(z)$ 的可去奇点。

证明. 显然 a 是 $g(z)=(z-a)f(z)$ 的可去奇点。利用定理 4.5.1，再直接讨论 *Laurent* 级数的系数即可 □

e.g 若 f 为整函数，并且 ∞ 为 f 的可去奇点，证明 f 为常值函数。

证明. 由定理 4.5.1 得 f 在 ∞ 处的 *Laurent* 展开式中幂次大于 0 的系数均为 0。又由于 f 为整函数，故 $f(z)$ 为常数。 □

e.g 设 $f\in H(B(a,R)|\{a\})$，且不为常值函数。记 $u(z)=Ref(z)$，若 $u(z)$ 有界，则 a 是 f 的可去奇点。

解 1

由 *Laurent* 级数系数公式得 $1\le n$ 时，$G_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}f(z)(z-a)^{n-1}\mathrm{d}z\quad(0<\rho<R)$

另一方面

$$\begin{aligned}
G_n&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}f(z)(z-a)^{n-1}\mathrm{d}z\quad(0<\rho<R)\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}(\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{C_k}\cdot\overline{(z-a)^k})(z-a)^{n-1}\mathrm{d}z\quad(0<\rho<R)\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{C_k}\cdot\rho^{n+k-1}(\frac{z-a}{|z-a|})^{n-1}\mathrm{d}z\quad(0<\rho<R)\\
&=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\overline{C_k}\int_0^{2\pi}\rho^{k+n}e^{i(n-k)\theta}\mathrm{d}\theta=\overline{C_n}\rho^{2n}
\end{aligned}$$

故我们可得 $C_{-n}+\overline{C_n}\rho^{2n}=\frac{1}{\pi i}\int_{|z-a|=\rho}u(z)(z-a)^{n-1}\mathrm{d}z$

故 $|C_{-n}+\overline{C_n}\rho^{2n}|\le\frac{1}{\pi}|\int_{|z-a|=\rho}u(z)(z-a)^{n-1}\mathrm{d}z|<\frac{2\pi\rho}{\pi}\cdot M\cdot\rho^{n-1}=2M\rho^n(1\le n)$

当 $\rho\to 0$。得 $C_{-n}=0(1\le n)$。故 a 为 $f(z)$ 可去奇点。

解 2

设 $F(z)=e^{f(z)}$，故 $F(z)$ 在 $B(a,R)\{a\}$ 上有界。故 $|F(z)=e^{u(z)}\le e^M|$。故由定理 4.5.1 得。a 为 $F(z)$ 的可去奇点，补充定义 $F(a)$ 使得 $F(z)\in H(B(a,R))$

又有 $|F(z)| = e^{u(z)} \geq e^{-M} > 0$。故在 a 的邻域内对数函数可取出单值解析分支。故 a 是 $f(z) = \lg F(z)$ 的可去奇点。

解 3

记 $F(z) = \frac{f(z)}{f(z)-2M}$。故在 $B(a,R)\{a\}$ 上有 $|F(z)| \leq 1$ 故 a 是 $F(z)$ 的可去奇点。补充定义 $F(a)$ 使得 $F(z) \in H(B(a,R))$。

由最大模原理得 $|F(a)| < 1$。而可解出 $f(z) = \frac{2MF(z)}{1-F(z)}$。故由表达式得 $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 存在。故 a 为 $f(z)$ 的可去奇点。

第五章 留数定理与辐角定理

定理 5.0.1. 设 f_n 是域 D 上的一列解析函数，并且在 D 上内闭一致收敛到 f。若 f 不为常数，那么 f 在 D 中也为单叶解析函数。

证明. 由 *Weierstrass* 定理得 $f \in H(D)$。若 f 不是单叶的，则存在 $z_1, z_2 \in D, z1 \neq z2$，使得 $f(z_1) = f(z_2)$。令 $F(z) = f(z) - f(z_1)$，故 F 在 D 中有两个互异零点 z_1 和 z_2，又由于 $F \not\equiv 0$，故 z_1 和 z_2 是孤立的。故存在 $\epsilon > 0$，s.t.$B(z_1,\epsilon) \cap B(z_2,\epsilon) = \emptyset$。故 $F(z)$ 在 $B(z_1,\epsilon)$ 和 $B(z_2,\epsilon)$ 之外无其它零点。令 $F_n(z) = f_n(z) - f(z_1)$。故 $F_n(z)$ 在 D 中内闭一致收敛到 $F(z)$。

