实变函数习题解答

Solutions to Real Analysis Exercises

作者：数试82 裴兆辰

2020年5月27日

钱学森书院学业辅导中心

QIAN YUAN XUE FU

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

作品信息

- **标题：** 实变函数习题解答 - *Solutions to Real Analysis Exercises*
- **作者：** 数试 82 裴兆辰
- **校对排版：** 钱院学辅排版组
- **出品时间：** 2020 年 5 月 27 日
- **总页数：** 28

前言

目录

第一章 集合与点集

§1.1 第一组

由于第一章内容较为基础，其中的不少内容在分析中也已有所介绍，故我们只选取少量较典型的题目给出具体的解析。

练习 3 设有集合列 $\{A_n\},\{B_n\}$ 试证明：

$$(i)\quad \overline{\lim_{n\to+\infty}}(A_n\cup B_n)=\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}}A_n\right)\cup\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}}B_n\right)$$

$$(ii)\quad \underline{\lim_{n\to+\infty}}(A_n\cap B_n)=\left(\underline{\lim_{n\to+\infty}}A_n\right)\cap\left(\underline{\lim_{n\to+\infty}}B_n\right)$$

证明 利用定理 1.3 直接进行叙述即可，此处省略 ■

练习 14 设 $F\subset\mathbb{R}^n$ 是有界闭集，E 是 F 的一个无限子集，试证明 $E'\cap F\neq\emptyset$. 反之，若 $F\subset\mathbb{R}^n$, 且对于 F 中的任一无限子集 E，有 $E'\cap F\neq\emptyset$，则 F 是有界闭集.

证明 由于 F 是闭集故 $\overline{E}\subset F$, 故 $E'\subset F$. 由列紧性原理知 $E'\neq\emptyset$，故得证

另一方面，我们反设 E 无界，则对于任意的正整数 n，有 $E\cap\big(B(0,n)\setminus B(0,n-1)\big)\neq\emptyset$. 在 $B(0,n)\setminus B(0,n-1)$ 中任取一点 x_k，故点列 $\{x_k\}$ 无聚点. 令 $E=\{x_k|k\in\mathbb{N}^*\}$, 故 $E'=\emptyset$，矛盾！故 E 有界.

若 F 不为闭集，则 F 中存在一个收敛的不重复点列 $\{y_n\}$, 有 $y_n\to y_0$，故 $y_0\in F$, 矛盾！故 F 为有界闭集 ■

练习 16 设 A,B 是 $\mathbb{R}$ 中的点集，试证明 $(A\times B)'=(\overline{A}\times B')\cup(A'\times\overline{B})$

证明 任取 $A\times B$ 中的互异收敛点列 $\{(x_n,y_n)\}$, 设收敛点为 (x_0,y_0), 故 $x_n\to x_0, y_n\to y_0$. 我们可以用反证法得到 $(\overline{A}\setminus A')\times(\overline{B}\setminus B')\cup(A\times B)'=\emptyset$(此处请读者自行补充). 另一方面，显然 $A\times B', A'\times B, A'\times B'\subset(A\times B)'$. 综上得证 ■

练习 18 设 $f\in C(\mathbb{R}), \{F_k\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的递减紧集列，试证明

$$f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k\right)=\bigcap_{k=1}^{\infty}f(F_k)$$

证明 由闭集套定理得 $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing$，任取 $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$, 故对于任意的正整数 k, 有 $f(x) \in f(F_k)$, 故 $f(x) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k)$, 故 $f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k)$.

任取 $y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k)$, 故对于任意的正整数 k,$y \in f(F_k)$. 记 $E_k = f^{-1}(y) \cap F_k$, 故 E_k 为闭集，故 E_k 为递减闭集列. 由闭集套定理知存在 $x \in \mathbb{R}$, 使得 $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} (E_k) = f^{-1}(y) \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$, 故 $y \in f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right)$. 综上 $f\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f(F_k)$ ■

练习 38 设 $f : [0,1] \mapsto [0,1]$. 若点集 $G_f = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$ 是 $[0,1] \times [0,1]$ 中的闭集，试证明 $f \in C([0,1])$

证明 记 $\omega(x)$ 表示函数 $f(x)$ 在 x 处的振幅，记 $M(x) = \overline{\lim_{t\to x}} f(t), m(x) = \underline{\lim_{t\to x}} f(t)$, 即 $\omega(x) = M(x) - m(x)$. 由分析知识我们可以得到 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充分必要条件是 $\omega(x_0) = 0$.

若存在 $x_0 \in [0,1]$, 满足 $\omega(x_0) \neq 0$, 那么必有 $f(x_0) \neq M(x_0)$ 或 $f(x_0) \neq m(x_0)$. 不妨设 $f(x_0) \neq M(x_0)$，故 $(x_0, M(x_0)) \notin G_f$. 由定义知存在 $[0,1]$ 中的趋于 x_0 的数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = M(x_0)$. 故对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 n, 使得 $\sqrt{(x_0 - a_n)^2 + (M(x_0) - f(a_n))^2} < \epsilon$, 而 $(a_n, f(a_n)) \in G_f$, 故 $(x_0, M(x_0))$ 不为 G_f 的内点，这与 G_f 是 $[0,1] \times [0,1]$ 中的闭集矛盾！故假设不成立，原命题成立. ■

练习 40 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$，且 $\overline{A} \cap B = \overline{B} \cap A = \varnothing$, 试证明存在开集 G_A, G_B 使得 $G_A \cap G_B = \varnothing, G_A \supset A, G_B \supset B$.

证明 取 $G_A = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, A) < d(x, B)\}, G_B = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, A) > d(x, B)\}$, 由于 d 是连续函数，故 G_A, G_B 是开集，显然 $G_A \cap G_B = \varnothing, G_A \supset A, G_B \supset B$ ■

第二章 *Lebesgue*测度

§2.1 第一组

练习 1 设 $E \subset \mathbb{R}$，且存在 $q: 0 < q < 1$，使得对任一区间 (a,b)，都有开区间列 $\{I_n\}$：

$$E \cap (a,b) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_k) < (b-a)q \quad ,$$

试证明 $m(E) = 0$

证明 由于 $m^*(E) = m^*\left(E \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n\right) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(E \cap I_n)$，所以只需要证明 $m^*((a,b) \cap E) = 0$

由条件知存在 $I_n(a_n,b_n),(n \in \mathbb{N})$，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n \supset E \cap (a,b)$，$s.t.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) \le q(b-a)$．下面我们对于每个 (a_n,b_n) 再做如上操作，所以存在 $I_n^{(1)} = (a_n^{(1)}, b_n^{(1)}), n \in \mathbb{N}$，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n^{(1)} \supset E \cap (a_k,b_k)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(I_n^{(1)}) < (b_k - a_k)q$. 我们再对 k 求和，故我们得到了可数多个开集 $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$，$s.t.\ \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} J_n \subset \left(E \cap \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)\right)$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(J_n) \le q\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n) < q^2(b-a)$，故 $m^*((a,b) \cap E) < q^2(b-a)$.

以此类推我们重复上面的过程，可得 $m^*((a,b) \cap E) = 0$ ■

练习 2 设 $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n, A_1 \subset A_2, A_1$ 是可测集，且 $m(A_1) = m^*(A_2) < +\infty$，试证明 A_2 是可测集

证明 由于 A_1 可测，故 $m^*(A_2) = m^*(A_1) + m^*(A_2 \setminus A_1)$，故 $A_2 \setminus A_1$ 是零测集，故 $A_2 \setminus A_1$ 是可测集，故 $A_2 = A_1 \cup A_2 \setminus A_1$ 是可测集 ■

练习 3 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 都是可测集，试证明

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) = m^*(A) + m^*(B)$$

证明 设 A, B 都是可测集，故

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B \setminus A) = m^*(B) + m^*(A \setminus B),$$

$$m^*(A) = m^*(A \cap B) + m^*(A \setminus B),$$

$$m^*(B) = m^*(A \cap B) + m^*(B \setminus A).$$

联立上述三个式子即得到所证明的式子 ■

练习 4 试问：是否存在闭集 $F, F\subset[a,b]$ 且 $F\neq[a,b]$, 而 $m(F)=b-a$

证明 不存在，假设存在，记为 F, 记 $F_0=F\setminus\{a,b\}$, 故 $F_0\subsetneqq(a,b)$ 且 $m(F_0)=b-a$. 则 $(a,b)\setminus F_0$ 为非空开集，故 $(a,b)\setminus F_0$ 可写为 $\mathbb{R}$ 中的至少一个开区间的并，故存在开区间 (s,t), 满足 $(s,t)\subset(a,b)\setminus F_0$. 故 $m^*((a,b)\setminus F_0)\geq s-t>0$, 显然这个与 $m(F_0)=b-a$ 矛盾！故满足条件的闭集不存在！ ■

练习 7 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测集合列，若 $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k\right)<+\infty$, 试证明

$$m\left(\varlimsup_{k\to+\infty}E_k\right)\geq\varlimsup_{k\to+\infty}m(E_k)$$

证明 与推论 2.9 的证明类似，此处省略 ■

练习 8 设 $\{E_k\}$ 是 $[0,1]$ 中的可测集合列，$m(E_k)=1(k=1,2,\ldots)$，试证明 $m\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k\right)=1$

