基本定理的某些应用

金融工程学硕 4 班　张海涛

基本定理:

$$\begin{pmatrix} S_{1t_0} \\ \cdots \\ S_{nt_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^1 & \cdots & z_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_n^1 & \cdots & z_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^1 \\ \cdots \\ Q^n \end{pmatrix}$$

$$\frac{C(S_t,t)}{Z_t} = E_t^{\tilde{P}}\left[\frac{C(S_T,T)}{Z_T}\right]$$

两个工具：

monte carlo simulation　　模拟计算期望值

校准(calibration)　选择模型参数

一个应用：

跨货币资产(quanto assets)　将基本理论应用到模型

1　蒙特卡罗方法

1.1 思考

$$\frac{C(S_t,t)}{Z_t} = E_t^{\tilde{P}}\left[\frac{C(S_T,T)}{Z_T}\right]$$

S_t 是无套利资产价格，Z_t 是标准化资产（用来定义 $\tilde{P}$ 的工具）

如果我们已知概率测度，同时还知道 Z_t，那么可以利用上式计算 $C(S_t,t)$的数值解。有两种方法：(1)求解析解；(2) monte carlo simulation

问题：X~N(μ , σ)　　如何求 $E^P[g(X)]$?

方法一，直接解方程:

$$E^P[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(1/2\sigma^2)(x-\mu)^2}\right) \mathrm{d}x$$

方法二，Monte carlo：

利用随机数生成器，生成大量的样本 xi，得到对应的 g(xi)

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(x_i) \to E^{p}[g(X)]$$

1.2 以欧式看涨期权定价为例

$$\frac{C(t)}{e^{rt}} = E_t^{\tilde{P}}\left[\frac{CT}{e^{rT}}\right]$$

那么

$$C(t) = e^{-r(T-t)} E_t^{\tilde{P}}[C(T)]$$

其中

$$C(T) = \max[S_T - K, 0]$$

离散化得到

$$S_{t+\Delta} = (1 + r\Delta)S_t + \sigma S_t(\Delta W_t)$$

$$\Delta W_t \sim N(0, \Delta)$$

Monte carlo 定价步骤：

1， 选择 delta 的大小，然后利用伪随机数生成器，从正态分布中生成变量 ΔW_t

2， 利用 S_t 的现值、参数值 r、sigma，得到 N 个终止 S^j_T，j=1,2,…,N.表示蒙特卡罗方法所生成的随机路径

3， 带入收益函数得到

$$C(T)^j = \max[S_T^j - K, 0]$$

4， 计算样本均值并贴现，得到 C(t)：

$$C(t) = e^{-r(T-t)} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} C(T)^j$$

1.3 实例一：欧式看涨期权定价

EXAMPLE

Consider pricing the following European vanilla call written on S_t, the EUR/USD exchange rate, which follows the discretized (approximate) SDE:

$$S^j_{t_i} = S^j_{t_{i-1}} + (r - r^f)S^j_{t_{i-1}}\Delta + \sigma S^j_{t_{i-1}}\sqrt{\Delta}\in^j_i \tag{13.17}$$

where the drift is the differential between the domestic and foreign interest rates.

We are given the following data on a call with strike $K = 1.0950$:

$$r = 2\% \; r^f = 3\% \; t_0 = 0, T = 5 \text{ days} = 1.09 \; \sigma = 0.10 \tag{13.18}$$

A financial engineer decides to select $N = 3$ trajectories to price this call. The discrete interval is selected as $\Delta = 1$ day.

The software Mathematica provides the following standard normal random numbers:

$$\{0.763, 0.669, 0.477, 0.287, 1.81, -0.425\} \tag{13.19}$$

$$\{1.178, -0.109, -0.310, -2.130, -0.013, 0.421141\} \tag{13.20}$$

$$\{-0.922, 0.474, -0.556, 0.400, -0.890, -2.736\} \tag{13.21}$$

Using these in the discretized SDE,

$$S^j_i = \left(1 + (0.02 - 0.03)\frac{1}{365}\right)S^j_{i-1} + 0.10S^j_{i-1}\sqrt{\frac{1}{365}}\in^j_i \tag{13.22}$$

we get the trajectories:

