

# 稳定同伦论



ZIXI LI

2024 年 3 月 14 日



# 目录

第一部分 稳定同伦论	1
第一章 起源：稳定现象	2
第二章 古典构造：序列谱	4
2.1 序列谱与广义（上）同调	4
2.2 Adams 的稳定同伦范畴	6
2.2.1 Adams 的构造	6
2.2.2 稳定胞腔，Whitehead 和 HEP 定理	8
2.2.3 稳定同伦范畴的加性范畴结构	9
2.2.4 稳定同伦范畴的三角范畴结构	10
2.2.5 稳定同伦范畴的幺半范畴结构	11
2.2.6 Spanier-Whitehead 对偶	12
2.3 同调和上同调	14
2.3.1 例子	14
2.3.2 广义同调/上同调的性质	15
2.3.3 广义（上）同调的计算：Atiyah-Hirzebruch 谱序列	15
2.3.4 （上）同调的乘积结构	17
2.3.5 谱的 Poincare 对偶	20
2.4 Steenrod 代数	21
2.4.1 构造	22
2.4.2 计算实例，Steenrod 代数	23
mod 2 计算，Hopf Invariant	23
2.4.3 Hopf Invariant One Problem	26
2.5 Adams 谱序列	27
2.5.1 E-Adams 滤过	27
2.5.2 第一页	28
平坦交换环谱	29
E-Steenrod 代数	30
E-Steenrod 代数上的余模	34
余模的万有系数定理	35
2.5.3 稳定同伦群的特殊情况	37



2.5.4	第二页	38
2.5.5	收敛性	40
	谱的局部化和幂零完备化	40
	收敛定理	43
2.5.6	例子	44
2.6	对古典构造的评注	44
2.7	支线：模型范畴	47
2.7.1	导出	51
2.8	传统理论的终点	52
<b>第三章</b>	<b>现代构造：稳定无穷范畴</b>	<b>53</b>
3.1	无穷范畴的模型	53
3.1.1	单纯集	53
3.1.2	拟范畴	55
3.1.3	sSet- 充实范畴	56
3.1.4	模型范畴的局部化	58
3.2	极限	58
	拟范畴中的（余）极限	59
	Kan 复形充实范畴的（余）极限	59
3.3	稳定无穷范畴	61
3.3.1	稳定化	63
3.3.2	对现代构造的评注	64

# 第一部分

## 稳定同伦论





# 第一章 起源：稳定现象

稳定同伦论起源于代数拓扑学家在对拓扑空间和同伦群的研究中注意到的一些惊异的现象，这些现象被称为稳定现象 (Stable Phenomenon)。其中最先被发掘的是有关同伦群和维悬之间关系的一个重要结论，它由 Freudenthal 于 1937 年给出：

**定理 1.0.1** (Freudenthal 维悬定理). 假定  $X$  是 *nondegenerately based* 且  $(n-1)$ -连通的,  $n \geq 1$ 。那么  $\Sigma$  在  $q < 2n-1$  时是双射,  $q = 2n-1$  时是满射。

这里维悬同态  $\Sigma$  的定义为：

**定义 1.0.2** (维悬同态). 对于基点空间  $X$ , 定义  $\Sigma : \pi_q(X) \rightarrow \pi_{q+1}(\Sigma X)$  为：

$$\Sigma f = f \wedge \text{id} : S^{q+1} \cong S^q \wedge S^1 \rightarrow X \wedge S^1 = \Sigma X$$

作为维悬定理的推论，可以观察到球面同伦群具有如下性质。

**定理 1.0.3.**  $\forall n \geq 1, \pi_n(S^n) = \mathbb{Z}, \Sigma : \pi_n(S^n) \rightarrow \pi_{n+1}(S^{n+1})$  是同构。

对于性质相对良好的拓扑空间  $X$ , 类似球面的情况可以看出  $\pi_{q+n}(\Sigma^n X)$  随着  $n$  的增长最终会稳定：因为  $\Sigma^n X$  的连通度在不断提升，这启发了如下定义：

**定义 1.0.4** (稳定同伦群). 拓扑空间  $X$  的第  $q$  个稳定同伦群定义为  $\pi_q^s(X) = \varinjlim_n \pi_{q+n}(\Sigma^n X)$ 。

另一个值得注意的稳定现象是同调和上同调理论与维悬之间的关系。首先我们有普通的 Eilenberg-Steenrod 同调公理的约化同调版本：

**定义 1.0.5** (广义约化同调理论公理：单空间-nondegenerately based). 一个约化同调理论是一组 nondegenerately based 空间的同伦范畴到 Abel 群的函子  $\tilde{E}_q, q \in \mathbb{N}$ , 满足以下公理。

**正合公理** 对于余纤维化  $i : A \rightarrow X$ , 序列

$$\tilde{E}_q(A) \rightarrow \tilde{E}_q(X) \rightarrow \tilde{E}_q(X/A)$$

是正合的。

**维悬公理** 对于每个  $q$ , 存在自然同构

$$\Sigma : \tilde{E}_q(X) \cong \tilde{E}_{q+1}(\Sigma X)$$

(维悬是约化维悬)



**加性公理** 如果  $X$  是若干 nondegenerately based 空间  $X_i$  的一点并, 那么  $X_i \rightarrow X$  诱导出了同构:

$$\bigoplus_i \tilde{E}_*(X_i) \rightarrow \tilde{E}_*(X)$$

**弱等价公理** 如果  $f: X \rightarrow Y$  是弱等价, 那么它诱导了同构

$$f_*: \tilde{E}_*(X) \rightarrow \tilde{E}_*(Y)$$

当然类似地有上同调版本。

真正引领人们进入稳定同伦论世界的是如下有关 Eilenberg-MacLane 空间的讨论。回忆  $K(\pi, n)$  是满足只有  $n$  阶同伦群非平凡为  $\pi$  的 CW 复形 (或者 of CW Complex Homotopy Type) 它在同伦等价意义下唯一。由于存在同伦等价:  $\tilde{\sigma}: K(\pi, n) \rightarrow \Omega K(\pi, n+1)$  (回忆  $[S^n, \Omega Y] \cong [S^{n+1}, Y]$ , 以及 Milnor 的结果: CW 复形的环路空间也同伦于 CW 复形)。

自然它对应着一个伴随映射  $\sigma: \Sigma K(\pi, n) \rightarrow K(\pi, n+1)$ 。

对于基点空间  $X$ , 现在就有了:

$$\begin{aligned} \pi_{q+n}(X \wedge K(\pi, n)) &\xrightarrow{\Sigma} \pi_{q+n+1}(\Sigma(X \wedge K(\pi, n))) \\ &= \pi_{q+n+1}(X \wedge S^1 \wedge K(\pi, n)) = \pi_{q+n+1}(X \wedge \Sigma K(\pi, n)) \\ &\xrightarrow{(\text{id} \wedge \sigma)_*} \pi_{q+n+1}(X \wedge K(\pi, n+1)) \end{aligned}$$

通过验证 Eilenberg-Steenrod 公理, 并应用广义 (上) 同调理论的唯一性, 我们得到了:

**命题 1.0.6.**

$$\begin{aligned} \tilde{H}_q(X; \pi) &\cong \varinjlim_n \pi_{q+n}(X \wedge K(\pi, n)) \\ \tilde{H}^n(X; \pi) &\cong [X, K(\pi, n)] \end{aligned}$$

这些观察指出研究代数拓扑时也许考虑一系列拓扑空间 (并且这一列拓扑空间之间有着某种和维数相关的联系) 能够给出一些更深层的结果。事实上的确如此, 这些观察催生了序列谱 (Sequential Spectra) 的出现。



## 第二章 古典构造：序列谱

### 2.1 序列谱与广义（上）同调

**定义 2.1.1** (Sequential Prespectrum). Sequential Prespectrum  $E$  是一列基点空间  $E_n$ , 和一系列结构映射:

$$\varepsilon_n : \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$$

或

$$\varepsilon'_n : E_n \rightarrow \Omega E_{n+1}$$

(当然由纬悬环路伴随二者是等价的)

前文指出普通的上同调事实上是一个可表函子, 如下重要的结果和下文对 Spectrum 的讨论指出了 (在一些技术性条件下) 广义 (上) 同调理论事实上等同于 Spectrum 诱导的稳定同伦群/可表函子。

首先是如下关于可表函子的重要结果:

**定理 2.1.2** (Brown 可表定理).  $\mathbf{hTop}_{*, \text{con}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}_*$  的函子  $F$  是可表的当且仅当: 它将余积映为积, 并且它将弱推出 (同伦推出) 映为弱拉回。

注记. 在考虑 CW 复形的时候, 上述第二条性质等价地变为:

(M-V) 对于任何 CW 三元组  $(X; A_1, A_2)$ ,  $A_1 \cup A_2 = X$ , 和任意元素  $x_1 \in F(A_1), x_2 \in F(A_2)$  使得  $x_1|_{A_1 \cap A_2} = x_2|_{A_1 \cap A_2}$ , 存在  $y \in F(X)$ ,  $y|_{A_1} = x_1, y|_{A_2} = x_2$ 。

回忆  $\tilde{H}^n(X; \pi) \cong [X, K(\pi, n)]$ 。并且更一般地 Brown 可表定理指出对于任何广义上同调理论  $K$ , 存在一组 CW 复形  $E_n$  和自然同构:

$$\tilde{K}^n(X) \cong [X, E_n]$$

现在考虑 (约化) 广义上同调理论  $\tilde{K}$  的纬悬同构:

$$\Sigma : \tilde{K}^n(X) \cong \tilde{K}^{n+1}(\Sigma X)$$

回忆纬悬同构由如下给出:

$$\tilde{K}^{q+1}(\Sigma X) \cong \tilde{K}^{q+1}(CX/X) \xleftarrow{\partial} \tilde{K}^q(X)$$

那么如果  $X$  是连通的:

$$[X, E_n] \cong \tilde{K}^n(X) \cong \tilde{K}^{n+1}(\Sigma X) \cong [\Sigma X, E_{n+1}] \cong [X, \Omega_0 E_{n+1}]$$



因此  $E_n, \Omega_0 E_{n+1}$  之间必定存在弱同伦等价诱导出上述自然同构, 从而  $\{E_n\}$  自然成为了 prespectrum。进一步如果不要求  $X$  的连通性, 可以将上述论证中的  $\Omega_0$  换为  $\Omega$ , 因此 (观察如下定义) 对任何广义上同调理论, 我们都找到了一个与之关联的  $\Omega$ -prespectrum。

**定义 2.1.3** ( $\Omega$ -spectra). 称 prespectrum  $E$  是  $\Omega$ -spectrum, 如果结构映射  $\varepsilon'_n : E_n \rightarrow \Omega E'_{n+1}$  是弱同伦等价。

称 prespectrum  $E$  是  $\Omega_0$ -spectrum, 如果结构映射  $\varepsilon'_n : E_n \rightarrow \Omega_0 E'_{n+1}$  是弱同伦等价。

注记. 任给一个 Prespectrum  $E$ , 它有谱化

$$(LE)_n = \varinjlim_k \Omega^k E_{n+k}$$

$\Omega$ -Spectrum 是极其重要的: 我们可以看到它比一般 Prespectrum 性质要更好一些, 但是全体  $\Omega$ -Spectrum 构成的范畴性质并不是很好: 因此引入 Prespectrum 可以看做一种妥协。尽管如此, 这个问题在以后会有更好的解决方案。

处理完广义上同调后再来考虑同调: 对于一个 prespectrum 可以定义同伦群:

**定义 2.1.4** (稳定同伦群).  $\pi_r(E) = \varinjlim \pi_{n+r}(E_n)$ , 这里映射由  $\pi_{n+r}(E_n) \rightarrow \pi_{n+r+1}(\Sigma E_{n+1}) \xrightarrow{\varepsilon_n} \pi_{n+r+1}(E_{n+1})$  诱导。

如果  $E$  是  $\Omega$ -spectrum (或  $\Omega_0$ -), 那么

$$\pi_{n+r}(E_n) \rightarrow \pi_{n+r+1}(E_{n+1})$$

在  $n+r \geq 1$  时是同构, 从而  $\pi_r(E) = \pi_{n+r}(E_n)$ 。这个定义的一个极其重要的动机是稳定同伦群事实上是一个广义同调理论, 利用后文的 Spanier-Whitehead 对偶可以得到: 在一定条件下反过来这也是正确的。实际上任何  $\Omega$ -prespectrum 也反过来诱导了一个广义同调和上同调理论。

现在对于  $\Omega$ -prespectrum  $E$ , 我们记对应的同调和上同调理论为  $E_*, E^*$ 。由于常规同调理论和上同调理论通常用  $H_*, H^*$  表示, 那么遵循上文的约定将 Eilenberg-MacLane 谱 (系数为  $\mathbb{Z}$ ) 为  $H$ , 对于一般的系数  $G$  则记为  $HG$ 。

同样可以定义 prespectrum 的相对同伦群为正常空间的相对同伦的余极限, 首先考虑一些子对象:

**定义 2.1.5** (subprespectrum). 称  $A$  是 prespectrum  $X$  的 subprespectrum, 如果  $A_n \subseteq X_n$ , 结构映射  $\xi_n : \Sigma X_n \rightarrow X_{n+1}$  将  $\Sigma A_n$  映入  $A_{n+1}$ , 那么  $\{A_n\}$  也成为了 prespectrum。(这一事实当然也可以转化到伴随的  $\xi'_n : X_n \rightarrow \Omega X_{n+1}$  上)

现在正常空间的同伦群长正合列作为 direct system 之间的长正合列 (注意交换性!) 诱导了 prespectrum 的稳定同伦群之间的长正合列

$$\cdots \rightarrow \pi_n(A) \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X, A) \rightarrow \pi_{n-1}(A) \rightarrow \cdots$$





## 2.2 Adams 的稳定同伦范畴

### 2.2.1 Adams 的构造

我们现在研究 Prespectrum 构成的范畴，Adams 的最为古典的构造仍然是简单易懂的，因此在接下来的很长一段内容中都默认我们在 Adams 构造的稳定同伦范畴内讨论。

我们构造的这个范畴由 CW-Prespectrum 构成，并且带有分次结构。这样对于一个 CW-Prespectrum  $X$ ，可以定义  $E$ - 上调为：

$$E^0(X) = [X, E]_0$$

即全体态射。进一步：

$$E^r(X) = [X, E]_{-r}$$

即全体使得维数降低  $r$  的态射：具体见后文 CW-prespectrum 范畴的构造。

同样同调将被定义为  $E_r(X) = \pi_r(E \wedge X) = [S, E \wedge X]_r$ ，这里  $S$  是球谱。

一旦引入了这样的记号，prespectrum 的 smash product 变得必要起来了。因为我们依然希望上调上存在某种乘积结构。这可以通过  $\mu : E \wedge F \rightarrow G$  诱导出  $E^n(X) \otimes F^m(X) \rightarrow G^{n+m}(X)$  实现。

上述现象都促使我们定义一个结构相当丰富的范畴，这里我们仍然选择 CW 复形（从模型范畴观点来看“导出”在这一步就已经体现出来了：因为 CW 复形的弱等价就是同伦等价）

**定义 2.2.1** (CW-prespectrum). 称  $E$  是 CW-prespectrum，如果  $E_n$  都是带基点的 CW 复形并且  $\varepsilon_n : \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$  是  $\Sigma E_n$  到  $E_{n+1}$  某个子复形的同构。

**定义 2.2.2** (CW-subprespectrum). 称 CW-prespectrum  $E$  的 subprespectrum  $A$  为 CW-subprespectrum，如果  $A_n \subseteq E_n$  是子复形。

**定义 2.2.3** (cofinal subprespectrum). 称  $E' \subseteq E$  是 cofinal，如果对于任何  $n$  和有限子复形  $K \subseteq E_n$ ，存在  $m$ （可以和  $n, K$  有关）使得  $\Sigma^m K$  在如下映射下射入  $E'_{m+n}$  中。

$$\Sigma^m E_n \rightarrow \Sigma^{m-1} E_{n+1} \rightarrow \cdots \rightarrow E_{m+n}$$

接下来将要定义 function, map 和 morphism，简而言之 function 是和结构映射交换的映射族；map 是稳定的 function；morphism 则是 map 商掉同伦。

两个 CW-prespectrum 之间的  $r$  次 function  $f$  定义为一族映射： $f_n : E_n \rightarrow F_{n-r}$  使得以下图表严格交换（这里严格一词是为了区分在同伦等价意义下交换）

$$\begin{array}{ccc} \Sigma E_n & \xrightarrow{\varepsilon_n} & E_{n+1} \\ \Sigma F_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ \Sigma F_{n-r} & \xrightarrow{\varphi_{n-r}} & F_{n-r+1} \end{array}$$

当然取伴随后的形式是等价的。

注记. 对于 subprespectrum  $E' \subseteq E$ ，单射  $i : E' \rightarrow E$  是良定义的，并且限制映射相当于复合上  $i$ 。



现在我们需要商去一些等价的 function:

**定义 2.2.4** (map). 给定 CW-prespectrum  $E$ , prespectrum  $F$ , 现在考虑所有 cofinal subprespectrum  $E' \subseteq E$ , 以及 function  $f' : E' \rightarrow F$ .

称两个这样的 function:  $f' : E' \rightarrow F, f'' : E'' \rightarrow F$  是等价的, 如果存在一个 cofinal subprespectrum  $E'''$  同时被  $E', E''$  包含, 并且  $f', f''$  到  $E'''$  的限制相同。可以验证这确实是等价关系。

现在称  $E \rightarrow F$  的 map 为 function 的一个等价类。

注记. 这个定义的直觉是: 如果你有  $E_n$  的一个胞腔  $c$ , 并不需要立刻定义出  $c$  上的 map, 而是可以等到  $E_{m+n}$  上定义  $\Sigma^m c$  的 map, 即关心的是在纬悬下稳定的部分。

现在我们关心 map 的复合: 定义方式是在 map 中选出代表 function, 然后考虑 function 的复合即可。简单验证知这是良定义的。同样 map 的限制可以理解为和 inclusion map 的复合。Map 也具有粘结性质:  $U, V$  上的 map 如果在  $U \cap V$  上相同就可以粘结成为  $U \cup V$  上的 map。

**定义 2.2.5** (morphism). CW-prespectrum 范畴中的 morphism 定义为 map 的同伦类。这里同伦的定义是一个柱出发的映射 (如同普通的同伦一样)。我们来详细叙述它:

考虑  $I^+$ , 给定一个 prespectrum  $E$ , 定义柱谱 (Cylinder prespectrum)  $Cyl(E)$  为:

$$(Cyl(E))_n = I^+ \wedge E_n$$

结构映射为:

$$(I^+ \wedge E_n) \wedge S^1 \xrightarrow{1 \wedge \varepsilon_n} I^+ \wedge E_{n+1}$$

容易验证  $Cyl(-)$  具有函子性:  $\text{map } f : E \rightarrow F$  诱导了  $Cyl(f) : Cyl(E) \rightarrow Cyl(F)$ 。同时存在显然的到柱谱两端的自然嵌入:  $i_0, i_1 : E \rightarrow Cyl(E)$ 。

**定义 2.2.6** (homotopy). 称两个 map  $f_0, f_1 : E \rightarrow F$  是同伦的, 如果存在 map  $h : Cyl(E) \rightarrow F$  使得:  $f_0 = hi_0, f_1 = hi_1$ 。

**定义 2.2.7.** 给定  $E$  为 CW-prespectrum,  $F$  为 prespectrum, 记  $[E, F]_r$  为次数  $r$  的 map 的同伦类。

这样我们就定义出来 CW-prespectrum 构成的范畴, 其中态射集具有分次结构。

类似于普通同伦, 我们也可以同样地定义出相对同伦类  $[X, A; Y, B]$ 。

注记. 如同 **CGWH** 那样, 谱之间的态射 (morphism) 再一次可以通过赋予某种“紧开拓扑”完成 **Top-enriched**。具体来说:

赋予  $[X, Y]$  的拓扑是使得任意  $\phi : K \rightarrow [X, Y]$  保持连续的最细拓扑: 这里  $\phi(y) : X \rightarrow Y$  是由  $\tilde{\phi} : X \wedge K \rightarrow Y$  (这里的  $\wedge$  是如同柱谱的定义一样的) 诱导的。

如此定义下乘积-指数伴随依然成立。

**命题 2.2.8.** 如果  $K$  是有限 CW 复形,  $E$  是它的纬悬谱 ( $E_n = \Sigma^n K$ ), 任给一个 prespectrum  $F$ , 有:

$$[E, F]_r = \varinjlim [\Sigma^{n+r} K, F_n]$$

特别地:  $\pi_r(F) = [S, F]_r$  ( $S$  是球谱)



证明. 这是容易直接验证的, 因为正向极限中的等价能够对应着 function 的等价关系, 具体验证见 [Ada95, Chapter 3, Proposition 2.8]。□

### 2.2.2 稳定胞腔, Whitehead 和 HEP 定理

本节的内容简而言之: CW-prespectrum 也能如同 CW 复形那样易于操作。这里我们操作的不再是胞腔, 而是某种稳定胞腔:

**定义 2.2.9.** 称两个胞腔  $c_\alpha \in E_n, c_\beta \in E_m$  是等价的,  $n \leq m$ , 如果  $c_\alpha$  能映入  $c_\beta$ 。将这样的等价类称为稳定胞腔。

**命题 2.2.10.**  $E' \subseteq E$  是 *cofinal CW-subprespectrum* 当且仅当诱导的稳定胞腔之间的映射是双射。

CW 复形的有限性反映到 CW-prespectrum 上变为:

**引理 2.2.11.**  $E$  是 CW-prespectrum,  $G$  是一个非 *cofinal* 的 CW-subprespectrum, 那么存在一个 subprespectrum  $F$  使得  $E \supseteq F \supseteq G$ , 并且  $F$  和  $G$  只相差一个稳定胞腔。

如同 CW 复形一样, 再一次有 HEP 和 Whitehead 定理:

**引理 2.2.12.** 给定 CW-prespectrum pair  $(X, A)$ , 以及 prespectrum pair  $(Y, B)$  使得  $\pi_*(Y, B) = 0$ 。假定有  $\text{map } f: X \rightarrow Y$  和  $f|_A$  到  $g: A \rightarrow B$  的同伦  $h: \text{Cyl}(A) \rightarrow Y$ , 那么这个同伦可以延拓到  $\text{Cyl}(X)$  上称为  $f$  和  $\tilde{g}: X \rightarrow B$  的同伦。

注记. 进一步, 嵌入  $B \rightarrow Y$  可以换为更一般的映射, 只要它诱导了稳定同伦群的同构。

**引理 2.2.13.** 如果 prespectrum  $Y$  满足  $\pi_*(Y) = 0$ ,  $(X, A)$  是 CW-prespectrum pair, 那么  $\text{map } f: A \rightarrow Y$  可以延拓到  $X$  上。

**定理 2.2.14** (Whitehead Theorem For CW-prespectrum).  $f: E \rightarrow F$  是 prespectra 之间的 function, 并且  $f_*: \pi_*(E) \rightarrow \pi_*(F)$  是同构, 那么对于任何 CW-prespectrum  $X$ :

$$f_*: [X, E]_* \rightarrow [X, F]_*$$

是双射。

**推论 2.2.15** (Whitehead Theorem For CW-prespectrum).  $f: E \rightarrow F$  是 CW-prespectra 之间的 *motphism*,  $f_*: \pi_*(E) \rightarrow \pi_*(F)$  是同构, 那么  $f$  是同构态射。

**例子.** 对于 CW-prespectrum  $E, F$ : 如果 function  $f: E \rightarrow F$  是 degree 0 的, 并且  $f_n: E_n \rightarrow F_n$  是同伦等价, 那么  $f$  在 CW-prespectrum 范畴中是同构。

同样我们还有相对版本的 Whitehead 定理。

**定义 2.2.16** (Cone, Suspension). 对于 prespectrum  $X$ ,  $\text{Cone}(X)$  满足每一个分量是  $I \wedge X_n$ , 结构映射是显然的, 并且有显然的嵌入 function  $i: X \rightarrow \text{Cone}(X)$ 。

同样也可以定义 prespectrum 的 Suspension, 记为  $\text{Susp}(X)$ 。



**定理 2.2.17** (Relative Whitehead Theorem).  $f : (E, A) \rightarrow (F, B)$  是两个 *prespectra* 之间的 *function*, 诱导了相对稳定同伦群之间的同构, 那么对于任何 *CW-prespectrum*  $X$

$$f_* : [Cone(X), X; E, A]_* \rightarrow [Cone(X), X; F, B]_*$$

是双射。

**推论 2.2.18.** 对于任何 *prespectrum*  $X, Y$ :  $Susp : [X, Y]_* \rightarrow [Susp(X), Susp(Y)]_*$  是双射。

证明. 只需要证明:  $\pi_*(Cone(Y), Y) \rightarrow \pi_*(Susp(Y), *)$  是同构 (这是很容易验证的, 参见 [Ada95, Chapter 3, Lemma 3.8])。

一旦如此, 那么

$$[X, Y]_* \simeq [Cone(X), X; Cone(Y), Y] \simeq [Cone(X), X; Susp(Y), *] \simeq [Susp(X), Susp(Y)]_*$$

其中第二个双射就是由 Whitehead 定理得到的。□

如同同伦群的群结构那样, 当 Hom-Set 的两个变量中出现了纬悬, 这个 Hom-Set 自然的就拥有了群结构; 同样如果出现了两次纬悬就拥有了 Abel 群结构。这一个推论的重要意义就是指出了稳定同伦范畴具有加性结构。

### 2.2.3 稳定同伦范畴的加性范畴结构

在 Adams 的语境下 *CW-prespectrum* 范畴和 Adams 稳定同伦范畴指代同一范畴。

**命题 2.2.19.** 如同  $\pi_1$  那样,  $[Susp(X), Z]$  自动成为了群。同样地还有  $[Susp^2(X), Z]$  成为了 Abel 群。由于  $[X, Y] \simeq [Susp^2(X), Susp^2(Y)]$ , 那么  $[X, Y]$  可以将  $[Susp^2(X), Susp^2(Y)]$  上的 Abel 群结构拉回, 从而  $[X, Y]$  成为了 Abel 群, 并且态射的复合是双线性的。

**命题 2.2.20.** *CW-prespectrum* 范畴成为了加性范畴。

证明. 零对象为  $E_n = *, \forall n$ 。诸 *prespectra*  $X_\alpha$  的余积为  $X_n = \vee_\alpha (X_\alpha)_n$  给出的, 结构态射显然。并且满足泛性质:

$$[\bigvee_\alpha X_\alpha, Y] \cong \prod_\alpha [X_\alpha, Y]$$

有限双积的存在性见下述讨论: □

如同 CW 复形中那样给定 CW-spectra 之间的  $\text{map } f : X \rightarrow Y$ , 这里依然有  $\text{cofiber } Y \cup_f CX$ 。(注意需要拉回到 function 层面进行考虑), 再一次地有:

**命题 2.2.21** (Cofiber Sequence).

$$[X, Z] \xleftarrow{f^*} [Y, Z] \xleftarrow{i^*} [Y \cup_f CX, Z] \xleftarrow{j^*} [Susp(X), Z] \leftarrow \dots$$

是正合列。

**命题 2.2.22** (Fiber-Cofiber Sequence).

$$[W, X] \xrightarrow{f_*} [W, Y] \xrightarrow{i_*} [W, Y \cup_f CX]$$

是正合列。



证明. 由于  $if \simeq 0$ , 那么  $i_*f_* = 0$ . 现在如果  $g: W \rightarrow Y$  满足  $ig \simeq 0$ , 那么构造图表

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{i} & Y \cup_f CX & \xrightarrow{j} & \text{Susp}(X) \xrightarrow{-\text{Susp}(f)} \text{Susp}(Y) \\ & & \uparrow g & & \uparrow h & & \uparrow k \\ W & \xrightarrow{\text{id}} & W & \xrightarrow{i} & CW & \xrightarrow{j} & \text{Susp}(W) \xrightarrow{-1} \text{Susp}(W) \end{array}$$

这里  $ig \sim 0$  诱导了  $h$ . 那么由  $[X, Y]_* \cong [\text{Susp}(X), \text{Susp}(Y)]$ ,  $k = \text{Susp}(l)$ ,  $\exists l \in [W, X]$ . 于是在图表中即有  $\text{Susp}(fl) \simeq \text{Susp}(g)$ . 再一次利用同构就得到了  $fl \simeq g$ .  $\square$

更进一步地通过对上一结果应用 Yoneda 引理还有:

**推论 2.2.23.** 对于  $f: X \rightarrow Y$  是 *Spectra* 之间的态射, 那么存在同构  $\phi: \text{hofib}(f) \cong \Omega \text{hocol}(f)$ , 使得交换图

$$\begin{array}{ccccc} \Omega Y & \longrightarrow & \text{hofib}(f) & \longrightarrow & X \\ = \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow \simeq \\ \Omega Y & \longrightarrow & \Omega \text{hocol}(f) & \longrightarrow & \Omega \Sigma X \end{array}$$

成立。

注意这和拓扑空间不一样了, 它说明 Cofiber 在这里实际上展现了 Fiber 的性质, 这个结果直接导致了双积的存在。我们将会看到从某种程度上来说这才是稳定现象的本质。

**命题 2.2.24.** *CW-prespectrum* 范畴中有限余积是积。

证明. 由于  $X \rightarrow X \vee Y \rightarrow Y$  是 cofiber:  $(X \vee Y) \cup CX \simeq Y$ . 那么  $[W, X] \rightarrow [W, X \vee Y] \rightarrow [W, Y]$  是正合的: 但是它显然还是分裂的 ( $Y$  当然可以提升进  $X \vee Y$ ), 于是:

$$[W, X \vee Y] \cong [W, X] \oplus [W, Y]$$

这是积的泛性质, 从而  $X \vee Y$  是  $X, Y$  的范畴积.  $\square$

综上: *CW-prespectrum* 范畴确实是加性范畴。

## 2.2.4 稳定同伦范畴的三角范畴结构

**定义 2.2.25** (三角范畴). 一个三角范畴是指一个加性范畴  $D$ , 配备了一个加性自同构函子  $\Sigma: D \rightarrow D$  (记  $X[n] = \Sigma^n X$ ), 且配备了一些好三角 (distinguished triangle), 满足如下条件。

这里一个三角  $(X, Y, Z, u, v, w)$  形如  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ .

