noip容斥原理应用

未分类

错排的数量

设$g(i)$表示恰好有i个数在自己位置的排列数量
则总的错排数量为

$$n!-(g(1)+g(2)+g(3)+...+g(n))$$

但是我们发现直接算$g(i)$比较难
令$f(i)$表示选择i个数在自己位置,其他随便排的数量,这样就会有大于等于i个数在自己位置（有重复计数），我们发现$f(i)$比较好求

$$f(i)=\binom{n}{i}*(n-i)!$$

于是我们研究一下f与g的关系

$$f(k)=\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}*g(i)$$

即$g(i)$在$f(k)$（$i>=k$）中的贡献为

$$\binom{i}{k}*g(i)$$

即：对于恰好i个数在自己位置的排列，这i个位置的任意一种k组合的方案都会在$f(k)$中被算到$g(i)$次
所以$g(i)$在$f(k)(k<=i)$中的系数为

$$\binom{i}{k}$$

我们发现

$$(1-x)^i=\binom{i}{0}-\binom{i}{1}x+\binom{i}{2}x^2-\ldots+(-1)^i\binom{i}{i}x^i$$

令x=1我们发现

$$\binom{i}{1}-\binom{i}{2}+\binom{i}{3}+\ldots(-1)^{i-1}\binom{i}{i}=1$$

因此

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$$

特例是当n为0的时候，左边等于1，于是我们可以这样子写

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=[n=0]$$

表示n=0的时候为1，否则为0

所以我们可以推出错排的容斥计算公式为

$$ret=n!-f(1)+f(2)-f(3)+\ldots+(-1)^n*f(n)$$

每一个$g(i)(i>=1)$都会消掉,$g(0)$会被计算一次，即恰好0个数在自己位置的方案数

注意到$f(0)=n!$，因此

$$ret=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f(i)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)!$$

二项式反演

设$f(n)$为n个人随便站的方案数

设$g(n)$为n个人都站错的方案数

那么枚举有多少人站错可以得到

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g(k)$$

但是我们只知道f而不知道g，如果能把g与f反过来就很强大了
我们先表示一下g

$$g(n)=\sum_{m=0}^{n}[n-m=0]\binom{n}{m}g(m)$$

根据前面

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=[n=0]$$

将n用n-m替换然后代进g的表达式可以得到

$$g(n)=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{n-m}{k}\binom{n}{m}g(m)$$

$\binom{n-m}{k}\binom{n}{m}$等价于$\binom{n}{k}\binom{n-k}{m}$,所以可以变成下面

$$g(n)=\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n-k}{m}g(m)$$

这本质上是两个for循环，交换一下顺序结果也是一样

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{m=0}^{n-k}\binom{n-k}{m}g(m)$$

最右边其实就是f(n-k)

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(n-k)$$

变换一下下标得到

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(k)$$

求$1-r$里面与n互质的数的个数

我们发现与某个数不互质的数的个数比较好求，于是考虑容斥
不互质的本质在于有公共的质因子，于是我们先将n分解质因数为 $p_1, p_2, p_3 ..., p_m$
于是我们还是跟之前一样设出$f(i)$与$g(i)$
令$f(i)$表示与n有大于等于i种公共质因子的数的个数,U_i表示i个质因子的所有集合

$$f(i) = \sum_{S \in U_i} \frac{r}{lcm(S)}$$

令$g(i)$ 表示与n恰好有i种公共质因子的数的个数, $g(i)$ 在某个$f(k)(k <= i)$中被计算到的次数为$\binom{i}{k}$,即

$$f(k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} g(i)$$

到此，我们推出了跟之前一样的规律，系数是一个组合数，于是

$$ret = total - f(1) + f(2) - f(3) + ... + (-1)^m f(m)$$

求整数解的数量

> - 求 $x_1 + x_2 + ... + x_n = m(0 <= x_i <= lim, lim <= m)$ 的整数解的数量

假设不考虑x的取值范围，则总的方案数等价于将m个相同的球放到n个不同的盒子里，每个盒子可以为空

$$total = \binom{n+m-1}{n-1}$$

令$f(i)$表示至少有i个数不在范围内，其他数随便选的方案数
$g(i)$表示恰好有i个数不在范围内的方案数
则

$$ret = total - (g(1) + g(2) + g(3) ... + g(n))$$

观察到$g(i)$在某个$f(k)$ ($k <= i$)中的计算次数 为

$$\binom{i}{k}$$

，因此还是可以应用容斥原理

$$ret = total - f(1) + f(2) - f(3) + ... + (-1)^n f(n)$$

$f(i)$的计算方法如下
令$cnt[i][j]$表示i个数，和为j,每个数都大于lim的方案数，注意这里不是整数拆分，这就等价于先在i个盒子里每个盒子放上lim个球，然后将$j - i * lim$个相同的小球放到i个不同的盒子里，不能为空
那么$cnt[i][j] = \binom{j-i*lim-1}{i-1}$
枚举i个数的和sum，剩下的$m - sum$放到$n - i$个不同的盒子里，可以为空

$$f(i) = \sum_{sum=(lim+1)*i}^{m} cnt[i][sum] * \binom{n}{i} * \binom{m - sum + n - i - 1}{n - i - 1}$$

展开一下就是

$$f(i) = \sum_{sum=(lim+1)*i}^{m} \binom{sum - i * lim - 1}{i - 1} * \binom{n}{i} * \binom{m - sum + n - i - 1}{n - i - 1}$$

数字排列

> - 长度为n的由数字$a_1, a_2, a_3 .. a_m$组成的数列，要求每种数字至少出现一次，有多少种方案

假设没有限制，总的方案数为m^n
设$f(i)$表示选择i种数字不出现，其他数字随便选择的方案数，$g(i)$表示恰好有i种数字没出现的数量

$$f(i) = \binom{m}{i}(m-i)^n$$

显然这个还是跟之前的题目一样可以容斥

$$m^n - f(1) + f(2)... + (-1)^m f(m)$$

DerangementsDiv2 srm 717 div2 T3 / CF 341C

> - 求m个数不能在自己位置 n个数随便排的错排 每个数都不同

跟错排的容斥一样，枚举几个有限制的数在自己位置，其他数随便排