证明 记 $F_k=[0,1]\setminus E_k$, 由于 E_k 可测，故 F_k 为零测集. 故 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$ 也是零测集

又由题目条件得 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 是可测集，故用 $[0,1]$ 做实验集即得到题目结果 ■

练习 9 设 $E_1,E_2,\ldots E_k$ 是 $[0,1]$ 中的可测集，且有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}m(E_i)>k-1$, 试证明 $m\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}E_i\right)>0$

证明 与 8 类似，此处省略 ■

练习 12 设 $\{B_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中递减可测集列，$m^*(A)<\infty$, 令 $E_k=A\cap B_k\ (k=1,2,\ldots), E=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}E_k$, 试证明 $\lim\limits_{k\to\infty}m^*(E_k)=m^*(E)$

证明 由于 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$ 可测，故 $m^*(A)=m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k)+m^*\left(A\cap(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k)^c\right)$

又由于 E_k 可测，故 $m^*(A)=m^*(E_k)+m^*(A\cap B_k^c)$, 由于 $\{A\cap B_k^c\}$ 是递增集合列，在此式两端令 $k\to\infty$，由推论 2.17 得 $\lim\limits_{k\to\infty}m^*(A\cap B_k^c)=m^*\left(A\cap(\lim\limits_{k\to\infty}B_k)^c\right)=m^*\left(A\cap(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}B_k)^c\right)$, 直接带入即得证 ■

练习 14 试证明点集 E 可测的充分必要条件是，对任给的 $\epsilon>0$, 存在开集 $G_1,G_2:G_1\subset E, G_2\subset E^c$, 使得 $m(G_1\cap G_2)<\epsilon$

证明

" $\Rightarrow$ "

由定理 2.13 得,$\forall\epsilon>0$, 存在开集 F 以及闭集 G 使得 $F\supset E\supset G$, 并且 $m(F\setminus E)<\dfrac{\epsilon}{2}, m(E\setminus G)<\dfrac{\epsilon}{2}$, 取 $G_1=F, G_2=G^c$, 故 $m(G_1\cap G_2)<\epsilon$

" $\Leftarrow$ "

假设存在这样的集合 G_1, G_2，记 $F = G_2^c$，故显然 $F \subset E$ 且 $m(G_1 \setminus F) < \epsilon$, 故 $m(G_1 \setminus E) < \epsilon$, 故 E 为可测集 ■

练习 15 设 $E \subset [0,1]$ 是可测集，且有 $m(E) \geq \epsilon > 0$,　$x_i \in [0,1]$, $i = 1,2,...,n$, 其中 $n > \dfrac{2}{\epsilon}$，试证明 E 中存在着两个点其距离等于 $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ 中某两个点间的距离.

证明 设 $E_k = E + \{x_k\}, (k = 1,2...,n)$, 故由定理 2.18 得 $m(E_k) = m(E) \geq \epsilon$. 故 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m^*(E_k) \geq n\epsilon > 2$, 而 $E_k \subset [0,2]$，故一定存在 $i, j \in \{1,2,...,n\}$ 且 $i \neq j$, $s.t.\ E_i \cap E_j \neq \emptyset$. 任取 $x \in E_i \cap E_j$. 故 $x - x_i, x - x_j \in E$,g 故 $|(x - x_i) - (x - x_j)| = |x_i - x_j|$ ■

练习 16 设 W 是 $[0,1]$ 中的不可测集，试证明存在 $\epsilon : 0 < \epsilon < 1$, 使得对于 $[0,1]$ 中任一满足 $m(E) \geq \epsilon$ 的可测集 E,$W \cap E$ 是不可测集

证明 故 $\forall 1 > \epsilon > 0$, 存在 $E \subset [0,1], m(E) \leq \epsilon$, 有 $W \cap E$ 可测，故我们可以取 $\{\epsilon_n\}$, $s.t.\ \epsilon_n \to 1$.

设对于 ϵ_n，满足上述条件的集合记为 E_n，记 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 故 E 可测，且 $m(E) = 1$，故 $m^*(W \cap ([0,1] \setminus E)) = 0$, 故 $W \cap ([0,1] \setminus E)$ 可测. 而另一方面 $W = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (W \cap E_n)\right) \cup (W \cap ([0,1] \setminus E))$, 故 W 可测，矛盾！ ■

§2.2　第二组

练习 1 设 $\{r_n\}$ 是 $\mathbb{R}^1$ 中的全体有理数，令

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2}\right),$$

试证明对 $\mathbb{R}^1$ 中的任一闭集 F, 有 $m(G \triangle F) > 0$

证明 故 G 为开集，显然 $G \setminus F$ 为开集.

若 $G \setminus F \neq \emptyset$, 则 $G \setminus F$ 为 $\mathbb{R}$ 上的非空开集，则 $m(G \setminus F) > 0$, 故 $m(G \triangle F) > 0$

若 $G \setminus F = \emptyset$, 则 $G \subset F$. 若 $F \neq \mathbb{R}$，则取 $x \in F^c$, 显然 x 为无理数，并且为 F^c 的内点，故存在 $\delta > 0$，使得 $B(x, \delta) \subset F^c$. 然而 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密，故 $B(x, \delta)$ 中必包含有理数，矛盾！故 $F = \mathbb{R}$，$m(F \setminus G) = m(G^c)$. 而 $m(G) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} < +\infty$. 故 $m(G^c) > 0$

综上 $m(G \triangle F) > 0$ ■

练习 2 设 $E \subset [a,b]$ 是可测集，$I_k \subset [a,b] (k = 1,2,...)$ 是开区间列，满足 $m(I_k \cap E) \geq \dfrac{2}{3}|I_k| (k = 1,2,...)$, 试证明

$$m\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \cap E\right) \geq \frac{1}{3} m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right)$$

证明 略 ■

练习 3 设 $\{E_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的互不相同的可测集合列，且存在 $\epsilon>0, m(E_n)\ge\epsilon(n=1,2,...)$, 试问是否存在子列 $\{E_{n_i}\}$, 使得 $m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_{n_i}\right)>0$

证明 设 $E_{2n}=\left[0,\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right], E_{2n-1}=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+1},1\right], n\in\mathbb{N}^*$. 故 $m(E_k)>\frac{1}{2}$. 而对于任一子列 $\{E_{n_i}\}$，$\bigcap_{i=1}^{\infty}E_{n_i}=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ ■

练习 4 设 $\{E_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的可测集合列，且满足 $\overline{\lim_{n\to+\infty}}m(E_n)=1$, 试证明对 $0<a<1$, 必存在 $\{E_{n_k}\}$，使得 $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k}\right)>a$

证明 故 $\forall\epsilon>0$, 存在子列 $\{E_{n_k}\}$, 使得 $m(E_{n_k})>1-\frac{\epsilon}{2^k}$. 记 $F_n=[0,1]\setminus E_n$, 故 $m(F_k)<\frac{\epsilon}{2^k}$. 故 $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_{n_k}\right)=1-m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}F_{n_k}\right)>1-\sum_{k=1}^{\infty}m(F_{n_k})>1-\epsilon$ ■

练习 5 设 $m^*(E)<\infty$，试证明存在 G_δ 集 $H:H\subset E$，使得对于任一可测集 A, 都有 $m^*(E\cap A)=m(H\cap A)$

证明 对于任一可测集 A, 有 $m^*(E\cap A)=m^*(E)-m^*(E\setminus A)$. 由定理 2.15 得存在 G_δ 集 $H_0=\bigcap_{k=1}^{\infty}I_k\supset E$, 其中 I_k 是开集，使得 $m(H_0)=m^*(E)$, 故

$m^*(E\cap A)\ge m(H_0)-m^*\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}(I_k\setminus A)\right)=M(h_0\cap A)$.

