概率与期望

资料

- 《浅析竞赛中一类数学期望问题的解决方法》

让我们直接开始实战

T1

- 给你一个整数N，每次N会随机变成N的某个因子，问期望几次以后N会变成1
- $1 <= N <= 10^5$

解法

- 假设dp[i]表示i变成1的期望步数,那么显然dp[1]=0
- 假设i的约数为a1 a2 .. am (am = i)
- 那么dp[i] = (dp[a1] + dp[a2] + ...+dp[i])/m + 1
- 根据这个方程可以解出dp[i],其他的dp项都可以看作是子结构

T2

- 一个软件有s个子系统，会产生n种bug，某人一天发现一个bug，这个bug属于一个子系统，属于一个分类，每个bug属于某个子系统的概率是1/s，属于某种分类的概率是1/n，问发现n种bug，每个子系统都发现bug的天数的期望。

- dp[i][j]表示找到的bug属于i种bug，j个系统，距离目标状态的天数的期望
- dp[n][s] = 0，求dp[0][0]
- 枚举一个新bug的种类与系统去转移
- dp[i][j]
- dp[i][j]:属于i个分类与j个系统，概率为i/n * (j/s)
- dp[i][j+1]：属于i个分类，不属于j个系统
- dp[i+1][j]:…
- dp[i+1][j+1]:…

T3

- 有三个骰子，分别有k1，k2，k3个面。每次投骰子，如果三个面分别为a，b，c则分数置0，否则加上三个骰子的分数之和。当分数大于n时结束。求游戏的期望步数。

- 设dp[i]为分数为i的时候到达目标的期望步数
- 设pk为投出k分的概率，p0为投出a,b,c的概率
- dp[i] = sigma(pk*dp[i+k]) + dp[0]*p0 + 1
- 每一个dp[i]都有dp[0],而我们要求的就是dp[0]
  - 设dp[i] = K[i] * dp[0] + B[i]
    - 代入之后合并dp[0]的同类项，可以得到K[i],B[i]的求法，然后求出dp[0] = B[0]/(1 - K[0])

T4

- 一场比赛一共M道题，T个队伍，pij表示第i队解出第j题的概率，问每队至少解出一题而且冠军队至少解出N题的概率

- dp[i][j][k]:第i个队伍在前j道题目中解出了k道题的概率
- s[i][k]表示第i队作出的题小于等于k的概率
- 利用dp数组求出s数组
- 每个队至少作出一道题的概率为p1=(1-s[1][0])*(1-s[2][0])*…*(1-s[T][0])
- 每个队作出的题数都在1～N-1的概率为p2 =(s[1][N-1]-s[1][0]) * (s[2][N-1]-s[2][0])*…*(s[T][N-1]-s[T][0])
- P1-p2 就是答案

T5

- 袋子里有w只白老鼠与b只黑老鼠，龙和王妃轮流抓老鼠，谁先抓到白色谁就赢，王妃每次抓一只老鼠，龙每次抓完一只老鼠之后会有一只老鼠跑出来，每次抓老鼠和跑出来的老鼠都是随机的。
- 如果两个人都没有抓到白色老鼠则龙赢，王妃先抓
- 问王妃赢的概率

- dp[i][j]表示轮到王妃时有i只白老鼠，j只黑老鼠的情况下赢的概率
- 枚举王妃抓到的老鼠的颜色以及龙抓到的老鼠的情况去转移

T6

- 2^n个球队踢球，告诉你每个队打败另一个队的概率，问最后胜利的概率最大的是哪只球队
-

- dp[i][j]表示第i场比赛，第j个球队获胜的概率
- 枚举第i-1场比赛某个k
- dp[i][j] += dp[i-1][j]*dp[i-1][k] * p[j][k]
- 即自己先胜出再打败另一边的胜者
- 就是一颗满二叉树自底向上dp的过程

T7

- n个盒子里装有礼物，m个人轮流随机选择礼物，选完之后空盒子放回，问选中的礼物数的期望

- 对于每个礼物不被人选中的概率是p=((n-1)/n)^m
- 因此不被人选中的礼物数的期望是n*p
- 所以答案就是n - n*p

- 设dp[i]为到第i个人为止得到礼物的期望
- dp[i]=dp[i-1]+1*(n-dp[i-1])/n

T8

- 给出一个数轴，有一个起点与终点，某个人每次可以走1-m步，每种走法有一个概率，初始的时候有一个方向，走到头就返回，问达到终点的期望步数

- 令dp[i]表示i到终点的期望，那么我们列出式子之后发现dp之间形成了环，没有严格的子结构
- 这个时候就需要列出方程组来解方程
- 典型的工具就是高斯消元