我们要求好三角满足:

**TR1.1** 对每个对象  $X$ ,  $X \xrightarrow{\text{id}} X \rightarrow 0 \rightarrow X[1]$  是好三角。

**TR1.2** 对每个态射  $u: X \rightarrow Y$ , 存在一个好三角  $X \xrightarrow{u} Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$  ( $Z$  称为 cone 或 cofiber)

**TR1.3** 每个同构于好三角的三角仍然是好三角

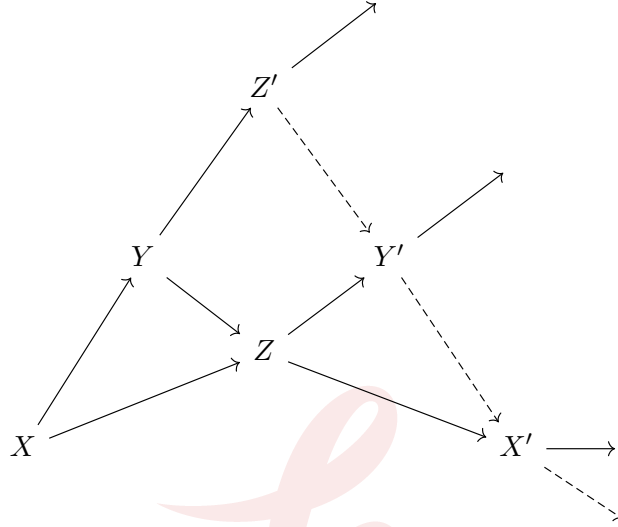
**TR2.** 好三角的旋转仍然是好三角:  $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$  是好三角, 那么  $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ ,  $Z[-1] \xrightarrow{-w[-1]} X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ . 也是好三角。



**TR3.** 给定两个好三角的前两项之间（使得态射交换）的态射，那么可以将第三项处补全使得两个好三角交换：

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow \exists h & & \downarrow f[1] \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & X'[1] \end{array}$$

**TR4.** 给定如下三个好三角，那么存在使得全图交换的态射，使得虚线部分也成为好三角。



(TR4. 的含义事实上是  $(Z/X)/(Y/X) \cong Z/Y$ )

**命题 2.2.26.** 对于  $CW\text{-prespectrum}$  构成的范畴：纬悬  $\Sigma$  函子作为 *shift functor*，以及形如

$$A \xrightarrow{f} B \rightarrow B \cup_f CA \rightarrow \text{Susp}(A)$$

取为好三角使得  $CW\text{-prespectrum}$  范畴成为了三角范畴。

### 2.2.5 稳定同伦范畴的幺半范畴结构

可以构造如下 smash product 在  $CW\text{-prespectrum}$  中的推广：

**定理 2.2.27.**  $- \wedge -$  是一个  $CW\text{-prespectrum}$  到  $CW\text{-prespectrum}$  的分次双函子，并且使得稳定同伦范畴成为 *symmetric monoidal* 范畴（交换子，结合子，左单位子，右单位子都是自然同构，并且两次 *Braiding* 是恒等），其中单位是球谱  $S$ 。

分次双函子的意义是：  $f \in [X, X']_r, g \in [Y, Y']_s \implies f \wedge g \in [X \wedge Y, X' \wedge Y']_{r+s}$ ，以及：

$$(f \wedge g)(h \wedge k) = (-1)^{bc}(fh) \wedge (gk)$$

这里  $f, h, g, k$  的次分别为  $a, b, c, d$ 。

详细构造见 [Ada95, Chapter 3, Section 4]。

进一步，我们构造的 smash product 和三角结构相容很好：

**命题 2.2.28.** 在自然同构意义下，*smash product* 对 *wedge sum* 是分配的。*Smash product* 还保持 *cofibering*。



**推论 2.2.29.** 稳定同伦范畴具有 *tensor-triangulated Category* 结构。

在构造稳定同伦范畴时，smash product 的选择总是一个支离破碎的话题：不同模型的选择都不尽相同，这个问题直到 90 年代才有了初步的解决方案。

### 2.2.6 Spanier-Whitehead 对偶

首先回忆广义版本的 Alexander 对偶： $\widetilde{H}^r(X) \cong \check{H}_{n-r-1}(S^n - X)$ ，其中  $X \subseteq S^n$  是非空真紧子集，记  $\mathcal{C}X = S^n - X$ 。

接下来我们将要指出尽管  $\mathcal{C}X$  的同伦型可能和嵌入有关， $X$  的稳定同伦型却直接决定了  $\mathcal{C}X$  的稳定同伦型。这事实上和 Braided Monoidal 范畴中的 dual object 有关。

**定义 2.2.30.** Monoidal 范畴  $(\mathcal{C}, \otimes, 1)$  中对象  $A$  有右对偶  $A^\vee$ ，如果有：

$$\text{ev}_A : A^\vee \otimes A \rightarrow 1$$

$$\text{coev}_A : 1 \rightarrow A \otimes A^\vee$$

，使得：

$$\begin{array}{ccc}
 A^\vee \otimes (A \otimes A^\vee) & \xleftarrow{\text{id}_{A^\vee} \otimes \text{coev}_A} & A^\vee \otimes 1 \\
 \cong \downarrow \alpha_{A^\vee, A, A^\vee}^{-1} & & \cong \downarrow l_{A^\vee}^{-1} \circ r_{A^\vee} \\
 (A^\vee \otimes A) \otimes A^\vee & \xrightarrow{\text{ev}_A \otimes \text{id}_{A^\vee}} & 1 \otimes A^\vee \\
 & & \\
 (A \otimes A^\vee) \otimes A & \xleftarrow{\text{coev}_A \otimes \text{id}_A} & 1 \otimes A \\
 \cong \downarrow \alpha_{A, A^\vee, A} & & \cong \downarrow r_A^{-1} \circ l_A \\
 A \otimes (A^\vee \otimes A) & \xrightarrow{\text{id}_A \otimes \text{ev}_A} & A \otimes 1
 \end{array}$$

同样地我们可以定义左对偶，特别地在 Symmetric Monoidal 范畴中两者等价。

**命题 2.2.31.** 在 Symmetric Monoidal 范畴中，以下等价：

1.  $A^\vee$  是  $A$  的对偶（这里左右对偶是等价的）
2. 以下映射是同构：

$$\text{Hom}(X, Y \otimes A^\vee) \rightarrow \text{Hom}(X \otimes A, Y \otimes A^\vee \otimes A) \rightarrow \text{Hom}(X \otimes A, Y)$$

**定义 2.2.32** (有限谱). 有限谱是指有限 CW 复形的纬悬谱。

我们现在考虑稳定同伦范畴中的 dualizable 对象  $A$ ，那么：

$$[A, -] \cong [S, - \wedge A^\vee]$$

，后者是  $A^\vee$  诱导的同调理论，从而保持滤余极限。因此  $[A, -]$  也保持滤余极限。现在由 Adams 的稳定同伦范畴中的谱（这里只考虑谱而非 Prespectrum）对象的构造，所有的谱都是若干有



限谱的滤余极限 (设  $A = \varinjlim A_\alpha$ ), 那么  $[A, A] = \varinjlim [A, A_\alpha]$ , 因此  $\text{id}_A \in [A, A]$  一定可以分解为:

$$A \xrightarrow{\exists} A_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} A$$

从而  $A$  一定是一个有限谱的 retract。

然而我们进一步还有  $H_*(-, \mathbb{Z})$  保持 Monoidal 结构, 因此对于 dualizable 对象  $X$ ,  $H_*(X, \mathbb{Z})$  也是  $\mathbf{Ab}$  中的 dualizable object。熟知  $\mathbf{RMod}$  的 dualizable 对象是有限生成投射模,  $\mathbf{Ch}(\mathbf{RMod})$  的 dualizable 对象是有限生成投射模构成的有界链复形, 这就说明对于 dualizable 谱  $A$ ,  $H_*(A, \mathbb{Z})$  只有有限项非平凡, 并且都是有限生成  $\mathbb{Z}$  模。

现在归纳地构造  $Y_j$ , 使得  $Y_j \rightarrow X$  诱导了  $H_m(-, \mathbb{Z})$  的同构 ( $\forall m \leq j$ ), 在有限步后就得到了一个  $Y \rightarrow X$  使得其在  $H_*(-, \mathbb{Z})$  是同构, 并且  $Y$  是有限谱。然而  $X$  是连合的, 因此 Hurewicz 保证这是一个等价, 从而这就说明了可对偶的谱恰好是有限谱。

现在我们记谱  $X$  的对偶为  $X^*$ 。

**引理 2.2.33.** 如果  $X$  是有限谱, 那么  $X^*$  同构于某个有限谱。

证明. 第 2.3 节 □

**定理 2.2.34** (Spanier-Whitehead 对偶). 对于紧空间  $X$ ,  $X$  唯一决定了  $\mathbb{C}X$  的稳定同伦型。(并且也具有和 Alexander 对偶一样的形式: 事实上如果  $X, S^n - X$  都同伦于某些有限  $CW$  复形, 那么  $X^* \cong \Sigma^{-(n-1)}(S^n - X)$ : 这直接导出了 Alexander 对偶)

证明. 对于  $X \subseteq S^n$ , 后者嵌入成为  $S^{n+1}$  的赤道, 并将  $\Sigma X$  按照两端为极点的方式嵌入。(这里  $\Sigma$  是非约化纬悬)

那么  $S^{n+1} - \Sigma X$  和  $S^n - X$  是同伦等价的。因此如果  $X \subseteq S^n, Y \subseteq S^m$  以及同伦等价  $\Sigma^p X \rightarrow \Sigma^q Y$ , 可以将它们嵌入到  $S^{n+p}, S^{m+q}$  当中并不改变一切问题。

因此假定  $X' \subseteq S^{n'}, Y' \subseteq S^{m'}$  以及同伦等价  $f: X' \rightarrow Y'$ 。

现在注意

$$S^{m'+n'+1} - X = \Sigma^{m'+1}(S^{n'} - X)$$

$$S^{m'+n'+1} - Y = \Sigma^{n'+1}(S^{m'} - Y)$$

取  $M$  是  $f'$  的映射柱, 就有:

$$S^{m'+n'+1} - X \xleftarrow{f} S^{m'+n'+1} - M \xrightarrow{g} S^{m'+n'+1} - Y$$

同时:

$$X \longrightarrow M \longleftarrow Y$$

诱导了上同调群的同构, 再由 Alexander 对偶的自然性,  $f, g$  诱导了同调群的同构。现在不断取纬悬使得所有空间都是单连通的, 那么  $f, g$  是稳定同伦等价。 □

更一般地, 我们还有如下性质:

**定理 2.2.35** (Atiyah 对偶). 给定有限维光滑流形  $M$  以及一个嵌入  $M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $Th(NX)$  是这个嵌入的法丛的 Thom 谱, 那么  $Th(NX)$  是  $M_+$  (无交并上一基点) 的纬悬谱的对偶。





## 2.3 同调和上同调

**定义 2.3.1.** 给定 prespectrum  $E$ , 定义 prespectrum  $X$  的  $E$ -同调/上同调如下:

$$E_n(X) = [S, E \wedge X]_n; E^n(X) = [X, E]_{-n}$$

**命题 2.3.2.**  $E_*, E^*$  满足正合公理, 余纤维正合公理 (余纤维三项序列被映为正合列)。以及广义的维数公理:

$$E_n(S) = E^{-n}(S) = \pi_n(E)$$

对任何 Prespectrum  $E$ ,  $E_*$  都成为广义同调理论; 对于任何  $\Omega$ -Prespectrum  $E$ ,  $E_*$  都成为广义上同调理论。

注记. 每个广义同调/上同调理论都可以如此定义: 这是 Brown 可表定理的推论 (回忆第一节), 同调的情况由 S-对偶给出。

注记. 对于 CW 复形  $L$ , 定义  $L$  的  $E$ -同调/上同调为它的纬悬谱的同调/上同调: 这几乎回归到了广义同调/上同调理论 (几乎是因为还有加性公理没有验证)

**命题 2.3.3.**

$$E_n(X) \cong X_n(E)$$

考虑 smash product 的 symmetric 性质即可。

**推论 2.3.4.**  $(H\pi)_n(HG) \cong (HG)_n(H\pi)$ 。

**命题 2.3.5.** 对于有限谱  $X$ :  $E_n(X^*) \cong E^{-n}(X)$ 。

证明.  $[S, E \wedge X^*]_n \cong [X, E]_{-n}$  (??), 于是广义同调/上同调在 S-对偶下表现良好。□

引理 2.2.33. 给定有限谱,  $[S, X^*] \cong [X, S]_n$ , 右侧在  $n$  充分小时为 0, 但是  $H_n(X^*) = H^{-n}(X)$ , 从而  $H_n(X^*)$  充分大的时候消失, 因此  $X^*$  只能同构于某个有限谱。□

### 2.3.1 例子

回忆 Moore Space, 这里我们可以类似的定义出 Moore Prespectrum。再一次取 Abel 群  $G$  的自由消解  $F/R$ 。选取  $\bigvee_{\alpha \in A} S, \bigvee_{\beta \in B} S$  使得它们分别对应着  $R, F$  的生成元。那么

$$M = \left( \bigvee_{\beta \in B} \right) \bigcup_f C \left( \bigvee_{\alpha \in A} S \right)$$

称为  $G$  的 Moore Prespectrum。

它满足:  $\pi_r(M) = 0$  ( $r < 0$ );  $\pi_0(M) = H_0(M) = G$ ;  $H_r(M) = 0$  ( $r > 0$ )。

对于任何 Prespectrum  $E$ , 定义  $G$  系数诱导的 Prespectrum 为  $EG = E \wedge M$ 。

**例子.**  $G$ -Moore Prespectrum 可以对应为  $SG$ : 因为  $S \wedge M = M$ 。



**命题 2.3.6** (Universal Coefficient). 存在正合列:

$$0 \rightarrow \pi_n(E) \otimes G \rightarrow (EG)_n(X) \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\pi_{n-1}(E)) \rightarrow 0$$

更一般地:

$$0 \rightarrow E_n(X) \otimes G \rightarrow (EG)_n(X) \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(E_{n-1}(X), G) \rightarrow 0$$

以及在  $X$  是有限谱或  $G$  有限生成时可以利用前述结果将同调转化为上同调:

$$0 \rightarrow E^n(X) \otimes G \rightarrow (EG)^n(X) \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(E^{n+1}(X), G) \rightarrow 0$$

证明. 考虑  $\bigvee_{\alpha} S \rightarrow \bigvee_{\beta} S \rightarrow M$  这个 cofiber 给出的新 cofiber 序列:

$$E \wedge (\bigvee_{\alpha} S) \wedge X \rightarrow E \wedge (\bigvee_{\beta} S) \wedge X \rightarrow E \wedge M \wedge X$$

即:

$$(\bigvee_{\alpha} E) \wedge X \rightarrow (\bigvee_{\beta} E) \wedge X \rightarrow E \wedge M \wedge X$$

现在考虑  $\pi_n$  作用上得到的长正合列就得到了结果。  $\square$

**例子.** 对于 Eilenberg-MacLane prespectrum  $H$  (of type  $\mathbb{Z}$ ),  $HG$  确实是指  $K(G, -)$  诱导的 prespectrum。这是因为考虑万有系数: 注意  $\mathbb{Z}$  的平坦性即证。

现在总结一下:

1. Eilenberg-MacLane Prespectrum  $HG$ , 对应着  $G$  系数同调/上同调。
2. 分次 Eilenberg-MacLane Prespectrum  $H(G_*) = \bigvee_n H(G_n, n)$ : 那么  $H(G_*)_r(X) = \bigoplus_n H_{r-n}(X; G_n)$ ;  $H(G_*) \oplus_n H^{r+n}(X; G_n)$ 。
3. 球谱  $S$ , 对应着稳定同伦和稳定余同伦。
4.  $KO, KU$ , 对应着实 (复) 向量丛  $K$  理论导出的上同调理论
5.  $MO, MU, MSp$ , Thom 谱, 其稳定同伦群对应着配边环 (复配边环 etc.)

### 2.3.2 广义同调/上同调的性质

三元组相对同调长正合列和 M-V 序列依然存在。前者是对  $(X, Y), (Y, Z), (X, Z)$  的长正合列使用 braid lemma; 后者参见 [Ada95]。

### 2.3.3 广义 (上) 同调的计算: Atiyah-Hirzebruch 谱序列

**定理 2.3.7.** 对于每个  $CW$ -prespectrum  $F$  以及有限  $CW$  复形  $X$ , 存在谱序列:

$$H_p(X; \pi_q(F)) \xrightarrow{p} F_{p+q}(X)$$

$$H^p(X; \pi_q(F)) \xrightarrow{p} F^{p+q}(X)$$

其中左侧是谱序列的第二页。



证明. 首先考虑  $X$  的按照维数给出的子复形滤过:

$$\emptyset = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_n = X$$

对于偶对  $(X_p, X_{p-1})$ : 存在正合三角

$$\begin{array}{ccc} F_*(X_{p-1}) & \xrightarrow{i_*} & F_*(X_p) \\ & \searrow \partial \quad \swarrow j_* & \\ & F_*(X_p, X_{p-1}) & \end{array}$$

现在对  $p$  求直和:

$$\begin{array}{ccc} \oplus_p F_*(X_{p-1}) & \xrightarrow{i_*} & \oplus_p F_*(X_p) \\ & \searrow \partial \quad \swarrow j_* & \\ & \oplus_p F_*(X_p, X_{p-1}) & \end{array}$$

(这里  $p$  的超界指标给出的  $F_*(X_p)$  一律理解为 0)

由于  $\oplus_p F_*(X_{p-1}) = \oplus_p F_*(X_p)$ , 那么这给出了一个谱序列正合三角, 进而给出了一个谱序列。

我们现在来计算这个谱序列的第一页和第二页以及收敛页。

显然地, 第一页是  $F_{p+q}(X_p, X_{p-1})$ : 即

$$\begin{aligned} E_{p,q}^1 &= F_{p+q}(X^p, X^{p-1}) = \tilde{F}_{p+q}(X^p/X^{p-1}) \\ &= \tilde{F}_{p+q}(\bigvee_{\alpha} S^p) = \bigoplus_{\alpha} \pi_q(F) = C_p(X; \pi_q(F)) \end{aligned}$$

最后一项是  $X$  的  $\pi_q(F)$  系数胞腔链群。

现在只需要证明第一页上的微分映射  $d_1 : E_{p,q}^1 \rightarrow E_{p-1,q}^1$  和胞腔链群的边缘映射  $\partial : C_p(X; \pi_q(F)) \rightarrow C_{p-1}(X; \pi_q(F))$  是相同的: 如果这的确成立, 那么  $E_{p,q}^2 \cong H_p(X; \pi_q(F))$ 。

下面来说明这一点: 对于一个  $e \in C_p(X; \pi_q(F))$ ,  $d_1 e = j_* \partial e$ 。

无妨  $e$  是一个生成元: 这样系数  $\pi_q(F)$  不是重要的。即  $e$  代表的是一个胞腔。那么  $e$  在  $E_{p,q}^1$  的同构像  $\tilde{F}_{p+q}(X^p/X^{p-1})$  对应的是  $X^p/X^{p-1}$  中  $e$  代表的胞腔同调类, 那么取  $\partial$  后再取嵌入  $j_*$  确实对应着取边界。

下面讨论收敛性: 这是由 CW 复形  $X$  的有限滤过保证的。

因此这就说明了结果。  $\square$

**推论 2.3.8.** 取  $F = H_{sing}$  (即退化为正常同调/上同调理论),  $X$  为 Serre 纤维化  $F \rightarrow X \rightarrow B$  的全空间。那么  $B$  的  $n$ -骨架给出了一个子复形滤过, 这诱导了全空间  $X$  上的滤过。因此同样的说明能够给出 Leray-Serre 谱序列:

$$E_2^{p,q} = H^p(X; H^q(F)) \implies H^{p+q}(E; R)$$

Atiyah-Hirzebruch 谱序列对无限 CW 复形  $X$  也有推广, 但这需要更多有关谱序列收敛的讨论。

其中需要的是一个和普通上同调平行的结果:



**命题 2.3.9** (余极限上同调: 相对 + 谱版本). 对于诱导了广义上同调理论的 *prespectrum*  $E$  和任意 *Prespectrum*  $X$ , 有正合列

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 E^{q-1}(X_n, A_n) \rightarrow E^q(X, A) \rightarrow \varprojlim^0 E^q(X_n, A_n) \rightarrow 0$$

那么现在考虑无限 CW 复形

$$\emptyset = X_{-1} \subseteq X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X$$

如果 Mittag-Leffler 条件对  $\cdots \rightarrow H^p(X_{n+1}) \rightarrow H^p(X_n) \rightarrow \cdots$  成立, 那么 A-H 谱序列收敛。

利用 Atiyah-Hirzebruch 谱序列, 可以给出唯一性定理的一个更简单的证明:

**推论 2.3.10** (Eilenberg-Steenrod 唯一性定理). 广义同调和上同调理论由维数公理给出的信息唯一决定。即如果广义约化同调/上同调  $M$  作用在  $S^0$  上满足 0 维是  $G$ , 其他维是 0, 那么有自然同构  $M \cong HG$ , 此时:

$$M_*(X) \cong H_*(X; G)$$

证明. 由 Atiyah-Hirzebruch 谱序列, 第二页

$$E_{p,q}^2 = \begin{cases} H_p(X; G) & t = 0 \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

那么谱序列在第二页就收敛了, 从而

$$M_n(X) \cong E_{n,0}^\infty \cong H_n(X; G)$$

上同调情况同理。 □

### 2.3.4 (上) 同调的乘积结构

**定义 2.3.11** (上同调 external product).

$$E^p(X) \otimes F^q(Y) \rightarrow (E \wedge F)^{p+q}(X \wedge Y)$$

如果  $f \in E^p(X) = [X, E]_{-p}, g \in F^q(Y) = [Y, F]_{-q}$ , 那么定义 external product 为:  $f \wedge g \in [X \wedge Y, E \wedge F]_{-p-q} = (E \wedge F)^{p+q}(X \wedge Y)$ 。

将上同调 external product 记为  $\bar{\wedge}$ 。

**定义 2.3.12** (同调 external product).

$$E_p(X) \otimes F_q(Y) \rightarrow (E \wedge F)_{p+q}(X \wedge Y)$$

如果  $f \in E_p(X) = [S, E \wedge X]_p, g \in F_q(Y) = [S, F \wedge Y]_q$ , 那么定义 external product 为:

$$S \xrightarrow{f \wedge g} E \wedge X \wedge F \wedge Y \xrightarrow{1 \wedge c \wedge 1} E \wedge F \wedge X \wedge Y$$