由 *Hurwitz* 定理得，存在正整数 N，$n > N$ 时，F_n 在 $B(z_1,\epsilon)$ 和 $B(z_2,\epsilon)$ 中各有一个零点，设为 z_1' 和 z_2'，显然 $z_1' \neq z_2'$。故 $f_n(z_1') = f_n(z_2') = f(z_1)$，这与 f_n 在 D 内是单叶的矛盾。 □

5.0.1 亚纯函数的原式

e.g 证明：

$$\cot(\pi z) = \frac{1}{\pi}(1/z + \sum_{z>1} \frac{2z}{z^2 - n^2}), z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

证明. $\forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$，固定 z_0，如图作闭路 γ_n，使得 z_0 在 γ_n 内部，函数 $\frac{\cot(\pi z)}{z - z_0}$ 在 $z = n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 上均为一级极点。

设 $f(z) = \frac{\cot(\pi z)}{z - z_0}$。故

$$Res_{z=n} f = \lim_{z \to n} f(z) \cdot (z - n) = \frac{1}{(n - z_0)} \lim_{z \to n} \frac{z - n}{tan(\pi z)} = \frac{1}{(n - z_0)\pi}$$

$$Res_{z=z_0} f = \cot(\pi z_0)$$

故由留数定理得：

$$\int_{\gamma_n} f(z) \mathrm{d}z = 2\pi i (\cot(\pi z_0) + \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{\pi(k - z_0)})$$

化简得(5.1)式：

$$\int_{\gamma_n} f(z) \mathrm{d}z = 2\pi i (\cot(\pi z_0) - \frac{1}{\pi}(\frac{1}{z_0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2z_0}{k^2 - z_0^2})) \tag{5.1}$$

下面我们对积分 $\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z$ 进行估计。记 $\lambda = n+\frac{1}{2}$
在 γ_n 平行于 y 轴的边 AB、CD 上，有：

$$\left|\cot(\pi(\pm\lambda+iy))\right|^2 = \left|\tan(2\pi y)\right|^2 = \left|\frac{-e^{\pi y}+e^{-\pi y}}{e^{\pi y + e^{-\pi y}}}\right|^2 \le 1$$

在 γ_n 平行于 x 轴的边 AD、BC 上，有：

$$|\cot(\pi(\pm x+i\lambda))|^2 = \frac{ch^2\pi\lambda - \sin^2\pi x}{sh^2\pi\lambda + \sin^2\pi x} \le \frac{ch^2\pi\lambda}{sh^2\pi\lambda} = \frac{e^{2\pi\lambda}+e^{-2\pi\lambda}+2}{e^{2\pi\lambda}+e^{-2\pi\lambda}-2} \to 1(n\to+\infty)$$

故当 n 充分大时，在 γ_n 上有 $|\cot(\pi z)| \le 2$

另一方面，

$$\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_n} \frac{\cot(\pi t)}{z-z_0}\mathrm{d}t = \int_{\gamma_n} \frac{\cot(\pi t)}{z}\mathrm{d}z + z_0\int_{\gamma_n} \frac{\cot(\pi t)}{z(z-z_0)}\mathrm{d}z$$

由留数定理：

$$\int_{\gamma_n} \frac{\cot(\pi t)}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=-n,k\neq 0}^{n} \frac{1}{\pi k} = 0$$

而

$$\left|\int_{\gamma_n} \frac{z_0\cot(\pi t)}{z(z-z_0)}\mathrm{d}z\right| \le 8\lambda\cdot\frac{2|z_0|}{\lambda(\lambda-|z_0|)} \to 0(\lambda\to+\infty)$$

