分析力学笔记

Notes on Analytical Mechanics

作者：规培 92 冯廷龙

2020 年 4 月 23 日

钱学森书院学业辅导中心

QIAN YUAN XUE FU

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

作品信息

➤ **标题：**分析力学笔记 - *Notes on Analytical Mechanics*

➤ **作者：**规培 92 冯廷龙

➤ **校对排版：**钱院学辅排版组

➤ **出品时间：**2020 年 4 月 23 日

➤ **总页数：**24

本作品已发布于 GitHub 之上，发布地址为：

https://qyxf.site/bookhub

本作品的版本号为 1.0。

编者说明

本笔记可以作为物理专业的理论力学以及工科专业理论力学中的分析力学部分的学习参考。作为一名医学生，曾经的物理竞赛党，笔者写作这篇笔记的原因是多方面的，最终希望呈现的效果是语言尽量易懂但不失严谨。

第一章从矢量力学到分析力学介绍了从牛顿力学引出拉格朗日力学的方法；第二章最小作用量原理简单介绍了泛函，分析力学的基本原理以及如何由其导出 Euler-Largrange 方程；第三章对称性与守恒律介绍了 Euler-Largrange 方程导出守恒量的方法以及拉格朗日力学的其他应用；第四章正则方程介绍了如何从 Euler-Largrange 方程出发，使用 Legendre 变换导出 Hamilton 正则方程并介绍了泊松括号；第五章 Maupertuis 原理介绍了从分析力学的基本原理——最小作用量原理导出正则方程和对保守系使用简约作用量确定运动轨迹方程的方法；最后一章 Hamilton-Jacob 方程介绍了正则变换以及利用正则变换结合 Hamilton-Jacob 方程求解力学问题的一般方法。本笔记主要参考了朗道的《力学》和刘川老师的《理论力学》，其中前三章属于拉格朗日力学，结合两本书的思路，使用非相对论体系；后三章属于哈密顿力学，主要参考了朗道的书，但因为一些原因没有写全。

由于本笔记的写作目的等原因，笔者没有写作分析力学在具体模型中的应用，而只写基本原理，还请见谅。笔者还将来计划写作电动力学，狭义相对论等方面的笔记，敬请期待。如对本笔记有任何意见和建议，欢迎联系笔者邮箱：`RobinFeng@stu.xjtu.edu.cn`，以便于笔者修改完善。

最后，感谢钱院学辅排版组对我“不堪入目”的手稿进行排版，谢谢钱院学辅及各位同学的支持！

规培 92 冯廷龙

2020 年 4 月 23 日

目录

第一章 从矢量力学到分析力学 1

§1.1 自由度与广义坐标. 1

§1.2 虚功原理和 D'Alembert 原理 1

§1.3 Euler-Lagrange 方程 2

§1.4 弱耗散系统. 2

第二章 最小作用量原理 4

§2.1 泛函与变分. 4

§2.2 泛函极值与 Euler-Lagrange 方程 4

§2.3 最小作用量原理与 Lagrange 函数的形式 5

第三章 对称性与守恒律 7

§3.1 Largrange 函数的性质 7

§3.2 时间平移不变性与能量守恒 7

§3.3 空间平移不变性与动量守恒 8

§3.4 空间各向同性与角动量守恒 8

§3.5 不同参考系中 $E, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{L}$ 间的关系 9

§3.6 力学相似性. 11

第四章 正则方程 13

§4.1 Legendre 变换与 Hamilton 方程 13

§4.2 Poisson 括号 14

第五章 Maupertuis 原理 17

§5.1 从最小作用量原理到正则方程 17

§5.2 Maupertuis 原理 18

第六章 Hamilton-Jacob 方程 19

§6.1 正则变换 19

§6.2 Hamilton-Jacob 方程 20

§6.3 分离变量 21

第一章 从矢量力学到分析力学

§1.1 自由度与广义坐标

先考虑一个由 N 个质点组成的力学体系, 若关于这个体系有 k 个约束, 则该体系的自由度为 $3N-k$. 由于约束的存在, 原有直角坐标系下描述该体系的坐标 x_i 不再相互独立, 为此引入广义坐标 $q_j(j=1,2,\cdots 3N-k)$, 即该自由度下能描述的该体系的最少个数的相互独立坐标. 显然, 我们可以用广义坐标 q_j 和时间 t 描述原有坐标 x_i, 即

$$x_i(q_1,q_2,\cdots q_{3N-k},t) \tag{1.1}$$

则

$$\dot{x}_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j+\frac{\partial x_i}{\partial t}(\text{已使用爱因斯坦求和指标, 后同}) \tag{1.2}$$

§1.2 虚功原理和 D'Alembert 原理

对于一个处于力学平衡状态的体系, 考虑其进行一个与所有约束条件自洽的微小位移 δx_i, 称之为虚位移. 对于每个质点, 其所受外力 $F_i=0$, 故

$$F_i\delta x_i=0 \tag{1.3}$$

由于 F_i 可表示为驱动力 F_i^a 与约束力 F_i^c 的合力, 且一般情况下 $F_i^c\delta x_i=0$(如曲面上运动时 F_i 必须沿法线方向), 故

$$F_i^a\delta x_i=0 \tag{1.4}$$

称此式为虚功原理. 注: 虽然此时 δx_i 是约束条件下任取的, 但由于其互相不独立, 故不能从此式中推出 $F_i^a=0$.
考虑一个不属于力学平衡状态的体系, 引入惯性力 $-\dot{p}_i$, 可以得到

$$(F_i^a-\dot{p}_i)\delta x_i=0 \tag{1.5}$$

称此式为 D'Alembert 原理. 由于

$$\delta x_i=\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{1.6}$$

故

$$F_i^a\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j = m_i\frac{\mathrm{d}\dot{x}_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{1.7}$$

令 $Q_j = F_i^a\dfrac{\partial x_i}{\partial q_j}$, 称其为广义力.