Path	Day 1	Day 2	Day 3	Day 4	Day 5
1	1.0937	1.0965	1.0981	1.1085	1.1060
2	1.0893	1.0875	1.0754	1.0753	1.0776
3	1.0927	1.08946	1.0917	1.086	1.0710

For the case of a plain vanilla euro call, with strike $K = 1.095$, only the first trajectory ends in-the-money, so that

$$C(T)^1 = 0.011, \quad C(T)^2 = 0, \quad C(T)^3 = 0 \tag{13.23}$$

Using continuous compounding the call premium becomes

$$C(t) = \text{Exp}\left(-0.02\frac{5}{365}\right)\frac{1}{3}[0.011 + 0 + 0] \tag{13.24}$$

$$C(t) = 0.0037 \tag{13.25}$$

1.4 实例二：两值外汇期权定价

两值外汇期权：如果外国货币的价格 S_t 在到期日超过 K，那么期权持有者将获得本国货币收益 R,否则，期权持有者得到零收益。期权是欧式的，其到期日是 T,期权以 C(t)的价格卖出。

1.4.1 推导 St 的 SDE：

由上一章节可知

$$S_t = \sum_{i=1}^{n}(1+r^f\Delta)S_T^iQ^i$$

使用本币储蓄账户作为标准化因子，得到

$$S_t = \sum_{i=1}^{n}\frac{(1+r^f\Delta)}{(1+r\Delta)}S_T^i(1+r\Delta)Q^i$$

选取风险中性概率为

$$\tilde{p}_i = (1+r\Delta)Q^i$$

整理可得

$$\frac{(1+r\Delta)}{(1+r^f\Delta)} = E_t^{\tilde{p}}\left[\frac{S_T}{S_t}\right]$$

当 delta 趋近于 0 的时候，左边逼近

$$(1+r\Delta-r^f\Delta)$$

这说明，在风险中性概率测度下，S_t 预期以年化 r-r^f 的速率变化，假设 S_t 服从几何布朗运动，那么 S_t 的 SDE 为：

$$\mathrm{d}S_t = (r-r^f)S_t\mathrm{d}t + \sigma S_tW_t \quad t\in[0,\infty)$$

1.4.2 Monte carlo 过程

第一步，选取离散区间 delta，然后对 SDE 离散化

$$S_{t+\Delta} = S_t + (r-r^f)S_t\Delta + \sigma S_t\Delta W_t$$

第二步，得到 N 个服从标准正态分布的随机变量序列

$$\{\epsilon_i^j, i=1,\ldots,k, j=1,\ldots,N\}$$

并计算 N 个模拟的路径：

$$S_{t_i}^j = S_{t_{i-1}}^j + (r-r^f)S_{t_{i-1}}^j\Delta + \sigma S_{t_{i-1}}^j\sqrt{\Delta}\epsilon_i^j$$

第三步，计算 C(t)：

$$C(t) = \mathrm{R}e^{-r(T-t)}E_t^{\tilde{p}}\left[I_{\{S_T>K\}}\right]$$

其中，示性函数

$$I_{\{S_T>K\}} = \begin{cases}1 & \text{IF } S_T>K\\ 0 & \text{Otherwise}\end{cases}$$

而

$$E_t^{\tilde{p}}\left[I_{\{S_T>K\}}\right] = \mathrm{Prob}(S_T>K)$$

所以

$$C(t) = e^{-r(T-t)}R\ (\text{Prob}(S_T > K))$$
$$\cong e^{-r(T-t)}R\left(\frac{\text{m}}{\text{N}}\right)$$

EXAMPLE

Consider pricing a digital option written on S_t, the EUR/USD exchange rate with the same structure as in the first example. The digital euro call has strike $K = 1.091$ and pays \$100 if it expires in-the-money. The parameters are the same as before:

$$r = 2\%, \quad r^f = 3\%, \quad t_0 = 0, \quad t = 5 \text{ days}, \quad S_{t_0} = 1.09, \quad \sigma = 0.10 \tag{13.43}$$

The paths for S_t are given by

Path	Day 1	Day 2	Day 3	Day 4	Day 5
1	1.0937	1.0965	1.0981	1.1085	1.1060
2	1.0893	1.0875	1.0780	1.0850	1.092
3	1.0927	1.08946	1.0917	1.086	1.0710