复合映射满足要求, 记为:  $f \triangle g \in (E \wedge F)_{p+q}(X \wedge Y)$ 。



定义 2.3.13 (Slant product 1).

$$E^p(X \wedge Y) \otimes F_q(Y) \rightarrow (E \wedge F)^{p-q}(X)$$

如果  $f \in E^p(X \wedge Y) : X \wedge Y \rightarrow E, g \in F_q(Y) : S \rightarrow F \wedge Y$ 。那么 slant product 定义为:

$$X \xrightarrow{1 \wedge g} X \wedge F \wedge T \xrightarrow{1 \wedge c} X \wedge Y \wedge F \xrightarrow{f \wedge 1} E \wedge F$$

记为  $f/g$ 。

定义 2.3.14 (Slant product 2).

$$E^p(X) \otimes F_q(X \wedge Y) \rightarrow (E \wedge F)_{-p+q}(Y)$$

如果  $f \in E^p(X) : X \rightarrow E, g \in F_q(X \wedge Y) : S \rightarrow F \wedge X \wedge Y$ 。那么 slant product 定义为:

$$S \xrightarrow{g} F \wedge X \wedge Y \xrightarrow{c \wedge 1} X \wedge F \wedge Y \xrightarrow{f \wedge 1 \wedge 1} E \wedge F \wedge Y$$

记为  $f \backslash g$ 。

自然地这给出了 CW 复形的情况以及相对同调的情况。

接下来总假定  $f : X \rightarrow X', g : Y \rightarrow Y'$ :

命题 2.3.15. (i) 如果  $u \in E^*(X'), v \in F^*(Y')$ , 那么

$$(u \bar{\wedge} v)(f \wedge g)^* = (-1)^{|f||v|} u f^* \bar{\wedge} v g^*$$

等价地:

$$(f \wedge g)^*(u \bar{\wedge} v) = (-1)^{|g||u|} (f^* u) \bar{\wedge} (g^* v).$$

(ii) 如果  $u \in E_*(X), v \in F_*(Y)$ , 那么

$$(f \wedge g)_*(u \triangle v) = (-1)^{|g||u|} (f_* u) \triangle (g_* v).$$

(iii) 如果  $u \in E^*(X' \wedge Y'), v \in F_*(Y)$ , 那么

$$(u(f \wedge g)^*)/v = (-1)^{|f|(|g|+|v|)} (u/g_* v) f^*$$

等价地:

$$((f \wedge g)^* u)/v = (-1)^{|g||u|} f^*(u/g_* v).$$

(iv) 如果  $u \in E^*(X'), v \in F_*(X \wedge Y)$ , 那么

$$u \backslash (f \wedge v)_* v = (-1)^{|g|(|u|+|f|)} g_*((u f^*) \backslash v)$$

等价地

$$u \backslash (f \wedge g)_* v = (-1)^{|g||u|+|g||f|+|f||u|} g_*((f^* u) \backslash v).$$



(v) 对于  $E$  和  $F$  上的态射, 有如下自然性: 给定  $e: E \rightarrow E', f: F \rightarrow F'$ , 那么

$$(e \wedge f)_*(u \frown v) = (-1)^{|f||u|}(e_*u) \frown (f_*v),$$

其中空格处可以填上四个乘积的任何一个。

**命题 2.3.16.** 所有乘积都是双线性的。

交换性:

**命题 2.3.17.** (i) 如果  $u \in E^p(X), v \in F^q(Y)$ , 那么

$$v \bar{\wedge} u = (-1)^{pq} c_* c^*(u \bar{\wedge} v).$$

(ii) 如果  $u \in E_p(X), v \in F_q(Y)$ , 那么

$$v \triangle u = (-1)^{pq} (c \wedge c)_*(u \triangle v).$$

结合性:

**定理 2.3.18.** (i) 如果  $x \in E^p(X), y \in F^q(Y), z \in G^r(Z)$ , 那么:

$$(x \bar{\wedge} y) \bar{\wedge} z = x \bar{\wedge} (y \bar{\wedge} z) \in (E \wedge F \wedge G)^{p+q+r}(X \wedge Y \wedge Z).$$

(ii) 如果  $x \in E^p(X), u \in F^q(Y \wedge Z), z \in G_r(Z)$ , 那么:

$$x \bar{\wedge} (u/z) = (x \bar{\wedge} u)/z \in (E \wedge F \wedge G)^{p+q-r}(X \wedge Y).$$

(iii) 如果  $v \in E^p(X \wedge Z), y \in F^q(Y), u \in G_r(Y \wedge Z)$ , 那么:

$$v/(y \setminus u) = [(1 \wedge c)^*(v \bar{\wedge} y)]/u \in (E \wedge F \wedge G)^{p+q-r}(X).$$

(iv) 如果  $t \in E^p(X \wedge Y \wedge Z), z \in F_q(Z), y \in G_r(Y)$ , 那么:

$$(t/z)/y = t/(c_*(z \triangle y)) \in (E \wedge F \wedge G)^{p-q-r}(X).$$

(v) 如果  $y \in E^p(Y), x \in F^q(X), t \in G_r(X \wedge Y \wedge Z)$ , 那么:

$$y \setminus (x \setminus t) = (c^*(y \bar{\wedge} x)) \setminus t \in (E \wedge F \wedge G)_{-p-q+r}(Z).$$

(vi) 如果  $w \in E^p(X \wedge Y), y \in F_q(Y), v \in G_r(X \wedge Z)$ , 那么:

$$(w/y) \setminus v = w \setminus [(c \wedge 1)_*(y \triangle v)] \in (E \wedge F \wedge G)_{-p+q+r}(Z).$$

(vii) 如果  $x \in E^p(X), w \in F_q(X \wedge Y), z \in G_r(Z)$ , 那么:

$$(x \setminus w) \triangle z = x \setminus (x \triangle z) \in (E \wedge F \wedge G)_{-p+q+r}(Y \wedge Z).$$

(viii) 如果  $x \in E_p(X), y \in F_q(Y), z \in G_r(Z)$ , 那么:

$$(x \triangle y) \triangle z = x \triangle (y \triangle z) \in (E \wedge F \wedge G)_{p+q+r}(X \wedge Y \wedge Z).$$

现在我们考虑 Internal product: 将 external product/slant product 和对角函子  $\Delta$  复合即可 (回忆杯积和卡积)。上述讨论保证了 internal product 具有这样的良好性质。

注记. 这样定义出的 internal product 仍然会使得谱具有 smash product 的结构。为什么它是普通上同调结构的类比呢? 这是因为 Eilenberg-MacLane 谱自身具有某种乘积结构, 使得  $E \wedge E \approx E$ : 这就是接下来要定义的环境。



### 2.3.5 谱的 Poincare 对偶

回忆流形上的 Poincare 对偶：对于某个环  $R$ ，如果  $M$  是  $R$ -可定向的，那么对于任何  $R$ -模  $\pi$ ， $\pi$  系数的同调和上同调之间存在着对偶关系。我们通过所谓环谱和模谱将这件事予以推广。

**定义 2.3.19** (环谱, 模谱). 环谱是 CW-prespectrum 范畴中的环对象：即  $(E, \mu, \eta)$  使得  $\mu : E \wedge E \rightarrow E, \eta : S \rightarrow E$  是次数为零的 map (即同伦映射需要区分)，并且在 CW-prespectrum 范畴中有交换图：

$$\begin{array}{ccc} E \wedge E \wedge E & \xrightarrow{\mu \wedge 1} & E \wedge E \\ \downarrow 1 \wedge \mu & & \downarrow \mu \\ E \wedge E & \xrightarrow{\mu} & E \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S \wedge E & \xrightarrow{\eta \wedge 1} & E \wedge E \\ \downarrow & & \downarrow \mu \\ E & \xrightarrow{1} & E \\ \uparrow & & \uparrow \mu \\ E \wedge S & \xrightarrow{1 \wedge \eta} & E \wedge E \end{array}$$

模谱同样是模对象：称  $F$  是环谱  $E$  上的模，如果它有零次 map  $\nu : E \wedge F \rightarrow F$ ，满足交换图：

$$\begin{array}{ccc} E \wedge E \wedge F & \xrightarrow{\mu \wedge 1} & E \wedge F \\ \downarrow 1 \wedge \nu & & \downarrow \nu \\ E \wedge F & \xrightarrow{\nu} & F \end{array} \quad \begin{array}{ccc} S \wedge F & \xrightarrow{\eta \wedge 1} & E \wedge E \\ \downarrow \cong & & \downarrow \nu \\ F & \xrightarrow{1} & F \end{array}$$

称环谱  $E$  是交换的，如果乘积映射  $\mu$  在交换子  $c$  作用下不变。

**定义 2.3.20.** 对于 (可带边, 可非紧) 流形  $M$  的紧子空间偶对  $K, L$ ：取开集偶对  $(U, V)$  使得  $U \supseteq K, V \supseteq L$ ：构成了 directed set。

那么定义

$$\check{E}^*(K, L) = \varinjlim_{(U, V)} E^*(U, V)$$

**命题 2.3.21.**

$$\check{E}^*(M) \cong E^*(M), \check{E}^*(x) \cong E^*(x)$$

$$\check{E}^*(M, \partial M) \cong E^*(M, \partial M)$$

对于紧集  $U, V \subseteq M$ ：

$$\check{E}^*(U \cup V, V) \cong \check{E}^*(U, U \cup V)$$

$\{K_\alpha\}, \{L_\alpha\}$  是一列下降紧集,  $K, L$  是交, 那么：

$$\varinjlim_{\alpha} \check{E}^*(K_\alpha, L_\alpha) \cong \check{E}^*(K, L)$$

现在考虑环谱的定向问题：

给定环谱  $F$ ,  $F_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) = \tilde{F}^*(S^n)$  是一个生成元的  $\pi_*(F)$ -模。

**定义 2.3.22.** 称  $\varphi \in F^*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$  是生成元，如果  $\{\varphi\}$  构成一个  $\pi_*(F)$ -基。注意这里  $\phi$  并不一定是  $F^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0)$  中的元素。



**命题 2.3.23.** 对于任何环谱  $F$  上的模谱  $G$ :

$$G_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0) \rightarrow \pi_*(G) : y \mapsto \langle \varphi, y \rangle$$

是同构。

**定义 2.3.24.** 对于纤维丛  $E \rightarrow B$ ,  $E^0$  是零截面的补,  $E_x$  是  $x$  处的纤维。称  $\omega \in F^*(E, E^0)$  是  $E$  的定向: 如果  $\forall x \in B$ ,  $\omega$  在  $F^*(E_x, E_x^0)$  中的像是生成元。

对于一般的拓扑流形我们需要一些光滑向量丛 (尤其是切丛) 的替代物: 将  $E$  替换为  $M \times M$ ,  $E^0$  替换为  $M \times M - \Delta$ ,  $p$  替换为第一个分量上的投影, 那么这样也可以给出一个拓扑流形切丛的定向: 即  $\omega \in F^*(M \times M, M \times M - \Delta)$  满足在  $F^*(x \times M, x \times M - x \times x)$  是生成元。

**定理 2.3.25.** 在这样的约定下, 流形的 Poincare 对偶和相对 Poincare 对偶可以推广到谱的版本。

## 2.4 Steenrod 代数

我们首先指出 Hurewicz 同态的另一种构造:

**命题 2.4.1.** Hurewicz 同态是  $S \rightarrow H$  的谱态射诱导的。

注记. 尽管如此, Prespectrum 的信息严格多于同调: 这是 Spectral Phantom Map 导致的。

回忆 Yoneda 引理, 不同上同调之间的“自然”函子变换是由上同调本身诱导的: 具体来说

**定义 2.4.2** (上同调运算). 给定上同调理论  $\tilde{E}, \tilde{F}$  (约化), 一个  $(q, n)$ - 上同调运算是一个自然变换  $E^q(-), F^{q+n}(-)$ 。一个  $n$  次稳定上同调运算是一系列  $(q, n)$  运算, 并满足在韦悬同态过渡下交换。

**定理 2.4.3.**  $\tilde{H}^q(-; \pi) \rightarrow \tilde{H}^{q+n}(-; \rho)$  的全体上同调运算和  $\tilde{H}^{q+n}(K(\pi, q); \rho)$  自然同构。

证明. Yoneda 引理。 □

在一般的谱的 Prespectrum 的情况当然也有类似的情况: 对于每个  $E^*(E)$  的元素, 存在一个对应的自然变换  $E^*(-) \rightarrow E^*(-)$ : 这里函子是作用在 prespectra 上的, 自然变换由如下给出:

给定  $f: X \rightarrow E, g: E \rightarrow E$ , 将之变为  $gf: X \rightarrow E$ 。注意这里  $g$  的次数对应着上同调运算的次数。并且同样这样的自然变换和  $E^*(E)$  中的元素一一对应, 很明显这里是上文稳定上同调运算的推广。

$E^*(E)$  是群, 其上的计算对应着  $[X, E]$  中的加法运算; 然而  $E^*(E)$  还能进一步还是一个环: 乘法对应着运算的复合。

现在我们考虑  $E = H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  的情况。

**定义 2.4.4** (Steenrod 代数).  $A^* = (H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*(H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  称为  $\text{mod } p$  Steenrod 代数: 它同时是全体  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  系数普通上同调的全体稳定上同调运算构成的代数。





### 2.4.1 构造

首先给出的是公理化的 Steenrod 运算定义：

**定义 2.4.5** ( $\mathcal{A}(2)$ ). 存在稳定上同调运算

$$Sq^i : H^n(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^{n+i}(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

满足：

- i)  $Sq^0 = \text{id}$
- ii)  $\deg x = n$  时  $Sq^n x = x \cup x$
- iii)  $i > \deg x$  时  $Sq^i x = 0$
- iv) Cartan 公式

$$Sq^k(xy) = \sum_{i=0}^k Sq^i x \cdot Sq^{k-i} y$$

它们能够推出以下两个性质：

**命题 2.4.6.**  $Sq^1$  是 Bockstein 运算：系数  $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  诱导的边缘同态  $H^q(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^{q+1}(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 。

Adem Relation:

$$Sq^i Sq^j = \sum_{0 \leq k \leq [i/2]} \binom{j-k-1}{i-2k} Sq^{i+j-k} Sq^k$$

注记. 系数短正合列诱导的同调群长正合列可以用层上同调理解，也可以利用胞腔复形的正合列诱导长正合列给出。

同样有  $\text{mod } p$  的情况：

**定义 2.4.7** ( $\mathcal{A}(p)$ ). 令  $\beta$  是 Bockstein 运算：系数  $0 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 0$  诱导的边缘同态  $H^q(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow H^{q+1}(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 。

存在稳定上同调运算

$$P^i : H^q(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow H^{q+2i(p-1)}(X; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

满足：

- i)  $P^0 = \text{id}$
- ii) 如果  $\deg x = 2k$ ，那么  $P^k x = x^p$ 。
- iii) 如果  $2k > \deg x$ ，那么  $P^k x = 0$ 。
- iv) Cartan 公式

$$P^k(xy) = \sum_{i=0}^k P^i x \cdot P^{k-i} y$$

它们能够推出以下性质

**命题 2.4.8.** Adem Relation:



如果  $a < pb$ , 那么

$$P^a P^b = \sum_{t=0}^{[a/p]} (-1)^{a+t} \binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt} P^{a+b-t} P^t$$

如果  $a \leq b$ , 那么

$$P^a \beta P^b = \sum_{t=0}^{[a/p]} (-1)^{a+t} \binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt} \beta P^{a+b-t} P^t + \sum_{t=0}^{[(a-1)/p]} (-1)^{a+t-1} \binom{(p-1)(b-t)-1}{a-pt-1} P^{a+b-t} \beta P^t$$

注意  $Sq^{2k}$  正是一般的  $P^k$  在  $p=2$  时的情况, 下面来构造这样的  $P^i$ 。

**命题 2.4.9.** 作为  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  代数, *Reduced Power* 和 *Bockstein Operator* 生成了 *Steenrod* 代数  $\mathcal{A}(p)$ 。

我们指出  $A^* = \mathcal{A}(p) = (H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*(H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$  的代数结构是很丰富的。考虑对偶  $A_* = (H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_*(H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ , 环谱的结构给出了  $\mu: H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \wedge H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , 从而诱导了

$$A_* \otimes A_* \rightarrow A_*$$

因此这给出了  $A^*$  上的余乘结构, 首先来看  $\text{mod } 2$  的情况: 它作用到  $Sq^k$  上为  $\sum Sq^i \otimes Sq^{k-i}$ 。

这说明了:

**定理 2.4.10.**  $\mathcal{A}(2)$  是 *Hopf* 代数, 乘法是正常乘法, 余乘法由上文给出。

在介绍 Adams 谱序列时我们将会对此有进一步的论述。

## 2.4.2 计算实例, Steenrod 代数

### $\text{mod } 2$ 计算, Hopf Invariant

**引理 2.4.11.**  $Sq^i$  是可约的, 如果  $i$  不是 2 的幂。

证明. Adams Relation. □

**推论 2.4.12.** 作为代数,  $Sq^{2^k}$  生成了  $\mathcal{A}(2)$ 。

**定理 2.4.13.** 如果  $X$  满足  $x^2 \neq 0, x \in H^q(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ , 那么  $\exists i, 0 < 2^i \leq q$ , 使得  $Sq^{2^i} x \neq 0$ 。

证明.  $0 \neq x^2 = Sq^q x = \Sigma(\text{some } Sq^{2^j})x, 2^j \leq q$ . 那么结论自明. □

**命题 2.4.14.** 如果  $H^*(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  是截断多项式代数, 生成元  $x$  满足  $\deg x = q$ , 并且  $x^2 \neq 0$ , 那么  $q = 2^k$ 。

证明. 由于  $H^{q+2^i}(X) = 0, 0 < 2^i < q$ . 因此对于这样的  $i, Sq^{2^i} x = 0$ . 然而存在  $k, 0 < 2k \leq q$  使得  $Sq^{2^k} x \neq 0$ . 因此只能有  $q = 2^k$ . □

**定理 2.4.15.** 对于紧定向连通  $2n$ -流形  $M, H^q(M) = 0, 1 \leq q < n, H^n(M) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , 那么  $n$  是 2 的幂。

证明.

$$H^{2n-q}(M) = H_q(M) \xrightarrow{\text{Universal Coefficient}} H^q(M) = 0, 1 \leq q < n$$

于是取  $u$  为  $H^n(M)$  的生成元, 它满足了上一命题的条件, 这就说明了结果.  $\square$

**定义 2.4.16** (Hopf Invariant). 对于  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ , 它的同伦余纤维  $Cf = D^{2n} \cup_{S^{2n-1}} S^n$ .  $Cf$  的上同调满足:

$$H^k(Cf, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = n, 2n \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(观察胞腔链群即可)

现在取  $\alpha_n, \beta_{2n}$  分别为  $n, 2n$  次上同调的生成元, 那么  $\alpha_n \cup \alpha_n = HI(f) \cdot \beta_{2n}$ .

$HI(f)$  在相差符号的意义下唯一决定, 称为 Hopf invariant. 进一步如果系数是  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  的时候符号没有影响. 此时它就变成了 Steenrod Square:

$$[HI(f)] \cdot (-) : \mathbb{F}_2 \cong H^n(Cf; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{2n}(Cf; \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2$$

**定理 2.4.17.** 如果  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  Hopf Invariant 是 1, 那么  $[f] \in \pi_{n-1}^s$  非平凡, 即  $\Sigma^k f : S^{2n+k-1} \rightarrow S^{n+k}$  不是零伦的。

证明. 如果  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$ , 那么  $Sq^n : H^n(Cf; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^{2n}(Cf; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  不是平凡的. 由于  $Sq$  是稳定上同调运算, 从而如果  $\Sigma^k f$  是零伦的, 观察  $S^{n+k}$  和  $\Sigma^k Cf$  之间的 retract 就得到了矛盾.  $\square$

**定理 2.4.18.** 如果  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  的 Hopf Invariant 是奇数, 那么  $n$  是 2 的幂。

证明. 取系数变换诱导的上同调群之间的映射:  $\eta : H^*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . 那么:

$$(\eta(\alpha_n))^2 = \eta\beta$$

由于  $h(f) \equiv 1 \pmod{2}$ , 由命题 2.4.14,  $n$  是 2 的幂.  $\square$

**定理 2.4.19** (Hopf). 如果  $n$  是偶数, 对于任何偶数  $k$ , 都存在  $f : S^{2n-1} \rightarrow S^n$  使得其 Hopf Invariant 是  $k$ .

证明. 假定  $S_1, S_2, S$  是三个  $(n-1)$ -球面, 称  $f : S_1 \times S_2 \rightarrow S$  有双次  $(\alpha, \beta)$ , 如果将  $f$  限制到两个分量上分别有次数  $\alpha, \beta$ , 注意这和基点选取无关。

现在取  $E_1, E_2$  使得  $S_i = \partial E_i, i = 1, 2$ , 那么  $\partial(E_1 \times E_2) = (E_1 \times S_2) \cup (S_1 \times E_2)$  是  $(2n-1)$ -球面并且  $(E_1 \times S_2) \cap (S_1 \times E_2) = S_1 \times S_2$ .

取  $S' = \Sigma S = E_+ \cup E_-$  (Non Reduced Suspension), 其中  $E_+, E_-$  都是  $n$ -胞腔。

现在任何  $f : S_1 \times S_2 \rightarrow S$  能够延拓成为

$$C(f) : (E_1 \times S_2) \cup (S_1 \times E_2) \rightarrow E_+ \cup E_- = S'$$

满足  $C(f)(E_1 \times S_2) \subseteq E_+, C(f)(S_1 \times E_2) \subseteq E_-$ , 这样  $C(f)$  给出了  $S^{2n-1} \rightarrow S^n$ .

•  $C(f)$  诱导的  $S^{2n-1} \rightarrow S^n$  的 Hopf Invariant 为  $\alpha\beta$ : 这是通过直接计算证明的。

- 如果  $n$  是偶数, 存在  $f : S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  具有双次  $(2, -1)$ 。

这是由如下给出的:  $f(x, y) = y - (2 \sum_{i=1}^n x_i y_i) x$ , 它确实具有双次  $(2, -1)$ 。

现在任给  $f_1 : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ , 次数  $\lambda$ ,  $f_2 : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ , 次数  $\mu$ , 那么  $g = f \circ (f_1 \times f_2)$  具有双次  $(2\lambda, -\mu)$ , 因此这就给出了 Hopf Invariant 为  $-2\lambda\mu$ 。  $\square$

注记. 这个结果证明中的第一部分构造称为 Whitehead Product。具体来说如下:  $[-, -]_{Wh} : \pi_{n_1}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \pi_{n_2}(X) \longrightarrow \pi_{n_1+n_2-1}(X)$  for all  $n_i \in \mathbb{N}; n_i \geq 1$ , 给定两个映射同伦类

$$[S^{n_i} \xrightarrow{\phi_i} X] \in \pi_{n_i}(X)$$

定义其 Whitehead Product 为下述推出图表的的第一行的复合。

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{n_1+n_2-1} & \xrightarrow{f_{n_1, n_2}} & S^{n_1} \vee S^{n_2} & \xrightarrow{(\phi_1, \phi_2)} & X \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 D^{n_1+n_2} & \xrightarrow{\quad} & S^{n_1} \times S^{n_2} & & 
 \end{array}
 \quad (po)$$

注记. 如果要是存在有限维  $\mathbb{R}$ -可除代数,  $n > 1$ 。那么此时有乘积映射  $m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  以及一个双边单位。

现在令  $S^{n-1}$  是经过这个双边单位的以原点为圆心的球面, 那么有:

$$S^{n-1} \times S^{n-1} \xrightarrow{m} \mathbb{R}^n - \{0\} \xrightarrow{pr.} S^{n-1}$$

由于它包含着单位, 这是一个双次为  $(1, 1)$  的映射, 从而我们得到了一个 Hopf Invariant One 映射。这个结果揭露了几个 Hopf Invariant One 相关的问题之间的联系, 它们列举如下。

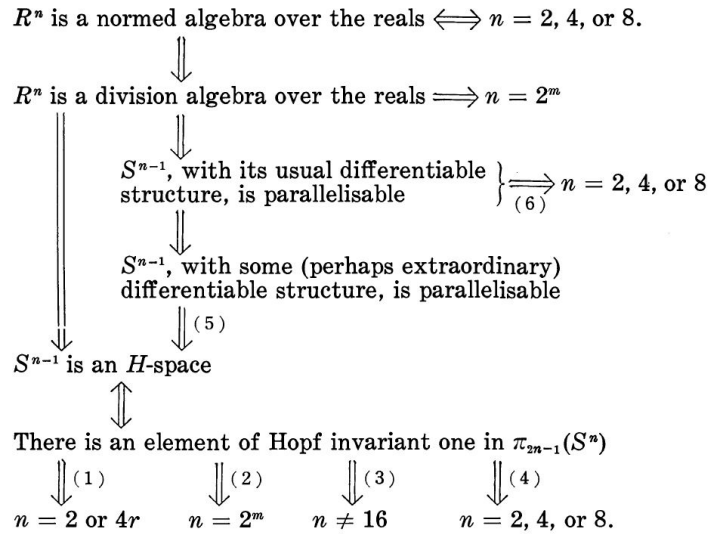


图 2.1: Hopf Invariant One Proof Flow



### 2.4.3 Hopf Invariant One Problem

Hopf Invariant One Problem 最终被证明是在 K 理论下由简单计算直接导出 (尽管这个计算是富有技巧性的)。首先我们用 K 理论重述 Hopf Invariant One 的定义。

对于  $f: S^{2n-1} \rightarrow S^{2n}$ , 我们考虑 (约化) K 理论  $\tilde{K}^*$  (这里使用复 K 理论, 即  $KU$  代表的上同调理论)。有如下结果:

**定理 2.4.20.** 1.  $KU$  是 2-周期的。(Bott 周期律)

2. 作为 Abel 群,  $\tilde{K}^0(S^{2n}) = \mathbb{Z}, \tilde{K}^0(S^{2n+1}) = 0$ 。

3. 作为环,  $\tilde{K}^0(S^0) \cong \mathbb{Z}$ ; 对于  $n > 0$ ,  $\tilde{K}^0(S^n)$  上的乘法是平凡的 (任何两个元素的积是零)。

现在有长正合列:

$$\tilde{K}^{-1}(S^n) \rightarrow \tilde{K}^{-1}(S^{2n-1}) \rightarrow \tilde{K}^0(Cf) \rightarrow \tilde{K}^0(S^n) \rightarrow \tilde{K}^0(S^{2n-1}) = 0$$