§1.3 Euler-Lagrange 方程

由于

$$m_i\frac{\mathrm{d}\dot{x}_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = m_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) - m_i\dot{x}_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right) \tag{1.8}$$

又由 (1.2) 式可得

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{1.9}$$

将 (1.9) 式代入 (1.8) 式, 整理得

$$m_i\frac{\mathrm{d}\dot{x}_i}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2\right)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial\left(\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2\right)}{\partial q_j} \tag{1.10}$$

令动能 $T = \dfrac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2$, 代入 (1.7) 式, 得

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j\right)\delta q_j = 0 \tag{1.11}$$

由于此时 δq_j 为任取且相互独立, 故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j = 0 \tag{1.12}$$

假设 F_i^a 由一与速度无关的势场提供, 即 $F_i^a = -\dfrac{\partial V}{\partial x_i}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_j} = 0 \tag{1.13}$$

令 $L = T - V$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, 得到 Euler-Lagrange 方程.

§1.4 弱耗散系统

对于一耗散体系,(1.5) 式不在适用. 假设阻力 $F^D = -k_j v_j (j = 1,2,3)$, 构造瑞称耗散函数 $F = \sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{1}{2}k_j v_{ij}^2 (j = 1,2,3)$, 显然 $F^D = -\dfrac{\partial F}{\partial v}$. 将广义力中驱动力一项并

入 L(Lagrange 量), 则 $Q_j = F^D \dfrac{\partial x_i}{\partial q_i}$, 即

$$Q_j = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \tag{1.14}$$

此时 Euler-Lagrange 方程修正为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{1.15}$$

第二章 最小作用量原理

§2.1 泛函与变分

考虑一组曲线 $y(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 上的长度 $S=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$, 对于每一个确定的函数 $y(x)$, 都可以在实数集中找到与之唯一对应的数 S, 我们把这种关系称为泛函, 即函数空间向实数集的映射, 记为 $J[y]$,$y(x)$ 成为变量函数,$J[y]$ 称为 $y(x)$ 的泛函. 下面只讨论积分形式的泛函, 可记为 $J[y]: S=\int_{x_1}^{x_2}F(y,y',x)\mathrm{d}x$, 任取一个与 $y(x)$ 相近的函数 (严格定义不给出, 直观上理解即可), 将其与 $y(x)$ 的差记为 $\delta y(x)$, 称为 $y(x)$ 的变分.

§2.2 泛函极值与 Euler-Lagrange 方程

考虑一组 x_1, x_2 两端函数值固定的函数, 若要使两端点之间的弧长最短, 等价于求积分 $S=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$ 的最小值, 这就是一个最简单的泛函极值问题. 类比函数极值可以得到泛函 $J[y]$ 的最小值, 即 $\forall y(x), J[y+\delta y]-J[y]\geqslant 0$ 恒成立, 代入一般表达式为

$$J[y+\delta y]-J[y]=\int_{x_1}^{x_2}F[y+\delta y, y'+(\delta y)', x]\mathrm{d}x-\int_{x_1}^{x_2}F(y,y',x)\mathrm{d}x \tag{2.1}$$

Taylor 展开得到

$$J[y+\delta y]-J[y]=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)'\right]\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\delta y+\frac{\partial}{\partial y'}(\delta y)'\right]^2F\mathrm{d}x+\cdots \tag{2.2}$$

记 $\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)'\right]\mathrm{d}x$ 为 $\delta J[y]$, 称为 $J[y]$ 的一级变分. 类比函数极值可以得到泛函极值的必要条件是一级变分 $\delta J[y]=0$ 即

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}(\delta y)'\right]\mathrm{d}x=0 \tag{2.3}$$

对其进行分部积分, 得

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\bigg|_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x=0 \tag{2.4}$$

考虑边界条件 $\delta y(x_1)=\delta y(x_2)=0$(两端固定), 又由于右式 δy 可任取, 我们不加证明地指出 (变分学基本引理可以证明这个结论)

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \tag{2.5}$$

得到泛函极值的 Euler-Lagrange 方程. 有关数学的介绍就到这里, 如果有兴趣可以参考泛函分析课本.

§2.3 最小作用量原理与 Lagrange 函数的形式

下面介绍分析力学中最重要的原理: 最小作用量原理. 简而言之, 任意一个只存在完整约束的力学系统, 都可以用它的广义坐标 q_j 的泛函 S 表示其运动路径, 称其为力学系统的作用量, 可以写成 $S=\int_{t_1}^{t_2}L(q_j,\dot{q}_j,t)\mathrm{d}t$ 的形式, 当 S 取极小值时确定的运动路径为这个系统真实的运动路径, 式中 $L(q_j,\dot{q}_j,t)$ 称为 Lagrange 函数. 与前述泛函极值的 Euler-Lagrange 方程推导类似, 我们可以得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right]\delta q_j\mathrm{d}t=0 \tag{2.6}$$

前述变分法基本引理对这个和式依然有效, 得到 j 个方程 (j 是自由量)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \tag{2.7}$$