The digital call expires in-the-money if $1.091 < S_T^j$. There are two incidences of this event in the previous case, and the estimated risk-neutral probability that the option expires in-the-money is 2/3. The option value is calculated as

$$C(t) = \text{Exp}\left(-0.02\frac{5}{365}\right)\frac{2}{3}[100] \tag{13.44}$$

$$C(t) = \$66.6 \tag{13.45}$$

1.5 实例二扩展：路径依赖问题

前面我们所讨论的例子在计算 C(S,t)时，仅考察了轨迹 T 时刻的值，轨迹的其他因素没有直接应用到定价中。如果标的资产在中间发生字符或者受其他一些限制的影响，比如障碍期权，那么情况会发生变化。

设 $C(S_t,t)$表示障碍为 H 的障碍期权的价格，在区间 $u\in[t,T]$中，期权是否入局或出局取决于 $S_u<H$ 是否发生。

所以对于这种工具在定价的时候，一旦得到一条蒙特卡罗轨迹，就需要检验整条轨迹来确定是否所有的 S^j_u 都满足条件 $S_u<H$.

还是上面的例子，现在增加一个出局障碍 H=1.08。如果到期前 S_t 低于这个障碍，那么这个两值看涨期权就会出局。

EXAMPLE

All parameters are the same as in the first example, and the paths are given by

Path	Day 1	Day 2	Day 3	Day 4	Day 5
1	1.0937	1.0965	1.0981	1.1085	1.1060
2	1.0893	1.0875	1.0780	1.0850	1.092
3	1.0927	1.08946	1.0917	1.086	1.0710

The digital knock-out call requires that $1.091 < S_T^j$ and that the trajectory never falls below 1.08. Thus, there is only one incidence of this in this case and the value of the option is calculated as

$$C(t) = \mathrm{Exp}\left(-0.02\frac{5}{365}\right)\frac{1}{3}[100] \tag{13.46}$$

$$C(t) = \$33.3 \tag{13.47}$$

从这个例子中我们也可以看到，两只期权更便宜。

1.6 Python 例子

问题：

（1）如何利用计算机选择随机数

（2）如何调整系统，是的计算机计算在最短的时间内达到最大精度

（3）如何在给定的随机选择数下，减少所计算的价格方差

2 校准

校准是指通过模型参数的选择，能复制观测到的无套利基准价格。

Black-Derman-Toy(BDT)，这个模型用于校准即期利率的未来轨迹。

模型假设状态价格和风险中性概率是二叉树结构，同时假设已知基准零息债券的无套利价格和这些市场上的相关的波动性报价。

程序共有三步:

1 获得基准债券的无套利价格和相关波动性

2 从这些数据提取出相应变量的无套利动态特性

3 利用无风险动态特性对其他利率敏感性证券进行定价

2.1 提取 Libor 树

假设已知 3 个无风险零息债券的无套利价格

$\{B(t_0,t_1),B(t_0,t_2),B(t_0,t_3)\}$

同时假设我们观察到 Libor 的利率 L_{t0},L_{t1},L_{t2} 的波动性报价 σ_i，i=0,1,2, σ_0 等于 0，因为这

个变量在 t0 时已知。假设已知如下数据：

σ_1=15%

σ_2=20%

B(t0,t1)=0.95

B(t0,t2)=0.87

B(t0,t3)=0.79

2.1.1 定价函数

讨论前面提到的矩阵方程：

$$S_{kx1} = D_{kxk} Q_{kx1}$$

假设第一项资产是一年期 Libor 利率的存款，第二项资产是 t_3 时刻到期、同时支付 1 美元的债券 $B(t_0,t_3)$,于是，矩阵方程的前两行如下：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ B(t_0,t_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})\right]^1 & \cdots & \left[(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})\right]^k \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Q^1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ Q^k \end{pmatrix}$$

利用储蓄函数标准化可以得到：

$$B(t_0,t_3) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left[(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})\right]^i}{\left[(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})\right]^i} Q^i$$

定义风险中性概率为：

$$\tilde{p}_i = \left[(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})\right]^i Q^i$$

整理得到

$$B(t_0,t_3) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\left[(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})\right]^i} \tilde{p}_i$$

所以 t3 时刻到期的债券的定价公式为：

$$B(t_0,t_3) = E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{1}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})}\right]$$

同理可以得到 t1 和 t2 时刻到期的债券的定价公式：

$$B(t_0,t_1)=E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{1}{(1+L_{t_0})}\right]$$

$$B(t_0,t_2)=E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{1}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})}\right]$$