故

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\gamma_n} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

代入(5.1)式，令 $n\to+\infty$，得

$$\cot(\pi z_o) = \frac{1}{\pi}(\frac{1}{z_0} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z_0}{k^2-z_0^2})$$

又由于 $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ 的任意性，得证。 □

由于 $z\cot z$ 在 $|z|<\pi$ 上解析，故在 $|z|<\pi$ 内可展为 *Taylor* 级数。而另一方面，$z\cot z$ 为偶函数，故展开式中只含偶次幂。记偶次幂系数为 $-\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}$，则

$$z\cot z = 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}z^(2n)(|z|<\pi)$$

其中 B_n 称为 *Bernoulli* 数。

e.g 证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} = 2^{2k-1}\frac{\pi^{2k}B_k}{(2k)!}$$

证明. 由前得 $\pi z\cot(\pi z)=1-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2n}B_n}{(2n)!}(\pi z)^{2n}$

另一方面由例 6 得 $\pi z\cot(\pi z)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{z^2-n^2}=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{n^2(1-\frac{z^2}{n^2})}=1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2z^2}{n^2}\cdot\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\frac{z^2}{n^2})^k=1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2z^{2k}}{n^{2k}}=1-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2z^{2k}}{n^{2k}}=1-\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^{2k}})\cdot 2^{2k}$

由 *Taylor* 展式解唯一性，比较系数得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}=\frac{\pi^{2k}B_k}{(2k)!}2^{2k-1}$。

故 *Bernoulli* 数非负。 □

e.g 求级数的值：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$$

解

$$\begin{aligned}
z\cot z=z\frac{\cos z}{\sin z}&=\frac{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+o(|z|^6)}{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+o(|z|^6)}\\
&=(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+o(|z|^6))\cdot[1+(\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+o(|z|^6))+\\
&\frac{z^2}{3!}-\frac{z^4}{5!}+o(|z|^4)^2+(\frac{z^2}{3!}-o(|z|^2)^3)+o(|z|^6)]\\
&=1-\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{45}z^4-\frac{32}{3\times 7!}z^6+o(|z|^6)
\end{aligned}$$

我们可以发现，每个偶次幂的系数均可写为有理数的有限和。故 B_n 为有理数。

此外，比较系数得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}\pi^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{\pi^2}{6},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{2}\pi^4\cdot\frac{1}{45}=\frac{\pi^4}{90},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{1}{2}\pi^6\cdot\frac{32}{3\times 7!}=\frac{\pi^6}{945}$$

5.0.2 例题

e.g 设 $r>0$，证明：当 n 充分大时，多项式

$$1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots+\frac{1}{n!}z^n$$

在 $B(0,r)$ 中没有根

证明．设 $f_k(x)=1+\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{z^i}{i!}$。故 $f_k(x)\to e^z$，设 $f(z)=e^z$

另一方面 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ 是 e^z 的 *Taylor* 展开式且收敛半径为 $+\infty$。故 $f_k(x)\rightrightarrows f(z)$。故 $f_k(x)$ 在 $B(0,r)$ 上内闭一致收敛。

故由 *Hurwitz* 定理 (5.5.10) 得存在 N，s.t. $n>N$ 时，$f_n(z)$ 与 $f(z)$ 有相同的零点个数。

故 n 充分大时，$f_n(z)$ 在 $B(0,r)$ 上无根 □

e.g 计算积分

$$\textit{Dirichlet}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right)$$
$$\textit{Fresnel}\left(\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x\right)$$
$$\textit{Poisson}\left(\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos 2bx\mathrm{d}x\right)$$

解 略

e.g Jordan 引理

解 略

e.g 计算

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x,(0<p<1)$$

解 取 $f(z)=\frac{z^{p-1}}{1+z}$。由于 $0<p<1$，$z^p-1=e^{(p-1)\log z}$ 为多值函数。取一个单值分支 $z^p-1=e^{(p-1)\log z}$。取出以实轴正半部分为边界分割切的域，其中 I 位于 $[0,+\infty)$ 的上边沿，II 为下边沿。