这就是分析力学中的 Euler-Lagrange 方程. 下面讨论 Lagrange 函数的形式.
首先注意到 $L(q_j,\dot{q}_j,t)$ 的选取具有任意性, 假如令其增加一项某个关于坐标和时间的函数的全导数, 即 $L'=L+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(q,t)$, 代入作用量, 得到

$$\delta S'=\int_{t_1}^{t_2}\delta L(q_j,\dot{q}_j,t)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(q+\delta q,t)-f(q,t)]\mathrm{d}t \tag{2.8}$$

第二项可化为

$$\frac{\partial f}{\partial q}\delta q(t_2)-\frac{\partial f}{\partial q}\delta q(t_1)=0(\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0) \tag{2.9}$$

故其对导出 Euler-Lagrange 方程无影响, 即 L 与 L' 等价.
接下来从最简单的情况开始讨论, 即例子在惯性系 K 中的自由运动. 显然运动只与 $|\boldsymbol{v_0}|$ 有关, 所以可以认为 Lagrange 函数只含 $\boldsymbol{v}^2$, 即 $L(\boldsymbol{v_0}^2)$. 然后, 令 K 相对于惯性系 K' 以无穷小的速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 移动, 则质点在 K' 系中速度 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v_0}+\boldsymbol{\varepsilon}$, 在 K' 系中 $L'=L(\boldsymbol{v_0}^2+2\boldsymbol{v_0}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}^2)$, 略去高阶小量 $\boldsymbol{\varepsilon}^2$ 得到 $L'=L(\boldsymbol{v_0}^2+2\boldsymbol{v_0}\boldsymbol{\varepsilon})$. 由伽利略相对

性原理知, 相同的运动在不同惯性系中的 Lagrange 函数等价, 即 $L'-L$ 为某个只含坐标和时间的函数对时间的全导数 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\boldsymbol{x},t)$, 由于

$$L'-L=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_0}^2}\cdot 2\boldsymbol{v_0}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}=2\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_0}^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{2.10}$$

所以 $2\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v_0}^2}$ 为常量, 定义这个常量为质量, 记作 m, 则

$$L(\boldsymbol{v_0}^2)=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v_0}^2 \tag{2.11}$$

2.11 式即为质点在惯性系中自由运动时的 Lagrange 函数. 不考虑质点间相互作用, 由 N 个质点组成的体系有

$$L=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v_i}^2 \tag{2.12}$$

如果考虑封闭体系质点的相互作用, 则应在 L 后附加一项, 这一项与所有质点的位置有关

$$L=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\boldsymbol{v_i}^2-V(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\cdots\boldsymbol{x_N}) \tag{2.13}$$

于是我们得到了封闭质点系的 Lagrange 函数, 若使用广义坐标, 则

$$L=\sum_{i,j}\frac{1}{2}a_{ij}(q)\cdot\dot{q}_i\dot{q}_j-V(q_1,q_2,\cdots q_f) \tag{2.14}$$

附: 物理学的公理化

分析力学与矢量力学最大的不同在于它是一个公理化体系, 是高度数学化的. 这个公理是最小作用量原理和 Lagrange 函数的形式. 我们导出 Lagrange 函数形式的时候并非通过严格的推导, 而是寻求必要的条件" 连蒙带猜", 所以它的形式也是分析力学的公理. 公理到此就没有了, 理论上说, 依靠公理可以严格导出整个分析力学体系, 这也是为什么分析力学是四大力学中最美丽动人的一个了.

第三章 对称性与守恒律

§3.1 Largrange 函数的性质

我们已经知道将系统的 Largrange 函数代入 Euler-Largrange 方程即可得到体系的运动方程, 而通过研究 E-L 方程还可以发现 Largrange 函数一些有用的性质. 由 $\delta S=\int_{t_1}^{t_2}(\delta q\frac{\partial L}{\partial q}+\delta\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})\mathrm{d}t$ 知, 若 $L'=L+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(q,t)$, 则

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}(\delta q\frac{\partial L}{\partial q}+\delta\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}})\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\mathrm{d}t \tag{3.1}$$

第二项可化为

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\delta q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}t=\frac{\partial f}{\partial q}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}=0 \tag{3.2}$$

故于 Largrange 函数而言, 增加一项关于坐标和时间的函数的全导数并不影响运动方程. 这将是一个有用的性质, 下面正式进入对称性与守恒量部分.

§3.2 时间平移不变性与能量守恒

若一个体系的 Largrange 函数不显含 t, 则称其具有时间平移不变性（时间平移对称性）, 则其关于时间的全导数

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial L}{\partial q}\dot{q}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\ddot{q} \tag{3.3}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial L}{\partial q}\dot{q}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\right]\dot{q} \tag{3.4}$$

代入 E-L 方程, 得

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\dot{q}\right) \tag{3.5}$$

由于 T 是关于 $\dot{q}$ 的 2 次齐次函数, 由 Euler 定理得

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2T) \tag{3.6}$$

故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2T-L)=0 \tag{3.7}$$

即

$$T+V=Const \tag{3.8}$$

令 $T+V=E$. 称 E 为体系的能量, 得到能量守恒定律.