而 $(H_0\cap A)\setminus(E\cap A)\subset H_0\setminus E$，故 $(H_0\cap A)\setminus(E\cap A)$ 是零测集，是可测集. 故 $m^*(E\cap A)=m(H_0\cap A)$ ■

练习 6 设 $A,B\subset\mathbb{R}$, $A\cup B$ 是可测集，且 $m(A\cup B)<\infty$, 若 $m(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B)$，试证明 A,B 均为可测集

证明 做 A,B 的等测包 A_1,B_1，故 A_1,B_1 是 G_δ 集，$A_1\supset A, B_1\supset B, m(A_1)=m^*(A), m(B_1)=m^*(B_1)$. 故

$$m(A_1)+m(B_1)\ge m(A_1\cup B_1)\ge m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B)=m(A_1)+m(B_1).$$

故上述不等号均取为等号，故 $m^*((A_1\cup B_1)\setminus(A\cup B))=0$, 故 $A_1\setminus A, B_1\setminus B$ 均为零测集，故 A,B 均为可测集 ■

第三章 可测函数

§3.1 第一组

练习 1 设有指标集 I , $f_\alpha(x):\alpha$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，试问：函数 $S(x)=sup\left\{f_\alpha(x)\mid\alpha\in I\right\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上是可测的吗？

证明 不一定

设 I 是 $\mathbb{R}^n$ 上的不可测集，且记 $W=\{x_\alpha|\alpha\in I\}$, 设 $f_\alpha(x)=\frac{1}{|x-x_\alpha|},\alpha\in I$, 故 $f_\alpha(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，故 $\{x\in\mathbb{R}^n|\ S(x)=+\infty\}=\left\{x\in\mathbb{R}^n|\ f_\alpha(x)=+\infty\right\}=W$ 是不可测集，故 $S(x)$ 是不可测含函数 ■

练习 2 设 $z=f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数，$g_1(x),g_2(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值可测函数，试证明 $F(x)=f(g_1(x),g_2(x))$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数

证明 由简单函数逼近定理得，存在函数列 $\{\phi_k(x)\},\{\psi_k(x)\}$, $s.t.$

$$\lim_{k\to\infty}\phi_k(x)=g_1(x)\ ,\ \lim_{k\to\infty}\psi_k(x)=g_2(x)$$

故 $f(\phi_k(x),\psi_k(x))$ 也是在 $[a,b]$ 上的简单可测函数列，由于 $z=f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数，故 $\lim\limits_{k\to\infty}f(\phi_k(x),\psi_k(x))=f(g_1(x),g_2(x))$, 故得证 ■

练习 3 设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上存在右导数 $f'_+(x)$, 试证明 $f'_+(x)$ 是 $[a,b)$ 上的可测函数

证明 故 $f(x)$ 是右连续的，即 $\forall\epsilon>0,\forall x\in\mathbb{R},\exists\delta>0$, $s.t.\ |f(x+\delta)-f(x)|<\epsilon$, 故 $\forall\epsilon>0,\forall x\in\mathbb{R},\exists\delta>0$, $s.t.\ \forall x_1,x_2\in(x,x+\delta)$, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<2\epsilon$, 故 $f(x)$ 在 $(x,x+\delta)$ 上连续，故 f 的不可测点集是零测集，故 $f(x)$ 可测, 故 $f(x+\frac{1}{n})$ 可测，又由于 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(f(x+\frac{1}{n})-f(x)\right)=f'_+(x)$, 故 $f'_+(x)$ 可测 ■

练习 4 设 $f(x)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限的可测函数，$m(E)<+\infty$, 试证明对任意的 $\epsilon>0$, 存在 E 上的有界可测函数 $g(x)$，使得

$$m\left(\{x\in E:|f(x)-g(x)|>0\}\right)<\epsilon$$

证明 设 $E_k=\left\{x\in E:|f(x)|>k\right\}$，故 $\{E_k\}$ 是递减集合列，且

$$\lim_{k\to\infty}m(E_k)=m(\left\{x\in E:|f(x)|=\infty\right\})=0$$

故 $\forall\epsilon>0$, 存在 $k_0\in\mathbb{N}^*$, $s.t.\ m(E_{k_0})<\epsilon$，记

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & x\in E\setminus E_{k_0}\\ 0 & x\in E_k\end{cases}$$

显然 $g(x)$ 可测且有界，且 $m\big(\{x\in E:|f(x)-g(x)|>0\}\big)<\epsilon$ ■

练习 5 设 $f(x)$ 以及 $f_n(x)(n=1,2,\ldots)$ 都是 $A\subset\mathbb{R}$ 上几乎处处有限的可测函数，对任给的 $\epsilon>0$, 存在 A 的可测子集 $B: m(A\setminus B)<\epsilon$, 使得 $f_n(x)$ 在 B 上一致收敛于 $f(x)$，试证明 $f_n(x)$ 在 A 上几乎处处收敛于 $f(x)$

证明 $\forall n\in\mathbb{N}$ 存在 A 的可测子集 B_n, $s.t.\ m(A\setminus B_n)<\frac{1}{2^n}$, 使得 $f_k(x)$ 在 B_n 上一致收敛于 $f(x)$, 设 $B=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}A\setminus B_n$, 故 $m(B)=0$, 且 $A\setminus B=\underline{\lim\limits_{k\to+\infty}}B_k\subset B_n,\forall n\in\mathbb{N}$, 故 $\{f_k(x)\}$ 的不收敛点集一定在 B 中，故 $f_n(x)$ 在 A 上几乎处处收敛于 $f(x)$ ■

练习 6 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的实值可测函数列, $m(E)<+\infty$, 试证明 $\lim\limits_{j\to\infty}f_k(x)=0$, $a.e.\ x\in E$ 的充分必要条件是：对任意的 $\epsilon>0$ 有

$$\lim_{j\to\infty}m\left(\left\{x\in E:\sup_{k\geq j}\{\,|f_k(x)|\,\}\geq\epsilon\right\}\right)=0$$

证明 设 $E_j(\epsilon)=\left\{x\in E:\sup\limits_{k\geq j}\{\,|f_k(x)|\,\}\geq\epsilon\right\}$, 显然对于给定的 ϵ,$\{E_j(\epsilon)\}$ 是递增集合列

" $\Rightarrow$ "

假设结论不成立，则存在 ϵ_0 , s.t.

$$\lim_{j\to\infty}m\left(\left\{x\in E:\sup_{k\geq j}\{\,|f_k(x)|\,\}\geq\epsilon_0>0\right\}\right)=a>0,$$

则当 j 充分大时有 $m\left(\left\{x\in E:\sup\limits_{k\geq j}\{\,|f_k(x)|\,\}\geq\epsilon\right\}\right)>\dfrac{a}{2}>0$, 故 $\{f_n(x)\}$ 存在一个子列 $\{f_{n_k}(x)\}$，使得 $\forall k\in\mathbb{N}$, 有 $m\big(\{x\in E:\{\,|f_{n_k}(x)|\,\}\geq\epsilon\}\big)>0$，这与 $\lim\limits_{j\to\infty}f_k(x)=0$, $a.e.\ x\in E$ 矛盾，故假设不成立

" $\Leftarrow$ "

类似于必要性的证明使用反证法可以得到，此处略去 ■

我们再给出一种不用反证法的做法，同样的我们只给出一个方向的证明，另一个方向大致同理

证明 由书中 P11 例 8 我们可知函数列 $\{f_n(x)\}$ 的不收敛于 0 的点集为

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\left\{x:|f_n(x)|\geq\frac{1}{k}\right\}$$

" $\Rightarrow$ "
故由条件得 $m(D)=0$, 推出 $\forall k\in\mathbb{N}$, 有 $m\left(\bigcap\limits_{N=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=N}^{\infty}\{x:|f_n(x)|\geq\frac{1}{k}\}\right)=0$,
即 $m\left(\varlimsup\limits_{n\to+\infty}\{x:|f_n(x)|\geq\frac{1}{k}\}\right)=0$, 故得证. ■

练习 7 设 $f(x),f_1(x),f_2(x),...,f_k(x),...$ 是 $[a,b]$ 上几乎处处有限的可测函数，且有 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$ $a.e.$ $x\in[a,b]$，试证明存在 $E_n\supset[a,b](n=1,2,...)$，使得

$$m\left([a,b]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0,$$

而 $\{f_k(x)\}$ 在每个 E_n 上一致收敛于 $f(x)$

证明 不难看出题目满足 Egrov 定理的条件，所以对于 $\delta_n=\frac{1}{n}$，存在 $E_n\subset[a,b]$，使得 $m([a,b]\setminus E_n)<\frac{1}{n}$,$\{f_n(x)\}$ 在 E_n 上一致收敛于 $f(x)$，因为 $m([a,b]\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)\leq$ $m([a,b]\setminus E_n)<\frac{1}{n},\forall n\in\mathbb{N}$, 所以 $m\left([a,b]\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=0$ ■

练习 8 设 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$，$\{g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $g(x)$，试证明 $\{f_k(x)+g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)+g(x)$

证明 具体证明过程此处忽略，具体可以仿照书中定理 3.13 的过程进行操作
■

练习 9 设 $m(E)<+\infty,f(x),f_1(x),f_2(x),...f_k(x),...$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数，试证明 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{k\to+\infty}\inf_{\alpha>0}\left\{\alpha+m\left(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\alpha\}\right)\right\}=0$$

证明
" $\Rightarrow$ "

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to+\infty}\inf_{\alpha>0}\left\{\alpha+m\left(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\alpha\}\right)\right\}\\ \leq&\inf_{\alpha>0}\lim_{k\to+\infty}\left\{\alpha+m\left(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\alpha\}\right)\right\}\\ =&\inf_{\alpha>0}\{\alpha+0\}\ =\ 0\end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ "

记 $b_k=\inf\limits_{\alpha>0}\left\{\alpha+m\left(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\alpha\}\right)\right\}$, 则由条件知 $b_k\to0$. 显然对于任意的 $k\in\mathbb{N}$ ，存在 $\{a_k\}$, $s.t.$ $b_k\leq a_k+m\left(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>a_k\}\right)<b_k+\dfrac{1}{k}$, 令 $k\to+\infty$, 则 $a_k\to0$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty}m\left(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>a_k\}\right)=0$, 故对于任意的 $\epsilon>0$, 有 $\lim\limits_{k\to\infty}m\left(\{x\in E:|f_k(x)-f(x)|>\epsilon\}\right)=0$, 得证 ■

练习 10 设 $f_n(x)(n=1,2,...)$ 是 $[0,1]$ 上的递增函数，且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上依测度收敛于 $f(x)$，试证明在 $f(x)$ 的连续点 x_0 上，有 $f_n(x_0)\to f(x_0)\quad(n\to\infty)$

此题利用反证法是不难得到的，但这种方法便失去了分析的意义，下面我们给出利用所学定理直接进行证明的方法:

证明 由于 x_0 是 $f(x)$ 的连续点，故 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, $s.t.\ \forall x\in(x-\delta,x+\delta)$, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\dfrac{\epsilon}{18}$.