2.2 得到 BDT 树

因此我们可以得到 5 个等式：

$$B(t_0,t_1)=E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{1}{(1+L_{t_0})}\right]$$

$$B(t_0,t_2)=E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{1}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})}\right]$$

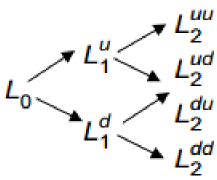
$$B(t_0,t_3)=E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{1}{(1+L_{t_0})(1+L_{t_1})(1+L_{t_2})}\right]$$

$$\mathrm{Vol}(L_{t_1})=\sigma_1$$

$$\mathrm{Vol}(L_{t_2})=\sigma_2$$

2.2.1 设定动态特性

考虑如下三期的二叉树：



一共有 7 个未知变量 $\{L_0, L_1^u, L_1^d, L_2^{ud}, L_2^{du}, L_2^{dd}, L_2^{uu}\}$ 比我们的等式多出 2 个变量。通过在模型中增加限制，至少要消除两个未知变量。通过下面对方差的设定可以解决这个问题。

2.2.2 Li 的方差

假设一：

即期 Libor 利率 L_i(i=0,1,2)二叉树的设定。也就是说，在任意节点上，即期利率仅有两种取值。因而，在时间 i 处于状态 j 的条件下，L_i 的方差百分比是

$$Var(L_i|j)=E\tilde{P}[\ln(L_i)-\ln(\bar{L}_i)^2|j]$$

其中

$$\ln\ \overline{L}_i = E\tilde{P}[\ln(L_i)|j]$$

假设二：

$$p_i^u = \frac{1}{2} \quad \forall i$$

$$p_i^d = \frac{1}{2} \quad \forall i$$

也就是向上和向下的风险中性概率均为常数，且相等。那么就有

$$\begin{aligned} E\tilde{P}[\ln(L_i) \mid j = u] &= p^u \ln(L_i^{uu}) + (1 - p^u)\ln(L_i^{ud}) \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln(L_i^{uu}) + \ln(L_i^{ud})\right] \end{aligned}$$

所以

$$Var(L_i \mid j = u) = E\tilde{P}\left[\left(\ln(L_i) - \frac{1}{2}\left[\ln(L_i^{uu}) + \ln(L_i^{ud})\right]\right)^2 \mid j = u\right]$$

化简得

$$Var(L_i \mid j = u) = \left(\frac{1}{2}\left[-\ln(L_i^{uu}) + \ln(L_i^{ud})\right]\right)^2$$

因而

$$\sigma_i^u = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{L_i^{uu}}{L_i^{ud}}\right]$$

$$\sigma_i^d = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{L_i^{du}}{L_i^{dd}}\right]$$

2.3 树的校准

假设三：树是可重组的

通过上面的式子和假设三我们可得下面 5 个方程

$$B(t_0,t_1)=\frac{1}{(1+L_0)}$$

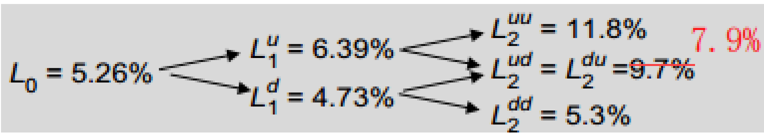
$$B(t_0,t_2)=\frac{1}{2}\frac{1}{(1+L_0)(1+L_1^u)}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1+L_0)(1+L_1^d)}$$

$$\begin{aligned}B(t_0,t_3)= \;& \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1+L_0)(1+L_1^u)(1+L_2^{uu})}\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1+L_0)(1+L_1^u)(1+L_2^{ud})}\right]\\ &+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1+L_0)(1+L_1^d)(1+L_2^{du})}\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1+L_0)(1+L_1^d)(1+L_2^{dd})}\right]\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\ln\left[\frac{L_1^u}{L_1^d}\right]=0.15$$

$$\frac{1}{2}\ln\left[\frac{L_2^{uu}}{L_2^{ud}}\right]=0.20$$

解之得



2.4 树的使用

无套利树有很多用途：（1）可以对标的的 Libor 利率 L_i 的一篮子期权定价。（2）可以利用树方法为互换及相关衍生品定价（3）可以利用树方法对远期上限、下限以及互换进行定价。