§3.3 空间平移不变性与动量守恒

若一个体系的 Largrange 函数不显含位置坐标 $\boldsymbol{x}_i$, 则称其具有空间平移不变性, 则

$$\partial L=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_i}\delta \boldsymbol{x}_i=0 \tag{3.9}$$

代入 E-L 方程, 得

$$\partial L=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\right)\delta \boldsymbol{x}_i=0 \tag{3.10}$$

由于 $\delta\boldsymbol{x}_i$ 是任意的, 故

$$\sum_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\right)=0 \tag{3.11}$$

即

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}=Const=\boldsymbol{p} \tag{3.12}$$

称 $\boldsymbol{p}$ 为系统的动量, 得到动量守恒定律. 若用广义坐标 q_j 代替 $\boldsymbol{x}_i$, 即可得到广义动量 $\sum_j \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}_j}=Const$

§3.4 空间各向同性与角动量守恒

若将一个体系旋转一个微小角度 $\delta\phi$, 而其 Largrange 函数不发生变化, 则称其具有空间各向同性. 显然

$$\delta\boldsymbol{x}=|\delta\boldsymbol{\phi}||\boldsymbol{x}|\sin\theta, \quad \theta=\langle\delta\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{x}\rangle \tag{3.13}$$

故

$$\delta\boldsymbol{x}=\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{x}, \quad \delta\boldsymbol{v}=\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{v} \tag{3.14}$$

由于

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_i}\delta \boldsymbol{x}_i+\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\delta \boldsymbol{v}_i=0 \tag{3.15}$$

故

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_i}(\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{x}_i)+\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}(\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{v}_i)=0 \tag{3.16}$$

代入 E-L 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\right)(\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{x}_i)+\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{x}_i)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\boldsymbol{\phi})\times\boldsymbol{x}_i\right]=0 \tag{3.17}$$

显然 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\boldsymbol{\phi})=0$, 故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\right)(\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{x}_i)+\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{x}_i)\right]=0 \tag{3.18}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\delta\boldsymbol{\phi}\cdot(\boldsymbol{x}_i\times\boldsymbol{p}_i)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}_i\times\boldsymbol{p}_i)\cdot\delta\boldsymbol{\phi}=0 \tag{3.19}$$

由于 $\delta\boldsymbol{\phi}$ 是任意的, 故

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}_i\times\boldsymbol{p}_i)=0 \tag{3.20}$$

得到

$$\boldsymbol{x}_i\times\boldsymbol{p}_i=Const=\boldsymbol{L} \tag{3.21}$$

称 $\boldsymbol{L}$ 为系统的角动量, 得到角动量守恒定律.

§3.5 不同参考系中 $E,\boldsymbol{p},\boldsymbol{L}$ 间的关系

假设参考系 K' 相对于惯性系 K, 以 $\boldsymbol{V}$ 运动, 即

$$\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{0}}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{V} \tag{3.22}$$

则系统的动量为

$$\boldsymbol{p}_i=m_i\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{0}i}=m_i\boldsymbol{v}'_i+\sum_i m_i\boldsymbol{V} \tag{3.23}$$

若在 K' 系中系统动量为 0, 即 $\boldsymbol{p}'=0$, 只需令

$$\boldsymbol{V}=\frac{m_i\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{0}i}}{\sum_i m_i} \tag{3.24}$$

称其为质心速度 $\boldsymbol{V}_c$, 显然, 它对时间的原函数是

$$\boldsymbol{x}_c=\frac{m_i\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{0}i}}{\sum_i m_i} \tag{3.25}$$

称其为质心坐标 $\boldsymbol{x}_c$. 下文称 $\sum m_i$ 为 μ. 对于能量 E, 有

$$\begin{aligned}E_0&=\frac{1}{2}m_i{\boldsymbol{v}_{\boldsymbol{0}i}}^2+V\\&=\frac{1}{2}m_i{\boldsymbol{v}'_i}^2+m_iv'_i\boldsymbol{V}+\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{V}^2+V\end{aligned} \tag{3.26}$$

对于 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_c$（即质心系），有

$$E_0=E'+\frac{1}{2}\mu\boldsymbol{V}_c{}^2 \tag{3.27}$$

对于角动量 $\boldsymbol{L}$, 有

$$\boldsymbol{L_0}=\boldsymbol{x_0}_i\times m_i\boldsymbol{v_0}_i \tag{3.28}$$

在质心系中, 有

$$\boldsymbol{L_0}=\boldsymbol{x}'_i\times m_i\boldsymbol{v_0}_i+\boldsymbol{x}_c\times m_i\boldsymbol{v_0}_i \tag{3.29}$$

即

$$\boldsymbol{L_0}=m_i\boldsymbol{x}'_i\times\boldsymbol{v}'_i+\boldsymbol{x}_c\times\mu\boldsymbol{V_c} \tag{3.30}$$

由于 $\mu=\sum_i m_i$, $x_c=\frac{\boldsymbol{x}_i m_i}{\mu}$, $V_c=\frac{m_i v_{0i}}{\mu}$, 所以

$$\boldsymbol{L_0}=\boldsymbol{L}'+\frac{(m_i\boldsymbol{x_0}_i)\times(m_j\boldsymbol{v_0}_j)}{\sum_i m_i} \tag{3.31}$$

其中 $\boldsymbol{L_0}$ 的第一项成为内禀角动量.