由于  $\tilde{K}^{-1}(S^{2n-1}) = \tilde{K}^0(S^{2n}) = \mathbb{Z}$ , 假设 1 在  $\tilde{K}^0(Cf)$  中的像是  $\alpha$ 。如果  $\beta \in \tilde{K}^0(Cf)$  的像是  $\tilde{K}^0(S^n)$  的生成元, 那么  $\beta^2$  的像是 0 (因为  $\tilde{K}^0(S^n)$  的乘法平凡), 从而  $\beta^2 = h\alpha, \exists h \in \mathbb{Z}$ 。容易验证这个  $h$  是良定义的, 我们定义它为  $f$  的 Hopf Invariant  $HI(f)$ : 利用 K 理论到上同调的变换容易验证这和前文定义的 Hopf Invariant 相同。

我们定义 Adams 运算:

**定义 2.4.21** (Adams 运算). 定义  $\psi^k: K^0(X) \rightarrow K^0(X): E \mapsto s_k(\wedge^1(E), \wedge^2(E), \dots, \wedge^n(E))$ , 其中  $s_k$  是满足  $s_k(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = x_1^k + \dots + x_n^k$  的多项式。

它满足如下性质:

1.  $\psi^k$  在  $\tilde{K}^0(S^{2n})$  上的作用是乘以  $k^n$
2.  $\psi^k \psi^l = \psi^l \psi^k$
3. 对于素数  $p$ ,  $\psi^p(\alpha) \equiv \alpha^p \pmod{p}$ 。

现在我们来考虑 Hopf Invariant One Problem, 如果  $n$  是奇数, 那么  $\tilde{K}^0(S^n) = 0$ , 从而  $\beta$  的像是 0, 于是  $\beta = m\alpha, \exists m \in \mathbb{Z}$ , 于是  $\beta^2 = m^2\alpha^2 = 0$ , 从而 Hopf Invariant 是零。

如果  $n$  是偶数, 假定  $n = 2m$ 。我们保持前文中  $\alpha, \beta$  的定义, 那么

$$\psi^k(\alpha) = k^{2m}\alpha$$

$$\psi^k(\beta) = k^m\beta + \mu_k\alpha, \exists \mu_k$$

于是

$$\psi^l \psi^k(\beta) = \psi^l(k^m\beta + \mu_k\alpha) = k^m l^m + (k^m \mu_l + l^{2m} \mu_k)\alpha$$

于是由  $\psi^l \psi^k = \psi^k \psi^l$ , 那么就有

$$(k^{2m} - k^m)\mu_l = (l^{2m} - l^m)\mu_k$$

现在取  $k = 3, l = 2$ , 由前文性质

$$\mu_2\alpha \equiv \psi^2(\beta) \equiv \beta^2 = h\alpha = \alpha \pmod{2}$$

因此  $\mu_2$  是奇数, 从而  $2^m | 3^m - 1$ 。

由初等数论结果只有  $m = 1, 2, 4$ , 经验证这确实满足要求。



## 2.5 Adams 谱序列

注记. 到此为止, 我们需要对前文定义的 CW-Prespectrum 范畴进行一个小小的评注。这个范畴 (态射是同伦类) 是一个得到稳定同伦范畴的方式, 但是在各式各样的参考资料中可能会出现对 Prespectrum/Spectrum 的定义的轻微修改, 并且类似地定义出一个同伦范畴。就结果来看, 最终得到的同伦范畴都是一样的, 它被称为稳定同伦范畴, 记为  $\mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$ 。因此接下来我们不会再使用 CW-Prespectrum 的叙述, 而是统一使用  $\mathbf{Spectra}, \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$ , 因为它们是为合适的记号。同时 CW-prespectrum 的名称将被 Spectrum 代替。

这里有一个小小的记号问题:  $\mathbf{Ho}$  作为取同伦范畴天然地需要一个模型结构 (见第 2.7 节), 但是我们实际上还没有引入这样的概念。然而回忆 Adams 构造中对 CW-Prespectrum 的同伦的定义: Adams 的精巧构造实际上绕过了 Bifibrant 对象的困难。

Adams 的构造和后来的序列谱赋予模型范畴后取同伦的构造是等价的这件事实际上是有些惊奇的: 因为前者对象多于后者 (后者对象只有  $\Omega$ -谱), 但是前者态射少于后者 (Adams 构造中态射需要经过稳定化: Function 和 Map 的区别), Adams 的这一开山式的工作实在是令人印象深刻。

### 2.5.1 E-Adams 滤过

定义 2.5.1 (滤谱的诱导谱序列). 给定一个 spectrum 的滤过

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & Y_3 & \xrightarrow{f_2} & Y_2 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 & \xrightarrow{f_0} & Y \\ & & \downarrow g_3 & & \downarrow g_2 & & \downarrow g_1 & & \downarrow g_0 \\ & & A_3 & & A_2 & & A_1 & & A_0 \end{array}$$

以及另外一个 Spectrum  $X \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$ 。

那么这诱导了一个正合偶:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{i} & \mathcal{D} \\ k \swarrow & & \downarrow j \\ & & \mathcal{E} \end{array} := \begin{array}{ccc} \oplus_{s,t} D^{s,t}(X, Y) & \xrightarrow{[X,f]} & \oplus_{s,t} D^{s,t}(X, Y) \\ [X,h] \swarrow & & \downarrow [X,g] \\ & & \oplus_{s,t} E^{s,t}(X, Y) \end{array} := \begin{array}{ccc} \oplus_{s,t} [X, Y_s]_{t-s} & \xrightarrow{[X,f]} & \oplus_{s,t} [X, Y_s]_{t-s} \\ [X,h] \swarrow & & \downarrow [X,g] \\ & & [X, A_s]_{t-s} \end{array}$$

进而诱导了一个谱序列。

注记. 值得注意的是, 这是一个相当一般的构造。许多熟悉的谱序列可以通过在这里选取适当的滤过得到: 利用 Atiyah-Hizebruch 谱序列可以通过对谱取 Postnikov filtration 得到。(这和我们证明 A-H 谱序列时考虑另外一个变量  $X$  的骨架的思路不同)



**定义 2.5.2** (E-Adams 谱序列). 给定交换环谱  $(E, \mu, e)$ , 谱  $X, Y$ . 考虑谱的滤过

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 f_0 \downarrow \\
 Y_3 \xrightarrow{g_3} E \wedge Y_3 = A_3 \\
 f_0 \downarrow \\
 Y_2 \xrightarrow{g_2} E \wedge Y_2 = A_2, \\
 f_0 \downarrow \\
 Y_1 \xrightarrow{g_1} E \wedge Y_1 = A_1 \\
 f_0 \downarrow \\
 Y = Y_0 \xrightarrow{g_0} E \wedge Y_0 = A_0
 \end{array}$$

这里每个  $Y_{n+1} \rightarrow Y_n \rightarrow A_n$  都是 fiber sequence, 并且

$$g_n : Y_n \cong S \wedge Y_n \xrightarrow{e \wedge \text{id}} E \wedge Y_n$$

这就诱导了一个谱序列, 其第一页是

$$E_1^{s,t}(X, Y) := [X, A_s]_{t-s}$$

$$d_1 = [X, g \circ h]$$

**定义 2.5.3.** 给定交换环谱  $(E, \mu, e)$ , 定义  $\bar{E}$  为单位  $e : S \rightarrow E$  的 homotopy fiber. 即:

$$\bar{E} \rightarrow S \xrightarrow{e} E \rightarrow \Sigma \bar{E}$$

**引理 2.5.4.** 在这样的记号下,  $E$ -Adams 滤过可以等价地写为

$$Y_p \cong \bar{E}^p \wedge Y$$

$$A_p \cong E \wedge \bar{E}^p \wedge Y$$

这里  $\bar{E}^p$  指  $\bar{E}$  smash product  $n$  次.

因此  $E$ -Adams 谱序列的第一页可以等价地写为  $E_1^{s,t}(X, Y) \cong [X, E \wedge \bar{E}^s \wedge Y]_{t-s}$

证明. 我们归纳地证明:  $p = 0$  时结果显然. 假定对某个  $p$  结果成立, 由命题 2.2.28,  $(-) \wedge \bar{E}^p \wedge Y$  保持 cofiber 序列, 那么将其运用在

$$\bar{E} \rightarrow S \rightarrow E$$

上就得到了

$$\bar{E}^{p+1} \wedge Y \rightarrow \bar{E}^p \wedge Y \xrightarrow{g_p} E \wedge \bar{E}^p \wedge Y$$

也是一个 cofiber 序列. 因此这就给出了结果.  $\square$

## 2.5.2 第一页

本段的内容旨在说明在一定条件下, 谱序列第一页有着  $E$ -同调的简单表述, 并且能够给出一个简单的第二页的刻画.





## 平坦交换环谱

**命题 2.5.5.** 对于交换环谱  $(E, \mu, e)$ , 它的稳定同伦群  $\pi_*(E)$  自然地具有  $\mathbb{Z}$ -分次环结构。

更进一步地, 对于任何谱  $X \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$ , 广义同调

$$E_*(X) = \pi_*(E \wedge X)$$

自然地具有左分次  $\pi_*(E)$ -模结构; 广义同调

$$X_*(E) = \pi_*(X \wedge E)$$

自然地具有右分次  $\pi_*(E)$ -模结构。

证明.  $\pi_*(E) \cong [\Sigma^* S, E]_0$ , 那么给定两个

$$\alpha_i : \Sigma^{n_i} S \rightarrow E$$

有

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 : \Sigma^{n_1+n_2} S \xrightarrow{\cong} \Sigma^{n_1} S \wedge \Sigma^{n_2} S \xrightarrow{\alpha_1 \wedge \alpha_2} E \wedge E \xrightarrow{\mu} E$$

这就给出了分次环结构。

同样  $E_*(X)$  的左  $\pi_*(E)$ -模结构由如下给出, 给定  $\alpha : \Sigma^{n_1} S \rightarrow E, \nu : \Sigma^{n_2} S \rightarrow E \wedge X$ , 有

$$\alpha \cdot \nu : \Sigma^{n_1+n_2} S \xrightarrow{\cong} \Sigma^{n_1} S \wedge \Sigma^{n_2} S \xrightarrow{\alpha \wedge \nu} E \wedge E \wedge X \xrightarrow{\mu \wedge \text{id}} E \wedge X$$

另一侧同理。 □

**定义 2.5.6.** 称交换环谱  $(E, \mu, e)$  是平坦的, 如果它诱导的  $E_*(E)$  作为右  $\pi_*(E) - \text{mod}$  是平坦模。(将会证明如果考虑左模是平坦模得到的结果是等价的)

**命题 2.5.7.** 给定交换环谱  $(E, \mu, e)$ ,  $X \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$ , 那么存在分次 *Abel* 群同态

$$E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(X) \rightarrow [S, E \wedge E \wedge X]_* = \pi_*(E \wedge E \wedge X)$$

这个映射将

$$\alpha_1 : \Sigma^{n_1} S \rightarrow E \wedge E, \alpha_2 : \Sigma^{n_2} S \rightarrow E \wedge X$$

映为

$$\alpha_1 \otimes \alpha_2 : \Sigma^{n_1+n_2} S \xrightarrow{\cong} \Sigma^{n_1} S \wedge \Sigma^{n_2} S \xrightarrow{\alpha_1 \wedge \alpha_2} E \wedge E \wedge E \wedge X \xrightarrow{\text{id}_E \wedge \mu \wedge \text{id}_X} E \wedge E \wedge X$$

如果  $E_*(E)$  是平坦  $\pi_*(E)$ -模, 那么这个同态变成了同构。

证明. 群同态容易验证是良定义的。现在假定  $E$  是平坦交换环谱:

如果  $X = \Sigma^n S$ , 那么:

$$E_*(X) = E_*(\Sigma^n S) \cong \pi_{*-n}(E)$$

$$\pi_*(E \wedge E \wedge X) = \pi_*(E \wedge E \wedge \Sigma^n S) = E_{*-n}(E)$$

然而  $E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} \pi_{*-n}(E) \cong E_{*-n}(E)$ , 因此此时对于任何  $E$  都有同构成立。



现在对于一个一般的有限 CW-prespectrum  $X$ ，我们有胞腔粘结的 cofiber 序列：

$$\Sigma^{n_k-1}S \longrightarrow X_k \longrightarrow X_{k+1} \longrightarrow \Sigma^{n_k}S \longrightarrow \Sigma X_k$$

那么在函子  $E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(-) \rightarrow \pi_*([\mathbb{S}, E \wedge E \wedge (-)])$  的作用下交换图

$$\begin{array}{ccccccc}
 E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(\Sigma^{n_k-1}\mathbb{S}) & \longrightarrow & E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(X_k) & \longrightarrow & E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(X_{k+1}) & \longrightarrow & E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(\Sigma^{n_k}\mathbb{S}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 [\mathbb{S}, E \wedge E \wedge \Sigma^{n_k-1}\mathbb{S}]_{\bullet} & \longrightarrow & [\mathbb{S}, E \wedge E \wedge X_k]_{\bullet} & \longrightarrow & [\mathbb{S}, E \wedge E \wedge X_{k+1}]_{\bullet} & \longrightarrow & [\mathbb{S}, E \wedge E \wedge \Sigma^{n_k}\mathbb{S}]_{\bullet}
 \end{array}$$

第二行是长正合列，因为  $E \wedge E \wedge (-)$  保持长正合列。同样由于  $E_*(-)$  将 cofiber 映为长正合列， $E_*(E)$  的平坦性保证第一行也是长正合列。那么利用 5 引理进行归纳就得到了结果。

现在对于一个任意的 CW-prespectrum  $X$ ：由于每个 CW-prespectrum 都是有限 CW-Subprespectra 的滤过极限；smash product  $\wedge$  对每个分量都保持余极限； $\pi_*(-)$  和余极限交换； $E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} (-)$  对余极限分配。上述这四条说明了结果对一般的  $X$  也成立。  $\square$

## E-Steenrod 代数

我们将对前文研究的  $H\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  的 Steenrod 代数进行推广：考虑更为一般的交换环谱  $E$  的情况。

**定义 2.5.8.** 给定交换环谱  $(E, \mu, e)$ ，称其对偶 E-Steenrod 代数是如下分次 Abel 群偶对  $(E_*(E), \pi_*(E))$ ，以及配备的如下结构：

1. 分次交换环结构

$$\pi_*(E) \otimes \pi_*(E) \rightarrow \pi_*(E)$$

（由  $E$  的交换环谱结构诱导）

2. 分次交换环结构

$$E_*(E) \otimes E_*(E) \rightarrow E_*(E)$$

（由  $E \wedge E$  的交换环谱结构诱导）

3. 分次交换环同态

$$\Psi : E_*(E) \rightarrow E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(E)$$

（由  $\pi_*(-)$  作用在  $E \wedge E \cong E \wedge S \wedge E \xrightarrow{\text{id} \wedge e \wedge \text{id}} E \wedge E \wedge E$  诱导：命题 2.5.7）

4. 分次交换环同态

$$\eta_L : \pi_*(E) \rightarrow E_*(E); \eta_R : \pi_*(E) \rightarrow E_*(E)$$

（由  $\pi_*(-)$  作用在  $E \cong E \wedge S \xrightarrow{\text{id} \wedge e} E \wedge E$  和  $E \cong S \wedge E \xrightarrow{e \wedge \text{id}} E \wedge E$  诱导）

5. 分次交换环同态

$$\varepsilon : E_*(E) \rightarrow \pi_*(E)$$

（由  $\pi_*(-)$  作用在  $\mu : E \wedge E \rightarrow E$  诱导）



## 6. 分次交换环同态

$$c : E_*(E) \rightarrow E_*(E)$$

(由  $\pi_*(-)$  作用在 Braiding  $\tau_{E,E} : E \wedge E \rightarrow E \wedge E$  诱导)

注记. 命题 2.5.5 中的左右  $\pi_*(E) - mod$  结构正是  $\eta_L, \eta_R$  分别诱导出来的。

**命题 2.5.9.** 对于交换环谱  $(E, \mu, e)$ ,  $E_*(E)$  具有自然的左和右  $\pi_*(E)$ - 模结构。现在由于  $E$  的交换性, 右  $\pi_*(E)$ - 模结构也可以视为左模结构, 那么 braiding

$$E_*(E) \cong \pi_*(E \wedge E) \xrightarrow{\pi_*(\tau_{E,E})} \pi_*(E \wedge E) \cong E_*(E)$$

给出了两个左模结构的同构。

对偶 E-Steenrod 代数结构可以抽象为如下概念。

**定义 2.5.10** (分次交换 Hopf 代数胚). 分次交换 Hopf 代数胚是  $\mathbb{Z}$ - 分次交换环的反范畴  $\mathbf{gCRing}^{\text{op}}$  中的 internal groupoid。

具体来说, 范畴  $A$  的 Internal Category 包含的数据有对象对象  $C_0 \in A$  和态射对象  $C_1 \in A$ ; 以及源态射和汇态射  $s, t : C_1 \rightarrow C_0$ , 恒等元指定态射  $e : C_0 \rightarrow C_1$ , 复合态射  $C_1 \times_{C_0} C_1 \rightarrow C_1$  使得以下图表 (当然是普通范畴里的条件转化成图表形式) 成立:

1. 恒等态射的起终点是自身。

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{e} & C_1 \\ & \searrow 1 & \downarrow s \\ & & C_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{e} & C_1 \\ & \searrow 1 & \downarrow t \\ & & C_0 \end{array}$$

2. 复合态射的起终点被正确给出。

$$\begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{c} & C_1 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow s \\ C_1 & \xrightarrow{s} & C_0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{c} & C_1 \\ p_2 \downarrow & & \downarrow t \\ C_1 & \xrightarrow{t} & C_0 \end{array}$$

3. 态射复合的结合律

4. 态射复合的单位律

$$\begin{array}{ccccc} C_0 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{e \times_{C_0} 1} & C_1 \times_{C_0} C_1 & \xleftarrow{1 \times_{C_0} e} & C_1 \times_{C_0} C_0 \\ p_2 \searrow & & \downarrow c & \swarrow p_1 & \\ & & C_1 & & \end{array}$$

进一步 Internal Groupoid 还要求存在一个态射对象上的“取逆”态射  $i : C_1 \rightarrow C_1$  满足:

1. 正确的起终点:

$$t = (C_1 \xrightarrow{i} C_1 \xrightarrow{s} C_0), \quad s = (C_1 \xrightarrow{i} C_1 \xrightarrow{t} C_0).$$



2. 取逆得到的态射是左逆:

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \xrightarrow{\text{diag}} & C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\text{Id} \times i} & C_1 \times_{C_0} C_1 \\ \downarrow s & & & & \downarrow c \\ C_0 & & \xrightarrow{e} & & C_1 \end{array}$$

3. 取逆得到的态射是右逆:

$$\begin{array}{ccccc} C_1 & \xrightarrow{\text{diag}} & C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{i \times \text{Id}} & C_1 \times_{C_0} C_1 \\ \downarrow t & & & & \downarrow c \\ C_0 & & \xrightarrow{e} & & C_1 \end{array}$$

注记. 这是一个离 Hopf 代数的普通定义相去甚远的定义, 我们来解释一下它为什么和正常的 Hopf 代数定义类似。

首先  $\mathbf{gCRing}^{\text{op}}$  的对象记为  $\text{Spec}(R)$  以指示它是反范畴中的对象。那么考虑 Internal Category 的定义, 它形如:

$$\begin{array}{c} \text{Spec}(\Gamma) \times_{\text{Spec}(A)} \text{Spec}(\Gamma) \\ \downarrow \circ \\ \text{Spec}(\Gamma) \\ \begin{array}{c} s \downarrow \uparrow t \\ \downarrow \uparrow \downarrow \end{array} \\ \text{Spec}(A) \end{array},$$

其中第一项的纤维积是  $s, t$  的拉回。并且将 Internal Category 中的取逆态射记为  $\text{inv} : \text{Spec}(\Gamma) \rightarrow \text{Spec}(\Gamma)$ 。

现在退回到  $\mathbf{gCRing}$ , 熟知  $\text{Spec}$  的纤维积对应着环的张量积: 因此 Internal Category 图表变为了

$$\begin{array}{c} \Gamma \otimes_A \Gamma \\ \uparrow \Psi \\ \Gamma \\ \begin{array}{c} \eta_L \downarrow \uparrow \epsilon \uparrow \eta_R \\ \downarrow \uparrow \end{array} \\ A \end{array},$$

以及  $c : \Gamma \rightarrow \Gamma$  是取逆态射所对应的。

并且这些态射满足前文 Internal Groupoid 定义中要求的那些条件的对偶。将这些条件翻译回来, 我们就得到了等价定义。

**定义 2.5.11** (交换 Hopf 代数胚). 交换 Hopf 代数胚由如下数据给出。

1. 两个交换环  $A, \Gamma$ 。

2. 环同态:

(a) 左/右单位  $\eta_L, \eta_R : A \rightarrow \Gamma$

(b) 余乘  $\Psi : \Gamma \rightarrow \Gamma \otimes_A \Gamma$



(c) 余单位  $\varepsilon : \Gamma \rightarrow A$

(d) 共轭  $c : \Gamma \rightarrow \Gamma$

满足

### 1. 余单位律

(a) 恒等态射的起终点是自身

$$\varepsilon \circ \eta_L = \varepsilon \circ \eta_R = \text{id}_A$$

(b) 态射复合的单位律

$$(\text{id}_\Gamma \otimes_A \varepsilon) \circ \Psi = (\varepsilon \otimes_A \text{id}_\Gamma) \circ \Psi = \text{id}_\Gamma$$

(c) 复合态射的起终点被正确给出

$$\text{i. } \Psi \circ \eta_R = (\text{id} \otimes_A \eta_R) \circ \eta_R$$

$$\text{ii. } \Psi \circ \eta_L = (\eta_L \otimes_A \text{id}) \circ \eta_L$$

### 2. 余结合律 $(\text{id}_\Gamma \otimes_A \Psi) \circ \Psi = (\Psi \otimes_A \text{id}_\Gamma) \circ \Psi$

### 3. 逆

(a)  $c \circ c = \text{id}_\Gamma$

(b) 正确的起终点

$$c \circ \eta_L = \eta_R; c \circ \eta_R = \eta_L$$

(c) 取逆得到了左逆和右逆

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \otimes A \otimes \Gamma & \rightrightarrows & \Gamma \otimes \Gamma \xrightarrow{\text{coeq}} \Gamma \otimes_A \Gamma \\ (-) \cdot c(-) \downarrow & & \swarrow \alpha \\ & & \Gamma \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \otimes A \otimes \Gamma & \rightrightarrows & \Gamma \otimes \Gamma \xrightarrow{\text{coeq}} \Gamma \otimes_A \Gamma \\ c(-) \cdot (-) \downarrow & & \swarrow \beta \\ & & \Gamma \end{array}$$

$\alpha, \beta$  是余等化子泛性质给出的，其中平行态射是给出张量积的。它们满足

$$\alpha \circ \Psi = \eta_L \circ \varepsilon; \beta \circ \Psi = \eta_R \circ \varepsilon$$

**命题 2.5.12.** 对于平坦交换环谱  $E$ ，它的对偶  $E$ -Steenrod 代数  $(E_*(E), \pi_*(E))$ ，以及定义给出的结构态射  $(\eta_L, \eta_R, \varepsilon, c, \Psi)$  使得它构成了分次交换 Hopf 代数胚。



## E-Steenrod 代数上的余模

**定义 2.5.13** (E-Steenrod 代数上的余模).  $(E, \mu, e)$  是交换环谱, 对于任何一个谱  $X \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$ , 称  $E_*(X)$  的对偶 E-Steenrod 代数上的余模结构是

1. 自然的  $\pi_*(E)$ -模结构。
2.  $\pi_*(E)$ -模同态

$$\Psi_{E_*(X)} : E_*(X) \rightarrow E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(X)$$

(由  $\pi_*(-)$  作用在  $E \wedge X \cong E \wedge S \wedge X \xrightarrow{\text{id} \wedge e \wedge \text{id}} E \wedge E \wedge X$  诱导)

更一般地, 对任何分次 Hopf 交换代数胚, 都有类似的余模定义

**定义 2.5.14** (分次 Hopf 交换代数胚上的余模). 给定  $A$  上的分次 Hopf 交换代数胚  $\Gamma$ , 那么其上的左余模是

1. 一个  $\mathbb{Z}$ -分次  $A$ -模  $N$
2. 余作用: 分次  $A$ -模同态  $\Psi_N : N \rightarrow \Gamma \otimes_A N$  ( $\Gamma$  上的右  $A$ -模结构由右单位  $\eta_R$  给出)

满足

1. 余单位律:  $(\varepsilon \otimes_A \text{id}_N) \circ \Psi_N = \text{id}_N$
2. 余作用:  $(\Psi \otimes_A \text{id}_N) \circ \Psi_N = (\text{id}_\Gamma \otimes_A \Psi_N) \circ \Psi_N$

分次余模之间的同态是指一个分次  $A$ -模同态并且满足和余模作用交换。

记  $\Gamma$  上全体左余模的范畴为  $\Gamma\mathbf{CoMod}$ , 其态射集简记为  $\text{Hom}_\Gamma(-, -) := \text{Hom}_{\Gamma\mathbf{CoMod}}(-, -)$ , 很明显它天然地具有 Abel 群结构。

如果进一步将同态的要求放宽到不一定是分次  $A$ -模同态, 而是允许次数平移, 那么这给出了一个  $\mathbb{Z}$ -分次的态射群, 记为  $\text{Hom}_\Gamma^*(-, -)$ 。

**例子.** 给定交换 Hopf 代数胚  $(\Gamma, A)$ , 那么  $A$  自然地成为一个左  $\Gamma$ -余模:  $\eta_R : A \rightarrow \Gamma \cong \Gamma \otimes_A A$ 。

**命题 2.5.15.** 如果  $(E, \mu, e)$  是平坦交换环谱, 那么定义 2.5.13 中的定义使得  $E_*(X)$  成为  $E_*(E)$  上的余模。

和模范畴上完全一样地, 仍然有自由-遗忘伴随

**命题 2.5.16.** 给定  $A$  上交换 Hopf 代数胚  $\Gamma$ , 存在伴随对

$$A\text{-mod} \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{Forget}} \\ \perp \\ \xrightarrow{\text{Co-Free}} \end{array} \Gamma\mathbf{CoMod}$$

进一步  $A$ -模  $C$  给出的余自由  $\Gamma$ -余模是  $\Gamma \otimes_A C$ , 余作用由  $\Gamma$  的余乘给出。