由 Riesz 定理，$f_n(x)$ 有子列 $f_{n_k}(x)$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$.

由 Egrov 定理，存在 $[0,1]$ 的子集 E_δ，满足 $m(E_\delta)<\dfrac{\delta}{2}$, $s.t.\{f_{n_k}(x)\}$ 在 $[0,1]\setminus E_\delta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

则当 k 充分大时有 $m\left(x\in[0,1]:|f_{n_k}(x)-f(x)|>\dfrac{\epsilon}{9}\right)<\dfrac{\delta}{2}$, 故存在 $x_1\in(x_0-\delta,x_0),x_2\in(x_0,x_0+\delta)$, $s.t.\ |f_{n_k}(x_1)-f(x_1)|<\dfrac{\epsilon}{9},|f_{n_k}(x_2)-f(x_2)|<\dfrac{\epsilon}{9}$. 所以我们得到 $|f_{n_k}(x_1)-f_{n_k}(x_2)|\le|f_{n_k}(x_1)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_2)|+|f_{n_k}(x_2)-f(x_2)|<\dfrac{\epsilon}{3}$.

又由于 $f_{n_k}(x)$ 是递增函数，则 $|f_{n_k}(x_1)-f_{n_k}(x_0)|\le|f_{n_k}(x_1)-f_{n_k}(x_2)|<\dfrac{\epsilon}{3}$, 故 $|f_{n_k}(x_0)-f(x_0)|\le|f_{n_k}(x_1)-f_{n_k}(x_0)|+|f_{n_k}(x_1)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_0)|<\epsilon$, 所以 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 x_0 处收敛于 $f(x_0)$,.

另一方面, 由于 $\left\{x\in[0,1]:|f_n(x)-f_{n_k}(x)|>\epsilon\right\}\subset\left\{x\in[0,1]:|f(x)-f_{n_k}(x)|>\dfrac{\epsilon}{2}\right\}\cup\left\{x\in[0,1]:|f(x)-f_n(x)|>\dfrac{\epsilon}{2}\right\}$. 而当 k 充分大时, $x_0\notin\left\{x\in[0,1]:|f(x)-f_{n_k}(x)|>\dfrac{\epsilon}{2}\right\}$, 故当 n 与 k 均充分大时，有 $|f_n(x_0)-f_{n_k}(x_0)|\le\epsilon$, 故当 n 充分大时 $|f_n(x_0)-f(x_0)|<2\epsilon$, 得证 ■

练习 11 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，且对任意的 $\epsilon>0$，存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 $G,m(G)<\epsilon$, 使得 $f\in C(\mathbb{R}^n\setminus G)$, 试证明 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数

证明 略 ■

练习 12 设 $\{f_k(x)\}$ 与 $\{g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 0，试证明 $\{f_k(x)g_k(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 0

证明 具体证明过程此处忽略，具体可以仿照上面第八题的过程进行操作。（提示：类似于第 8 题加法的情况将 ϵ 拆为两个 $\epsilon/2$ 的和，那么对于此题乘法的情况呢？） ■

练习 15 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数列，$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的实值函数，若对任意的 $\epsilon>0$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}m^*\left(\{x\in[a,b]:|f_n(x)-f(x)|>\epsilon\}\right)=0,$$

试问 $f(x)$ 是 E 上的可测函数吗？

证明 $\forall k\in\mathbb{N}$, 存在数列 $\{n_k\}$, $s.t.\ m^*(E_k)<\dfrac{1}{2^{n_k}}$, 其中 $E_k=\{x\in[a,b]:|f_{n_k}(x)-f(x)|>\dfrac{1}{2^n}\}$,

根据题目条件，$m^*\left(\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} E_k\right)=0.$

故 $a.e.\ x\in[a,b]$, 有 $x\in\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} {E_k}^c$, 即 $a.e.\ x\in[a,b]$，存在正整数 K_x，$s.t.$ 当 $k>K_x$ 时，有 $x\in {E_n}^c$. 故当 $k>K_x$ 时，有 $|f_{n_k}(x)-f(x)|\le\frac{1}{2^k}$, 故 $f_{n_k}(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$，故 $f(x)$ 可测 ■

练习 16 设 $f(x),f_k(x),(k=1,2,3...)$ 是 $E\subset\mathbb{R}$ 上的实值可测函数，若对任给的 $\epsilon>0$, 必有

$$\lim_{j\to\infty} m\left(\bigcup_{k=j}^{\infty}\{x:|f_k(x)-f(x)|>\epsilon\}\right)=0,$$

试证明对任给的 $\delta>0$, 存在 $e\subset E$ 且 $m(e)<\delta$，使得 $\{f_k(x)\}$ 在 $E\setminus e$ 上一致收敛于 $f(x)$

证明 完全类似于定理 3.12 的证明，此处略去 ■

第四章 *Lebesgue*积分

§4.1 第一组

练习 2 设 $f(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上非负可积，$f(0)=0$, 且 $f'(0)$ 存在，试证明存在积分

$$\int_{[0,\infty)} \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$$

证明 设 $f'(0)=a$, 故 $\forall \epsilon>0, \exists \delta>0,\ s.t.\ \forall x \in\ [0,\delta_{x_0})$, 有 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\epsilon$

故

$$\int_{[0,\infty)} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{[0,\delta)} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{[\delta,\infty)} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \le \int_{[0,\delta)} (a+\epsilon)\,\mathrm{d}x + \int_{[\delta,\infty)} \frac{f(x)}{\delta}\,\mathrm{d}x$$

$$\le (a+\epsilon)\delta + \frac{1}{\delta}\int_{[\delta,\infty)} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

■

练习 3 设 $f(x)$ 是 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数，若存在 $E_k\subset E, m(E\setminus E_K)<1/k(k=1,2,\ldots)$，使得极限

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x$$

存在，试证明 $f(x)$ 在 E 上可积

证明 显然 $m\left(E\setminus(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k)\right)=0$, 设 $F_k=E_k\setminus(\bigcup\limits_{j=1}^{k-1}E_j),(k=1,2,\ldots)$, 故 $F_i\cap F_j=\varnothing(i\neq j)$ 且 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}F_k$, 由书中推论 4.7 得

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{F_k} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

另一方面 $F_k\subset E\setminus\left(\bigcup\limits_{j=1}^{k-1}E_j\right)$, 故 $m(F_k)<\frac{1}{k-1}$, 故 $\lim\limits_{k\to+\infty} m(F_k)=0$

又有

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{F_k} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{E_n} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

故
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{F_k} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_{E_n} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$
故
$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_{E_n} f(x)\,\mathrm{d}x<+\infty$$
■

练习 4 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上非负可积函数，令
$$F(x)=\int_{(-\infty,x]} f(t)\mathrm{d}t, x\in\mathbb{R}$$
若 $F\in L(\mathbb{R})$，试证明 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x=0$

证明 由于 $f(x)\in L(\mathbb{R})$，则 $\forall\epsilon>0$，存在 N , $s.t.$
$$\int_{\{x:|x|>N\}} f(x)\,\mathrm{d}x<\epsilon\,,$$
又由于 $F(x)$ 是单调递增的，故对于 $y>N$, 有
$$F(y)\le\int_{y}^{y+1} f(x)\,\mathrm{d}x\ \le\int_{\{x:|x|>N\}} f(x)\,\mathrm{d}x<\epsilon\,,$$
故 $\lim\limits_{y\to\infty}F(y)=0.$

又由于 $F(x)$ 单调递增且非负，故 $F(x)\equiv 0$， $a.e.\ x\in\mathbb{R}$. 故 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x=0$ ■

练习 5 设 $f_k(x)(k=1,2,...)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上非负可积函数列，若对任意可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 都有
$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\le\int_E f_{k+1}(x)\mathrm{d}x$$
试证明
$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E\lim_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x$$

证明 令 $E_k=\{x\in\mathbb{R}^n|f_k(x)>f_{k+1}(x)\}$, 故 E_k 可测，显然我们可以得到
$$\int_{E_k}\big(f_{k+1}(x)-f_k(x)\big)\,\mathrm{d}x=0$$
故 $m(E_k)=0$, 设 $F=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$, 故 $m(F)=0$，由 *Levi* 定理得
$$\lim_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to+\infty}\int_{E\setminus F} f_k(x)\mathrm{d}x=\int_{E\setminus F}\lim_{k\to+\infty} f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E\lim_{k\to+\infty} f_k(x)\mathrm{d}x$$