下面看转动参考系的情况. 假设参考系 K 相对于 K' 以 $\boldsymbol{\Omega}$ 的角速度转动, 显然有

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x} \tag{3.32}$$

我们直接考虑 Largrange 函数的形式, 先看 K' 系,

$$L=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v_0}^2-V=\frac{1}{2}m(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v})^2-V=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}'^2+m\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}+\frac{1}{2}m\boldsymbol{V}^2-V \tag{3.33}$$

由于 $\boldsymbol{V}^2(t)$ 可看成时间的全导数, 故略去, 得

$$L=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}'^2+m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{V})-m\boldsymbol{x}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{V})-V \tag{3.34}$$

即

$$L=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}'^2-m\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{V}}-V \tag{3.35}$$

由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}'}\right)=\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{x}'}$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}')=-m\dot{\boldsymbol{V}}-\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}} \tag{3.36}$$

其中, 称 $-m\dot{\boldsymbol{V}}$ 为平动引起的惯性力. 再考虑 K 系的情况, 将(3.32)式代入(3.35)式, 得

$$L=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2+m\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})+\frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})^2-m\boldsymbol{x}\cdot\dot{\boldsymbol{V}}-V \tag{3.37}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{v}}\right)=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}+m\dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{x}+m\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{x}}=m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})+m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{\Omega}-m\dot{\boldsymbol{V}}-\frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}} \tag{3.39}$$

整理得

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}-m\dot{\boldsymbol{V}}+2m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})+m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{\Omega}-m\dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\boldsymbol{x} \tag{3.40}$$

其中 $2m(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\Omega})$ 称为科里奥利力,$m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{\Omega}$ 称为惯性离心力. 再考虑能量的情况:

$$E=\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\boldsymbol{v}-L \tag{3.41}$$

$$E=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2-\frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})^2+m\boldsymbol{x}'\dot{\boldsymbol{V}}+V \tag{3.42}$$

假设 K' 相对于 K_0 无平动加速度, 则

$$E=\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2-\frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})^2+V \tag{3.43}$$

称 $-\frac{1}{2}m(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{x})^2$ 为惯性离心力势能. 代入(3.32)式, 得

$$E=E_0-\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{L} \tag{3.44}$$

§3.6 力学相似性

考虑变换 $x'=\lambda_1 x,\ t'=\lambda_2 t$, 假设 $V(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 是 k 次齐次函数, 则

$$V(x_1',x_2',\cdots,x_N')=\lambda_1^k V(x_1,x_2,\cdots,x_N) \tag{3.45}$$

同理,

$$T(v_1',v_2',\cdots,v_N')=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k T(v_1,v_2,\cdots,v_N) \tag{3.46}$$

若

$$\lambda_2=\lambda_1^{1-\frac{k}{2}} \tag{3.47}$$

则 Largrange 函数只是整体乘一个系数, 运动方程不变, 一个有价值的应用是

$$\frac{t'}{t}=\left(\frac{x'}{x}\right)^{1-\frac{k}{2}} \tag{3.48}$$

$k=-1$ 时, 得到开普勒第三定律. 另一个应用与能量平均值有关, 由于

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\boldsymbol{v}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\boldsymbol{x}_i\right)-\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_i}\boldsymbol{x}_i \tag{3.49}$$

两边对时间求平均, 得

$$2\langle T\rangle=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\boldsymbol{x}_i\right)\frac{1}{t}+k\langle V\rangle \tag{3.50}$$

由于 $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}_i}\boldsymbol{x}_i\right)\frac{1}{t}=0$, 所以

$$2\langle T\rangle=k\langle V\rangle \tag{3.51}$$

称其为位力定理.

附：齐次函数的 Euler 定理

定义：$f(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_i)=\lambda^k f(x_1,x_2,\ldots,x_i)$, 则 $f(x_1,x_2,\ldots,x_i)$ 为 k 次齐次函数.

两边对 λ 求偏导, 得

$$\sum_i \frac{\partial f(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_i)}{\partial(\lambda x_i)}\frac{\partial(\lambda x_i)}{\partial\lambda}=k\lambda^{k-1}f(x_1,x_2,\ldots,x_i) \tag{3.52}$$

$$\sum_i \frac{\partial f(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_i)}{\partial(\lambda x_i)}\cdot\lambda x_i=k\lambda^{k}f(x_1,x_2,\ldots,x_i) \tag{3.53}$$

令 $\lambda=1$, 得

$$\sum_i \frac{\partial f(x_1,x_2,\ldots,x_i)}{\partial x_i}\cdot\lambda x_i=kf(x_1,x_2,\ldots,x_i) \tag{3.54}$$

第四章 正则方程

§4.1 Legendre 变换与 Hamilton 方程

我们已经知道，Largrange 力学是使用广义坐标 q_i 和广义速度 $\dot{q}_i$ 来描述系统的力学状态的，而接下来要讲述的方法则是使用广义坐标 q_i 和广义动量 p_i，即 Hamilton 力学，为此，我们需要从 Largrange 力学出发，使用 Legendre 变换以实现变量代换，考虑一个系统的 Largrange 函数的微分，即

$$\mathrm{d}L = \frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

代入 Eluer-Largrange 方程，得

$$\mathrm{d}L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{L}{\partial \dot{q}_i}\right)\mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{4.2}$$

定义 $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ 为广义动量，则

$$\mathrm{d}L = \dot{p}_i \mathrm{d}q_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{4.3}$$

变换右边第二项，得

$$\mathrm{d}L = \dot{p}_i \mathrm{d}q_i + d\left(p_i \dot{q}_i\right) - \dot{q}_i \mathrm{d}p_i + \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{4.4}$$

$$\mathrm{d}\left(p_i \dot{q}_i - L\right) = \dot{q} i \mathrm{d}p_i - \dot{p}_i \mathrm{d}q_i - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{4.5}$$

令 $p_i \dot{q}_i - L = H$，称其为 Hamilton 量，则

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \tag{4.6}$$

称此式为 Hamilton 方程，亦称正则方程，称 p_i, q_i 为一对共轭变量

我们注意到，由 (4.5) 式得

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \dot{q}_i \dot{p}_i - \dot{p}_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{4.7}$$

又由 (4.6) 式得

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t} \tag{4.8}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t} \tag{4.9}$$

即若 Largrange 函数不显含时间，则 Hamilton 函数亦不显含时间，且其对时间得变化率为 0. 考虑 Hamilton 函数的物理意义是用 p_i, q_i 表示的系统的总能量, 我们得到能量守恒定律.