注记 (左右余模等价). 给定  $A$  上的交换 Hopf 代数胚  $\Gamma$ , 那么左余模  $N$  自然地在以下作用下变为右余模:

$$N \rightarrow \Gamma \otimes_A N \cong N \otimes_A \Gamma \xrightarrow{\text{id} \otimes \Delta^c} N \otimes_A \Gamma$$

对于右余模也有同样的论述。



**定义 2.5.17** (余模的余张量积). 给定  $A$  上交换 Hopf 代数胚  $\Gamma$ , 右  $\Gamma$ -余模  $N_1$  和左  $\Gamma$ -余模  $N_2$ . 那么它们的余张量积定义为:

$$N_1 \square_{\Gamma} N_2 := \ker \left( N_1 \otimes_A N_2 \xrightarrow{\Psi_{N_1} \otimes_A id - id \otimes_A \Psi_{N_2}} N_1 \otimes_A \Gamma \otimes_A N_2 \right).$$

如果  $N_1, N_2$  都是左 (右)  $\Gamma$ -余模, 那么将  $N_2$  ( $N_1$ ) 通过上一注记视为右 (左) 余模。

**命题 2.5.18.** 对于两个左  $\Gamma$ -余模, 存在自然同构  $N_1 \square N_2 \cong N_2 \square N_1$ 。

为了计算谱序列的第一页, 如下观察是至关重要的:

**引理 2.5.19.** 给定  $A$  上的交换 Hopf 代数胚  $\Gamma$  以及两个  $\Gamma$ -余模  $N_1, N_2$ 。如果  $N_1$  作为  $A$ -模是投射的, 那么:

1. 态射

$$\mathrm{Hom}_A(N_1, A) \xrightarrow{f \mapsto (id \otimes_A f) \circ \Psi_{N_1}} \mathrm{Hom}_A(N_1, \Gamma \otimes_A A) \cong \mathrm{Hom}_A(N_1, \Gamma) \cong \mathrm{Hom}_A(N_1, A) \otimes_A \Gamma$$

给出了  $\mathrm{Hom}_A(N_1, A)$  上的右  $\Gamma$ -余模结构。

2. (Cotensor-Dual) 给定左  $\Gamma$ -余模  $N_1, N_2$ , 赋予  $\mathrm{Hom}_A(N_1, A)$  上述右余模结构, 那么

$$\mathrm{Hom}_A(N_1, A) \square_{\Gamma} N_2 \cong \mathrm{Hom}_{\Gamma}(N_1, N_2)$$

特别地,  $N_1 = A$  时有

$$A \square_{\Gamma} N_2 \cong \mathrm{Hom}_{\Gamma}(A, N_2)$$

## 余模的万有系数定理

首先我们将指出谱之间的态射  $f: X \rightarrow Y$  在  $E_*(-)$  上诱导的不仅仅是分次 Abel 群, 而是更进一步诱导了余模同态。回忆 E-Steenrod 代数  $(E_*(E), \pi_*(E))$  作为分次交换 Hopf 代数胚以及其上的余模  $E_*(X)$ 。

**引理 2.5.20.** 给定  $X, Y \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$ , 交换环谱  $E$ 。那么  $[X, Y]_*$  到同调之间的态射之间的映射由同调函子  $\pi_*(E \wedge -)$  诱导, 即:

$$\pi_*(E \wedge -): [X, Y]_* \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Ab\mathbb{Z}}^*(E_*(X), E_*(Y))$$

可以分解为

$$[X, Y]_* \rightarrow \mathrm{Hom}_{E_*(E)-comod}^*(E_*(X), E_*(Y)) \xrightarrow{forget} \mathrm{Hom}_{Ab\mathbb{Z}}^*(E_*(X), E_*(Y))$$

即这样诱导出来的同态事实上都是  $E_*(E)$ -余模同态。

证明. 来验证它确实是余模同态, 即需要验证下列图表交换

$$\begin{array}{ccc} E_{\bullet}(X) & \xrightarrow{f_*} & E_{\bullet}(Y) \\ \Psi_{E_{\bullet}(X)} \downarrow & & \downarrow \Psi_{E_{\bullet}(Y)} \\ E_{\bullet}(E) \otimes_{\pi_{\bullet}(E)} E_{\bullet}(X) & \xrightarrow{id \otimes \pi_{\bullet}(E) f_*} & E_{\bullet}(E) \otimes_{\pi_{\bullet}(E)} E_{\bullet}(Y) \end{array}.$$



但是它事实上是下列交换图表在  $\pi_*(-)$  下的像，因此得证。

$$\begin{array}{ccc}
 E \wedge X & \xrightarrow{id \wedge f} & E \wedge Y \\
 \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\
 E \wedge \mathbb{S} \wedge X & & E \wedge \mathbb{S} \wedge Y \\
 id \wedge e \wedge id \downarrow & & \downarrow id \wedge e \wedge id \\
 E \wedge E \wedge X & \xrightarrow{id \wedge id \wedge f} & E \wedge E \wedge Y
 \end{array}$$

□

回忆谱序列第一页形如  $[X, E \wedge \bar{E}^s \wedge Y]_{t-s}$ 。我们开始着手处理这样的项：

**命题 2.5.21.** 对于交换环谱  $(E, \mu, e)$ ,  $X, Y \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$ ,  $E_*(X)$  作为  $\pi_*(E)$  模是投射模，那么分次 *Abel* 群同态：

$$\begin{aligned}
 \phi_{UC} : [X, E \wedge Y]_* &\rightarrow \text{Hom}_{\pi_*(E)-\text{mod}}^*(E_*(X), E_*(Y)) \\
 (f : x \rightarrow E \wedge Y) &\mapsto \pi_*(E \wedge X \xrightarrow{id \wedge f} E \wedge E \wedge Y \xrightarrow{\mu \wedge id} E \wedge Y)
 \end{aligned}$$

是同构。

证明. 考虑  $EMod = EMod(\mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra}), \wedge, \mathbb{S})$  是  $E$  上的模谱范畴，那么  $\phi_{UC}$  可以分解为

$$[X, E \wedge Y]_* \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{EMod}^*(E \wedge X, E \wedge Y) \xrightarrow{\pi_*} \text{Hom}_{\pi_*(E)-\text{mod}}^*(E_*(X), E_*(Y))$$

其中第一个同构来源于模范畴中的自由遗忘伴随（和前文讨论过的余自由是类似的），第二个箭头则是作用上  $\pi_*$  然后遗忘称为  $\pi_*(E)$ -模同态。

现在只需说明第二个态射是同构，这由如下引理说明：

□

**引理 2.5.22.** 对于交换环谱  $E$ ，其上的模谱  $N_1, N_2$  满足  $\pi_*(N_1)$  是投射  $\pi_*(E)$  模，那么：

$$\text{Hom}_{EMod}^*(N_1, N_2) \xrightarrow{\pi_*} \text{Hom}_{\pi_*(E)-\text{mod}}^*(\pi_*(N_1), \pi_*(N_2))$$

是同构。

证明. 如果  $\pi_*(N_1)$  是自由  $\pi_*(E)$  模：那么存在一组自由基  $\mathcal{B} = \{x_i\}_{i \in I}$ ，使得

$$\bigvee_{i \in I} \Sigma^{|x_i|} E \longrightarrow N_1$$

那么这个同构由如下交换图保证

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{EMod}^\bullet(\bigvee_{i \in I} \Sigma^{|x_i|} E, N_2) & \xrightarrow{\pi_*} & \text{Hom}_{\pi_\bullet(E)}^\bullet(\pi_\bullet(\bigvee_{i \in I} \Sigma^{|x_i|} E), \pi_\bullet(N_2)) \\
 \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\
 \prod_{i \in I} [\Sigma^{|x_i|} \mathbb{S}, N_2]_\bullet & \xrightarrow{\simeq} & \prod_{i \in I} \pi_{\bullet+|x_i|}(N_2)
 \end{array}$$

现在对于一般的投射模，由于它是自由模的直和因子，这说明存在

$$\pi_*(N_1) \xrightarrow{i} F \xrightarrow{q} \pi_*(N_1)$$

同样由于  $F$  是自由模，可以找到一个  $E$ -模谱  $G$  使得  $\pi_*(G) = F$ ，并且存在一个  $p : G \rightarrow N_1$  使得  $\pi_*(p) = q$ ，于是过渡到自由模的情况即可。

□



现在我们将前文所有内容整合，得到计算 Adams 谱序列第一页的关键命题

**命题 2.5.23.**  $E$  是交换环谱,  $X, Y \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$  满足:  $E$  是平坦的并且  $E_*(X)$  是投射  $\pi_*(E)$  模。那么引理 2.5.20 中的态射

$$[X, E \wedge Y]_* \xrightarrow{\pi_*(E \wedge -)} \mathrm{Hom}_{E_*(E)-\mathrm{comod}}^*(E_*(X), E_*(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{E_*(E)-\mathrm{comod}}^*(E_*(X), E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(Y))$$

是同构，其中第二个同构由命题 2.5.7 给出。

证明. 有交换图

$$\begin{array}{ccc} [X, E \wedge Y]_* & \xrightarrow{\pi_*(E \wedge -)} & \mathrm{Hom}_{E_*(E)-\mathrm{comod}}^*(E_*(X), E_*(E) \otimes_{\pi_*(E)} E_*(Y)) \\ \phi_{UC} \searrow & & \swarrow \epsilon \otimes \mathrm{id} \circ (-) \\ & \mathrm{Hom}_{\pi_*(E)-\mathrm{mod}}^*(E_*(X), E_*(Y)) & \end{array},$$

上侧箭头是本命题中的态射，左侧箭头是命题 2.5.21 中的  $\phi_{UC}$ ，右侧箭头是由张量积上余单位得到的（回忆命题 2.5.16）

右侧箭头由命题 2.5.7 是同构，左侧箭头由命题 2.5.21 是同构，这就说明了结果。□

于是我们能够计算第一页了：

**定理 2.5.24** (Adams 谱序列的第一页).  $E$  是交换环谱,  $X, Y \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$  满足:  $E$  是平坦的并且  $E_*(X)$  是投射  $\pi_*(E)$  模。那么  $E$ -Adams 谱序列的第一页同构于：

$$E_1^{s,t}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{E_*(E)-\mathrm{comod}}^t(E_*(X), E_{*-s}(A_s)), d_1 = \mathrm{Hom}_{E_*(E)-\mathrm{comod}}(E_*(X), E_*(g \circ h))$$

这给出了谱序列第一页上的微分态射：

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{E_*(E)}^t(E_*(X), E_*(A_0)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{E_*(E)}^t(E_*(X), E_{*-1}(A_1)) \rightarrow \cdots$$

证明. 由上一命题：

$$\begin{aligned} E_1^{s,t}(X, Y) &= [X, E \wedge Y_s]_{t-s} \cong \mathrm{Hom}_{E_*(E)-\mathrm{comod}}^{t-s}(E_*(X), E_*(E \wedge Y_s)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{E_*(E)-\mathrm{comod}}^t(E_*(X), E_{*-s}(A_s)) \end{aligned}$$

（回忆  $A_s = E \wedge Y_s$ ）□

### 2.5.3 稳定同伦群的特殊情况

对于第一页，我们考虑一些特殊的情况：  $X = S$ ，那么此时谱序列的第一页是  $E_1^{st}(S, Y) = \pi_{t-s}(E \wedge \bar{E}^s \wedge Y)$ 。

我们首先计算  $Y \wedge E \wedge \bar{E}$  的同伦群：有 Cofiber 序列

$$Y \wedge E \wedge \bar{E} \rightarrow Y \wedge E \wedge S \rightarrow Y \wedge E \wedge E$$

注意这个序列有右提升（乘法给出  $E \wedge E \rightarrow E = E \wedge S$ ），因此  $\pi_*(Y \wedge E \wedge \bar{E})$  是  $\pi_{*+1}(Y \wedge E \wedge S) \rightarrow \pi_{*+1}(Y \wedge E \wedge E)$ 。





现在由于  $E$  是平坦的:

$$\pi_*(Y \wedge E \wedge E) = E_*(Y) \otimes_{\pi_*(E)} E_*E$$

$$\pi_*(Y \wedge E) = E_*(Y)$$

因此归纳地考虑  $X$  就有谱序列第一页  $E_1$  形如  $E_*(Y) \otimes [E_*E/\pi_*(E)]^n$ , 于是这事实上是代数上的 cobar resolution, 从而暗示了第二页具有  $\text{Ext}$  的形式, 接下来我们下面来考虑一般的情况。

#### 2.5.4 第二页

**定理 2.5.25** (Adams 谱序列的第二页).  $E$  是交换环谱,  $X, Y \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$  满足:  $E$  是平坦的并且  $E_*(X)$  是投射  $\pi_*(E)$  模。那么  $E$ -Adams 谱序列的第二页同构于:

$$E_2^{s,t}(X, Y) \cong \text{Ext}_{E_*(E)-\mathbf{comod}}^{s,t}(E_*(X), E_*(Y))$$

注记. 这里  $\text{Ext}$  函子的定义源于  $E_*(E)$ -余模范畴是一个内射对象足够的 Abel 范畴, 记为  $\mathcal{A} = E_*(E) - \mathbf{comod}$ 。因此可以定义  $\text{Hom}$  复形函子

$$\text{Hom}_{K(\mathcal{A})}^*(X, -) : K^+(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathbf{Ab})$$

的右导出函子

$$R\text{Hom}^*(X, -) : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathbf{Ab})$$

从而可以定义  $\text{Ext}$  函子

$$\text{Ext}^i(X, Y) \cong H^i R\text{Hom}^*(X, Y), X \in D(\mathcal{A}), Y \in D^+(\mathcal{A})$$

这里的  $\text{Ext}$  函子正是一般足够内射/投射对象的 Abel 范畴中的  $\text{Ext}$  的导出版本叙述。

证明. 由第一页的描述,  $E_2^{s,t}(X, Y)$  是

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{E_*(E)}^t(E_*(X), E_*(A_0)) \rightarrow \text{Hom}_{E_*(E)}^t(E_*(X), E_{*-1}(A_1)) \rightarrow \cdots$$

的上同调。因此欲完成论述只需说明:

1.  $\mathcal{A} = E_*(E) - \mathbf{comod}$  是 Abel 范畴并且内射对象足够;
2.  $(E_1^{*,t}(X, Y), d_1)$  构成的链复形是某个  $\text{Hom}_{E_*(E)-\mathbf{comod}}(E_*(X), -)$ -acyclic 消解的像。

导出函子的性质保证了 acyclic 消解能够计算出正确的导出函子值。  $\square$

下面我们来完成上面需要说明的两点。

**引理 2.5.26** (第一页给出了消解). 给定  $E$ -Adams 谱序列, 那么有短正合列

$$0 \rightarrow E_*(Y_p) \xrightarrow{E_*(g_p)} E_*(A_p) \xrightarrow{E_*(h_p)} E_{*-1}(Y_{p+1}) \rightarrow 0$$

从而有上部为长正合列的图表 (直接验证):

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow E_*(Y) & \xrightarrow{E_*(g_0)} & E_*(A_0) & \xrightarrow{\partial} & E_{*-1}(A_1) & \xrightarrow{\partial} & E_{*-2}(A_2) \rightarrow \cdots \\ & & \searrow E_*(h_0) & & \nearrow E_*(g_1) & \searrow E_*(h_1) & \nearrow E_*(g_2) \\ & & & & E_{*-1}(Y_1) & & E_{*-2}(Y_2) \end{array}$$



证明. 考虑  $Y_p$  的定义:

$$Y_p \xrightarrow{g_p} E \wedge Y_p \xrightarrow{h_p} \Sigma Y_{p+1}$$

$E \wedge -$  作用上后仍然是余纤维化序列

$$E \wedge Y_p \xrightarrow{E \wedge g_p} E \wedge E \wedge Y_p \xrightarrow{E \wedge h_p} E \wedge \Sigma Y_{p+1}$$

现在作用上  $\pi_*(-)$  后得到长正合列:

$$\cdots \longrightarrow E_\bullet(Y_{p+1}) \xrightarrow{E_\bullet(f_p)} E_\bullet(Y_p) \xrightarrow{E_\bullet(g_p)} E_\bullet(A_p) \xrightarrow{E_\bullet(h_p)} E_{\bullet-1}(Y_{p+1}) \xrightarrow{E_{\bullet-1}(f_p)} E_{\bullet-1}(Y_p) \xrightarrow{E_{\bullet-1}(g_p)} E_{\bullet-1}(A_p) \longrightarrow \cdots$$

这是一个分裂长正合列: 因为考虑  $E$  的乘积  $\mu: E \wedge g_p$  有左逆

$$\text{id}: E \wedge Y_p \xrightarrow{E \wedge g_p} E \wedge E \wedge Y_p \xrightarrow{\mu \wedge \text{id}} E \wedge Y_p$$

从而长正合列分裂为短正合列, 这就证明了结果。  $\square$

**引理 2.5.27** (平坦交换环谱诱导 Abel 范畴). 交换 Hopf 代数胚  $(\Gamma, A)$  如果满足  $\Gamma$  作为右  $A$  模 ( $\eta_R$  诱导) 是平坦模, 那么  $\Gamma\mathbf{CoMod}$  是 Abel 范畴。现在由于  $E_*(E)$  的  $\pi_*(E)$  模结构就是  $\eta_R$  诱导的, 因此平坦交换环谱满足这一条件。

证明. 这总是加性范畴, 现在如果  $\Gamma$  在  $A$  上平坦, 我们来说明核与余核存在。

给定余模之间的态射  $f: (N_1, \Psi_{N_1}) \rightarrow (N_2, \Psi_{N_2})$ 。即有  $A$ -模交换图

$$\begin{array}{ccc} N_1 & \xrightarrow{f} & N_2 \\ \downarrow \Psi_{N_1} & & \downarrow \Psi_{N_2} \\ \Gamma \otimes_A N_1 & \xrightarrow{\text{id}_\Gamma \otimes_A f} & \Gamma \otimes_A N_2 \end{array}$$

那么考虑  $f$  在  $A$ -mod 中的核, 以及其在张量积下的像:

$$\begin{array}{ccccc} \ker(f) & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{f} & N_2 \\ \exists \downarrow & & \downarrow \Psi_{N_1} & & \downarrow \Psi_{N_2} \\ \Gamma \otimes_A \ker(f) & \longrightarrow & \Gamma \otimes_A N_1 & \xrightarrow{\text{id}_\Gamma \otimes_A f} & \Gamma \otimes_A N_2 \end{array}$$

由平坦的假设,  $\Gamma \otimes_A \ker f \cong \ker(\text{id}_\Gamma \otimes_A f)$ , 从而核的泛性质说明了左侧箭头的存在性, 以及它的确是  $\Gamma\mathbf{CoMod}$  中的核。余核同理。

然而上述构造直接说明了  $\text{coker } \ker \rightarrow \ker \text{coker}$  是同构: 因为考虑对应的  $A$ -模即可。  $\square$

**引理 2.5.28** (内射对象足够). 假定  $(\Gamma, A)$  是交换 Hopf 代数胚,  $\Gamma$  作为右  $A$  模 ( $\eta_R$  诱导) 是平坦模, 那么

1. 每个内射  $A$  模诱导的余自由  $\Gamma$ -余模都是  $\Gamma\mathbf{CoMod}$  中的内射对象;
2. (承认 AC)  $\Gamma\mathbf{CoMod}$  中内射对象足够。

证明. 在承认 AC 的情况下,  $A\mathbf{Mod}$  中内射对象足够。现在由于存在伴随对

$$A\mathbf{-mod} \xleftarrow[\text{Co-Free}]{\text{Forget}} \Gamma\mathbf{CoMod}$$

注意到由余自由函子的构造 (命题 2.5.16), 函子 Co-Free 是正合函子。因此  $I$  是内射模  $\implies \Gamma \otimes_A I$  是余模范畴中的内射对象。对于任何  $N \in \Gamma\mathbf{CoMod}$ , 考虑单态射  $i: \text{forget}(N) \hookrightarrow I$ , 那么伴随像  $\tilde{i}: N \hookrightarrow \Gamma \otimes_A I$  也是单态射。这就说明了结果。  $\square$



**引理 2.5.29** (消解是 acyclic 的). 假定  $(\Gamma, A)$  是交换 Hopf 代数胚,  $\Gamma$  作为右  $A$  模 ( $\eta_R$  诱导) 是平坦模。现在给定  $\Gamma$ -余模  $N \in \Gamma\mathbf{CoMod}$ , 使得其作为  $A$  模是投射的: 那么每个余自由模都是  $F = \mathrm{Hom}_{\Gamma\mathbf{CoMod}}(N, -)$ -acyclic 的。

证明. 考虑  $\Gamma \otimes_A K, K \in A\text{-mod}$ , 我们需要证明它是 acyclic 的。取  $K$  的内射消解  $I^\bullet$ , 那么上一引理说明  $\Gamma \otimes_A I^\bullet$  是内射消解。从而

$$H_{*\geq 1}(\mathrm{Hom}_\Gamma(N, \Gamma \otimes_A I^\bullet)) \cong H_{*\geq 1}(\mathrm{Hom}_A(N, I^*)) \cong 0$$

其中第一个同构是余自由-遗忘伴随, 第二个同构是因为  $N$  是投射  $A$  模。  $\square$

现在我们完成了第二页的证明。

## 2.5.5 收敛性

### 谱的局部化和幂零完备化

#### • 谱的 Bousfield 局部化

**定义 2.5.30.** 给定谱  $E$ :

1. 谱  $X$  是  $E$ -acyclic 的, 如果  $E \wedge X \simeq 0$ ;
2. 态射  $f: X \rightarrow Y$  是  $E$ -等价, 如果  $E \wedge f$  是稳定同伦范畴中的同构, 从而  $E_*(f)$  是  $E$ -同调的同构。
3. 谱  $X$  是  $E$ -局部的, 如果以下等价条件成立:
  - (a) 对于任何  $E$ -等价  $f, [f, X]_*$  都是同构;
  - (b) 对于任何  $E$ -acyclic 谱  $Y, Y \rightarrow X$  的态射都是零态射。

证明. 我们来说明等价性:  $A$  是  $E$ -acyclic 的等价于始对象出发的态射  $0 \rightarrow A$  是  $E$ -等价。因此  $1 \implies 2$  是显然的: 取  $f: 0 \rightarrow Y$ , 我们将问题转化为了  $[0, X]$ , 而它当然是零态射。

现在对于  $2 \implies 1$ , 给定  $E$ -等价  $f: A \rightarrow B$ , 考虑其同伦余纤维  $B \rightarrow B/A$ 。那么有 cofiber sequence:

$$E \wedge A \xrightarrow{E \wedge f} E \wedge B \longrightarrow E \wedge (B/A) \longrightarrow E \wedge \Sigma A.$$

第一个态射由条件是同构, 那么考虑交换图 (三角范畴保证了第三个态射的存在):

$$\begin{array}{ccccccc} E \wedge A & \xrightarrow{E \wedge f} & E \wedge B & \longrightarrow & E \wedge B/A & \longrightarrow & E \wedge \Sigma A \\ \downarrow id & & \downarrow (E \wedge f)^{-1} & & \downarrow & & \downarrow id \\ E \wedge A & \xrightarrow{id} & E \wedge A & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & E \wedge \Sigma A \end{array}$$

于是  $E \wedge B/A \simeq 0$ , 即  $B/A$  是  $E$ -acyclic 的。

现在有交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{id} & A & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \Sigma A \\ \downarrow & & \downarrow id & & \downarrow f & & \downarrow \\ \Sigma^{-1}B/A & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & B/A \longrightarrow \Sigma A \end{array}$$



从而  $[-, X]$  作用后得到行正合图表

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & [A, X]_{\bullet} & \longleftarrow & [A, X]_{\bullet} & \longleftarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow^{id} & & \uparrow^{[f, X]_{\bullet}} & & \uparrow \\ [B/A, X]_{\bullet+1} & \longleftarrow & [A, X]_{\bullet} & \longleftarrow & [B, X]_{\bullet} & \longleftarrow & [B/A, X]_{\bullet} \end{array} \quad \begin{array}{c} \longleftarrow [A, X]_{\bullet+1} \\ \uparrow^{id} \\ [A, X]_{\bullet+1} \end{array},$$

第一、四列是同构 ( $[B/A, X] = 0$ : 因为假定 2 以及  $B/A$  是  $E$ -acyclic 的), 那么五引理说明了第三列是同构, 从而说明了结果。  $\square$

**定义 2.5.31** (Bousfield 局部化). 给定谱  $E, X$ ,  $X$  的  $E$ -Bousfield 局部化是

1. 一个  $E$ -局部谱  $L_E X$
2. 一个  $E$ -等价  $X \rightarrow L_E X$

Bousfield 的上述构造源于如下观察:

给定 **Spectra** 的全子范畴  $\mathcal{C}$ , 使得  $\mathcal{C}$  中的对象在平移和同伦余极限下封闭, 并满足: 存在一个小子范畴  $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$  使得  $\mathcal{C}_0$  在同伦余极限下生成了  $\mathcal{C}$ .

因此  $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathbf{Spectra}$  保持同伦余极限, 因此伴随函子定理指出存在同伦范畴意义下的右伴随  $G: \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ .

**定义 2.5.32.** 对于任何谱  $X$ , 有余单位映射  $v: G(X) \rightarrow X$  (注意它只是在同伦意义下唯一), 定义  $L(X)$  为  $v$  的余纤维化:

$$G(X) \rightarrow X \rightarrow L(X)$$

那么对于任何  $Y \in \mathcal{C}$ ,  $[Y, G(X)]_* \rightarrow [Y, X]$  都是同构 (回忆伴随函子), 于是进一步地:  $[Y, L(X)] = 0$  (考虑  $[Y, -]$  诱导的正合列)

称  $X$  是  $\mathcal{C}$ -局部的, 如果  $\forall Y \in \mathcal{C}, Y \rightarrow X$  都一定是零伦的. 将  $\mathcal{C}$ -局部谱构成的全子范畴记为  $\mathcal{C}^\perp$ . 于是容易验证  $\mathcal{C}^\perp$  在同伦极限和平移下封闭.

现在对于任何  $X$ ,  $L(X)$  都是  $\mathcal{C}$ -局部的. 对于任何  $\mathcal{C}$ -局部谱  $Z$ ,  $[G(X), Z] = 0$ , 于是作用到 cofiber 上就有  $[L(X), Z] \cong [X, Z]$ , 从而  $L$  可以视作  $\mathcal{C}^\perp \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$  的左伴随.