■

练习 6 略 (由 Hölden 不等式直接得到)

练习 7 假设有定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x)$，如果对于任意的 $\epsilon > 0$，存在 $g, h \in L(\mathbb{R}^n)$，满足 $g(x) \le f(x) \le h(x), (x \in \mathbb{R}^n)$，并且使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} (h(x) - g(x)) \mathrm{d}x < \epsilon$$

，试证明 $f \in L(\mathbb{R}^n)$

证明 故 $\forall k \in \mathbb{N}^*$, 存在可积函数 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$, $s.t.\ g_k(x) \le f_k(x) \le h_k(x),\ x \in \mathbb{R}^n$, 且

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(h_k(x) - g_k(x)\right) \mathrm{d}x < \frac{1}{k}$$

故

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |h_k(x) - g_k(x)| \mathrm{d}x = 0$$

设 $g(x) = \overline{\lim_{k\to+\infty}}\, g_k(x)$。故 $h_k(x) \ge g(x),\ a.e.\ x \in E$，故

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |h_k(x) - g(x)| \mathrm{d}x = 0$$

故 $\{h_k(x)\}$ 依测度收敛于 $g(x)$，故由不等式关系立即得到 $\{h_k(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$, 故存在子列 $\{h_{k_i}(x)\}$, $s.t.\ \lim\limits_{i\to+\infty} h_{k_i}(x) = f(x), \quad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n$. 故 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数，由积分的单调性得到 $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ■

练习 8 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中测度有限的可测集列，且有

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\, \chi_{E_k}(x) - f(x) \,| \, \mathrm{d}x = 0,$$

试证明存在可测集 E，使得 $f(x) = \chi_E(x), \quad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n$.

证明 故函数列 $\{\chi_{E_k}(x)\}$ 依测度收敛到 $f(x)$,由 *Riesz* 定理,存在子列 $\{\chi_{E_{k_i}}(x)\}$, $s.t.$

$$\lim_{i\to\infty} \chi_{E_{k_i}}(x) = f(x)\,, \quad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n$$

设 $E = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_{k_i}$, 故 $\chi_E(x) = f(x)\,, \quad a.e.\ x \in \mathbb{R}^n$ ■

练习 9 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的递增函数，试证明对 $E \subset [0,1], m(E) = t$, 有

$$\int_{[0,t]} f(x) \mathrm{d}x \le \int_E f(x) \mathrm{d}x$$

证明 设 $E_1 = E \cap [0,t], E_2 = E \cap [t,1]\ , E_3 = E^c \cap [0,t]\ , E_4 = E^c \cap [t,1]$, 故 $m(E_2) =$

$m(E_3)$. 另一方面，$\forall x\in E_3, y\in E_2$, 有 $f(y)\ge f(x)$, 故

$$\int_{[0,t]} f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x \le \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x + m(E_2)f(t)$$
$$= \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x + m(E_3)f(t) \le \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_3} f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$$

■

练习 10 设 $f\in L(\mathbb{R}^n)$，$E\in\mathbb{R}^n$ 是紧集，试证明

$$\lim_{|y|\to\infty}\int_{E+\{y\}} |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$$

证明 由于 $f\in L(\mathbb{R}^n)$ ，故 $\forall\epsilon>0$, 存在 $R>0$, $s.t.$ $\int_{|x|>R} |f(x)|\,\mathrm{d}x<\epsilon$. 由于 E 为紧集，故存在 $R_0>0$, $s.t.$ $E\subset B(0,R_0)$,

故当 $|y|>R+R_0$ 时，$\forall x\in E+\{y\}$ ，有 $|x|>R$, 故

$$\int_{E+\{y\}} |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \int_{|x|>R} |f(x)|\,\mathrm{d}x < \epsilon$$

■

练习 17 设 $E_1\supset E_2\supset\ldots\supset E_k\supset\ldots$, $E=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$,$f\in L(E_k)(k=1,2,\ldots)$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$$

证明 设 $f_k(x)=f(x)\chi_{E_k}(x)$, 由集合的递减性得 $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x)=f(x)\chi_E(x)$, 并且 $|f_k(x)|\le|f_1(x)|,\forall k\in\mathbb{N}$ 由于 $f_1(x)\in L(E_1)$, 由控制收敛原理得

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_1} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_{E_1}\lim_{k\to\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_{E_1} f(x)\chi_E(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$$

■

练习 18 设 $f\in L(E)$, 且 $f(x)>0(x\in E)$, 试证明

$$\lim_{k\to\infty}\int_E (f(x))^{1/k}\mathrm{d}x = m(E)$$

证明 设 $E_1=\{x\in E: f(x)\ge 1\}$, $E_2=\{x\in E: f(x)<1\}$, 故在 E_1 中 $\{f(x)^{1/k}\}$ 是递减列，且 $|f(x)^{1/k}|\le f(x)$, $k\in\mathbb{N}^*$, 由 Levi 定理得

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_1} f(x)^{1/k}\mathrm{d}x = \int_{E_1} 1\,\mathrm{d}x = m(E_1)$$

又由于 $f_n(x)\in L(E)$，故由递减型的 Levi 定理也可得

$$\lim_{k\to\infty}\int_{E_2} f(x)^{1/k}\mathrm{d}x=\int_{E_2}1\,\mathrm{d}x=m(E_2)$$

■

练习 19 设 $\{f_n(x)(n=1,2,\ldots)\}$ 是 $[0,1]$ 上的非负可积函数列，且 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上依测度收敛于 $f(x)$，若有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)\mathrm{d}x=\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x,$$

试证明对 $[0,1]$ 的任意可测子集 E，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E} f_n(x)\mathrm{d}x=\int_{E} f(x)\mathrm{d}x$$

证明 由书上 P158 页注得

$$\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]} |\, f_k(x)-f(x)\,|\,\mathrm{d}x=0$$

故

$$0\le\int_{E} |\, f_k(x)-f(x)\,|\,\mathrm{d}x\le\int_{[0,1]} |\, f_k(x)-f(x)\,|\,\mathrm{d}x\to 0(k\to+\infty)$$

■

练习 21 **(依测度收敛型的 Fatou 引理)** 设 $\{f_k(x)\}$ 是 E 上依测度收敛于 $f(x)$ 的非负可测函数列，试证明

$$\int_{E} f(x)\mathrm{d}x\le\underline{\lim}_{k\to+\infty}\int_{E} f_k(x)\mathrm{d}x$$

证明 由 Fatou 引理，得

$$\int_{E}\underline{\lim}_{k\to+\infty} f_k(x)\mathrm{d}x\le\underline{\lim}_{k\to+\infty}\int_{E} f_k(x)\mathrm{d}x$$

由下极限定义可知，存在 $\{f_k(x)\}$ 的一个子列 $\{f_{k_i}(x)\}$，s.t.

$$\lim_{k\to+\infty} f_{k_i}(x)=\underline{\lim}_{k\to+\infty} f_k(x)$$

故

$$\int_{E}\lim_{i\to+\infty} f_{k_i}(x)\mathrm{d}x=\int_{E}\underline{\lim}_{k\to+\infty} f_k(x)\mathrm{d}x$$

另一方面，显然函数列 $\{f_{k_i}(x)\}$ 在 E 上依测度收敛于 $\{f(x)\}$，由 Riesz 定理得 $\{f_{k_i}(x)\}$, 存在一个子列 $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$,s.t. $\{f_{k_{i_j}}(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$。故

$$\int_E \lim_{i\to+\infty} f_{k_i}(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{j\to+\infty} f_{k_{i_j}}(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$$

综上

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \le \varliminf_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$$

■

练习 23 设 $f\in L(\mathbb{R}^n)$,$f_k\in L(\mathbb{R}^n)(k=1,2,\dots)$ 且对于任意可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 有

$$\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \le \int_E f_{k+1}(x)\mathrm{d}x (k=1,2,\dots),$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

试证明 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x), a.e.x\in\mathbb{R}^n$

证明 类似于之前第五题的过程我们可以得到 $\{f_k(x)\}$ 在 E 上几乎处处单调，设不单调点集为 F, 故 $m(F)=0$, 设 $F(x)=\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$, $x\in E\setminus F$. 故 $F(x)\in L(\mathbb{R}^n)$

由与 $f_k(x)\in L(\mathbb{R}^n)$, 故 Levi 定理得

$$\lim_{k\to+\infty}\int_E \big(f_k(x)-f_1(x)\big)\mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty}\int_{E\setminus F}\big(f_k(x)-f_1(x)\big)\mathrm{d}x = \int_{E\setminus F}\lim_{k\to+\infty}\big(f_k(x)-f_1(x)\big)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{E\setminus F} F(x)-f_1(x)\mathrm{d}x = \int_E F(x)-f_1(x)\mathrm{d}x$$

又由于 $F(x), f_1(x)\in L(\mathbb{R}^n)$, 故

$$\int_E F(x)-f_1(x)\mathrm{d}x = \int_E F(x)\mathrm{d}x - \int_E f_1(x)\mathrm{d}x$$

故

$$\int_E F(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x \,,$$

故 $f(x)=F(x), \quad a.e.\ x\in\mathbb{R}^n$ ■

练习 26 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数，若对于每一点 $x\in\mathbb{R}$, 右极限都存在试证明 $f(x)$ 在任一区间 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的.