§4.2　Poisson 括号

考虑一个变量为 p_i, q_i, t 的力学量 f 对时间的导数，即

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i+\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.10}$$

代入正则方程，得

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}+\frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.11}$$

定义 H, f 的 Poisson 括号 $\{H,f\}=\dfrac{\partial H}{\partial p_i}\dfrac{\partial f}{\partial q_i}-\dfrac{\partial H}{\partial q_i}\dfrac{\partial f}{\partial p_i}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\{H,f\}+\frac{\partial f}{\partial t} \tag{4.12}$$

若力学量 f 对时间的变化率为 0，称其为系统得运动积分（守恒量），若 f 为运动积分，则

$$\{H,f\}+\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{4.13}$$

特别地，当 f 不显含时间时，有

$$\{H,f\}=0 \tag{4.14}$$

对于任意两个函数 f, g 也有 Poisson 括号 $\{f,g\}=\dfrac{\partial f}{\partial p_i}\dfrac{\partial g}{\partial q_i}-\dfrac{\partial f}{\partial q_i}\dfrac{\partial g}{\partial p_i}$,Poisson 括号有许多性质，下面直接列举，略去证明

$$\{f,g\}=-\{g,f\} \tag{4.15}$$

$$\{f,c\}=0 \quad (c\text{为常数}) \tag{4.16}$$

$$\{c_1f_1+c_2f_2,g\}=c_1\{f_1,g\}+c_2\{f_2,g\} \tag{4.17}$$

$$\{f_1f_2,g\}=f_1\{f_2,g\}+f_2\{f_1,g\} \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}=\{\frac{\partial f}{\partial t},g\}+\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\} \tag{4.19}$$

特别地，对于 $g=q_k,p_k$ 时，Poisson 括号化为偏导数，即

$$\{f,q_k\}=\frac{\partial f}{\partial p_k},\quad \{f,p_k\}=-\frac{\partial f}{\partial q_k} \tag{4.20}$$

再令 $f=p_i,q_i$，得到

$$\{p_i,q_i\}=\delta_{ik},\quad \{p_i,p_k\}=0,\{q_i,q_k\}=0 \tag{4.21}$$

Poisson 括号的一个重要性质是所谓 Jacob 恒等式，即

$$\big\{f,\{g,h\}\big\}+\big\{g,\{h,f\}\big\}+\big\{h,\{f,g\}\big\}=0 \tag{4.22}$$

我们来简单地证明一下，注意到左边和式一定是由 f,g,h 的二阶偏导数组成的，只要证明不存在 f,g,h 中任意一个函数的二阶偏导数，即得证，先考虑 f，令 $D_1(\phi)=\{g,\phi\},\quad D_2(\phi)=\{h,\phi\}$, 则含 f 的二阶偏导数的项为

$$D_1\big(D_1(f)\big)-D_2\big(D_1(f)\big)=(D_1D_2-D_2D_1)f \tag{4.23}$$

因为 D_1,D_2 可以写成

$$D_1=\xi_k\frac{\partial}{\partial X_k},\quad D_2=\eta_k\frac{\partial}{\partial X_k} \tag{4.24}$$

其中 ξ_k,η_k 为变量 X_k 的任意函数，则

$$D_1D_2-D_2D_1=\left(\xi_k\frac{\partial\eta_l}{\partial X_k}-\eta_k\frac{\partial\xi_l}{\partial X_k}\right)\frac{\partial}{\partial X_l} \tag{4.25}$$

不存在二阶偏导数项，所以式中不存在 f 的二阶偏导数，同理可证不存在 g,h 的二阶偏导数，Jacob 恒等式得证.

Jacob 恒等式的一个重要应用是所谓 Poisson 定理，即：任意 2 个运动积分的 Poisson 括号一定是运动积分，若 f,g 不显含时间，则证明很易，只需令 (4.22) 式中 $h=H$，即

$$\big\{f,\{g,H\}\big\}+\big\{g,\{H,f\}\big\}+\big\{H,\{f,g\}\big\}=0 \tag{4.26}$$

由 (4.14) 式，得

$$\big\{H,\{f,g\}\big\}=0 \tag{4.27}$$

即 $\{f,g\}$ 为运动积分，若 f,g 显含时间，则将其对时间求偏导，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\}=\{\frac{\partial f}{\partial t},g\}+\{f,\frac{\partial g}{\partial t}\} \tag{4.28}$$

代入 (4.13) 式，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \big\{g,\{H,f\}\big\} - \big\{f,\{H,g\}\big\} \tag{4.29}$$

运用 Jacob 恒等式，化简得

$$\big\{H,\{f,g\}\big\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = 0 \tag{4.30}$$

得证.