**例子** (Bousfield). 容易验证取  $\mathcal{C}_E$  为全体  $E$ -acyclic 谱满足上述条件, 因此我们再一次得到了 *Bousfield 局部化*.

## • 谱的幂零完备化

**定义 2.5.33** (幂零完备化). 给定交换环谱  $(E, \mu, e)$ , 以及任意一个谱  $Y \in \mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$ . 再一次地记  $\bar{E}$  为单位  $e: S \rightarrow E$  的同伦纤维, 这样正如之前讨论过的 (引理 2.5.4),  $Y$  的  $E$ -Adams 滤过形如:

$$\cdots \rightarrow \bar{E}^2 \wedge Y \rightarrow \bar{E} \wedge Y \rightarrow Y$$

再记  $\bar{E}_{s-1} := \text{hocolim}(\bar{E}^s \xrightarrow{i^s} S)$  ( $i: \bar{E} \rightarrow S$  是刚刚定义的同伦纤维), 特别地  $\bar{E}_{-1} \simeq 0$ . 因此:

$$\bar{E}_n \wedge Y \simeq \text{hocolim}(\bar{E}^{n+1} \wedge Y \rightarrow Y)$$



现在由八面体公理:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \overline{E}^{s+1} & \xrightarrow{i} & \overline{E}^s & \longrightarrow & E \wedge \overline{E}^s & \longrightarrow & \Sigma \overline{E}^{s+1} \\
 = \downarrow & & \downarrow i^s & & \downarrow & & \downarrow \\
 \overline{E}^{s+1} & \longrightarrow & \mathbb{S} & \longrightarrow & \overline{E}_s & \longrightarrow & \Sigma \overline{E}^{s+1} \\
 & & \downarrow & & \downarrow p_{s-1} & & \\
 & & \overline{E}_{s-1} & \xrightarrow{=} & \overline{E}_{s-1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \Sigma \overline{E}^s & \longrightarrow & \Sigma E \wedge \overline{E}^s & & 
 \end{array}$$

我们给出了  $p_{s-1}: \overline{E}_s \rightarrow \overline{E}_{s-1}$ , 进一步就有:

$$\dots \xrightarrow{p_2 \wedge \text{id}} E_2 \wedge Y \xrightarrow{p_1 \wedge \text{id}} \overline{E}_1 \wedge Y$$

定义  $Y$  的  $E$ -幂零完备化  $Y_E^\wedge$  为同伦极限  $\varprojlim_n \overline{E}_n \wedge Y$ 。

幂零完备化  $X_E^\wedge$  总是  $E$ -局部的, 首先幂零完备化的构造知  $X_E^\wedge$  仅和  $L_E X$  有关, 并且  $E$ -等价  $f$  并不会使得  $[f, X_E^\wedge]$  变化, 这就说明了  $E$ -局部。因此由 Bousfield 完备化这给出了一个  $L_E X \rightarrow X_E^\wedge$ 。在一些局部化条件较好的情况我们事实上有上述态射在  $\mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$  中是同构。

**定义 2.5.34 (Core).** 给定交换环  $R$ , 它的 core  $cR$  是如下图表的等价子:

$$cR \rightarrow R \rightrightarrows R \times_{\mathbb{Z}} R$$

其中上部箭头是

$$R \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} R \xrightarrow{e \otimes \text{id}} R \times_{\mathbb{Z}} R$$

下部箭头是

$$R \cong R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id} \otimes e} R \otimes_{\mathbb{Z}} R$$

因此实际上  $cR := \{r \in R \mid 1 \otimes r = r \otimes 1 \in R \otimes_{\mathbb{Z}} R\}$

如果  $cR \cong R$ , 那么称它为 Solid 环。

注记. 我们来考虑它的几何意义: 首先  $\mathbf{CRing}^{\text{op}} \cong \mathbf{AffSch}$ , 于是再一次地使用  $\text{Spec}$  表示反范畴的对象。现在  $\text{Spec}(R \otimes R) \cong \text{Spec}(R) \times \text{Spec}(R)$ , 因此有 internal Cech groupoid

$$\begin{array}{c}
 \text{Spec}(R) \times \text{Spec}(R) \times \text{Spec}(R) \\
 \downarrow \\
 \text{Spec}(R) \times \text{Spec}(R) \\
 \begin{array}{c} s \downarrow \uparrow t \\ \text{Spec}(R) \end{array}
 \end{array}$$

**命题 2.5.35.**  $ccR \cong cR$

**命题 2.5.36 (Solid Ring 分类).** *Solid Ring* 分类如下:

1.  $\mathbb{Z}[J^{-1}]$ : 整数环在某个素数集  $J$  处的局部化



2.  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ( $n \geq 2$ )

3.  $\mathbb{Z}[J^{-1}] \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , 使得  $n \geq 2$ , 并且  $n$  的每个素因子都包含在素数集  $J$  中

4.  $c(\mathbb{Z}[J^{-1}] \times \prod_{p \in K} \mathbb{Z}/p^{e(p)})$ ,  $K \subseteq J$ , 满足  $J, K$  都是无限素数集, 并且  $e(p)$  是自然数。

**定义 2.5.37** (连合). 称一个谱  $E$  是连合的, 如果  $\pi_{* < 0}(E) = 0$ 。

**命题 2.5.38.** 给定连合交换环谱  $E$ , 使得  $\pi_0(E)$  的 core 是素数集的局部化  $\mathbb{Z}[J^{-1}]$  或  $\text{mod } n$  证书环  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , 那么 Bousfield 局部化和幂零完备化是等价的: 即前文诱导的是  $L_E X \cong X_E^\wedge$ 。

## 收敛定理

注意到 E-Adams 谱序列的有界性说明谱序列一定收敛, 于是我们有谱序列  $E$  的第无穷页。

**定义 2.5.39.** 现在对于交换环谱  $E$ , 谱  $X, Y$ , 以及它对应的 E-Adams 谱序列  $\{E_r^{st}, d_r\}$ , 以及  $Y$  的幂零完备化  $Y_E^\wedge$ , 那么有滤过

$$\cdots \hookrightarrow F^2[X, Y_E^\wedge]_* \hookrightarrow F^1[X, Y_E^\wedge]_* = [X, Y_E^\wedge]$$

其中

$$F^s[X, Y_E^\wedge]_* := \ker([X, Y_E^\wedge]_* \xrightarrow{[X, Y_E^\wedge] \rightarrow \bar{E}_{s-1} \wedge Y} [X, \bar{E}_{s-1} \wedge Y])$$

其中  $Y_E^\wedge \rightarrow \bar{E}_{s-1} \wedge Y$  是幂零完备化定义中自然出现的态射 (定义 2.5.33)。

**定义 2.5.40.** 记号同前, 称 E-Adams 谱序列完全收敛到幂零完备化  $[X, Y_E^\wedge]_*$ , 如果下列是同构:

1.  $[X, Y_E^\wedge]_* \rightarrow \varprojlim_s [X, Y_E^\wedge]_* / F^s[X, Y_E^\wedge]_*$
2.  $F^s[X, Y_E^\wedge]_{t-s} / F^{s+1}[X, Y_E^\wedge]_{t-s} \rightarrow E_\infty^{st}(X, Y)$

这里第二个态射是由  $E_\infty$  页的定义和滤过  $F$  的定义得到的。

E-Adams 谱序列的收敛是由  $\pi_0(E)$  的 core 控制的, 由 Solid Ring 分类, 它们是已知的。

**定理 2.5.41** (收敛定理 1).  $E, X, Y$  同上, 如果以下条件成立:

1.  $c\pi_0(E) \cong \mathbb{Z}[J^{-1}]$
2.  $X$  是有限个胞腔的 CW 谱

那么 E-Adams 谱序列完全收敛到局部化  $[X, Y_E^\wedge]_* = \mathbb{Z}[J^{-1}] \otimes [X, Y]$ 。

**定理 2.5.42** (收敛定理 2).  $E, X, Y$  同上, 如果以下条件成立:

1.  $c\pi_0(E) \cong \mathbb{F}_p$
2.  $Y$  是连合谱 (回忆连合指负次数稳定同伦群是零)
3.  $X$  是有限个胞腔的 CW 谱
4.  $[X, Y]_*$  的每个分次都是有限生成群

那么 E-Adams 谱序列完全收敛到  $p$ -adic 完备化  $[X, Y_E^\wedge]_* \cong \varprojlim [X, Y]_* / p^n [X, Y]_*$

### 2.5.6 例子

例子. 如下谱是平坦交换环谱:

1. 球谱  $S$
2. Eilenberg-MacLane 谱  $H\mathbb{F}_p$
3. Thom 谱  $MO, MU, MSp$
4. 拓扑  $K$ -理论谱  $KO, KU$

前两者是容易直接验证的。

例子. 如下谱不是平坦交换环谱

1. Eilenberg-MacLane 谱  $H\mathbb{Z}$
2. Thom 谱  $MSU$

例子 (Adams 谱序列). 1. 取  $X = S, E = H\mathbb{F}_p$ , Adams 谱序列变成了

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}_p^*}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \Longrightarrow \pi_*(S) \otimes \mathbb{Z}_p^\wedge$$

其中  $\mathcal{A}_p^*$  是余 Steenrod 代数。

2. 取  $X = S, E = MU$ , Adams 谱序列变成了

$$\mathrm{Ext}_{MU_*(MU)}(MU_*, MU_*) \Longrightarrow \pi_*(S)$$

(Adams-Novikov 谱序列)

利用对  $\mathbb{F}_2$  的余 Steenrod 代数的计算, 我们得到了如下的图表, 于是我们对稳定同伦群的 2- 部分  $\pi_k(S) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}$  有了基本的了解。

## 2.6 对古典构造的评注

这一章节中我们迅速地介绍了最为原始的稳定同伦论的进展: 它们主要集中在对 CW-prespectrum 以及相关的研究上。但是在介绍这部分内容的经典教材 [Ada95] 中很容易注意到许多构造都是相当具有技术性的: 一个重要的例子就是对 smash product 的构造, 在相关章节中我们已经指出恰当选取构造是统一研究谱的一个障碍。

稳定同伦论的上述古典内容脱胎于 20 世纪中期的前沿代数拓扑内容, 并且反过来促进了这些内容的发展。在历史上稳定同伦论的第一个重要的应用正是 Adams 谱序列, 这是 Adams 在研究 Hopf Invariant One Problem 时引入的。尽管当时的代数拓扑学家们对稳定现象的认知还不是非常深刻, 但是 Adams 的这一工作被证明是划时代意义的。

与此同时一些和稳定同伦论共同发展的研究内容是  $K$ -理论和配边理论: 前者引入了广义同调和上同调理论, 后者则是 Thom 将配边问题转化为对 Thom 谱的研究。



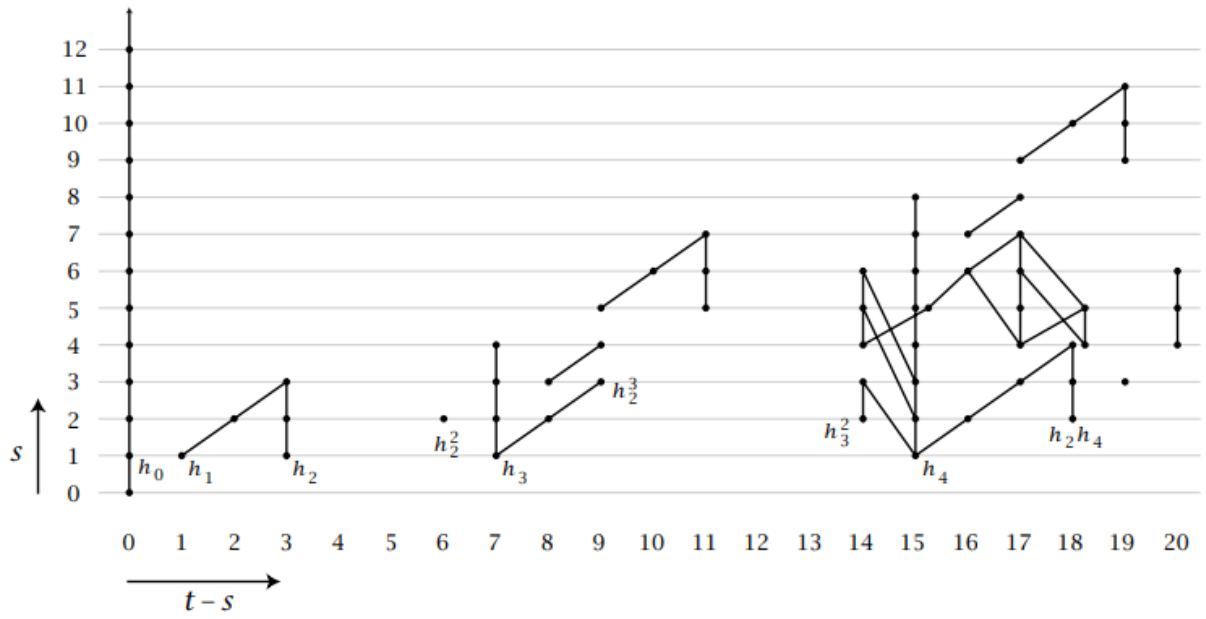


图 2.2:  $E_2$  页

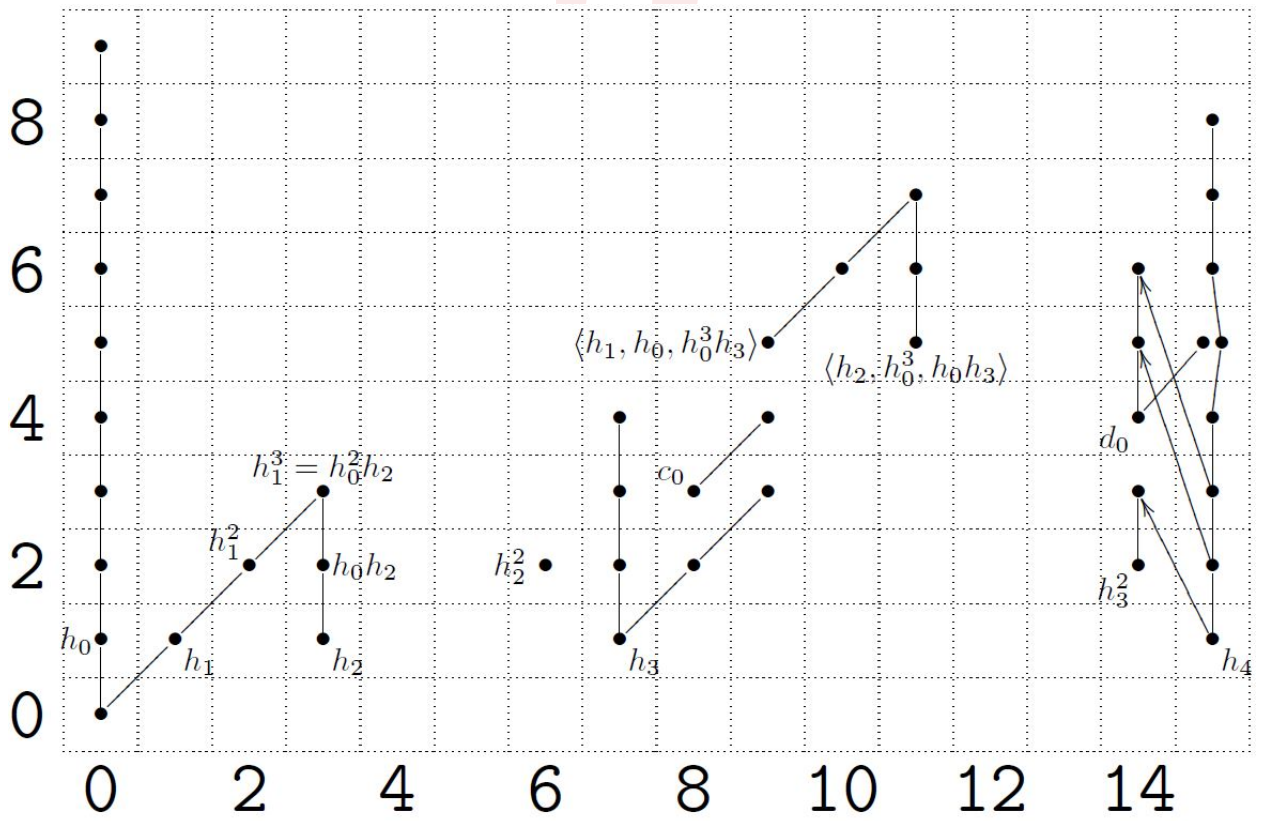


图 2.3:  $E_\infty$  页





以上是较早的稳定同伦论的大致内容以及一些在代数拓扑（乃至几何）上的应用。早期代数拓扑学家们尽管凭借着出色的直觉和对繁杂技术细节的不懈验证为稳定同伦论打下了基石，但是构造出的稳定同伦范畴仍然不尽如人意。

在讨论稳定同伦范畴时我们一般希望构造出的这个范畴满足如下性质：同样记谱范畴为 **Spectra**，以及稳定同伦范畴 **Ho(Spectra)**。

我们还需要 **Top\*** 和 **Spectra** 之间的关系，因此谱范畴还应该配备有：

$$\Omega^\infty : \mathbf{Spectra} \rightarrow \mathbf{Top}^*$$

将每个 Spectrum  $E$  映为  $\varinjlim \Omega^n E_n$

$$\Sigma^\infty : \mathbf{Top}^* \rightarrow \mathbf{Spectra}$$

将每个拓扑空间  $X$  映为纬悬谱  $\Sigma^\infty X$

纬悬谱的  $\Omega$  化:  $QX = \varinjlim \Omega^n \Sigma^n X$ 。

Smash Product:  $\wedge$

我们希望 **Spectra** 满足：

1.  $\wedge$  使得 **Spectra** 是 symmetric monoidal 范畴
2.  $\wedge$  的单位是球谱
3.  $\Sigma^\infty$  是  $\Omega^\infty$  的左伴随
4. 以下两个自然变换存在其一：

$$\varphi : (\Omega^\infty D) \wedge (\Omega^\infty E) \rightarrow \Omega^\infty (D \wedge E) \quad D, E \in \mathbf{Spectra}$$

$$\gamma : \Sigma^\infty (X \wedge Y) \rightarrow (\Sigma^\infty X) \wedge (\Sigma^\infty Y), \quad X, Y \in \mathbf{Top}^*$$

并且它们和 **Spectra**, **Top\*** 中的单位子，交换子，结合子都是交换的。

5. 存在自然的弱等价

$$\theta : \Omega^\infty \Sigma^\infty \rightarrow QX, \quad X \in \mathbf{Top}^*$$

使得有交换图

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta} & \Omega^\infty \Sigma^\infty X \\ & \searrow \iota & \downarrow \theta \\ & & QX \end{array}$$

这里  $\iota$  是自然的嵌入， $\eta$  是伴随对的单位。

我们需要确立一个意识： $\Omega$ -spectrum 相比 Prespectrum 是更为本质的，但是我们退而求其次考虑 Prespectrum 的原因是因为  $\Omega$ -spectrum 构成的范畴并不是完备的。

然而数学并不总是幸运的，[Lew91] 指出不存在任何构造满足上述要求。这说明我们在研究稳定同伦范畴时，对取同伦之前是什么没有一个良好乃至典范的选择。Adams 选择了 CW-Prespectrum，Boardman 则选择了另外的构造。这是因为早期的稳定同伦论研究者并没有挖掘

到稳定现象的根本，大家只是在跟随着几个传统代数拓扑的现象以及对 K-理论研究中自然浮出水面的现象在这门分支中开疆拓土。这并不是在说早期工作是没有意义的，事实上正是这些富有技术性的、并且展现了研究者的高超直觉的早期工作让大家意识到了这一切的背后是有深层内容存在的。

正如 J.P. May 的著名文章 [May98] 中提及的那样，理想主义色彩的野兔对现有的繁杂理论不满意，他希望找到一个推广到极致的精美理论；更为实用主义的乌龟则是希望在已有的稳定范畴上加以限制使得它最后得到一个满足足够好性质的数学对象。

从稳定同伦论这门学科的发展来看，我们最终看到野兔占据了上风：模型范畴、无穷范畴等诸多抽象分支在这之后蓬勃发展。我们在下一部分将会看到模型范畴这一个例子，在下一章则会看到对前述“稳定同伦范畴取同伦之前应该是什么”这个问题的一个野兔式的回答。

## 2.7 支线：模型范畴

至此我们停止对 Adams 构造的范畴的讨论，前文关于默认采用 Adams 构造的约定从本章开始取消，同样也暂时取消  $\mathbf{Spectra}$  和  $\mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$  的定义。

模型范畴源于对同伦论的抽象化，简而言之我们通过在一个一般的范畴中指定一些特殊的态射（满足一些基本的性质），进而构建出一套同伦理论。接下来我们叙述模型范畴的定义，从定义很容易看出它和原有的代数拓扑中的同伦论之间的联系。

**定义 2.7.1** (模型范畴，弱等价范畴). 一个模型范畴是一个范畴  $\mathcal{C}$  以及三类态射：

1. 弱等价： $W_{\mathcal{C}}$
2. 纤维化： $Fib_{\mathcal{C}}$
3. 余纤维化： $Cof_{\mathcal{C}}$

满足每一类态射在复合下封闭。

如果一个态射是弱等价且是纤维化，那么称它为 acyclic 纤维化，同理有 acyclic 余纤维化。我们还要求如下条件：

1.  $\mathcal{C}$  有所有（小）极限和余极限，特别地有始对象和终对象
2. 所有同构都是弱等价
3. 弱等价满足 2-out-of-3 性质：即如果  $f, g, gf$  中的两个是弱等价，那么第三个也是
4.  $(Cof_{\mathcal{C}} \cap W_{\mathcal{C}}, Fib_{\mathcal{C}})$  和  $(Cof_{\mathcal{C}}, Fib_{\mathcal{C}} \cap W_{\mathcal{C}})$  都是弱分解系统。

特别地，如果去除所有有关纤维化和余纤维化的定义，去除要求 1,3：那么仅称这个范畴为弱等价范畴。

**定义 2.7.2** (弱分解系统).  $E, M$  是  $\mathcal{C}$  的态射集的子集，称  $(E, M)$  是弱分解系统，如果以下成立：

1.  $E$  恰好是对每个  $M$  中态射都具有左提升性质的全体态射



2.  $M$  恰好是对每个  $E$  中态射都具有右提升性质的全体态射
3. 每个  $\mathcal{C}$  中的态射  $f$  可以被分解为  $f = m \circ e, e \in E, m \in M$

注记. 给定弱等价和纤维化后, 余纤维化也被唯一确定了, 反之同理。

**定义 2.7.3.** 给定模型范畴  $\mathcal{C}$ , 一个对象  $X \in \mathcal{C}$  被称为

1. fibrant: 如果到终对象的态射是纤维化
2. cofibrant: 如果始对象到它的态射是余纤维化
3. bifibrant: 如果是 cofibrant 且 fibrant 的。

特别地, 如果一个函子将任何一个对象  $X$  变换到与之弱等价的 cofibrant 对象  $QX$ , 即由模型范畴公理有分解

$$\emptyset \rightarrow QX \rightarrow X$$

那么称  $Q$  为 cofibrant replacement functor。

对偶地定义 fibrant replacement functor。

一般来说 bifibrant 的对象是我们真正要关心的对象, 但是这样的对象构成的全子范畴一般在范畴论角度而言并不具有很良好的性质, 正如之前 Spectrum 到 Prespectrum 一样, 这里模型范畴的构造思路也是某种妥协。

现在我们阐释如何从这三类态射得到一套同伦论:

**定义 2.7.4.** 给定模型范畴  $\mathcal{C}$ , 对象  $X \in \mathcal{C}$ 。

1.  $X$  的一个路径空间对象  $Path(X)$  是  $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$  的 Acyclic Cofibration-Fibration 分解:

$$X \xrightarrow[\in W]{i} Path(X) \xrightarrow[\in Fib]{(p_0, p_1)} X \times X$$

2.  $X$  的一个柱对象是  $\nabla_X : X \amalg X \rightarrow X$  的 Cofibration-Acyclic Fibration 分解:

$$X \amalg X \xrightarrow[\in Cof]{(i_0, i_1)} Cyl(X) \xrightarrow[\in W]{p}$$

**定义 2.7.5.** 给定两个平行态射  $f, g : X \rightarrow Y$ :

1. 左同伦  $\eta : f \Rightarrow_L g$  是一个态射  $\eta : Cyl(X) \rightarrow Y$ , 满足

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Cyl(X) & \longleftarrow & X \\ & f \searrow & \downarrow \eta & \swarrow g & \\ & & Y & & \end{array} .$$

2. 右同伦  $\eta : f \Rightarrow_R g$  是一个态射  $\eta : X \rightarrow Path(Y)$  满足

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & f \swarrow & \downarrow \eta & \searrow g & \\ Y & \longleftarrow & Path(Y) & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

注意到柱对象和路径空间对象都不是唯一的，但是在  $X, Y$  条件较好的情况下这没有影响：

**命题 2.7.6** ([Hov99, Proposition 1.2.5]).

1. 如果  $X$  是 *cofibrant* 的，那么左同伦  $f \Rightarrow_L g$  说明对于任何路径空间对象都有右同伦。
2. 如果  $Y$  是 *fibrant* 的，那么右同伦  $f \Rightarrow_R g$  说明对于任何柱对象都有左同伦。
3. 如果  $X$  是 *cofibrant* 的， $Y$  是 *fibrant* 的，那么反复应用前两点即知同伦和柱对象以及路径空间对象的选取无关。

现在我们可以考虑同伦范畴了：

**定义 2.7.7.** 给定模型范畴  $\mathcal{C}$ ，定义同伦范畴  $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$  为：

1. 对象为  $\mathcal{C}$  中的 *bifibrant* 对象
2. 态射为  $\mathcal{C}$  中态射的同伦类，上一命题说明 *bifibrant* 对象之间的态射集上左同伦和右同伦诱导的等价关系是相同的，并且和柱对象以及路径空间对象的选取无关。