证明 $\forall\epsilon>0, \forall x_0\in\mathbb{R}$, 存在 $\delta_{x_0}>0$, $s.t.\forall x\in(x_0, x_0+\delta_{x_0})$, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$

记 $I_{x_0}=(x_0,x_0+\delta_{x_0})$ ，显然 $f(x)$ 在 I_{x_0} 中连续，记 $E=\bigcup\limits_{x_0\in[a,b]} I_{x_0}$,$F=[a,b]\setminus E$ ，故 $D(f)\subset F$, 由定义得 F 没有聚点，故 F 是可列集, 得 $D(f)$ 是零测集 ■

给出另一个解法: 由课本第 20 页例 12 可直接得到。

练习 27 设 $E\subset[0,1]$, 试证明 $\chi_E(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积的充要条件是 $m(\overline{E}\setminus\mathring{E})=0$

证明 任取 $x\in\overline{E}\setminus\mathring{E}$, 故 $\forall>0$, 记 $I_\delta=(x-\delta,x+\delta)$, 故 $I_\delta\cap E\neq\emptyset$, $I_\delta\cap E^c\neq\emptyset$, 故 $\chi_E(I_\delta)=\{0,1\}$, 故 $\overline{E}\setminus\mathring{E}\subset D(f)$, 而 $\overline{E}^c$ 和 $\mathring{E}$ 均为开集，故 $f(x)$ 在 $\overline{E}$ 和 $\mathring{E}$ 上连续，故 $D(f)=\overline{E}\setminus\mathring{E}$, 故 f Riemann 可积当且仅当 $m(\overline{E}\setminus\mathring{E})=0$ ■

§4.2 第二组

练习 1 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值可积函数，令 $0<q\le b-a$, 记 $\Gamma=\{E\subset[a,b]: m(E)\ge q\}$, 试证明

$$\inf_{E\in\Gamma}\left\{\int_E f(x)\mathrm{d}x\right\}>0$$

证明 假设不成立,则存在 Γ 中的集合列 $\{E_n\}$ $s.t.$ $\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x<\dfrac{1}{2^n}$ 令 $S=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} E_n$, 故 $m(S)\ge q$, 则

$$\int_S f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\chi_S(x)\mathrm{d}x\le\int_E f(x)\chi_{\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k\right)}(x)\mathrm{d}x\le\sum_{k=n}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x\le\frac{1}{2^{n-1}},\forall n\in\mathbb{N}$$

令 $n\to\infty$, 故 $\int_S f(x)\mathrm{d}x=0$, 故 $f(x)=0,\ a.e.\ x\in S$, 与假设矛盾！ ■

练习 2 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值可积函数,$\{E_n\}$ 是 $[a,b]$ 中的可测子集列，若有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x=0$$

试证明 $m(E_n)\to0(n\to\infty)$

证明 设 $E=\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}} E_k$, 故存在 $\{E_{n_k}\}$ $s.t.$ $E_{n_k}\to E_k$ 且 $\{E_{n_k}\}$ 是单增集合列，故由 Levi 定理得

$$0=\lim_{k\to+\infty}\int_{E_{n_k}} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{k\to+\infty}\int_{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j} f(x)\chi_{E_{n_k}}(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j}\lim_{k\to+\infty} f(x)\chi_{E_{n_k}}(x)\mathrm{d}x=\int_{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j} f(x)\chi_E(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

由于 $f(x)$ 为正值，故 $m(E)=0$, 故 $\lim\limits_{k\to\infty}m(E_k)=0$, 故 $m(F)=0$, 由 Levi 定理得

$$\lim_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}$$

■

练习 3 设 $f:[0,1]\to[0,\infty)$ 是可测函数，试证明

$$\left(\int_{[0,1]} f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{[0,1]} ln(f(x))\mathrm{d}x\right)\le\int_{[0,1]} f(x)ln(f(x))\mathrm{d}x$$

练习 6 设 $f(x), f_k(x)(k=1,2,...)$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的非负可积函数，且有

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x)=f(x),\ a.e.\ ;\quad \lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x,$$

试证明对于 E 中的任意一个可测子集 e，有

$$\lim_{k\to\infty}\int_e f_k(x)\mathrm{d}x=\int_e f(x)\mathrm{d}x$$

证明 设 $g_k(x)=\inf_{n\ge k} f_n(x)$, 故 $\{f_n(x)\}$ 是递增函数列，由于

$$\lim_{k\to+\infty} g_k(x)\ =\ \underline{\lim}_{k\to+\infty}\ f_k(x)\ =f(x)\,,\quad a.e.\ x\in E\,,$$

由 Levi 定理得，对于 E 中的任意可测集 e，有

$$\lim_{k\to+\infty}\int_e g_k(x)\mathrm{d}x\ =\ \int_e\lim_{k\to+\infty} g_k(x)\mathrm{d}x\ =\ \int_e f(x)\mathrm{d}x$$

故

$$\lim_{k\to+\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x\ =\ \int_E f(x)\mathrm{d}x\ =\lim_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$$

故

$$\lim_{k\to+\infty}\int_E\big(f_k(x)-g_k(x)\big)\,\mathrm{d}x\ =0\,,$$

故

$$\lim_{k\to+\infty}\int_e\big(f_k(x)-g_k(x)\big)\,\mathrm{d}x\ =0\,,$$

故

$$\lim_{k\to+\infty}\int_e g_k(x)\mathrm{d}x\ =\lim_{k\to+\infty}\int_e f_k(x)\mathrm{d}x$$

■

练习 7 设 $f(x)$ 是是 $E\subset\mathbb{R}^1$ 上的正值可测函数， $a>1$ ，试证明 $a^{f(x)}$ 在 E 上可积当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k m\big(\{x\in E: f(x)\ge k\}\big)<\infty$$

证明 利用 Abel 变换 (交换求和号次序), 我们可以进行如下转换：

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k m(\{x\in E: f(x)\ge k\})$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a^k\sum_{n=k}^{\infty}m\left(\{x\in E: f(x)\in[n,n+1]\}\right)\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a^k\right)m\left(\{x\in E: f(x)\in[n,n+1]\}\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n+1}-1}{a-1}m\left(\{x\in E: f(x)\in[n,n+1]\}\right)$$

另一方面，在 $f(x)\in[n,n+1]$ 时，有 $a^n\le a^{f(x)}\le a*a^n$,$a^n\le\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\le\frac{a}{a-1}a^n$

故

$$\sum_{k=0}^{\infty}a^k m(\{x\in E: f(x)\ge k\})\iff\sum_{n=0}^{\infty}a^n m(\{x\in E: f(x)\in[n,n+1]\})\iff a^{f(x)}\in L(E)$$

■

练习 11 设 $f\in L(\mathbb{R}^1)$ 且记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, $x\in\mathbb{R}^1$. 若 F(x) 是 $\mathbb{R}^1$ 上的递增函数，试证明 $f(x)>0$, $a.e.\ x\in\mathbb{R}^1$

证明 设 G 是 $\mathbb{R}^1$ 上的开集，故 G 可以写为可列个不交开集的并，故 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$. 由于 $f\in L(\mathbb{R}^1)$，故 $\int_G f(t)\mathrm{d}t<+\infty$, 故

$$\int_G f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{b_n}f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}(F(b_n)-F(a_n))\ge 0\,.$$

故对于开集 G，有 $\int_G f(t)\mathrm{d}t\ge 0$

设 F 为 G_δ 集，故 $F=\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k$, 其中 F_k 为开集，若 $\int_F f(t)\mathrm{d}t<0$, 记 $H_n=\bigcap_{k=1}^{n}F_k$, 则 $\lim_{n\to\infty}H_n=F$, 由之前的结论得 $\forall n\in\mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}}f(x)\chi_{H_n}(x)\mathrm{d}x\ge 0$

设 $a_n=\int_{\mathbb{R}}f(x)\chi_{H_n}(x)\mathrm{d}x$ 故 $a_n>0$, 并且单调递减，由 $f(x)\in L(\mathbb{R})$ 和控制收敛原理得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}\left(f(x)\chi_{H_n}(x)\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}f(x)\chi_F(x)\mathrm{d}x<0\,,$$

矛盾！故对于 F_δ 集 F，有 $\int_F f(t)\mathrm{d}t\ge 0$

对于任意可测集 E, 做 E 的等测包，设 $E=G\setminus Z$, 其中 G 为 G_δ 集，$m(Z)=0$, $G\supset Z$, 故

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_G f(x)\mathrm{d}x-\int_Z f(x)\mathrm{d}x=\int_G f(x)\mathrm{d}x\ge 0\,,$$