2.4.1 举例：上限定价

上限簇(caplet)是以特定 Libor 利率 L_{ti} 为标的的期权。选取一个上限利率 L_K 为执行价格，如果 Libor 利率超过 L_K，那么上限簇的购买者将获得补偿。

假如需要为如下上限簇定价:

- t_i 满足 t_i-t_{i-1}=12 个月
- 在 t2 时可以观察到 Libor 利率 Lt2.
- 在 t_0 时本金 N 已经确定。设 N=100 万美金
- 如果 Libor 利率 L_{t2} 超过利率上限 L_K=6.5%，顾客将在 t_3 时得到收益：

$$C(t_3)=\frac{N\left(L_{t_2}-L_K\right)}{100}$$

问：如何确定上限簇的期权费 C(t0)的无套利价值？

利用风险中性概率计算期望，使用无风险利率贴现后的到期日支付的期望价值等于 C(t0).

$$C(t_0) = E_{t_0}^{\tilde{P}}\left[\frac{C(t_3)}{\left(1+L_{t_0}\right)\left(1+L_{t_1}\right)\left(1+L_{t_2}\right)}\right]$$

上式中

$$C(t_3) = N \max\left[\frac{\left(L_{t_2} - L_K\right)}{100}, 0\right]$$

上限簇的 4 个轨迹中有 3 个事以实值终止的。计算每种情况的可能收益，然后除以贴现因子，就可以得到 C_0 的期望的数值解：

$$C_0 = 0.25\left[\begin{array}{l}\dfrac{53000}{(1.0526)(1.0639)(1.118)} + \dfrac{144400}{(1.0526)(1.0473)(1.0793)} \\ \\ + \dfrac{14400}{(1.0526)(1.0639)(1.0793)}\end{array}\right]$$

$$= \$16,587$$

3 跨货币(quanto)

跨货币的外币资产是按已知汇率以本国货币完成的未来收益。汇率 x_t 在开始时选定，合约在 T 时刻终止。

3.1 基本定理方法(跨货币定价)

设 S^*_t 表示外国货币标价的外国股票，x_t 为汇率，即每单位外国货币兑换本国货币的数量，根据基本定理，可以利用本国风险中性测度得到远期合约在 t_0 时刻的价值：

$$V(t_0) = e^{-r(T-t_0)} E_{t_0}^{\tilde{P}} x_{t_0}\left[S_T^* - F_{t_0}\right]$$

设 $V(t_0)=0$,于是得到远期价格 F_{t0}

$$F_{t_0} = E_{t_0}^{\tilde{P}}[S_T^*]$$

假设基本定理中有三种资产的矩阵式。第一种资产是本国储蓄账户 B_t，如果存款为 1 美元，可以获得本国年利率 r 的收益。第二种为国外存款 B*t，如果存款为 1 美元，可以获得外国利率 r^*的收益。假设这些利率是常数。外币在 t_0 时刻的美元价值为 x_{t0}。第三种资产是外国股票 S*t0.

带入矩阵式有：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_{t_0} \\ x_{t_0}S^*_{t_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r(T-t_0) & \cdots & 1+r(T-t_0) \\ x^1_T[1+r^*(T-t_0)] & \cdots & x^n_T[1+r^*(T-t_0)] \\ x^1_T S^{*1}_T & \cdots & x^n_T S^{*n}_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^1 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ Q^k \end{pmatrix}$$

定义本国风险中性测度为：

$$\tilde{p}_i = (1+r(T-t_0))Q^i$$

由第三行可以得到

$$x_{t_0}S^*_{t_0} = \frac{1}{1+r(T-t_0)}\sum_{i=1}^{n} x^i_T S^{*i}_T \tilde{p}_i$$

也就是

$$x_{t_0}S^*_{t_0} = \frac{1}{1+r(T-t_0)} E^{\tilde{P}}_{t_0}\left[x_T S^*_T\right]$$

