复分析的发展历史

董皓旸

2024 年 2 月 24 日

摘要

从 16 世纪发现虚数 i 以来，复数的应用便开始不断扩大，而作为研究复变函数的重要学科——复分析，自柯西、黎曼、魏尔斯特拉斯三人从不同角度给出全纯 (解析) 函数的定义后便逐渐发展壮大，成为数学中极为重要的分支。本文将从复数的起源开始，回顾 20 世纪以前复分析的发展历史，让读者可以更加了解复分析这一重要分支。

目录

1 复数的起源与发展

1.1 18 世纪以前的探索

1.1.1 卡尔达诺与《大衍术》

吉罗拉莫·卡尔达诺 (Gerolamo Cardano, 1501 ∼ 1576) 是一位意大利数学家，他 1545 年发表的著作《大衍术》(Ars Magna) 是早期的代数学中最重要的书籍之一。在书中，他发明了系统的代数符号，并给出了三次方程与四次方程的解法。在《大衍术》的第 37 章中，提到了这样一个方程：

$$x(10-x)=40$$

并给出了这个方程的两个解

$$x=5\pm\sqrt{-15}$$

卡尔达诺没有给这两个解一个合理的解释，但他提到如果我们“形式上地”验证这两个解，他们是正确的。书中写到：“迄今为止对算术精妙之处的研究，最终都是巧妙但是无用的。”[1]可见卡尔达诺还并未意识到复数的作用。

1.1.2 邦贝利与《代数学》

拉斐尔·邦贝利 (Rafael Bombelli, 1526 ∼ 1572) 同样是一位意大利数学家，在他 1752 年发表的《代数学》一书中，提出了复数的运算法则并成功运用复数解决了一些方程问题。书中讨论了一个三次方程

$$x^3=15x+4$$

的解的问题，通过简单的观察可以看出，$x=4$ 是方程的解。而由卡尔达诺在《大衍术》中给出的三次方程求根公式可以给出对应的解应为

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

对此，邦贝利在书中给出了解释：因为

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3=2+\sqrt{-121},\left(2-\sqrt{-1}\right)^3=2-\sqrt{-121}$$

所以卡尔达诺的解可以化为

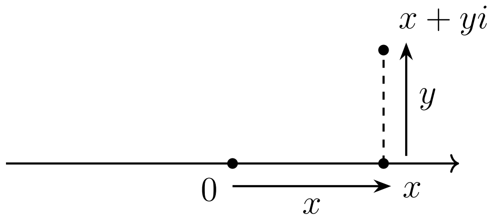
$$x=\left(2+\sqrt{-1}\right)+\left(2-\sqrt{-1}\right)=4$$

虽然这个解释在现在看来并不是严谨的，但是让当时的人们更加深入地了解到了复数的意义和价值。

[1]hucusque progreditur Arithmetica subtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeo est subtile, ut fit inutile.

1.1.3 沃利斯的几何观点

约翰 • 沃利斯 (John Wallis, 1616 ~ 1703) 是一位英国数学家，他 1685 年发表的《代数》第 66 章首次提出了数轴的概念，将每个实数与直线上的点一一对应。接着他将数轴从一条直线扩展成一个平面，并声称平面上的一点可以与复数一一对应：如下图所示，考虑一个点到数轴上的投影，这个投影代表的实数就代表复数的实部，而这个点到数轴的垂直高度给出复数的虚部，这样就对应了一个复数。



但是沃利斯并没有想到给出“实轴”和“虚轴”的概念，这是较为可惜的一点。在书的第 67 ~ 69 章中，沃利斯给出了几种帮助理解复数概念的几何图形，但他们都比较局限，没有什么实际推广的意义。