故在闭曲线内部只有-1 和 1 为奇点且为 1 级奇点。

由留数定理

$$(\int_I+\int_{II})f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_r}f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_R}f(z)\mathrm{d}z=2\pi i Res_{z=-1}f(x)=-2\pi i e^{p\pi i}\tag{5.2}$$

一方面

$$\left|\int_{\gamma_R}f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_{\gamma_R}\frac{|z|^{p-1}}{|z|-1}|\mathrm{d}z|\le 2\pi R\cdot\frac{R^{p-1}}{R-1}\to 0(R\to+\infty)$$
$$\left|\int_{\gamma_r}f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_{\gamma_r}\frac{|z|^{p-1}}{1-|z|}|\mathrm{d}z|\le 2\pi R\cdot\frac{r^{p-1}}{r-1}\to 0(r\to 0^+)$$

在 II 上 $z = xe^{2\pi i}$。故 $\mathrm{d}z = e^{2\pi i}\mathrm{d}\,\mathrm{x}$

故 $\int_{II} f(z)\mathrm{d}z = \int_R^r \frac{x^{p-1}\cdot e^{2p\pi i}}{1+x}\mathrm{d}x$。代入 (5.2) 式，令 $r \to 0^+, R \to +\infty$ 得：

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}\cdot e^{2p\pi i}}{1+x}\mathrm{d}x = -2\pi i e^{p\pi i} \\
\Rightarrow &(1-e^{2p\pi i})\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x = -2\pi i e^{p\pi i} \\
\Rightarrow &\frac{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}}{2!}\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \pi \\
\Rightarrow &\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin p\pi}
\end{aligned}$$

第六章

§6.1 自同构群 II

在第四章中我们讨论了 $B(0,1)$ 的自同构群,那么对于更一般的 $\mathbb{C},\mathbb{C}_\infty,Aut(\mathbb{C}),Aut(\mathbb{C}_\infty)$ 又是什么样子的?

利用 *laurent* 展开式我们很容易得到如下结论:

定理 6.1.1. *若无穷远点是整函数 f 的一个 m 级极点,那么 f 是一个 m 次多项式。*

证明. 略 □

定理 6.1.2. *在无穷远处解析的整函数一定是常数。*

证明. 略 □

定理 6.1.3. *若 f 在复平面 G 上除极点外无其他奇点,则称函数是一个亚纯函数。*

证明. 略 □

定理 6.1.4. *$z=\infty$ 是亚纯函数的可去奇点或极点 $\Leftrightarrow f$ 是有理函数。*

证明. 证明:"$\Rightarrow$" 故存在 $R>0$,使得 f 在 $R<|z|<\infty$ 上解析。

又由于 f 的奇点均为孤立的,故在 $|z|<R$ 上至多有有限个奇点,记为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$, 记他们的阶数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_n$。

故 f 在 z_j 附近的 *laurent* 展开式的主部为

$$h_j(z)=\frac{a_{-1}^{(j)}}{z-z^j}+\frac{a_{-2}^{(j)}}{(z-z^j)^2}+\cdot\cdot+\frac{a_{-m_j}^{(j)}}{(z-z_j)^(m_j)}$$

设 f 在 ∞ 的邻域内展开的主部为 $g(z)$, 当 $z=\infty$ 是极点时,$g(z)$ 是多项式,当 $g(\infty)$ 是可去奇点时,$g=0$。令 $F(z)=f(z)-h_1(z)-\cdots-h_m(z)-g(z)$,不难得到 $F(z)$ 在 $\mathbb{C}_\infty$ 上解析。由定理6.1.2得 $F(z)$ 是常函数,故 $f(z)$ 是有理函数。