同理由第二行可得

$$x_{t_0} = \frac{1+r^*(T-t_0)}{1+r(T-t_0)} E^{\tilde{P}}_{t_0}[x_T]$$

由方差公式有

$$\mathrm{Cov}(S^*_T, x_T) = E^{\tilde{P}}_{t_0}[S^*_T x_T] - E^{\tilde{P}}_{t_0}[S^*_T]E^{\tilde{P}}_{t_0}[x_T]$$

$$E^{\tilde{P}}_{t_0}\left[S^*_T\right] = \frac{E^{\tilde{P}}_{t_0}[S^*_T x_T] - \mathrm{Cov}(S^*_T, x_T)}{E^{\tilde{P}}_{t_0}[x_T]}$$

带入得

$$E^{\tilde{P}}_{t_0}\left[S^*_T\right] = \frac{[1+r(T-t_0)]x_{t_0}S^*_{t_0} - \mathrm{Cov}(S^*_T, x_T)}{x_{t_0}[(1+r(T-t_0))/(1+r*(T-t_0))]}$$

另外

$$\mathrm{Cov}(S^*_T, x_T) = \rho\sigma_x\sigma_s(x_{t_0}S^*_{t_0})(T-t_0)$$

所以有

$$E^{\tilde{P}}_{t_0}\left[S^*_T\right] = \frac{1+r^*(T-t_0)}{1+r(T-t_0)}[1+(r-\rho\sigma_x\sigma_s)(T-t_0)]S^*_{t_0}$$

$$E^{\tilde{P}}_{t_0}[S^*_T] \cong [1+(r^*-\rho\sigma_x\sigma_s)(T-t_0)]S^*_{t_0}$$

即

$$F_{t_0} \cong [1+(r^* - \rho\sigma_x\sigma_s)(T-t_0)]S^*_{t_0}$$

F_{t0} 的本币现值就是跨货币的即期价格：

$$V_{t_0} = x_{t_0}\frac{1}{1+r(T-t_0)}[1+(r^* - \rho\sigma_x\sigma_s)(T-t_0)]S^*_{t_0}$$

如果是连续复利的情形下，就是：

$$V_{t_0} = e^{-r(T-t_0)}e^{(r^*-\rho\sigma_x\sigma_s)(T-t_0)}x_{t_0}S^*_{t_0}$$

根据这个表达式，跨货币的价值依赖于汇率变动和外国股票价格之间的相关性的符号。如果相关性为正，那么跨货币的价值就大，如果相关性为负，那么跨货币的价值就小。

3.2 PDE 方法(跨货币定价)

3.2.1 PDE

考虑与上文相同的两种货币的情形，本国存款和外国存款分别定义为 B_t 与 B^*_t，假设相应的连续复利率是常数，记为 r 与 r*。那么：

$$\mathrm{d}B_t = rB_t\mathrm{d}t \quad t\in[0,\infty)$$
$$\mathrm{d}B^*_t = r^*B^*_t\mathrm{d}t \quad t\in[0,\infty)$$

设 x_t 表示 1 单位外币兑换本国货币的汇率。在适当的鞅测度下，xt 满足下面的 SDE：

$$\mathrm{d}x_t = \mu_x x_t\mathrm{d}t + \sigma_x x_t\mathrm{d}W_{1t} \quad t\in[0,\infty)$$

Bt 的价格用本国货币表示是 xtB*t,依据上一章得到的结果，在 Bt 标准化以及相应的风险中性测度条件下，比值

$$\frac{x_tB^*_t}{B_t}$$

应该是一个鞅。这蕴含着，隐含的波动特性的漂移项应该为 0。如果求全导数，可得到：

$$E^{\tilde{P}}_t\left[\mathrm{d}\frac{x_tB^*_t}{B_t}\right] = E^{\tilde{P}}_t\left[\frac{B^*_t}{B_t}\mathrm{d}x_t + \frac{x_t}{B_t}\mathrm{d}B^*_t - \frac{x_tB^*_t}{B^2_t}\mathrm{d}B_t\right] = 0$$

带入上面的式子可得：

$$\frac{B^*_t}{B_t}\mu_x x_t\mathrm{d}t + \frac{x_t}{B_t}r^*B^*_t\mathrm{d}t - \frac{x_tB^*_t}{B^2_t}rB_t\mathrm{d}t = \frac{x_tB^*_t}{B_t}[\mu_x + r^* - r]\mathrm{d}t$$

为了使漂移项为 0，必须有

$$\mu_x + r^* - r = 0$$

所以 x_t 的 SDE 为：

$$\mathrm{d}x_t = (r - r^*)x_t\mathrm{d}t + \sigma_x x_t \mathrm{d}W_{1t} \quad t \in [0, \infty)$$