可以验证这是良定义的，并且利用模型范畴的定义我们得到模型范畴的 Whitehead 定理：

**引理 2.7.8** (Whitehead 定理). *Bifibrant* 对象之间弱等价等价于同伦等价。

因此利用这一结果容易验证

**命题 2.7.9.** 有范畴等价

$$\mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}[W^{-1}]$$

后者是对弱等价做范畴的局部化。

这样我们就完成了抽象同伦论的搭建。为了方便理解，我们给出两个拓扑空间上的模型结构：

**命题 2.7.10** (Quillen:[Hov99, Theorem 2.4.19]).  $f$  是：

1. 弱等价：如果是弱同伦等价
2. 纤维化：如果是 *Serre* 纤维化
3. 余纤维化：如果它对每个 *acyclic* 纤维化都具有左提升性质

这使得 **Top** 构成了一个模型范畴。*Cofibration* 是 *Retract of Relative Cell Complex*，所有对象都是 *Fibrant* 的，*Cofibrant* 对象是 *Retract of Cell Complex* (态射  $f: X \rightarrow Y$  是 *Relative Cell Complex* 如果  $Y$  是由  $X$  粘结胞腔得到的，并且  $f$  是自然的嵌入，*Retract* 指箭头范畴中的 *Retract*，即如下图表中的  $g: A \rightarrow B$ )

$$\begin{array}{ccccc} id_A: & A & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A \\ & \downarrow g & & \downarrow f & & \downarrow g. \\ id_B: & B & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & B \end{array}$$

**命题 2.7.11** (Mixed).  $f$  是:

1. 弱等价: 如果是弱同伦等价
2. 纤维化: 如果是 Hurewicz 纤维化
3. 余纤维化: 如果它对每个 acyclic 纤维化都具有左提升性质

这使得 **Top** 构成了一个模型范畴, *Cofibrant* 对象是具有 *CW* 复形同伦型的空间。

事实上 Mixed Model Structure 正是经典同伦论中使用的模型结构。

现在这两个例子已经为我们提供了一定的直觉了, 我们来考虑 Sequential Prespectrum 上的模型结构。实际上我们现在开始考虑的是一种更一般、更不那么具有技术性的稳定同伦范畴的构造, 我们在第 2.5 节开头的评注中曾经提及过它。

我们仍然考虑序列谱:

**定义 2.7.12** (序列谱). **Spectra** 是指拓扑空间构成的 Prespectrum (一系列空间和一系列结构映射) 作为对象构成的范畴, 态射是 Adams 构造中定义的保持分次的 function: 即和结构映射交换的一族拓扑空间之间的映射。这里保持分次意指不允许这族映射对指标产生平移: 即只能形如  $\{f_n : X_n \rightarrow Y_n\}$ 。

我们现在为 **Spectra** 赋予两个模型结构:

**定义 2.7.13** (Strict Model Structure). **Spectra** 中的一个态射  $f : X \rightarrow Y$  是

1. strict 弱等价: 如果每个分量  $f_n : X_n \rightarrow Y_n$  都是 **Top<sub>Quillen</sub>** 中的弱等价
2. strict 纤维化: 如果每个分量都是 **Top<sub>Quillen</sub>** 中的纤维化
3. strict 余纤维化: 如果它对每个 acyclic 纤维化都具有左提升性质

回忆我们实际上对  $\Omega$ -谱感兴趣, 自然我们希望 Bifibrant 对象恰好是它们, 但是我们发现距离这个目标 Strict Model Structure 中的弱等价还是太少了: 模型范畴的重要结果 Bousfield Localization 指出为了达成我们这里的目标, 应当对弱等价做的更改是: 将逐分量弱等价修改为稳定弱等价 (即诱导了稳定同伦群的同构), 同时保持 strict 余纤维化不变。

**定义 2.7.14** (Stable Model Structure). **Spectra** 中的一个态射  $f : X \rightarrow Y$  是

1. stable 弱等价: 如果它诱导稳定同伦群的同构
2. stable 纤维化: 如果它对每个 acyclic strict 余纤维化都具有右提升性质
3. stable 余纤维化: 如果它是 strict 余纤维化



### 2.7.1 导出

尽管我们已经建立了模型范畴上的同伦论，但是需要考虑的是模型范畴和同伦范畴的关系：这个想法的自然来源很明显是同调代数中的导出范畴。

**定义 2.7.15.** 给定模型范畴  $\mathcal{C}$ ，弱等价范畴  $\mathcal{D}$ ，以及函子  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 。记  $\mathcal{C}_c, \mathcal{C}_f, \mathcal{C}_{cf}$  分别为 cofibrant 对象，fibrant 对象和 bifibrant 张成的全子范畴。

1. 如果  $F$  保持弱等价，则  $F$  诱导了函子

$$\mathbf{Ho}(F) : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$$

称为全导出函子

2. 如果  $F|_{\mathcal{C}_c}$  保持弱等价，那么在相差自然同构意义下有交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{C}_c & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) & \xlongequal{\quad} & \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\mathbb{L}F} & \mathbf{Ho}(\mathcal{D}) \end{array}$$

其中  $Q$  是某个 cofibrant replacement functor， $\mathbb{L}F$  称为  $F$  的左导出函子，满足

$$\mathbb{L}F(X) \cong F(QX)$$

3. 对偶地定义右导出函子  $\mathbb{R}F$

**例子.** 上链复形范畴的投射模型结构中 *cofibrant replacement* 就是投射消解，于是这就回到了同调代数中的导出函子。

拓扑空间范畴的 *Mixed Model Structure* 中 *cofibrant replacement* 就是 *CW* 逼近，于是左导出就变成了过渡到 *CW* 复形。

**定义 2.7.16** (Quillen 伴随). 对于模型范畴  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ ，一对伴随函子

$$(F \dashv G) : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}$$

称为 Quillen 伴随，如果  $F$  保持余纤维化和 acyclic 余纤维化。注意提升性质说明  $F$  保持余纤维化  $\iff G$  保持平凡余纤维化， $F$  保持平凡余纤维化  $\iff G$  保持纤维化。

**命题 2.7.17** ([Hov99, Lemma 1.1.12]). 模型范畴  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  之间的 Quillen 伴随函子  $(F \dashv G)$  的导出函子  $\mathbb{L}F, \mathbb{R}G$  都存在，并且它们是同伦范畴之间的伴随

$$(\mathbb{L}F \dashv \mathbb{R}G) : \mathbf{Ho}(\mathcal{C}) \rightleftarrows \mathbf{Ho}(\mathcal{D})$$

**定义 2.7.18** (Quillen 等价). 一对 Quillen 伴随是 Quillen 等价，如果它们诱导的  $\mathbb{L}F, \mathbb{R}G$  是范畴等价。





**命题 2.7.19.** 对于赋予稳定模型结构的谱范畴  $\mathbf{Spectra}_{Stab}$ ，伴随函子

$$(\Sigma \dashv \Omega) : \mathbf{Spectra} \rightleftarrows \mathbf{Spectra}$$

是 *Quillen* 等价，其导出函子同构于平移函子

$$\mathbb{L}\Sigma \cong [1], \mathbb{R}\Omega \cong [-1]$$

这是一件很自然的事情：毕竟  $\Sigma$  在稳定同伦群下的表现和  $[1]$  无异：同时这也部分指出了为什么谱范畴上“正确”的同伦论应当是将弱等价选取为稳定弱等价。

对于序列谱构造，我们研究的稳定同伦范畴正是  $\mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$ ：它最终被证明是与 Adams 的构造处的稳定同伦范畴等价的。

## 2.8 传统理论的终点

20 世纪中后期，稳定同伦论学家们费尽心思地寻找好的稳定同伦范畴，他们做了许多尝试，得到的不完美的构造包括

1. Adams 的构造：CW-Prespectrum
2. 序列谱：Sequential Spectrum
3. 对称谱：Symmetric Spectrum
4. 正交谱：Orthogonal Spectrum
5. Coordinate-free Spectrum

正如 [Lew91] 指出的，这些努力注定没有完美的结局。人们逐渐意识到这件事情的本质是因为谱对象本身就难以在  $1-$  范畴中处理，因为一大难点就是这些构造都能得到正确的同伦范畴，却不能够很好地回答在同伦之前是什么：这实际上是高阶结构的某种隐约体现。

在这些工作中比较接近成功的是 [Elm97]，他们引入了  $S-$  模并将整个谱范畴视为某种同伦意义上的代数理论：这实际上已经很接近正确答案了。

尽管早在 1968-1972 年，Michael Boardman, Rainer Vogt and Peter May 就已经引入了 operad 的概念，人们一开始并没有完全注意到其背后的深刻内容，自 [Elm97] 以后人们才逐渐意识到高阶结构的重要性。随着近年来高阶范畴论的蓬勃发展，稳定同伦范畴被发现是在  $\infty-$  范畴中的一个自然出现的对象。

## 第三章 现代构造：稳定无穷范畴

### 3.1 无穷范畴的模型

我们首先简要地介绍高阶范畴的大致思路。高阶范畴给出的内容是在普通的态射（1-态射）之间有高阶的态射（2-态射），这种高阶信息可以被视作某种同伦，而取同伦范畴正是抹去了这一部分信息，这也是我们说用 1-范畴勉强处理谱这种高阶对象是困难的一个小证据。

下面我们来介绍无穷范畴的模型：首先值得注意的是单纯集天然就是描述普通范畴的一个模型：对象是 0-单形，态射是 1-单形，态射的复合通过 2-单形见证，等等等等。在这个观点下高阶范畴很自然地可以采用单纯集作为它的模型。

#### 3.1.1 单纯集

我们将要在单纯集中引入模型结构，但是这件事情需要几何实现：即给定单形在某个范畴中的像，那么我们自然应该知道一个单纯复形在这个范畴中的像是什么：在拓扑空间上这就是把标准单形按照正确的方式粘合，对一般的范畴这实际上是一个一个相当广义的范畴论结果。

**命题 3.1.1** (脉-几何实现伴随). 给定函子  $F : M \rightarrow T$ , 它沿 Yoneda 嵌入  $\mathbf{y} : M \rightarrow \text{Func}(M^{op}, \mathbf{Set})$  的左 Kan 扩张是如下函子的左伴随：

$$\begin{aligned} T &\longrightarrow \text{Func}(M^{op}, \mathbf{Set}) \\ x &\mapsto \text{Hom}_T(F-, X) \end{aligned}$$

即：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mathbf{y}} & \text{Func}(M^{op}, \mathbf{Set}) \\ & \searrow F & \downarrow \text{Lan}_{\mathbf{y}} F \quad \uparrow X \mapsto \text{Hom}_T(F-, X) \\ & & T \end{array}$$

**定义 3.1.2** (单形范畴). 定义单纯范畴  $\Delta$  如下：

其对象为所有形如  $[n] = \{0, \dots, n\}$  的集合， $n \geq 0$

态射集  $\text{Hom}_{\Delta}([m], [n])$  为所有集合  $[m]$  到  $[n]$  的保序映射构成。

$\Delta$  中有面映射和退化映射，并且任何  $\Delta$  中的态射都是若干面映射和退化映射的复合。

**定义 3.1.3** (单纯集范畴). 定义单纯集范畴  $\mathbf{sSet} = \text{Func}(\Delta^{op}, \mathbf{Set})$ ，即  $\Delta$  上的预层。

现在我们取  $M = \Delta$  为单形范畴， $\text{Func}(\Delta^{op}, \mathbf{Set})$  即为单纯集范畴  $\mathbf{sSet}$ 。取  $T$  为拓扑空间范畴  $\mathbf{Top}$ ， $F$  为将  $\Delta$  的元素  $n$  映为标准单形  $\Delta^n$ ，单形范畴中的面映射和退化映射对应到标准单形的面映射和退化映射。那么我们就得到：





**定理 3.1.4.** 存在如下伴随对:

$$\mathbf{sSet} \begin{array}{c} \xrightarrow{|-|} \\ \xleftarrow[\text{Sing}(-)]{\perp} \end{array} \mathbf{Top}$$

其中  $\text{Sing}(-)$  为 *Singular simplicial complex* 函子,  $|-|$  则为几何实现。

利用几何实现, 我们给出单纯集上的模型结构:

**定义 3.1.5** (Horn).  $0 \leq i \leq n$ , 单纯集  $\Lambda_i[n]$  定义为在  $\partial\Delta[n]$  去掉第  $i$  个顶点所对的面得到的单纯集, 称为单形  $\Delta[n]$  的第  $i$  个尖角 (Horn)。

**定理 3.1.6** ([Bal21, Proposition 6.1.3]).  $\mathbf{sSet}$  上具有模型结构, 称为 *Kan-Quillen* 模型结构: 态射是

1. 弱等价: 如果它对应着拓扑空间中几何实现的弱同伦等价
2. 余纤维化: 如果它是单态射
3. 纤维化: 如果它对所有  $\Lambda_i[n] \hookrightarrow \Delta[n]$  具有右提升性质,  $0 \leq i \leq n, n > 0$ 。
4. *acyclic* 纤维化: 如果它对所有  $\partial\Delta[n] \hookrightarrow \Delta[n]$  具有右提升性质,  $n \geq 0$ 。

所有对象都是 *cofibrant* 的。

如下结果说明单纯集实际上正确地描述了拓扑空间的同伦论:

**定理 3.1.7** ([Bal21, Theorem 6.1.9]). 伴随函子

$$|-| \dashv \text{Sing} : \mathbf{sSet}_{\text{Kan}} \rightleftarrows \mathbf{Top}_{\text{Quillen}}$$

是 *Quillen* 等价。

**定义 3.1.8** (Kan 复形). Kan 复形是 *Fibrant* 的单纯集。即它对尖角  $\Lambda_i[n] \hookrightarrow \Delta[n], 0 \leq i \leq n, n > 0$  满足右提升性质: 直观上这是说每个尖角都能被填满。

注记. 回忆最开始的讨论: 作为高阶范畴的模型, Kan 复形实际上展示的含义是高阶态射都被某个更高阶的态射见证了它的可逆性。特别地: 拓扑空间在  $\text{Sing}$  下的像都是 Kan 复形, 那么  $\text{Sing}|-|$  是一个 *Fibrant Replacement Functor*。

这件事已经很好地解释了拓扑空间和 Kan 复形之间的紧密联系了。

然而在经典代数拓扑中, 拓扑空间的“低阶”同伦信息恰好被基本群胚  $\Pi_1$  描述, 那么这里自然我们可以将 Kan 复形视作  $\infty$ -群胚。

**定义 3.1.9** ( $\infty$ -群胚).  $\infty$ -群胚定义为一个 Kan 复形 (它被称为  $(\infty, 0)$ -范畴: 第二个指标的意义是高于 0 阶的态射都在相差更高阶态射的意义下可逆)

我们当然并不是总会处理所有阶态射都可逆的范畴, 毕竟不是所有东西都有群胚的性质。但是我们希望处理的是和普通的范畴 (或许现在叫它 1-范畴更好) 差不多的对象: 这里重要的观察是将上述论断翻译成单纯集后, 它恰好是“内尖角”的提升性质: 这里内尖角指  $\Lambda_i[n], (0 < i < n)$ , 例如  $\Lambda_1[2]$  的可提升实际上就是 1-态射可复合。这催生了如下定义

**定义 3.1.10** ( $(\infty, 1)$ -范畴).  $(\infty, 1)$ -范畴是指对内尖角  $\Lambda_i[n] \hookrightarrow \Delta[n], (0 < i < n)$  满足提升性质的单纯集, 也可称它为拟范畴。



### 3.1.2 拟范畴

我们现在来看拟范畴是如何记录高阶信息的。

**定义 3.1.11.** 记拟范畴为  $\mathcal{C}$

1.  $\mathcal{C}_n$  指  $n$  维单形
2.  $x \in \mathcal{C}_0$  为 0 维单形, 称为  $\mathcal{C}$  的对象
3.  $f \in \mathcal{C}_1$  为 1 维单形,  $d_0 f = x, d_1 f = y$ , 称为  $x$  到  $y$  的态射
4.  $x$  的恒同态射是指退化 1 维单形  $x \rightarrow x$ , 记为  $1_x$
5. 如果存在 2 维单形  $\sigma$ , 使得  $d_0 \sigma = g, d_2 \sigma = f, d_1 \sigma = h$ , 那么称  $h$  为  $g$  和  $f$  的复合 (这个复合被  $\sigma$  见证)
6.  $A \subset \mathcal{C}_0$  为对象的子集: 它张成的蛮子范畴指  $\mathcal{C}$  的最大的单纯子集, 满足其包含的 0 维单形均为  $A$  中元素
7. 设  $f, g: x \rightarrow y$  为  $\mathcal{C}$  中态射: 称它们同伦, 如果以下等价条件成立:
  - (a) 存在  $1_x, f, g$  拼成的 2 维单形
  - (b) 存在  $1_x, g, f$  拼成的 2 维单形
  - (c) 存在  $f, g, 1_y$  拼成的 2 维单形
  - (d) 存在  $g, f, 1_y$  拼成的 2 维单形
  - (e) 存在  $1_x, 1_y, f, g$  拼成的方块 ( $\Delta[1] \times \Delta[1]$ )
  - (f) 存在  $1_x, 1_y, g, f$  拼成的方块

这些条件等价恰好是因为内尖角填充性质: 这里我们看到了  $(\infty, 1)$  范畴实际上是某种可以“忽略”高阶结构的范畴。

作为推论: 态射的同伦是等价关系, 被态射复合保持, 并且态射的复合在同伦意义下是唯一的。

**定义 3.1.12.** 拟范畴  $\mathcal{C}$  的同伦范畴是普通范畴  $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$ , 满足对象是  $\mathcal{C}$  中对象, 态射是  $\mathcal{C}$  中态射的同伦类。

**定义 3.1.13.**  $\mathcal{C}$  为拟范畴,  $x, y$  为  $\mathcal{C}$  中对象:

1. 单纯集  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^{\triangleright}(x, y)$  定义为

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^{\triangleright}(x, y)_n = \{\sigma \in \mathcal{C}_{n+1} \mid \sigma|_{\Delta\{0, \dots, n\}} = x, \sigma(n+1) = y\}$$

2. 单纯集  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^{\triangleleft}(x, y)$  定义为

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}^{\triangleleft}(x, y)_n = \{\sigma \in \mathcal{C}_{n+1} \mid \sigma(0) = x, \sigma|_{\Delta\{1, \dots, n+1\}} = y\}$$



3. 单纯集  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}^{\square}(x, y)$  定义为

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}^{\square}(x, y)_n = \{\sigma : \Delta[n] \times \Delta[1] \rightarrow \mathcal{C} \mid \sigma|_{\Delta[n] \times \{0\}} = x, \sigma|_{\Delta[n] \times \{1\}} = y\}$$

**定理 3.1.14.** 上述定义的三种单纯集都是 Kan 复形，并且相互同伦等价（回忆单纯集的同伦等价是相对  $\mathbf{sSet}$  上的 Kan-Quillen 模型结构谈论的）

### 3.1.3 $\mathbf{sSet}$ — 充实范畴

我们上述定义出的  $(\infty, 1)$ - 范畴是基于拟范畴模型的，注意到  $(\infty, 1)$  相当于高于 1 阶的态射结构都是简单的（均可逆），因此一个自然的猜测是将一个普通范畴充实于  $\mathbf{sSet}$  能否得到类似的结论。如果这的确可行，那么这相比拟范畴模型无疑是一个更好的用来研究  $(\infty, 1)$ - 模型：一个简单的例子就是定义态射空间时不会有任何的选择上的困难。

现在我们考虑  $\mathbf{sSet}$ — 充实范畴：态射空间的 0 维单形称为 1-态射，态射空间的 1 维单形称为 2-态射，称它为 1-态射之间的同伦。

例子.

1.  $\mathbf{sSet}$  自身是  $\mathbf{sSet}$ — 充实的：态射空间的  $n$  维单形对应于  $X \times \Delta[n]$  到  $Y$  的单纯映射
2.  $\mathbf{Top}$  是  $\mathbf{sSet}$ — 充实的：态射空间赋予紧开拓扑后再取奇异单纯集：这相当于  $X \times \Delta^n \rightarrow Y$ 。

**定义 3.1.15.**  $\mathbf{sSet}$ — 充实范畴的  $\pi_0$ - 范畴是指先将态射空间的  $\mathbf{sSet}$  对象转化为 CW 复形的同伦范畴中的对象，再取  $\pi_0$  变为  $\mathbf{Set}$ ：即考虑对应态射空间单纯集的几何实现的道路连通分支。

这样保持对象，将态射空间替换为道路连通分支得到的普通范畴称为  $\mathbf{sSet}$ — 充实范畴  $\mathcal{C}$  的  $\pi_0$ - 范畴  $\pi_0\mathcal{C}$ 。

我们来考虑拟范畴和  $\mathbf{sSet}$ — 充实范畴之间的转换：这实际上依然是某种脉-几何实现伴随：我们需要定义一对伴随函子

$$(\mathcal{C} \dashv \mathfrak{N}) : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$$

这只需要给出  $\Delta \rightarrow \mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$  即可：直觉上  $\Delta[n]$  应该对应着  $0 \rightarrow 1 \rightarrow \cdots \rightarrow n$ （回忆我们是如何使用  $\mathbf{sSet}$  作为范畴的模型的）。但是这里态射的复合是严格的，我们需要的是态射复合被高维态射见证的构造，那么这就是如下

**定义 3.1.16.** 对于  $n \geq 0$ ，定义  $\mathcal{C}^n \in \mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$ ：它有对象  $0, 1, \dots, n$ ，态射空间

$$\mathcal{C}^n(i, j) = \text{Nerve}(P_{ij})$$

$$P_{ij} = \begin{cases} \emptyset & i > j \\ \text{Poset} : \{X \mid \{i, j\} \subseteq X \subseteq \{i, i+1, \dots, j\}\} & i \leq j \end{cases}$$

这里偏序集天然的是一个范畴，于是可以取脉得到单纯集。

实际上态射空间  $\mathcal{C}^n(i, j)$  就是沿着递增箭头从  $i$  走到  $j$  的方式，它同构于  $\Delta[1]^{j-i-1}$ 。



**定义 3.1.17.** 这样我们就给出了一对伴随函子

$$(\mathfrak{C} \dashv \mathfrak{N}) : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$$

左伴随  $\mathfrak{C}$  限制到  $\Delta$  上是上文定义的  $\mathcal{C}^n$ , 右伴随  $\mathfrak{N}$  称为同伦脉函子。

直接验证知:

**命题 3.1.18.**  $\mathcal{C}$  是 Kan 复形充实范畴, 那么  $\mathfrak{N}\mathcal{C}$  是拟范畴。

之前我们提及过拟范畴中的三种态射空间之间是相互同伦等价的: 实际上将它过渡到  $\mathbf{sSet}$ -充实范畴下这一性质仍然不变:

**定理 3.1.19.** 1. 给定拟范畴  $\mathcal{C}$ , 那么有单纯集的弱等价

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \simeq \mathcal{C}\mathcal{C}(x, y)$$

其中左侧  $\mathrm{Hom}$  可以是任何一个前文定义的拟范畴的态射空间

2. 给定 Kan 复形充实范畴  $\mathcal{C}$ , 那么有 Kan 复形的弱等价 (进而是同伦等价)

$$\mathcal{C}(x, y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{N}\mathcal{C}}(x, y)$$

其中右侧  $\mathrm{Hom}$  可以是任何一个前文定义的拟范畴的态射空间

我们现在说明: 在恰当模型结构下, 伴随对  $\mathfrak{C} \dashv \mathfrak{N}$  是 Quillen 伴随。由于这里被关注的是  $\mathbf{sSet}$  中的拟范畴/ $\mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$  中的 Kan 复形充实范畴, 我们自然应当选取模型结构使得 Bifibrant 对象正是它们: 这是我们在这里抛弃 Kan-Quillen 模型结构的原因。

**定义 3.1.20.**

1. 一个  $\mathbf{sSet}$  中的态射是弱范畴等价, 如果对于任何拟范畴  $X$ , 诱导的  $\mathbf{sSet}$ -充实的态射空间  $\mathrm{Hom}(B, X) \rightarrow \mathrm{Hom}(A, X)$  之间的态射诱导的是将  $\mathbf{sSet}$  视为 1-范畴 (即抹去所有高阶信息) 之间的对象同构类的双射
2. 一个  $\mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$  中的态射 (即一个函子  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  是  $\mathbf{sSet}$ -充实) 是 Dwyer-Kan 等价, 如果
  - (a) 对于任何  $\mathcal{C}$  中对象  $x, y$ ,  $F$  诱导的  $\mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{D}(Fx, Fy)$  是  $\mathbf{sSet}_{Kan}$  的弱等价
  - (b) 诱导了  $\pi_0 \mathcal{C} \rightarrow \pi_0 \mathcal{D}$  的范畴等价
3. 一个  $\mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$  中的态射是 Dwyer-Kan 纤维化, 如果
  - (a) 对于任何  $\mathcal{C}$  中对象  $x, y$ ,  $F$  诱导的  $\mathcal{C}(x, y) \rightarrow \mathcal{D}(Fx, Fy)$  是  $\mathbf{sSet}_{Kan}$  中的纤维化
  - (b) 对于任何  $c \in \mathcal{C}, d \in \mathcal{D}$ , 以及  $\mathcal{D}$  中的同伦等价  $e : Fx \rightarrow d$ , 存在  $c' \in \mathcal{C}$ , 同伦等价  $p : c \rightarrow c'$  使得  $Fp = e$ 。

**定理 3.1.21** ([Bal21, Proposition 6.2.4, Proposition 11.1.4, Proposition 11.1.16]).

$\mathbf{sSet}$  具有 Joyal 模型结构: 态射是



1. 弱等价：如果是弱范畴等价
2. 纤维化：如果对所有 *acyclic* 余纤维化有右提升性质
3. 余纤维化：如果是单射

其 *Fibrant* 对象恰好为拟范畴  $\mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}$  具有 *Bergner* 模型结构：态射是

1. 弱等价：如果它是 *Dwyer-Kan* 等价
2. 纤维化：如果它是 *Dwyer-Kan* 纤维化
3. 余纤维化：如果它对所有 *acyclic* 纤维化有左提升性质

其 *Fibrant* 对象恰好为 *Kan* 复形充实范畴

在这些模型结构下，

$$(\mathfrak{C} \dashv \mathfrak{N}) : \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}} \rightleftarrows \mathbf{Cat}_{\mathbf{sSet}}^{\text{Bergner}}$$

是 *Quillen* 等价。

**推论 3.1.22** (拟范畴-Kan 复形充实范畴转换). 函子

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{R\mathfrak{C}} & \\ \mathbf{QCat}_{\text{Joyal}} & & \mathbf{Cat}_{\mathbf{Kan}}^{\text{Bergner}} \\ & \xleftarrow{\mathfrak{N}} & \end{array}$$

在相差弱等价的意义下互逆：这是由于 *Quillen* 等价中  $\mathbb{L}FRG$  给出的函子和 1 自然同构，从同伦范畴退回到模型范畴层面上它给出的是同伦等价，于是再考虑导出函子的构造这就自然说明了推论。