故对于 $\mathbb{R}$ 上的任意可测集 E, 有 $\int_E f(x)\mathrm{d}x\ge 0$ ，故 $f(x)\ge 0,\ \ a.e.\ x\in\mathbb{R}$ ■

练习 15 设 $E_k\subset[a,b]$ 且 $m(E_k)\le\delta>0\ (k=1,2,...)$, $\{a_k\}$ 是一实数列且满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\chi_{E_k}(x)<+\infty,\quad a.e.\ x\in[a,b]$$

试证明 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|<+\infty$

证明 令

$$f(x):=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\chi_{E_k}(x),$$

故 f(x) 在 [a,b] 上几乎处处有限，记 $A_k=\{x\in[a,b]:f(x)>k\}, k\in\mathbb{N}$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}m(A_k)=0$ 故存在 k_0，$s.t.\ m(A_{k_0}\cap E_k)<\frac{\delta}{2}$，故 $x\in[a,b]\setminus A_{k_0}$ 时，有 $f(x)<k_0$，故

$$\frac{\delta}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\le\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|*m(E_k\setminus A_{k_0})=\int_{[a,b]\setminus A_{k_0}}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\chi_{E_k}(x)\,\mathrm{d}x\le k_0(b-a)$$

故 $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ 收敛 ■

练习 18 设 $E\subset[0,1]\times[0,1]$ 是可测集，记

$$E_x=\{y\in[0,1]:(x,y)\in[0,1]^2\}$$

$$E_y=\{x\in[0,1]:(x,y)\in[0,1]^2\}$$

若有 $m(E_x)=0,\quad a.e.\ x\in[0,1]$ 试证明

$$m(\{y:m(E_y=1)\})\le\frac{1}{2}$$

证明 反设 $m(\{y:m(E_y=1)\})>\frac{1}{2}$，则

$$m(E)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\chi_{E_y}(y)dy=\int_0^1\left(\int_{\{y:m(E_y)=1\}}1\,\mathrm{d}y+\int_{\{y:m(E_y)<1\}}\chi_{E_y}(y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x>\frac{1}{2}$$

而另一方面，我们有

$$m(E)=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\chi_{E_x}(x)dx=\int_0^1\left(\int_{\{y:m(E_x)>0\}}\chi_{E_x}(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y<\frac{1}{2},$$

矛盾！ ■

练习 21 设 $f(x),g(x)$ 是 E 上的非负可测函数，且有 $f\mathring{u}g\in L(E)$，令 $E_y=\{x\in E:g(x)\ge y\}$ 试证明

$$F(y)\ =\ \int_{E_y}f(x)\mathrm{d}x$$

对一切 $y>0$ 均存在，且有

$$\int_0^{\infty}F(y)\mathrm{d}y=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

证明 当 $y>0$ 时，有

$$\int_{E_y} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{y}\int_{E_y} f(x)y\mathrm{d}x \le \frac{1}{y}\int_{E_y} f(x)g(x)\mathrm{d}x \le \frac{1}{y}\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x < +\infty,$$

故 F(y) 对 y>0 存在.

$$\int_0^\infty F(y)\mathrm{d}y = \int_0^\infty \int_{G_y} f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\infty \int_E f(x)\chi_{E_y}(x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_E f(x)\int_0^\infty \chi_{E_y}(x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \int_E f(x)\int_0^{g(x)} 1\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

■

练习 22 设 $f\in L(E)$,$f_k\in L(E)(k=1,2,\dots)$ 且有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$, , $x\in E$, 以及

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$$

, 试证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$$

证明 **我们先证明一个很好用的定理 (控制收敛原理的推广)**

$\{f_k(x)\},\{g_k(x)\}$ 是 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数列, 且 $|f_k(x)|\le g_k(x)$, $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$, $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x) = g(x)$ ，又有 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x$ ， 则 $\lim\limits_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$

定理的证明：有条件得 $g_k(x)+f_k(x),(g_k(x)-f_k(x)$ 均为非负可测函数列

由 Fatou 引理得：

$$\int_E \varliminf_{k\to+\infty}(g_k(x)+f_k(x))\mathrm{d}x \le \varliminf_{k\to+\infty}\int_E (g_k(x)+f_k(x))\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x + \varliminf_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_E \varliminf_{k\to+\infty}(g_k(x)-f_k(x))\mathrm{d}x \le \varliminf_{k\to+\infty}\int_E (g_k(x)-f_k(x))\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x - \varlimsup_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x,$$

故

$$\varliminf_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x \ge \int_E f(x)\mathrm{d}x \ge \varlimsup_{k\to+\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x$$

可得

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$$

本题的证明：在上一定理中取 $f_k(x)=|f_k(x)-f(x)|$, $g_k(x)=|f_k(x)|+|f(x)|$, 利用定理直接得证 ■

第五章 微分与不定积分

§5.1 第一组

练习 1 设 E 是 $\mathbb{R}$ 中的一族区间的并集，试证 E 是可测集.

证明 设 $E=\bigcup\limits_{\alpha\in\mathscr{A}} I_\alpha$，其中 I_α 为开区间或闭区间或半开闭区间，不妨设 $m(E)<+\infty$, 令 $\mathscr{B}=\{I\subset\mathbb{R}: I$ 是某个 I_α 中的区间$\}$, 故 $\mathscr{B}$ 是 E 的一个 Vitali 覆盖，由 Vitali 定理得存在不交的区间列 $\{I_k\}$, $s.t.\ m\left(E\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k\right)=0$. 设 $I_k\subset I_{\alpha_k}$，故

$$E=\left(E\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right)\cup\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{\alpha_k}\right),\quad \alpha_k\in\mathscr{A}$$

故 E 可测 ■

练习 2 设 $\{x_n\}\subset[a,b]$，试做 $[a,b]$ 上的递增函数，使得其不连续点恰为 $\{x_n\}$

证明 记

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^n} & x\geq x_n\\ 0 & x<x_n\end{cases}$$

由于 $f_n(x)$ 是单调递增的, 且函数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ 关于 n 一致有上界 2, 故由定义式显然得到, 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 是一致收敛的, 且和函数存在, 记为 $f(x)$, 故 $f(x)\leq 2$.

由一致连续性显然得到 $f(x)$ 在除去 $\{x_n\}$ 之外的点是连续的。令 $g(x)=f(x), x\in[a,b]\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x_k\}$, 而 $g(x)$ 在 x_n 处的取值我们可以根据 $g(x)$ 在 $[a,b]\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{x_k\}$ 上的函数值进行定义，使得 $g(x)$ 在 x_n 处是右连续的, 故 $g(x)$ 为递增函数。请读者自行证明 $g(x)$ 在 x_n 处不是左连续的。故我们构造的 $g(x)$ 即为满足要求的函数。 ■

练习 3 设 $f(x)$ 是 (a,b) 上的递增函数,$E\subset(a,b)$, 若对任给 $\epsilon>0$, 存在 $(a_i,b_i)\subset(a,b)$ $(i=1,2,\ldots.)$，使得

$$\bigcup_i(a_i,b_i)\supset E,\quad \sum_i[f(b_i)-f(a_i)]<\epsilon,$$

试证明 $f'(x)=0 \quad a.e.\ x\in E$

证明 记 $E_\alpha^{(i)}$ 为 (a_i,b_i) 中所有开区间构成的开区间族，记 $E_\alpha^{(i)}=\{I_\alpha^{(i)}:\alpha\in\mathscr{A}_i\}$，其中 $I_\alpha^{(i)}$ 为开区间，故 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty}\bigcup\limits_{\alpha\in\mathscr{A}_i} I_\alpha^{(i)}$ 是 E 的 Vitali 覆盖。由 Vitali 定理，存在两两不交的子开区间列 $\{I_k\}$, $s.t.$ $\{I_k\}$ 满足 $m(E\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k)=0$。由 I_k 的选取方式知存在唯一的 i 使得,$I_k\in E_\alpha^{(i)}$，记 $I_k=(c_k,d_k)$，故由单调性得

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\big(f(d_k)-f(c_k)\big)\le\sum_i\big(f(b_i)-f(a_i)\big)<\epsilon$$

故由 Lebesgue 定理得

$$\int_E f'(x)\mathrm{d}x=\int_{\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}I_k}f'(x)\mathrm{d}x\ \le\ \sum_{k=1}^{\infty}\int_{I_k}f'(x)\mathrm{d}x\ \le\ \sum_{k=1}^{\infty}\big(f(d_k)-f(c_k)\big)\ <\ \epsilon$$

■

练习 4 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上是有界变差函数，试证明函数

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \quad ,F(0)=0$$

是 $[0,a]$ 上的有界变差函数。

证明 由于 f 是有界变差函数，故由 Jordan 分解定理，$f(x)=g(x)-h(x)$，其中 $g(x)$ 和 $h(x)$ 为递增函数。故 $F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{x}\int_0^x h(t)\mathrm{d}t$. 设 $G(x)=\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t, H(x)=\frac{1}{x}\int_0^x h(t)\mathrm{d}t$. 设 $h>0$, 则：

$$\begin{aligned}
G(x+h)-G(x)&=\frac{1}{x+h}\int_0^{x+h}g(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{-h}{x(x+h)}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x+h}\int_x^{x+h}g(t)\mathrm{d}t\\
&\ge\frac{h}{x+h}g(x)-\frac{h}{x(x+h)}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\\
&=\frac{h}{x(x+h)}\int_0^x\big(g(x)-g(t)\big)\mathrm{d}t\ge 0
\end{aligned}$$