"$\Leftarrow$'' 这个是显然的,请读者自行验证。

利用上述三个定理我们可以导出 $\mathbb{C}$ 的全纯自同构解和 $\mathbb{C}_\infty$ 的亚纯自同构解。 □

定理 6.1.5. *$Aut(\mathbb{C})$ 由所有的一次多项式组成。*

证明. 设 $f(z)=az+b$，显然 $f\in Aut(\mathbb{C})$，由于 f 是整函数，若 ∞ 是 f 的可去奇点，则由定理6.1.1得 f 是常函数矛盾！

若 ∞ 是 f 的本性奇点，则 $\forall A\in\mathbb{C},\exists z_n\to\infty$，有 $f(z_n)\to A$, 记 $f(z_n)=\omega_n$，则 $f^{-1}(\omega_n)=z_n$，令 $n\to\infty$，故 A 是 f^{-1} 的奇点，这与 $f^{-1}\in Aut(\mathbb{C})$ 矛盾。

故 ∞ 为 f 的极点，故由定理6.1.1得 f 是多项式，又由于 f 是单射，故 f 为一次多项式。 □

定理 6.1.6. *$Aut(\mathbb{C}_\infty)$ 由所有 Möbius 变换组成。*

证明. 易得 *Möbius* 变换是 $Aut(\mathbb{C}_\infty)$ 上的双射

设 $f\in Aut(\mathbb{C}_\infty)$，则 f 必为亚纯函数，且 ∞ 必为 f 的可去奇点或极点，由定理 6.1.4 f 是有理函数，又由于 f 是单射，故 f 为 *Möbius* 变换。 □

§6.2 Schwarz-Christoffel 公式与边界对应定理

(此部分我们对于课堂中的内容进行补充)

定理 6.2.1. *(边界对应定理) 设 G 是由一条简单闭曲线 Γ 围成的区域，若 $\omega=f(z)$, 把 G 双全纯的映为了 $B(0,1)$, 那么 f 的定义域可扩充到 Γ 上使得 $f\in C\left(\overline{G}\right)$, 且把 Γ 一一映成 $|\omega|=1$，ω 关于 G 的正向对于于 $f(\Gamma)$ 的正向。*

证明. 边界对应定理的证明是复杂的，此处略去，可见方企勤《复变函数》，史济怀《复变函数》。 □

定理 6.2.2. *设 G 和 D 分别为由可求长曲线 γ 和 Γ 围成的域，若 $f\in H(G)\cap C\left(\overline{G}\right)$ 且把 γ 一一映射为 Γ, 那么 $\omega=f(z)$ 把 G 一一地映射成 D, 并且是 ω 关于 G 的正向对应于 Ω 关于 D 的正向。*

证明. 任取 $\omega\in D$。由于 D 是由简单闭曲线围成的区域。故由幅角定理 $f(z)-\omega_0$ 在 G 中的零点个数 $N=\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma Arg\left(f(z)-\omega_0\right)=\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma Arg(\omega-\omega_0)=\pm1$，故 $N=1$.

另一方面由上述过程中得当 z 绕 γ 的正向绕一圈时，ω 也绕 γ 的正向转一圈。并且当 $\omega\notin\overline{D}$ 时，$N=0$, 即 $f(z)$ 会将 G 中的点映到 D 的外部。

当 $\omega_0\in\Gamma$ 时，若存在 $z_0\in G$, 使得 $f(z_0)=\omega_0$，则 ω_0 必为 $f(G)$ 的内点矛盾！

综上证毕 □

定理 6.2.3. 设 D 是由简单闭曲线 γ 所围成的单连通域，$f\in H(D)\cap C\left(\overline{D}\right)$，则若 f 将 γ 一一地映射为简单闭曲线 γ, 则 f 将 D 双纯的映射为由 γ 围成的单连通域。

证明. 略。 □

定理 6.2.4. 存在把上半平面 H 一一地映射为多角形域 G 的双纯映射 $\omega=f(z)$ $f\in C\left(\overline{D}\right)$ 且 $f(\mathbb{R})=\partial G$