### 3.1.4 模型范畴的局部化

我们指出模型范畴对弱等价做局部化也能得到  $\infty$ -范畴，进一步将无穷结构遗忘得到的则是同伦范畴：我们将这一观点严格叙述。

**定义 3.1.23.**  $\mathcal{C}$  为拟范畴， $W$  为一些 1-单形的集合，那么  $\mathcal{C}$  对  $W$  的局部化为一个拟范畴  $\mathcal{C}_W$ ，满足局部化泛性质（即如果  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  将  $W$  映到可逆边，则存在唯一的箭头  $\mathcal{C}_W \rightarrow \mathcal{D}$ ）

这里唯一是指拟范畴的范畴等价  $\text{Func}(\mathcal{C}_W, \mathcal{D}) \simeq \text{Func}_{W \mapsto \text{inv}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ，其中右侧是所有将  $W$  可逆化的函子张成的满子范畴。

**命题 3.1.24** ([Lur09, Proposition 3.1.3.7]). 局部化总是存在的。

## 3.2 极限

无穷范畴中的同伦等价可以理解为 1-范畴中的同构，因此自然值得期待的是无穷范畴中的（余）极限有类似 **Top** 中的同伦（余）极限的行为。我们将对上述提到的两个模型都各自定义极限：当然它们实际上是等价的，只是有计算简便程度上的区别。



### 拟范畴中的（余）极限

**定义 3.2.1.** 拟范畴  $\mathcal{C}$  中的对象  $x \in \mathcal{C}$  称为始对象，如果  $\forall y \in \mathcal{C}$ ，态射空间  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)$  是可缩的，这里  $\text{Hom}$  可以是任何一个拟范畴的态射空间（回忆它们是同伦等价的）

**命题 3.2.2.** 拟范畴中  $\mathcal{C}$  的所有始对象张成的满子范畴如果非空，则一定是一个可缩 Kan 复形。

这是始对象唯一性的”无穷“版本。

**定义 3.2.3.** 设  $\mathcal{C}$  是拟范畴， $K$  是单纯集， $f: K \rightarrow \mathcal{C}$  是  $\mathcal{C}$  中的图表，那么  $f$  的余极限就是仰范畴  $\mathcal{C}_{K/}$  的始对象。于是余极限如果存在，那么一定张成可缩 Kan 复形。

极限同理。

### Kan 复形充实范畴的（余）极限

前文定义的（余）极限是模仿普通范畴中的始（终）对象得到的，另一个思路是模仿普通范畴中 Hom-set 的泛性质：即  $x$  是图表  $I$  的余极限等价于  $\text{Hom}(x, y) \cong \varprojlim_{i \in I} \text{Hom}(i, y)$ 。为了采取这样的定义我们需要先定义单纯集的（余）极限。

**定义 3.2.4.**  $K$  是 Kan 复形充实范畴，那么单纯充实函子范畴  $\text{Func}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{sSet})$  有两种模型结构：

1. 投射模型结构：弱等价和纤维化逐点定义，即一个自然变换  $\eta: F \Rightarrow G$  是弱等价/纤维化如果对每个  $K$  中对象  $X$ ， $\eta_X: FX \rightarrow GX$  都是  $\mathbf{sSet}_{\text{Quillen}}$  中的弱等价/纤维化
2. 内射模型结构：弱等价和余纤维化逐点定义

由定义，常值函子

$$c: \mathbf{sSet} \rightarrow \text{Func}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{sSet})$$

关于投射模型结构是右 Quillen 的，关于内射模型结构是左 Quillen 的。于是余极限函子（这里是普通范畴）关于投射模型结构是左 Quillen 的，极限函子关于内射模型结构是右 Quillen 的。

**定义 3.2.5** (单纯集的同伦（余）极限). 设  $K$  是充实于 Kan 复形的范畴。

1. 同伦余极限函子

$$\text{hocolim}: \mathbf{Ho}(\text{Func}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{sSet})) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{sSet})$$

定义为左 Quillen 函子  $\text{colim}: \text{Func}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{sSet}) \rightarrow \mathbf{sSet}$  的左导出，其中  $\text{Func}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{sSet})$  带有的是投射模型结构

2. 同伦余极限函子

$$\text{holim}: \mathbf{Ho}(\text{Func}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{sSet})) \rightarrow \mathbf{Ho}(\mathbf{sSet})$$

定义为右 Quillen 函子  $\text{lim}: \text{Func}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{sSet}) \rightarrow \mathbf{sSet}$  的右导出，其中  $\text{Func}_{\mathbf{sSet}}(K, \mathbf{sSet})$  带有的是内射模型结构





注记. 这个定义让我们看到了模型范畴的威力：我们想找的是同伦（余）极限，而给范畴附加上“正确”的同伦论（即和原有的同伦论等价）可以让我们利用导出直接给出正确的结果。前文的模型等价告诉我们转换到 Kan 复形充实范畴上是可行的，这里我们利用模型结构直接给出了同伦（余）极限

**定义 3.2.6** (Kan 复形充实范畴的同伦（余）极限).  $\mathcal{C}, K$  是 Kan 复形充实范畴，给定 (Kan 复形充实) 函子  $f : K \rightarrow \mathcal{C}$ 。

定义  $K^\triangleright$  是在  $K$  中添加一个终对象  $\{\infty\}$ ：

$$\mathrm{Hom}_{K^\triangleright}(x, \infty) = \{*\}, \mathrm{Hom}_{K^\triangleright}(\infty, x) = \emptyset, (x \in K)$$

同理定义  $K^\triangleleft$ 。

1.  $f$  的同伦余极限是指函子  $\bar{f} : K^\triangleright \rightarrow \mathcal{C}$ ，使得  $\bar{f}|_K = f$ ，并且对任何  $y \in \mathcal{C}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\bar{f}(\infty), y) \rightarrow \mathrm{holim}_{k \in K} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(f(k), y)$$

是弱同伦等价。

2.  $f$  的同伦极限是指函子  $\bar{f} : K^\triangleleft \rightarrow \mathcal{C}$ ，使得  $\bar{f}|_K = f$ ，并且对任何  $y \in \mathcal{C}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, \bar{f}(\infty)) \rightarrow \mathrm{holim}_{k \in K} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, f(k))$$

是弱同伦等价。

注记. 这里需要解释一下

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, \bar{f}(\infty)) \rightarrow \mathrm{holim}_{k \in K} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, f(k))$$

是如何诱导的。

$$\begin{array}{ccc} & \mathrm{holim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, f(k)) & \\ & \downarrow \parallel & \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, \bar{f}(\infty)) & \xrightarrow[\exists!]{\quad} & \lim R[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, f(k))] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, f(k)) & \xrightarrow{R_{\mathrm{sSet}}} & R[\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, f(k))] \end{array}$$

$R_{\mathrm{sSet}}$  是  $\mathrm{sSet}$  中的 Fibrant Replacement Functor：特别地这里  $\mathcal{C}$  是 Kan 复形充实范畴，因此  $R$  可以直接取为恒等，竖直等号是导出函子的定义。

两种模型种定义的（余）极限是一样的

**定理 3.2.7.**  $\mathcal{C}, K$  是 Kan 复形充实范畴， $f : K \rightarrow \mathcal{C}$ ，那么拟范畴间的函子  $\mathfrak{N}f : \mathfrak{N}K \rightarrow \mathfrak{N}\mathcal{C}$  有（余）极限  $\iff f$  有（余）极限，并且两者给出的（余）极限是一致的。

因此我们可以利用这个结果将（余）极限的计算转化为单纯集层面上的计算，这是非常有用的。



### 3.3 稳定无穷范畴

我们现在考虑同伦推出（拉回）图表（即  $\Lambda_0[2]/\Lambda_2[2]$ ），在代数拓扑中有  $X \rightarrow *, X \rightarrow *$  的推出是纤维  $\Sigma X$ ； $* \rightarrow X, * \rightarrow X$  的拉回是  $\Omega X$ ：这已经隐隐展现出稳定现象的实质了。

**定义 3.3.1.**  $\infty$ -范畴（本节中  $\infty$ -范畴均指采取拟范畴为模型的  $(\infty, 1)$ -范畴）称为带点的，如果它有零对象  $0$ （即同时是始对象和终对象）

对于带点  $\infty$ -范畴  $\mathcal{C}$ ，其中的三角指图表

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & Z \end{array}$$

余纤维序列指同时是推出的三角， $Z$  为  $X \rightarrow Y$  的同伦余纤维；纤维序列指同时是拉回的三角， $X$  为  $Y \rightarrow Z$  的同伦纤维。

稳定  $\infty$ -范畴是指带点  $\infty$ -范畴满足：每个态射都有同伦余纤维和同伦纤维，并且三角是余纤维  $\iff$  它是纤维。

定义函子  $\Sigma, \Omega : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  为  $\Sigma X = 0 \sqcup_X 0, \Omega X = 0 \times_X 0$

记  $X[n] = \Sigma^n X, X[-n] = \Omega^n X, n \in \mathbb{N}$

稳定  $\infty$ -范畴之间的函子是正合的，如果它保持零对象，余纤维序列和纤维序列。

注记. 现在我们看到了 cofiber 是 fiber 这个在古典构造里已经得知的结果在高观点下是本质重要的。

**命题 3.3.2.**  $\Sigma, \Omega$  是一对伴随函子：因为

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Sigma X, Y) \simeq \{*\} \times_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)} \{*\} \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, \Omega Y)$$

注记. 拟范畴中伴随函子的定义为：在  $\mathrm{Func}_{\mathbf{sSet}}(\mathcal{C}(\mathcal{C}^{op} \times D), \mathbf{sSet})_{proj}$  中： $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}D}(F-, -) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}C}(-, G-)$  是弱等价。

进一步，在稳定范畴中  $\Sigma, \Omega$  是互逆的。

**命题 3.3.3** ([Lur17, Proposition 1.1.3.4, Proposition 1.4.2.27]). 带点  $\infty$ -范畴  $\mathcal{C}$  的以下性质等价：

1.  $\mathcal{C}$  稳定
2.  $\mathcal{C}$  有推出，并且  $\Sigma$  是等价
3.  $\mathcal{C}$  有拉回，并且  $\Omega$  是等价
4.  $\mathcal{C}$  有推出和拉回，并且推出图表  $\iff$  拉回图表

现在我们考虑稳定  $\infty$ -范畴的同伦范畴，首先就是一个熟悉的结果：

**定理 3.3.4.** 稳定  $\infty$ -范畴的同伦范畴  $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$  具有典范的三角范畴结构。





证明. 1.  $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$  有有限余积: 只需考虑  $\mathcal{C}$  的余积 (同伦余极限):  $X[-1] \xrightarrow{0} Y$  的同伦余纤维  $Z$  即满足要求:

$$\begin{aligned} Z &\simeq \text{cofib}(X[-1] \xrightarrow{0} Y) \\ &\simeq \text{cofib}(X[-1] \rightarrow 0) \sqcup \text{cofib}(0 \rightarrow Y) \simeq X \sqcup Y \end{aligned}$$

2.  $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$  是加性的:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X[1], Y) &\simeq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, Y) \times_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, Y) \\ &\simeq \Omega \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \end{aligned}$$

于是  $\pi_0 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \simeq \pi_2 \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X[-2], Y)$ , 自然就有 Abel 群结构。

3. 好三角:  $\mathbf{Ho}(\mathcal{C})$  中形如  $X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X[1]$  的序列为好三角, 如果它同构于一个可以提升为  $\mathcal{C}$  中如下图表的三角:

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \lrcorner & & \downarrow \lrcorner \\ 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & W \end{array}$$

注意  $W$  一定同构于  $X[1]$ , 因为外层长方形也是推出-拉回方块

4. TR1: 显然

5. TR2:

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \lrcorner & & \downarrow \lrcorner \\ 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & W \\ & & \downarrow \lrcorner & & \downarrow \lrcorner \\ & & 0 & \longrightarrow & V \end{array}$$

注意需要对正合三角做转置: 它恰好对应着态射取负号。

6. TR3: 余纤维是函子性的

7. TR4: 直接验证

□

现在将我们的理论应用到序列谱上: 回忆 **Spectra** 的稳定模型结构。它作为普通范畴当然是拟范畴, 对稳定模型结构的弱等价做局部化则得到一个拟范畴, 记为  $\mathbf{Sp}$ , 容易发现  $\mathbf{Ho}(\mathbf{Spectra})$  (作为模型范畴的同伦范畴) 就是  $\mathbf{Ho}(\mathbf{Sp})$  (作为拟范畴的同伦范畴), 这真正回答了稳定同伦范畴取同伦之前应当是什么这个问题: 答案是无穷范畴  $\mathbf{Sp}$ 。



### 3.3.1 稳定化

我们要指出稳定化是一个在  $\infty$ - 范畴中相当一般的构造：这个构造的来源依然是前面介绍的古典构造。我们可以将  $\Omega$ - 谱理解成同调理论（Brown 可表），但是我们还可以更进一步，将它理解为一个函子

$$F : \mathbf{Top}_*^{\text{finCW}} \rightarrow \mathbf{Top}_*$$

它将  $S^n$  映为  $E_n$ ，因此  $F$  将推出图表 ( $S^{n+1} = 0 \sqcup_{S^n} 0$ ) 映为拉回图表 ( $E_n = 0 \times_{E_{n+1}} 0$ )。

然而推出方块映为拉回方块这个性质实际上就是某种切除性质/M-V 长正合列，我们自然可以考虑所有满足这个性质的函子  $F$ ，它和  $\Omega$ - 谱之间是对应的。因此谱可以视作某种取值在拓扑空间上的同调理论。

我们使用这个思路来定义一般的  $\infty$ - 范畴中的谱对象：

**定义 3.3.5.**  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  是  $\infty$ - 范畴

1. 如果  $\mathcal{C}$  具有推出，称函子  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  为切除函子，如果它将推出方块映到拉回方块
2. 如果  $\mathcal{C}$  具有零对象，称函子  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  为约化函子，如果它保持零对象。

记约化函子，约化切除函子（张成的全子）范畴为

$$\mathbf{Func}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D}), \mathbf{Exc}_*(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

**定义 3.3.6.** 空间范畴  $\mathcal{S} = \mathfrak{N}(\text{Kan})$ ：即全体 Kan 复形构成的范畴作为 Kan 复形充实范畴对应的  $\infty$ - 范畴，其名称来源是 Quillen 等价  $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}} \simeq \mathbf{Top}_{\text{Quillen}}$ 。

有限空间范畴  $\mathcal{S}^{\text{fin}}$  定义为全体使得几何实现是有限 CW 复形的对象张成的全子范畴。

$$\mathcal{S}_*^{\text{fin}} := (\mathcal{S}^{\text{fin}})_{\{*\}}/$$

**定义 3.3.7.** 给定  $\infty$ - 范畴， $\mathcal{C}$  中谱对象的范畴定义为

$$\mathbf{Sp}(\mathcal{C}) := \mathbf{Exc}_*(\mathcal{S}_*^{\text{fin}}, \mathcal{C})$$

函子  $\Omega^\infty : \mathbf{Sp}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$  为谱对象在  $S^0$  处的值。

于是我们的稳定同伦范畴实际上就是  $\mathbf{Sp}(\mathcal{S}_*)$ ：这里遵循开头使用的解释，给定一个切除函子  $F \in \mathbf{Exc}_*(\mathcal{S}_*^{\text{fin}}, \mathcal{S}_*)$ ，我们将它对应到同调理论：

$$\tilde{F}_*(X) = \pi_*(F(X))$$

$$\tilde{F}_{-*}(X) = \pi_0(F(\Sigma X))$$

**定理 3.3.8.** 如果  $\mathcal{C}$  具有有限极限，那么  $\mathbf{Sp}(\mathcal{C})$  是稳定  $\infty$ - 范畴。并且有一对伴随函子

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Cat}_\infty^{\text{stable}} & \xrightarrow{i} & \mathbf{Cat}_\infty^{\text{fin.lim.}} \\ & \xleftarrow{Sp} & \end{array}$$

这里左侧是稳定  $\infty$ - 范畴和正合函子构成的子范畴，右侧是具有有限极限  $\infty$ - 范畴和左正合函子（保持有限极限）构成的范畴， $i$  是含入。

### 3.3.2 对现代构造的评注

到此为止，我们完美地解答了谱范畴的本质是什么。现在距离古典同伦论学家眼里的理想理论只差 smash product 的构造了。[Lur17, Section 4.8.2] 指出利用左正合函子范畴上的张量积结构（函子复合），我们可以自然地给出谱范畴  $\mathbf{Sp}$  上的 smash product 结构，它满足一切需要的好性质（和三角结构相容的 symmetric monoidal structure etc.），我们利用现代的手段正确地给出了稳定同伦论的舞台。

站在  $\infty$ -范畴的高度上我们可以用代数的手段进行研究，这里举一个例子以展示其威力。首先回忆交换代数中的忠实平坦下降：

**定义 3.3.9.** 给定一个环同态  $R \rightarrow A$ ：

1. 其上的一个下降数据  $(N, \phi)$  是指  $A$ -模  $N$  以及  $A \otimes A$ -模同构： $\phi : N \otimes_R A \rightarrow A \otimes_R N$ ，使得：

$$\begin{array}{ccc}
 N \otimes_R A \otimes_R A & \xrightarrow{\phi_{02}} & A \otimes_R A \otimes_R N \\
 & \searrow \phi_{01} \quad \nearrow \phi_{12} & \\
 & A \otimes_R N \otimes_R A &
 \end{array}$$

交换，这里  $\phi_{ij}$  是指将  $i, j$  位的  $A, N$  交换用  $\phi$  来描述，即： $\phi_{01} = \phi \otimes \text{id}_A$ , etc.

2. 下降数据间的态射  $(N, \phi) \rightarrow (N', \phi')$  是指一个  $A$  模同态  $\psi : N \rightarrow N'$  使得它和  $\phi$  交换。

很容易察觉到我们这里的定义实际上就是某种对单纯对象（实际上是余单纯对象）在  $\dim = 2$  处的截断。我们来将这个想法严格说明：

**定义 3.3.10.** 给定  $R \rightarrow A$ ，有余单纯  $R$ -代数

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} A \otimes_R A \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} A \otimes_R A \otimes_R A \quad \dots$$

其中对于余单纯态射  $\phi : [n] \rightarrow [m]$ ，对应的态射是

$$a_0 \otimes \dots \otimes a_n \mapsto \prod_{\varphi(i)=0} a_i \otimes \prod_{\varphi(i)=1} a_i \otimes \dots \otimes \prod_{\varphi(i)=m} a_i$$

记为  $(A/R)_*$ 。

一个  $R$ -模  $M$  诱导了一个余单纯  $(A/R)_*$ -模： $(A/R)_* \otimes_R M$ 。

现在给定一个下降数据  $(N, \phi)$ ，我们都能构造一个余单纯  $(A/R)_*$ -模  $N$ ：

$$N \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} A \otimes_R N \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} A \otimes_R A \otimes_R N \quad \dots$$

诸余单纯态射和前文定义是类似的，省略严格定义，仅列举如下即可理解其定义

$$\begin{array}{llllll}
 \delta_0^1 : & N & \rightarrow & A \otimes N & n & \mapsto 1 \otimes n \\
 \delta_1^1 : & N & \rightarrow & A \otimes N & n & \mapsto \sum \alpha_i \otimes x_i \\
 \sigma_0^0 : & A \otimes N & \rightarrow & N & a_0 \otimes n & \mapsto a_0 n \\
 \delta_0^2 : & A \otimes N & \rightarrow & A \otimes A \otimes N & a_0 \otimes n & \mapsto 1 \otimes a_0 \otimes n \\
 \delta_1^2 : & A \otimes N & \rightarrow & A \otimes A \otimes N & a_0 \otimes n & \mapsto a_0 \otimes 1 \otimes n \\
 \delta_2^2 : & A \otimes N & \rightarrow & A \otimes A \otimes N & a_0 \otimes n & \mapsto \sum a_0 \otimes \alpha_i \otimes x_i \\
 \sigma_0^1 : & A \otimes A \otimes N & \rightarrow & A \otimes N & a_0 \otimes a_1 \otimes n & \mapsto a_0 a_1 \otimes n \\
 \sigma_1^1 : & A \otimes A \otimes N & \rightarrow & A \otimes N & a_0 \otimes a_1 \otimes n & \mapsto a_0 \otimes a_1 n
 \end{array}$$



对于每个  $R$ -模  $M$ ，我们有一个自然的下降数据  $(M \otimes_R A, \text{can})$ ：因此能够得到一个余单纯  $(A/R)_*$ -模，而  $R$ -模  $M$  自身也可直接得到一个余单纯  $(A/R)_*$ -模：两者是同构的。

现在是下降理论的主定理：

**定义 3.3.11.** 称一个下降数据是有效的，如果它同构于某个  $R$ -模  $M$  诱导的自然下降数据  $(M \otimes_R A, \text{can})$ 。

**定理 3.3.12** (忠实平坦下降). 如果  $R \rightarrow A$  是忠实平坦的，那么任何下降数据都是有效的。并且  $M \mapsto (A \otimes_R M, \text{can})$  给出了  $R\text{-Mod}$  和下降数据范畴之间的范畴等价。

注记. 我们在这里引入余单纯对象是因为我们最终看到在无穷范畴里描述下降数据（等化子条件/cocycle condition）的正确版本正是 totalization。这是很有道理的，因为考虑 1 阶的情况这就是层的等化子条件，于是这就回到了传统的层的下降（前文的情况是 Affine Scheme 上的）。

下面来看 Adams 谱序列，首先回忆对收敛项  $X_E^\wedge$  的描述：

**定义 3.3.13.**  $E_\infty$ -环是指  $\mathbf{Sp}$  中的交换幺半对象：这里的交换是指无穷意义下的交换（ $E_\infty$ -operad）。我们省略具体细节，只需理解它是交换环谱在  $\infty$ -情况下的正确类比。

**命题 3.3.14.** 给定  $E_\infty$ -环谱  $E$ ， $X_E^\wedge$  实际上是同伦极限  $\text{Tot}(E^* \wedge X) \simeq \text{holim}(E^n \wedge X)$ 。

我们大致描述为什么 Adams 谱序列是 descent 理论的应用：我们考虑自然的映射  $\text{Spec}(E) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{S})$ （这很像 Scheme over  $\mathbb{Z}$ ）。仿照几何中的下降理论（例如前文列举的例子是仿射概形  $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(R)$ ），我们给出的是  $\text{Spec}(E)$  上的“层”，以及附加的下降数据；期待获得的是  $\text{Spec}(\mathbb{S})$  上的“层”，使得它是拉回函子的逆。这里将  $\mathbb{S}$ -模  $X$  视为  $\text{Spec}(\mathbb{S})$  的拟凝聚层，由于下降在这里只能给出  $E$ -local 的信息，我们实际上考虑的是  $X_E^\wedge$ 。因此 Adams 谱序列实际上就是描述了  $\text{Spec}(E)$  上的拟凝聚层（谱序列的前两页）到  $\text{Spec}(\mathbb{S})$  上的拟凝聚层（ $X_E^\wedge$ ）的计算。

具体来说有如下谱序列 [Lur17, Proposition 1.2.2.14]：给定图表

$$\cdots X_{n+1} \rightarrow X_n \rightarrow X_{n-1} \rightarrow \cdots$$

记  $F_n = \text{hofib}(X_n \rightarrow X_{n+1})$ ，有：

$$E_1^{p,q} = \pi_{p+q} F_{p-1} \Rightarrow \pi_{p+q} (\varprojlim X_\bullet)$$

（这是滤复形构造谱序列的类比）

现在给定余单纯对象  $Y : \Delta \rightarrow \mathbf{Sp}$ ，就有

$$\text{Tot} Y \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Tot}(\text{cosk}_2 Y) \rightarrow \text{Tot}(\text{cosk}_1 Y) \rightarrow \text{Tot}(\text{cosk}_0 Y) \rightarrow 0.$$

我们取  $Y$  为  $E^{\wedge_{\mathbb{S}}+1} \wedge_{\mathbb{S}} X : \Delta \rightarrow \mathbf{Sp}$ ，于是谱序列第一页实际上就是计算 Ext 的 cobar resolution：这就回到了 Adams 谱序列。

如果我们考虑一般的下降理论，我们也有忠实平坦下降：

**定理 3.3.15** (Lurie). 给定  $E_\infty$ -环之间的态射  $R \rightarrow R'$ ，我们仍然有 cobar construction

$$R' \rightrightarrows R' \otimes_R R' \rightrightarrows \cdots$$

$\infty$ -范畴的下降数据是指  $\mathbf{Cat}_\infty$  中的 *totalization*:

$$Tot( Mod(R') \rightrightarrows Mod(R' \otimes_R R') \rightrightarrows \cdots )$$

$R \rightarrow R'$  称为忠实平坦的, 如果

1.  $\pi_0(R) \rightarrow \pi_0(R')$  作为普通的交换环是忠实平坦的
2.  $\pi_*(R) \otimes_{\pi_0(R)} \pi_0(R') \rightarrow \pi_*(R')$  是同构。

那么有范畴等价:

$$Mod(R) \simeq Tot( Mod(R') \rightrightarrows Mod(R' \otimes_R R') \rightrightarrows \cdots )$$



## 参考文献

- [Ada95] J.Frank Adams. *Stable Homotopy and Generalized Homology*. University Of Chicago Press, 1995 (cit. on pp. 8, 9, 11, 15, 44).
- [Bal21] Scott Balchin. *A Handbook of Model Categories*. Springer International Publishing, 2021. ISBN: 9783030750350. DOI: [10.1007/978-3-030-75035-0](https://doi.org/10.1007/978-3-030-75035-0) (cit. on pp. 54, 57).
- [Elm97] Anthony D Elmendorf. *Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory*. 47. American Mathematical Soc., 1997 (cit. on p. 52).
- [Hov99] Mark Hovey. “Model Categories”. In: *Mathematical Surveys and Monographs* 63 (1999) (cit. on pp. 49, 51).
- [Lew91] L.Gaunce Lewis. “Is there a convenient category of spectra?” In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 73.3 (1991), pp. 233–246. ISSN: 0022-4049. DOI: [https://doi.org/10.1016/0022-4049\(91\)90040-0](https://doi.org/10.1016/0022-4049(91)90040-0) (cit. on pp. 46, 52).
- [Lur09] Jacob Lurie. “Higher Topos Theory”. In: *Annals of Mathematics Studies* 170 (2009). eprint: [math/0608040](https://arxiv.org/abs/math/0608040) (cit. on p. 58).
- [Lur17] Jacob Lurie. *Higher Algebra*. Preprint. 2017 (cit. on pp. 61, 64, 65).
- [May98] J. Peter May. *The hare and the tortoise*. 1998 (cit. on p. 47).