第五章 Maupertuis 原理

§5.1 从最小作用量原理到正则方程

由定义我们知道 $s=\int_{t_1}^{t_2} L\mathrm{d}t$, 现在，让我们从另一个角度看最小作用量原理，若用作用量 S 表示运动轨道固定，起点 $q(t_0)$ 固定，但终点 $q(t)$ 变化的表示系统运动的量，对 S 变分，得到

$$\partial S=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\partial q_i\bigg|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{d}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q\mathrm{d}t \tag{5.1}$$

由于轨道符合 Euler-Largrange 方程，故积分项为 0，取 $\delta q_i(t_1)=0, \delta q_i(t_2)=\delta q_i$，有

$$\partial S=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\partial q_i=p_i\delta q_i \tag{5.2}$$

所以

$$\frac{\partial S}{\partial q_i}=p_i \tag{5.3}$$

由定义知

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=L,\quad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i=\frac{\partial S}{\partial t}+p_i\dot{q}_i \tag{5.4}$$

所以

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-(p_i\dot{q}_i-L)=-H \tag{5.5}$$

由 (5.3),(5.5) 式得（将 S 看作坐标和时间的函数）

$$\mathrm{d}S=p_i d\dot{q}_i-H\mathrm{d}t \tag{5.6}$$

$$S=\int(p_i d\dot{q}_i-H\mathrm{d}t) \tag{5.7}$$

对其变分，得

$$\delta S=\int\left[\delta p_i\mathrm{d}q_i+p_i d\delta q_i-\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i\right)\mathrm{d}t\right] \tag{5.8}$$

$$\delta S=\int\left(\mathrm{d}q_i-\frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}t\right)\delta p_i+p_i\delta q_i\bigg|-\int\left(\mathrm{d}p_i+\frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}t\right)\delta q_i \tag{5.9}$$

由于 $\delta S=0,\delta q_i=0$, 所以

$$\mathrm{d}q_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}p_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}t \tag{5.10}$$

即正则方程

§5.2 Maupertuis 原理

对于一个保守体系，$H=E=Const$, 由 (5.7) 式得

$$S=\int p_i\mathrm{d}q_i-E(t-t_0) \tag{5.11}$$

称 $\int p_i\mathrm{d}q_i$ 为简约作用量，记为 S_0，对 S 变分，得

$$\delta S=\delta S_0-E\delta t \tag{5.12}$$

由 (5.5) 式可得

$$\delta S=-H\delta t-E\delta t \tag{5.13}$$

故对于保守体系，我们得到

$$\delta S_0=\delta\int p_i\mathrm{d}q_i=0 \tag{5.14}$$

在此基础上，由 $E\left(q,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)=E$ 反解出 $\mathrm{d}t$ 并代入定义式 $p_i=\frac{\partial L(q,\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t})}{\partial\dot{q}_i}$, 结合 (5.14) 式可得到系统的轨道方程，称此原理为 Maupertais 原理。当 Largrange 函数形式可写成 (2.14) 式时，可得

$$p_i=a_{ij}(q)\dot{q}_i \tag{5.15}$$

$$E=\frac{1}{2}a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j+V(q) \tag{5.16}$$

由 (5.16) 式解出

$$\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{a_{ij}(q)\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_j}{2(E-V)}} \tag{5.17}$$

代入 (5.15),(5.14) 式可得

$$\delta S_0=\int\sqrt{2a_{ij}(q)\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_j(E-V)}=0 \tag{5.18}$$

由此可确定运动轨道方程，对 (5.16) 式积分，得

$$\int\sqrt{\frac{a_{ij}(q)\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_j}{2(E-V)}}=t-t_0 \tag{5.19}$$

(5.19)(5.18) 式共同确定系统的运动状态

第六章 Hamilton-Jacob 方程

§6.1 正则变换

考虑一组从旧得坐标、动量向新的坐标、动量的变换

$$P=P(p,q,t),\quad Q=Q(p,q,t),\quad H=H(P,Q,t) \tag{6.1}$$

若其满足正则方程

$$\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial Q_i},\quad \dot{Q}_i=\frac{\partial H}{\partial P_i} \tag{6.2}$$

则称该变换为正则变换，由于其满足 Hamilton 方程，其必满足

$$\delta\int(p_i\mathrm{d}q_i-h\mathrm{d}t)=\delta\int(P_i\mathrm{d}Q_i-H\mathrm{d}t)=0 \tag{6.3}$$

由此得到

$$p_i\mathrm{d}q_i-h\mathrm{d}t-P_i\mathrm{d}Q_i-H\mathrm{d}t+\mathrm{d}F \tag{6.4}$$

其中函数 F 在两积分极限时之差为对变分不起作用的常数，整理得

$$\mathrm{d}F=\dot{p}_i\mathrm{d}q_i-P_i\mathrm{d}Q_i+(H-h)\mathrm{d}t \tag{6.5}$$

所以

$$\frac{\partial F}{\partial q_i}=p_i,\quad \frac{\partial F}{\partial Q_i}=-P_i,\quad \frac{\partial F}{\partial t}=H-h \tag{6.6}$$

我们还可以对 (6.5) 式进行 Legendre 变换，以得到不同变量表示得像 F 一样得函数（称其为母函数），如：

$$\mathrm{d}\Phi=\mathrm{d}(F+P_iQ_i)=p_i\mathrm{d}q_i+Q_i\mathrm{d}P_i+(H-h)\mathrm{d}t \tag{6.7}$$

得到

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q_i}=p_i,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial P_i}=Q_i,\quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}=H-h \tag{6.8}$$