1.2 18 世纪复数的发展

1.2.1 一类不定积分的计算

在 18 世纪，微积分被广泛使用，其中有一类积分的计算技术值得注意。约翰 • 伯努利 (Johann Bernoulli, 1667 ~ 1748) 是瑞士著名数学家，是著名的伯努利家族的一员。他与德国著名数学家哥特弗里德 • 威廉 • 莱布尼茨 (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 ~ 1716) 在 1702 年独立发现了所谓部分分式法，通过等式

$$\frac{a^2}{a^2 - x^2} = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$$

可以立即将积分求出。他们接着试图解决更一般的积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2 + bx + c}$$

但由于一般的二次函数的根可能是复的，因此使用部分分式法将会出现这样的积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x - \alpha}$$

其中 α 是一个复数。但伯努利和莱布尼茨都按照原先的对数法则来进行积分，这就涉及到了复数的对数的定义问题了。莱布尼茨认为复数的出现并不会对积分理论产生影响。

伯努利开始不断使用这种方法并在 1702 年发表的一篇文章中写到，如果使用变量替换

$$x=\sqrt{-1}a\frac{t-1}{t+1}$$

就可以计算出积分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\int\frac{\sqrt{-1}\mathrm{d}t}{2at}$$

而直接使用原函数的方法可以得到 arctan。伯努利由此给出了三角函数与对数函数之间的联系。

这些结果很快引起了关于负数和复数的对数的性质的活跃讨论。在莱布尼茨与伯努利 1712 ~ 1713 年的通信中，莱布尼茨断言负数的对数是不存在的，而伯努利则试图证明他们是实数。伯努利认为，因为

$$\frac{\mathrm{d}(-x)}{-x}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

所以 $\ln(-x)=\ln x$。而莱布尼茨则认为 $\mathrm{d}\,(\ln x)=\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 仅对 x 是正数时成立。

1.2.2 棣莫弗公式

亚伯拉罕 • 棣莫弗 (Abraham de Moivre, 1667 ~ 1754) 是一位法国数学家，他在 1707 年发表的一篇文章中给出了一个神奇的级数：当 n 是整数时，如果

$$ny+\frac{1-nn}{2\times3}ny^3+\frac{1-nn}{2\times3}\times\frac{9-nn}{4\times5}ny^5+\frac{1-nn}{2\times3}\times\frac{9-nn}{4\times5}\times\frac{25-nn}{6\times7}ny^7+\cdots=a$$

那么有

$$y=\frac{1}{2}\left(\sqrt[n]{a+\sqrt{aa-1}}+\sqrt[n]{a-\sqrt{aa-1}}\right)$$

在 1722 年，棣莫弗根据这个公式，给出了 $1:n$ 的两个角的正矢 ($\mathrm{vers}\theta=1-\cos\theta$)$x,t$ 的关系：

$$1-2z^n+z^{2n}=-2z^nt$$
$$1-2z+zz=-2zx$$

如果我们将 $x=1-\cos\theta,t=1-\cos n\theta$ 代入的话，那么就可以得到

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

这便是著名的棣莫弗公式。当然，棣莫弗当时并没有进一步写出这个结果，实在可惜。

1.2.3 欧拉公式

莱昂哈德 • 欧拉 (Leonhard Euler, 1707 ~ 1783) 是瑞士著名的数学家，他是约翰 • 伯努利的学生。1748 年，他提出了著名的欧拉公式：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

这一公式给出了之前诸多具有争议的问题的答案。在欧拉 1749 年发表的《论莱布尼茨与伯努利关于负数与虚数的对数的争论》一文中，提出了自己的观点：他认为 $\mathrm{d}(\ln x) = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ 无论对正的 x 还是负的 x 都是成立的，但是伯努利的说明同样存在问题，因为他漏考虑了一个常数，或者说他默认了 $\ln -1 = 0$，而这实际上是需要证明的。欧拉认为，对于一个复数 $a + bi$ 有

$$a + bi = c\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right) = ce^{(\varphi+2\lambda\pi)\sqrt{-1}} = e^{C+(\varphi+2\lambda\pi)\sqrt{-1}}$$

