qhfz 算法思维训练 题解

registerGen

Contents

1 字串变换

1.1 题目描述

给定一个由字符 `0`，`1`，`2` 组成的字符串 s。如果 `0` 和 `1` 相邻或 `1` 和 `2` 相邻，则我们可以交换它们的位置，如 `01` $\to$ `10`，`10` $\to$ `01`，`12` $\to$ `21` 等。

对于 s，只可以进行上述操作，且可以操作任意的次数，请问可以得到的字典序最小的字符串是什么？

1.2 输入格式

一行，一个字符串 s。

1.3 输出格式

一行，表示答案。

1.4 输入输出样例

输入 #1	输出 #1
100210	001120
输入 #2	输出 #2
11222121	11112222

1.5 说明/提示

1.5.1 数据范围

对于 30% 的数据，$|s| \le 10$。

对于 50% 的数据，$|s| \le 100$。

对于 70% 的数据，$|s| \le 10^3$。

对于 100% 的数据，$1 \le |s| \le 10^5$，$\Sigma \subseteq \{0, 1, 2\}$。

$|s|$ 表示字符串 s 的长度，Σ 表示字符集。

1.6 题解

由于 0，2 的相对位置不会改变，所以只需将所有的 1 移到 s 的第一个 2 前面即可。

时间复杂度 $\mathcal{O}(n)$。

1.7 代码

```
#include<cstdio>
#include<algorithm>
#include<cstring>

const int N=1e5;

int n;
char s[N+10];

int main(){
  scanf(”%s”,s+1);
  n=int(strlen(s+1));
  int pos=n+1,cnt=0; // pos 表示第一个 2 的位置，cnt 表示 1 的个数
  for(int i=1;i<=n;i++)
    if(s[i]==’1’)cnt++;
  for(int i=1;i<=n;i++)
    if(s[i]==’2’){pos=i;break;}
  for(int i=1;i<pos;i++)
    if(s[i]!=’1’)putchar(s[i]);
  for(int i=1;i<=cnt;i++)
    putchar(’1’);
  for(int i=pos;i<=n;i++)
    if(s[i]!=’1’)putchar(s[i]);
  puts(””);
  return 0;
}
```

2 最大子方阵

2.1 题目描述

给定 $n \times m$ 的矩形的点方阵，每个元素只可能为 1 或 0，例如：

$$\begin{matrix}0111\\1000\\0110\end{matrix}$$

1 表示这个位置上站着一位同学，0 表示这个位置上没有人。现在你有指挥的权利，具体为可以交换任意的两行，并且这个权利可以使用无数次，那么请问，你可以折腾指挥出一个最大的，全部由同学构成的子方阵吗？

“子方阵”是指这样的点集：对于其中的任意一个点 (x, y)，$1 \le a \le x \le b \le n, 1 \le c \le y \le d \le m$。子方阵的大小是指其中 1 的个数。