故 $G(x)$ 是递增的，同理 $H(x)$ 是递增的，故由 Jordan 分解定理得 $F(x)$ 是有界变差函数。 ■

练习 5 设 $\{f_k(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数列，且有

$$\bigvee_a^b(f_k)\le M\quad(k=1,2,\dots)\ ;\ \lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x),\quad x\in[a,b]$$

试证明 $f\in BV([a,b])$, 且满足 $\bigvee\limits_a^b(f)\le M$

证明 任取 $[a,b]$ 的分割 Δ：$a=x_0<x_1<x_2<...<x_k=b$，故

$$\sum_{i=1}^{k}\left|f_n(x_{i+1})-f_n(x_n)\right|\le\bigvee_a^b(f_n)\ \le\ M,$$

令 $n\to\infty$, 即可得到 $\sum\limits_{i=1}^{k}\left|f(x_{i+1})-f(x_n)\right|\le M$, 得证 ■

练习 9 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的非负绝对连续函数，试证明 $f^p(x)(p>1)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数

证明 利用介质性立即得到，此处省略. ■

练习 10 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上递增，且有 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$，试证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续

证明 设 $F(x)=f(x)-f(a)-\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$.

设 $y>x$, 故 $F(y)-F(x)=f(y)-f(x)-\int_x^y f'(t)\mathrm{d}t$. 由 Lebesgue 定理得 $F(y)-F(x)\ge 0$, 故 F 单增，而 $F(a)=F(b)=0$, 故 $F(x)\equiv 0, x\in[a,b]$. 故 $f(x)\in AC([a,b])$

■

练习 11 设 $f\in BV([a,b])$，若有 $\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x=\bigvee\limits_a^b(f)$, 试证明 $f\in AC([a,b])$

证明 $F(x)=\int_a^x|f'(x)|\mathrm{d}x-\bigvee\limits_a^x(f)$, 故 $F(a)=F(b)=0$. 由前面的例题得到 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigvee\limits_a^x(f)=|f'(x)|,\quad a.e.x\in[a,b]$. 同样地由 Lebesgue 定理得 $F(x)$ 是单调的，故 $F(x)\equiv 0, x\in[a,b]$.

故 $\bigvee\limits_a^x(f)\in AC([a,b])$, 而对于 $[a,b]$ 中的任意开区间 (x_i,y_i) 有 $|f(y_i)-f(x_i)|\le\bigvee\limits_{x_i}^{y_i}(f)$, 故 $f\in AC([a,b])$ ■

第六章 L^p 空间

§6.1 第一组

练习 1 设 $f \in L^\infty(E), w(x) > 0$, 且 $\int_E w(x)\mathrm{d}x = 1$，试证明

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_E |f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} = ||f||_\infty$$

证明 记 $||f||_\infty = M$, 故 $|f(x)| \le M,\ a.e. x \in E$. 故

$$\left(\int_E |f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} \le \left(\int_E M^p w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} = M,$$

故

$$\overline{\lim_{p\to+\infty}}\left(\int_E |f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} \le M$$

对于任意 $M' < M$，记 $A = \{x \in E : |f(x)| > M'\}$, 故 $m(A) > 0$, 故

$$\left(\int_E |f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} \ge \left(\int_A |f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} \ge M'\left(\int_A w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

故

$$\underline{\lim_{p\to+\infty}}\left(\int_E |f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} \ge M'$$

由 M' 的任意性得

$$\underline{\lim_{p\to+\infty}}\left(\int_E |f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} \ge M.$$

故

$$\lim_{p\to\infty}\left(\int_E |f(x)|^p w(x)\mathrm{d}x\right)^{1/p} = M = ||f||_\infty$$

■

练习 2 设 $g(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}^n$ 上的可测函数，若对任意的 $f \in L^2(E)$, 有 $||gf||_2 \le M||f||_2$, 试证明 $|g(x)| \le M,\quad a.e. \in E$

证明 记 $A=\{x\in E:|g(x)|>M\}$，假设不成立，则 $m(A)>0$，记 $B\subset A$, 且 $0<m(B)<+\infty$, 故 $\int_E|\chi_B(x)|^2\mathrm{d}x=m(B)$, 故 $\chi_B(x)\in L^2(E)$，故 $||g\chi_B(x)||_2>||M\chi_B(x)||_2$, 显然矛盾，故原命题成立。 ■

练习 3 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上正值可积，$1<r<+\infty, E\subset(0,+\infty)$ 且 $m(E)>0$, 试证明

$$\left(\frac{1}{m(E)}\int_E f(x)\mathrm{d}x\right)^{-1}\le\left(\frac{1}{m(E)}\int_E\frac{1}{f^r(x)}\mathrm{d}x)\right)^{1/r}$$

证明 $\Leftrightarrow(m(E))^{1+\frac{1}{r}}\le\left(\int_E\frac{1}{f^r(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_E f(x)\mathrm{d}x\right)$

$$\Leftrightarrow\left(\int_E f(x)^{\frac{r}{r+1}}f(x)^{-\frac{r}{r+1}}\mathrm{d}x\right)\le\left(\int_E f(x)^{-r}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r+1}}\left(\int_E f(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{r}{r+1}}$$

由 Hölden 不等式可以直接得到 ■

练习 11 设 $f_n\in AC([0,1])$, 且 $f_n(0)=0(n=1,2...)$. 若 $\{f_n'\}$ 是 $L^1([0,1])$ 中的 Cauchy 列，试证明存在 $f\in AC([0,1])$，使得 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)$

证明 由于 $L^1([0,1])$ 是完备的，故存在 $g\in L^1([0,1])$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}||g-f_n||_1=0$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t,$$

记 $f(x)=\int_0^x f_n'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$, 由定理 5.10 的 $f(x)\in AC([0,1])$.

由微积分基本定理得，$\int_0^x f_n'(t)\mathrm{d}t=f_n(x)-f_n(0)=f_n(x)$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, 故任意的 $x\in[0,1]$ 有

$$\left|f(x)-f_n(x)\right|=\left|\int_0^x\left(f_n'(t)-g(t)\right)\mathrm{d}t\right|\le\int_0^x|f_n'(t)-g(t)|\mathrm{d}t\le\int_0^1|f_n'(t)-g(t)|\mathrm{d}t,$$

故 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ ■

练习 15 设 $\{\phi_k\}\subset L^2(E)$ 是完全标准正交系，试证明对 $f,g\in L^2(E)$ 有

$$\langle f,g\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle f,\phi_k\rangle\langle g,\phi_k\rangle$$

证明

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle&=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&=\int_E\left(f(x)-\sum_{i=1}^k\langle f,\phi_i\rangle\phi_i\right)g(x)\mathrm{d}x+\int_E\left(\sum_{i=1}^k\langle f,\phi_i\rangle\phi_i\right)g(x)\mathrm{d}x\qquad(*)\end{aligned}$$

由 Schwarz 不等式得

$$\int_E\left(f(x)-\sum_{i=1}^{k}\langle f,\phi_i\rangle\phi_i\right)g(x)\mathrm{d}x\le\left\|f(x)-\sum_{i=1}^{k}\langle f,\phi_i\rangle\phi_i\right\|_2||g(x)||_2$$

由定理 6.15 得 $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|f(x)-\sum\limits_{i=1}^{k}\langle f,\phi_i\rangle\phi_i\right\|_2=0$. 而

$$\int_E\left(\sum_{i=1}^{k}\langle f,\phi_i\rangle\ \phi_i\right)g(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{k}\int_E\left(\langle f,\phi_i\rangle\ \phi_i\right)g(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{k}\langle f,\phi_i\rangle\int_E\ \phi_i g(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{k}\langle f,\phi_i\rangle\langle g,\phi_i\rangle$$

故令 (*) 式两边 k 趋于 ∞, 即得证 ■

练习 16 设 $\{\phi_n\}$ 是 $L^2([0,1])$ 中的完全标准正交系，若 $\{\psi_n\}$ 是 $L^2([0,1])$ 中满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_a^b\left(\phi_n(x)-\psi_n(x)\right)^2\mathrm{d}x<1$ 的正交系，试证明 $\{\psi_n\}$ 是 $L^2([0,1])$ 中的完全正交系

证明 设 $f\in L^2([0,1])$，并且 $\langle f,\psi_n\rangle=0,\forall n\in\mathbb{N}^*$, 故 $\langle f,\phi_n\rangle=\langle f,\phi_i-\psi_i\rangle$.
故 $\langle f,\phi_n\rangle^2\le||f||_2^2||\phi_i-\psi_i||_2^2$

故 $||f||_2^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle f,\phi_k\rangle^2\le||f||_2^2||\phi_i-\psi_i||_2^2\le||f||_2^2$ 故 $||f||_2=0$, 故 f 几乎处处是 0 ■