正则变换得一个重要性质是 Poisson 括号不变，即

$$\{f,g\}_{P,Q}=\{f,g\}_{p,q} \tag{6.9}$$

证明如下:

$$
\begin{aligned}
\{f,g\}_{P,Q} =&\frac{\partial f}{\partial P_i}\frac{\partial g}{\partial Q_i}-\frac{\partial f}{\partial Q_i}\frac{\partial g}{\partial P_i}\\
=&\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial P_i}+\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial P_i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial Q_i}+\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial Q_i}\right)\\
&-\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial Q_i}+\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial P_i}+\frac{\partial g}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial P_i}\right)\\
=&\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\{p_i,p_j\}_{P,Q}+\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_j}\{q_i,p_j\}_{P,Q}\\
&+\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\{q_i,q_j\}_{P,Q}+\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_j}\{p_i,p_j\}_{P,Q}\\
=&\left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}-\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}\right)\delta_{ij}\\
=&\{f,g\}_{p,q}
\end{aligned}
\tag{6.10}
$$

§6.2 Hamilton-Jacob 方程

由 (5.5) 式可得

$$\frac{\partial}{\partial t}S+H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)=0 \tag{6.11}$$

称其为 Hamilton-Jacob 方程，对于自由度为 s 的系统，我们不加证明地指出，解的形式为

$$S=f(q_1,\cdots,q_s;\alpha_1,\cdots,\alpha_s;t)+A \tag{6.12}$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 与 A 为任意常数，以 f 为母函数进行正则变换，以 α_i 为新动量，β_i 为新坐标，由 (6.8) 式得

$$p_i=\frac{\partial f}{\partial q_i},\quad \beta_i=\frac{\partial f}{\partial \alpha_i},\quad \frac{\partial f}{\partial t}+h=H \tag{6.13}$$

由于 f 满足 Hamilton-Jacob 方程，故

$$H=\frac{\partial f}{\partial t}+h=\frac{\partial S}{\partial t}+h=0 \tag{6.14}$$

由正则方程，

$$\dot{\alpha}_i=0,\dot{\beta}_i=0 \tag{6.15}$$

即，α_i,β_i 为常数，同时利用 s 个方程

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}=\beta_i \tag{6.16}$$

可将坐标 q 用 $2s$ 个常数和时间 t 表示出来，运动方程得解. 由此总结求解力学问题的方法：

(1) 列出 Hamilton-Jacob 方程

(2) 求出函数 S 包含常数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, A$.

(3) 将 S 对 α_i 求偏导得到 β_i

(4) 由 (6.16) 式反解出 q 作为 $2s$ 个常数和 t 的函数

(5) $p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$ 得到 p 关于时间的函数.

§6.3 分离变量

有时为了得到 S，可利用分离变量的方法. 假设某一坐标 q，与 $\dfrac{\partial S}{\partial q}$，在 Hamilton-Jacob 方程中仅以组合 $\varphi(q_1, \dfrac{\partial S}{\partial q_1})$ 形式出现，即方程可写为

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S}{\partial q_i}, \frac{\partial S}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right\} = 0 \tag{6.17}$$

则 S 可写为

$$S = S'(q_i, t) + S_1(q_1) \tag{6.18}$$

代入 (6.17) 式，得

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right)\right\} = 0 \tag{6.19}$$

假设 (6.18) 式已得，则 q_1 变化不应影响 (6.19) 式成立，故

$$\varphi\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) = \alpha_1 \tag{6.20}$$

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha_1\right\} = 0 \tag{6.21}$$

由 (6.20) 式可求出 $S_1(q_1)$, 依次类推将 S 完全求解。

参考书目

[1] L.D. 朗道,E.M. 粟弗席兹. 力学 [M]. 北京: 高等教育出版社,2007

[2] 刘川. 理论力学 [M]. 北京: 北京大学出版社,2019

[3] 吴崇试, 高春媛. 数学物理方法 [M]. 北京: 北京大学出版社,2019

发布说明

为了使这份精心制作的笔记以更好的面貌呈现在同学们的面前，钱院学辅组织了一些同学用 LaTeX 进行排版。在此对他们表示衷心的感谢！

参与排版成员

- **第 1-2 章排版：** 计试 81 朱吉羽
- **第 3 章排版：** 计试 71 韩意
- **第 4-6 章排版：** 钱 91 谢佳润

这份资料的下载地址：`https://github.com/qyxf/BookHub/notes-on-analytical-mechanics-v1.0.pdf`。若想获取更多学辅资料，可以关注 `https://qyxf.site/bookhub`。

如果对笔记有意见和建议，可通过以下方式联系我们：

- 钱院学辅信息发布站： `https://qyxf.site`
- 钱院学辅邮箱：`qianyuanxuefu@163.com`

除此之外，欢迎同学们扫码加入我们的 QQ 群：

群名称:钱院学辅交流分享群
群　号:852768981

群名称:钱院科粉群1.0
群　号:979670536

- 钱院学辅交流分享群：有钱院优秀的学长学姐为大家答疑平日学习中的问题，分享学习资料和经验；
- 钱院科粉群：分享科研资源、公开课、最新科技评论，转发创新竞赛相关信息，就科研方法、学习提供答疑。

如果你希望向我们投稿笔记，可以联系群内的化生 81 高旭帆同学。我们将用最整洁的排版，为你在钱院官方的平台发布一份完美的笔记！

期待与大家的见面！

钱院学辅

2020 年 4 月 23 日