因此，其对数应为

$$\ln(a+bi) = C + (\varphi + 2\lambda\pi)\sqrt{-1}$$

其中

$$c = \sqrt{a^2+b^2}, \cos\varphi = \frac{a}{c}, \sin\varphi = \frac{b}{c}, e^C = c$$

而 λ 是任意整数。这样的结论似乎有些奇怪，毕竟按照直观来说，自然对数应该只有一个值，而现在却出现了有无穷个值的情况。但回忆我们在考虑平方根的操作时会得到一正一负两个结果的情况来看，这一点似乎也不是那么不可理解。对正实数来说，它的自然对数有且仅有一个实值，其余的均为虚值，因此，将其“定义”为实数的结果是良好的；而对负实数和虚数来说，它的自然对数均为虚值。虽然欧拉给出了负数与虚数的对数问题的完整解答，但由于结论对当时的人来说过于匪夷所思，他的工作并未被广泛接受。

1.2.4 韦塞尔的几何观点

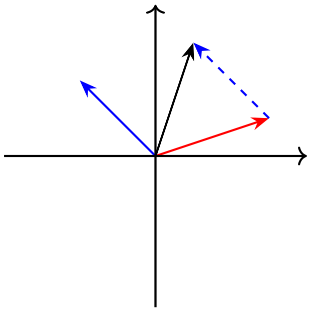
包括棣莫弗、欧拉等人都曾考虑将复数视为平面上的一个点，例如在解方程 $x^n - 1 = 0$ 的时候，他们都将得出的解

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

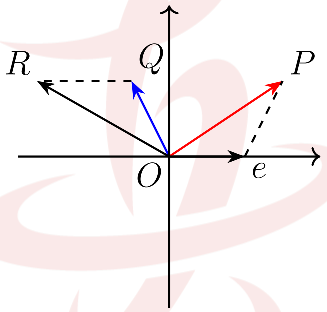
视为正 n 边形的顶点。虽然将复数用平面上的点的坐标表示的方法早已被人们广泛使用，但并没有人将两者统一起来，给出复数运算的几何意义。

卡斯帕尔 • 韦塞尔 (Caspar Wessel, 1745 ~ 1818) 是一位挪威籍丹麦数学家，在他 1797 年发表的《关于方向的分析表示：一次尝试》中几何地给出了“有向

线段”(向量) 的运算。在文中，韦塞尔在实数轴的基础上引入了虚轴的概念，以 ε 作为单位。仿照实数轴上的实数加法，他给出了复平面上的向量加法：即将两个向量首尾相接组成三角形，和便是第三边，如下图所示。而减法则相当于加上反向的向量。



对于向量的乘法，韦塞尔的定义较为复杂，用现代的语言描述，OP 与 OQ 的乘积是一个新的向量 OR，OQ 与 OR 的夹角和 Oe 与 OP 的夹角相同，且 $\frac{OR}{OQ}=\frac{OP}{Oe}$，其中 e 表示实数 1 对应的点，示意图如下：



定义了加法与乘法的概念后韦塞尔接着给出了 ε 满足的一系列等式：

$$(+1)\cdot(+\varepsilon)=+\varepsilon,(-1)\cdot(+\varepsilon)=-\varepsilon,(+1)\cdot(-\varepsilon)=-\varepsilon,(-1)\cdot(-\varepsilon)=+\varepsilon,$$

$$(+\varepsilon)\cdot(+\varepsilon)=+\varepsilon,(+\varepsilon)\cdot(-\varepsilon)=-\varepsilon,(-\varepsilon)\cdot(-\varepsilon)=+\varepsilon$$