对于外国股票 S^*_t 有：

$$\mathrm{d}S^*_t = \mu_s S^*_t \mathrm{d}t + \sigma_x S^*_t \mathrm{d}W_{2t} \quad t \in [0, \infty)$$

经过 B_t 标准化后，外国股票的本币价值应该是鞅。利用伊藤引理

$$E_t^{\tilde{P}}\left[\mathrm{d}\frac{x_t S^*_t}{B_t}\right] = E_t^{\tilde{P}}\left[\frac{S^*_t}{B_t}\mathrm{d}x_t + \frac{x_t}{B_t}\mathrm{d}S^*_t - \frac{x_t S^*_t}{B_t^2}\mathrm{d}B_t + \frac{\mathrm{d}x_t \mathrm{d}S^*_t}{B_t}\right] = 0$$

简化得

$$\begin{aligned} &\frac{S^*_t}{B_t}(r - r^*)x_t + \frac{x_t}{B_t}\mu_s S^*_t - \frac{x_t S^*_t}{B_t^2} r B_t + \frac{\rho \sigma_x \sigma_s x_t S^*_t}{B_t} \\ &= \frac{x_t S^*_t}{B_t}\left[(r - r^*) + \mu_s - r + \rho \sigma_x \sigma_s\right] = 0 \end{aligned}$$

为了使漂移项为 0，必须在 $\tilde{P}$ 下始终有

$$\mu_S = r^* - \rho \sigma_x \sigma_s$$

这就给出了无套利股票价格的 SDE 如下

$$\mathrm{d}S^*_t = (r^* - \rho \sigma_x \sigma_s)S^*_t \mathrm{d}t + \sigma_x S^*_t \mathrm{d}W_{2t} \quad t \in [0, \infty)$$

即有

$$E_t^{\tilde{P}}[S^*_T] = e^{(r^* - \rho \sigma_x \sigma_s)(T-t)} S^*_t$$

3.2.2 跨货币的 PDE

利用这些结论，可以得到标的为国外经济风险的任意跨货币资产的 PDE。设外币资产为 S*t，并设 Vt 表示 t 时刻跨货币的价值。

$$V(t) = x_t V(S^*_t,\ t)$$

V()是资产的定价函数，有待确定。xt 是跨货币合约的初始汇率，V(t)以本国货币表示。在 Bt
标准化条件下，V(t)应该是鞅。利用伊藤引理可得

$$E_t^{\tilde{P}}\left[\mathrm{d}\frac{V(t)}{B_t}\right] = E_t^{\tilde{P}}\left[\frac{V_t}{B_t}\mathrm{d}t + \frac{V_s}{B_t}\mathrm{d}S^*_t - \frac{V}{B_t^2}\mathrm{d}B_t + \frac{1}{2}\frac{V_{ss}\sigma_s^2(S^*_t)^2}{B_t}\mathrm{d}t\right] = 0$$

替换 SDE 并化简得隐含 PDE

$$V_t + (r^* - \rho \sigma_x \sigma_s)S^*_t V_s + \frac{1}{2}V_{SS}\sigma_s^2(S^*_t)^2 - rV = 0$$

注：上式中 Vt 表示 V()对 t 的偏微分

终端条件是

$$V(T) = x_t V(S^*_T, T)$$

举例：跨货币远期合约
假设我们知道跨货币远期合约具有下面的价值

$$V(t) = q(t)S_t^*$$

那么

$$V_t = \frac{\partial q(t)}{\partial t} S_t^* = \dot{q} S_t^*$$
$$V_s = q(t)$$
$$V_{ss} = 0$$

带入跨货币的 PDE 得到

$$\dot{q} S_t^* + (r^* - \rho\sigma_x\sigma_s)q(t)S_t^* - rq(t)S_t^* = 0$$

终端条件为

$$V(T) = x_t S_T^*$$

由上课解出 q(t)

$$q(t) = x_t e^{(r^* - \rho\sigma_x\sigma_s)(T-t)}$$

这和此前的结果是一样的。

3.3 对现实生活的考虑

使用了如下假设：
1，假设标的服从对数正太分布
2，假设在期权期限内相关系数和波动性参数是常数
3，假设利率是常数，但其变动是随机的。