例如，对于上述方阵，当 $a = 1, b = 2, c = 2, d = 3$ 时，子方阵为：

$$\begin{matrix}11\\00\end{matrix}$$

2.2 输入格式

第一行包含 2 个整数 n 和 m。

接下来 n 行，每行 m 个字符，表示这一行中同学的分布情况。

2.3 输出格式

一行一个整数，表示答案。

2.4 输入输出样例

输入 #1	输出 #1
3 4 0111 1000 0110	4

2.5 说明/提示

2.5.1 样例 1 解释

我们可以交换原始方阵的 2，3 行，获得：

$$\begin{matrix}0111\\0110\\1000\end{matrix}$$

则当 $a=1,b=2,c=2,d=3$ 时，对应的子方阵即为最大子方阵。

2.5.2 数据范围

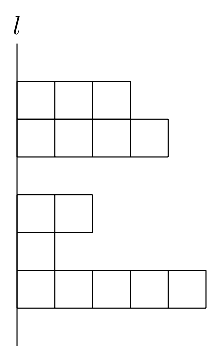
对于 50% 的数据，$n,m\le 100$。

对于 100% 的数据，$1\le n,m\le 5\times 10^3$。

2.6 题解

首先，这个数据范围是允许我们枚举子方阵的一条边的，考虑枚举子方阵的左边。

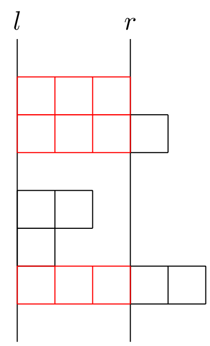
那么，我们可以"利用"的 1 的范围如下图：



可以发现，第 i 行可"利用"的 1 的个数为 (i,l) 往右的连续的 1 的个数（包括它自己），记为 $b_{i,l}$。

然后我们发现貌似还是不太好算，所以再枚举子方阵的右边。

此时，由于行是可以随便换的，所以我们可以"利用"的 1 的范围如下图的红色部分：



为了方便计算，我们按 1 的个数从大到小排个序再枚举。

现在的问题就是，如何高效计算 $b_{i,j}$？

```
for(int i=1;i<=n;i++){ // 对于每一行
  int cnt=0; // counter
  for(int j=m;j;j--){ // 倒着枚举
    if(a[i][j]==0)cnt=0; // 如果这个格子为 0 ，则 b[i][j] 就为 0
    else cnt++; // 如果这个格子为 1 ，则 b[i][j] = b[i][j+1] + 1 （即 cnt + 1 ）
    b[i][j]=cnt;
  }
}
```

时间复杂度 $\mathcal{O}(nm\log n)$。但待排序的元素均在 $[0,m]$ 内，所以排序可以使用桶排，时间复杂度 $\mathcal{O}(nm)$。

2.7 代码

```
#include<cstdio>
#include<algorithm>

const int N=5000;

int n,m;
bool a[N+10][N+10];
int b[N+10][N+10];
int tmp[N+10];
```

```
int buc[N+10];

int main(){
  scanf("%d%d",&n,&m);
  for(int i=1;i<=n;i++)
    for(int j=1;j<=m;j++)
      scanf("%1d",a[i]+j);
  // 预处理 b[i][j]
  for(int i=1;i<=n;i++){
    int cnt=0;
    for(int j=m;j;j--){
      if(a[i][j]==0)cnt=0;
      else cnt++;
      b[i][j]=cnt;
    }
  }
  int ans=0;
  for(int j=1;j<=m;j++){
    // tmp[i] 为 b[i][j] 排好序后的数组
    for(int i=1;i<=n;i++)tmp[i]=b[i][j];
    // 桶排
    for(int i=0;i<=m;i++)buc[i]=0;
    for(int i=n;i>=1;i--)buc[tmp[i]]++;
    int tot=0;
    for(int i=m;i>=0;i--)
      for(int k=1;k<=buc[i];k++)
        tmp[++tot]=i;
    int res=0;
    for(int i=1;i<=n;i++)
      res=std::max(res,i*tmp[i]); // 计算全部由同学构成的子方阵大小。如果不理解这句话可以画画图。
    ans=std::max(ans,res);
  }
  printf("%d\n",ans);
}
```

3 摘苹果

3.1 题目描述

果园中有 n 棵苹果树，它们排成了一排，每棵树上有 c_i 个苹果。现在，小玉站在第一棵树下，有 W 点能量，同时能量上限也为 W。

对于第 i 棵树，小玉可以摘 $[0, c_i]$ 间的任意数量的苹果。**每摘一个** 苹果，小玉的能量将会被消耗 $cost_i$，但是能量上限将会增加 B。

小玉只能按着顺序从第 1 棵树移动到第 2 棵树，从第 2 棵树到第 3 棵树……每次他到达下一棵树时，他都会恢复 X 点能量（当然，不能超过当时的上限）。这样一直进行下去，请问最后小玉最多可以摘到多少苹果？注意，小玉不可以出现负能量的状态。