证明. 任取 $a\in D$，则分式线性变换 $\zeta=\frac{z-a}{z-\bar{a}}$ 把 D 一一地映射为 $|\zeta|<1$，它在 $\overline{D}$ 上连续，并且把实轴一一地映为 $|\zeta|=1$。

则由 *Riemann* 映照定理和边界对应定理知存在双全纯函数 $\omega=g(\zeta)$ 将 $|\zeta|<1$ 一一地映为 G，且 g 在 $|\zeta|\leq 1$ 上连续，并且把 $|\zeta|=1$ 一一地映为 ∂G 于是 $\omega=g(\frac{z-a}{z-\bar{a}})=f(z)$ 即为满足条件的映射。 □

定理 6.2.5. 设 Ω 是具有角点 ω_0 的域，在 ω_0 的邻域中，Ω 的边界由两个直线段构成，他们的交角为 $\alpha\pi$。

设双全纯映射 $\omega=f(z)$ 把上半平面映为 Ω，把实轴上的点映为 ω_0，那 ω_0 在 z_0 的邻域内，f 可表示为

$$f(z)=\omega_0+(z-z_0)^{\alpha}.\{C_0+C_1(z-z_0)+\cdots\},C_0\neq 0.$$

证明. 略 □

第七章

定理 7.0.1. 设 $u\in C^2(D)$ 是实值函数，那么 u 是 D 上的次调和函数的充分必要条件，对任意的 $z\in D$，有 $\Delta U(z)\geq 0$.

证明. "←" 设 Δu(z)≥ 0 在 D 内处处成立，则对于 G∈ D 上的调和函数 h，若 u≤ h 在 ∂G 上成立，设 u_1=u-h，则 $\Delta u_1=\Delta u-\Delta h=\Delta u\geq 0$。故由定理 7.3.6 以及 u_1 在 ∂G 上有 $u_1(z)\leq 0$。故在 G 上有 $u_1(z)\leq 0$，即 u(z)≤ h(z)。由 G 的任意性及定理 7.3.3 得 u 是 D 上的次调和函数。 □

证明. "→" 设 u 是 D 上的次调和函数，若存在 a 属于 D 使 Δu(a)<0，则存在 ϵ>0，使得在 B(a, ϵ) 上有 Δu ＜ 0，故在 B(a, ϵ) 上有 Δ(-u)>0，则由充分性证明我们得到-u 是 B(a,ϵ) 上的次调和函数，故在 B(a,ϵ) 中的任意一个圆 B(b,ϵ) ⊂ B(a,ϵ) 有-u(b)≤ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}-\mathrm{u}(b+\partial e^{2\theta})d\theta$，故 u(b)≥ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{u}(b+\partial e^{2\theta})d\theta$，而又由于 u 也是 B(a,$\epsilon$) 上的次调和函数，故 u(b)≤ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{u}(b+\partial e^{2\theta})d\theta$，故 u 在 B(a,$\epsilon$) 中满足平均值性质，故 u 为 B(a,$\epsilon$) 上的调和函数，故在 B(a,$\epsilon$) 上有 Δu=0，矛盾！故 ∀z∈ D，有 Δu(z)≥ 0。 □

定理 7.0.2. 域 D 上的次调和函数域 S 线性空间，并且若 V_1，V_2 是域 D 上的次调和函数，则
$V(z)=max\{V_1(z),V_2(z)\}$ 也是 D 上的次调和函数。

定理 7.0.3. 若 $u(z)$ 是区域 D 内连续的次调和函数,$\overline{B(z_0,z)}\subset D$ 。$P_2(z)$ 表示以 $z(\varphi)$ 在 $|z-z_0|=r$ 上的边值得到的 Poisson 积分,则函数 $\widetilde{U}(z)=\begin{cases} P_2(\mathrm{z}) & z\in B(z_0,r)\\ V(z) & z\in D\backslash B(z_0,r)\end{cases}$