3.2 输入格式

第一行 4 个整数 n, W, B, X。

第二行 n 个整数 c_i。

第三行 n 个整数 $cost_i$。

3.3 输出格式

一行一个整数表示答案。

3.4 输入输出样例

输入 #1	输出 #1
2 10 7 11 2 10 6 1	11
输入 #2	**输出 #2**
5 1 4 6 3 4 6 5 1 3 0 10 2 9	10

3.5 说明/提示

3.5.1 数据范围

对于 40% 的数据，$1 \le n \le 100$，$1 \le \sum_{i=1}^{n} c_i \le 100$。

对于 100% 的数据，$1 \le n \le 10^3$，$1 \le \sum_{i=1}^{n} c_i \le 10^4$，$0 \le c_i \le 10^4$，$0 \le W, B, X, cost_i \le 10^9$。

3.6 题解

首先，容易想到如下的状态设计：设 $f_{i,j}$ 表示只摘前 i 棵树上的苹果，且当前能量为 j 时能摘到的最多的苹果。

很快你会发现这很不现实——$W \le 10^9$，我们不能开下这么大的数组！

考虑从 $\sum_{i=1}^{n} c_i \le 10^4$ 入手，改变状态如下：

设 $f_{i,j}$ 表示前 i 棵树，摘了 j 个苹果的——等等，摘了 j 个苹果的什么呀？

考察题目的变量，你会发先有三个：摘了的苹果树的个数，摘到的苹果的个数，能量。

> dp 第 × 定理：一般的，设计状态时要把题目中所有变量包含进状态里。

那么，我们可以得到最终的状态定义：**设 $f_{i,j}$ 表示前 i 棵树，摘了 j 个苹果的最大能量**（当然是能量越多越好了）。

那么，最终的答案就是使得 $f_{n,i} \ge 0$ 的最大的 i。

有了状态定义，转移方程和初始化就很简单了：

$$f_{i,j} = \max_{k \in [0, c_i]} \{\min\{f_{i-1,j-k} - k \cdot cost_i + X, W + jB\}\} \quad \text{if } f_{i-1,j-k} - k \cdot cost_i \ge 0$$

初始化：

$$f_{i,j} = \begin{cases} W & i = 0 \land j = 0 \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

开一个 $10^3 \times 10^4$ 的 `long long` 数组可能会爆空间（我懒得算），可以滚动数组优化空间。

Upd：刚算了一下，不会炸。

$$\text{所需空间} = \frac{10^3 \times 10^4 \times 8}{1024 \times 1024} \approx 80\ \mathrm{MB}$$

时间复杂度 $\mathcal{O}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\right)^2\right)$。

3.7 代码

```cpp
#include<cstdio>
#include<algorithm>
#include<cstring>

typedef long long ll;

const int N=1e3;
const int M=1e4;
const ll inf=0x3f3f3f3f3f3f3f3fLL;

int n,W,B,X,c[N+10],cost[N+10],sumc;
ll f[2][M+10]; // 不滚动: f[N+10][M+10];

int main(){
  scanf(”%d%d%d%d”,&n,&W,&B,&X);
  for(int i=1;i<=n;i++)
    scanf(”%d”,c+i),sumc+=c[i];
  for(int i=1;i<=n;i++)
    scanf(”%d”,cost+i);
  memset(f,~0x3f,sizeof(f));
  f[0][0]=W;
  for(int i=1;i<=n;i++)
    for(int j=0;j<=sumc;j++)
      for(int k=0;k<=std::min(c[i],j);k++){
        ll tmp=f[(i&1)^1][j-k]-1LL*k*cost[i]; // 不滚动: f[i-1][j-k]-1LL*k*cost[i]
        if(tmp<0)continue;
        tmp+=X;
```

```
        if(tmp>W+1LL*j*B)tmp=W+1LL*j*B;
        f[i&1][j]=std::max(f[i&1][j],tmp); // 不滚动: f[i][j]=std::max(f[i][j],tmp)
      }
  for(int i=sumc;~i;i--)
    if(f[n&1][i]>=0){
      printf("%d\n",i);
      return 0;
    }
  return 0;
}
```