证明. 由于 V 是 D 上的次调和函数，故由定理 7.2.2 得 $\widetilde{U}(z)\in C(D)$，并且对于 $\forall|z_1-z_0|$ =r，存在 ρ_1 ＞ 0，使得 $V(z_1)\leq\int_0^{2\pi}V(z_1+\rho\mathrm{e}^{i\theta})d\theta$

又由于 z∈ B(z_0,r)，$\widetilde{V}(z_1-V(z))=P_2(z)-V(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi-z_0|=r}\frac{r^2-|z-z_0|^2}{|\xi-z_0|^2}V(\xi)d\theta-V(z)$，又由定理 7.1.6 得 $\widetilde{V}(z_1)-u(z)=P_2(z)-V(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi-z_0|=r}\frac{r^2-|z-z_0|^2}{|\xi-z_0|^2}(V(\xi)-u(z))d\theta$，又由定理 7.3.3 得 V(z) 满足最大值原理，故任意的 $\xi\in B(z_0,r)$ 有 f(ξ)≥ V(z)，故 ∀z∈ D 有 $\widetilde{V}(z)\geq V(x)$，故 ∀$z_1$ 满足 $|z_1-z_0|\geq r$，有 $\widetilde{V}(z_1)\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{V}(z_1+\rho e^{i\theta})d\theta$，故 $\widetilde{V}(z)$ 为 D 上的次调和函数。 □

定理 7.0.4. 设 $u\in C^2(D)$ 是一个实值函数，若对任意的 $z\in D$，有 $\Delta u(z)\geq 0$，那么对任意的域 $G\subset D$，u 在 G 上的最大值必在 ∂G 上取到

证明. 先设对每个点 $z\in D$，有 $\Delta u(z)>0$。若 u 在 G 上的最大值在 G 的内点 z_0 内取到，记 $z_0=x_0+\dot{z}-y_0$，$g(t)=u(x_0,t)$，那么 g 在 $t=y_0$ 处有最大值，故 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{z_0}=g''(y_0)\leq 0$ 同理得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{z_0}\leq 0$，矛盾！ · 现设 $\Delta u(z)\geq 0$，令 $u_\varepsilon(z)=u(z)+\varepsilon|z|^2, \varepsilon>0$，故 $\Delta u_\varepsilon(z)=\Delta u(z)+\varepsilon>0$，故

u_ε 在 G 上的最大值在 ∂G 上取到，故 $u_\varepsilon(z)\leq \overbrace{z\in\partial G}^{sub} u_\varepsilon(z), \varepsilon\to 0$，得 $u(z)\leq \overbrace{z\in\partial G}^{sub} u(z)$ □

发布说明

为了使这份精心制作的笔记以更好的面貌呈现在同学们的面前，钱院学辅组织了一些同学用 LaTeX 进行排版。在此对他们表示衷心的感谢！

参与排版成员

- ➤ 钱 91 谢佳润
- ➤ 计试 71 朱泽荧
- ➤ 力学少 52 朱相辰
- ➤ 化生 81 郭骐瑞
- ➤ **设计整理：** 化生 81 高旭帆

如果对笔记有意见和建议，可通过以下方式联系我们：

- 钱院学辅信息发布站： `https://qyxf.site`
- 钱院学辅邮箱：`qianyuanxuefu@163.com`

除此之外，欢迎同学们扫码加入我们的 QQ 群：

群名称:钱院学辅交流分享群
群　号:852768981

群名称:钱院科粉群1.0
群　号:979670536

- 钱院学辅交流分享群：有钱院优秀的学长学姐为大家答疑平日学习中的问题，分享学习资料和经验；
- 钱院科粉群：分享科研资源、公开课、最新科技评论，转发创新竞赛相关信息，就科研方法、学习提供答疑。

如果你希望向我们投稿笔记，可以联系群内的化生 81 高旭帆同学。我们将用最整洁的排版，为你在钱院官方的平台发布一份完美的笔记！

期待与大家的见面！

钱院学辅

2020 年 5 月 28 日