因此 $\varepsilon=\sqrt{-1}$。然后他指出倾角为 v 的单位向量可以用三角函数表示为 $\cos v+\varepsilon\sin v$，因此根据向量乘法的定义，我们有

$$\begin{aligned}(a+\varepsilon b)(c+\varepsilon d)&=AC(\cos v+\varepsilon\sin v)(\cos u+\varepsilon\sin u)\\&=AC(\cos(v+u)+\varepsilon\sin(v+u))\\&=A\cos vC\cos u-A\sin vC\sin v+\varepsilon(A\sin vC\cos u+A\cos vC\sin u)\\&=ac-bd+\varepsilon(ad+bc)\end{aligned}$$

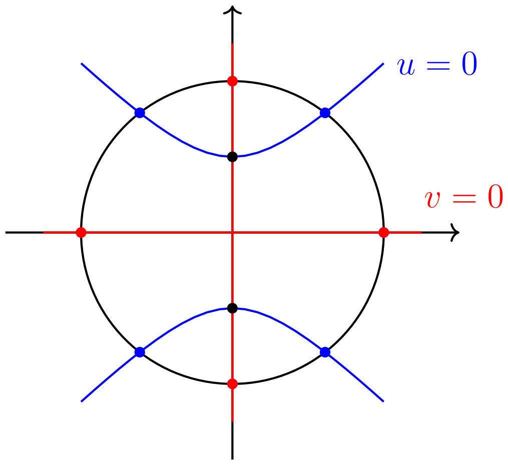
这说明向量的乘法与复数的乘法（即由实数的乘法推广得出的乘法法则）是一致的。之后韦塞尔定义了除法，并在文章的后半部分中使用这种新颖的方法对平面

多边形与球面多边形进行了研究。这篇文章虽有着重要的意义但在当时并未受到重视，直至 1897 年被翻译成法文后才逐渐被人们知晓。

1.2.5 高斯与代数基本定理

经过数学的不断发展，数学研究的数域从一开始的整数，到有理数，无理数，负数，最后到复数，都是通过某些多项式方程的解发现的。那么是否还有其他我们仍未发现的数呢？同时在微积分中若要采用部分分式法进行积分，就需要将实系数多项式分解为一次因式或二次因式的乘积，这是否能够做到？于是证明或推翻任何实系数多项式都至少有一个复根就成为了一个关键的问题。

对于这个问题，达朗贝尔、欧拉和拉格朗日等人都给出过自己的证明，但他们的证明都是不完全的，因为当时他们对复数的认知尚不完全。第一个实质性的证明是卡尔·弗里德里希·高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777 ∼ 1855) 在他 1799 年发表的博士论文中给出的，虽然从现代的角度来看，这个证明依然是不严谨的，但他依然有着很高的价值。高斯的想法是将多项式 $P(x+iy)=0$ 的复根 $a+ib$ 与平面上的点 (a,b) 对应，那么如果将 P 的实部与虚部拆为 $u(x+iy)+iv(x+iy)$，则 (a,b) 便是曲线 $u=0$ 与 $v=0$ 的交点。他接着证明了一个充分大的圆上，由于 n 次项的长度远大于剩余小次数的项，因此 $u=0$ 与圆周的交点的角度几乎对应着 $\frac{2k+1}{2n}\pi i$，而 $v=0$ 对应着 $\frac{k}{n}\pi$。因此 $u=0$ 与 $v=0$ 的曲线与圆周的 $2n$ 个交点是“交错”出现的。此外，因为每条曲线每进入圆周一次，圆周一定会离开圆周，因此在圆内 $u=0$ 与 $v=0$ 必有一个交点，下图中给出了 $P(z)=z^2+1$，圆的半径为 2 的情况。



高斯后来陆续给出了代数基本定理的其他三种证明方法，第三个证明中实际上使用到了我们现在所谓的柯西积分定理，第四个证明是第一个证明的变体，它同时包含了复系数的情况。我们将在后文中给出代数基本定理的一个使用到刘维尔定理的严谨证明。

此后，复数理论的日渐完善，成为数学中非常重要的部分。

2 复分析理论的起源

2.1 高斯的探索

在高斯 1811 年写给弗里德里希·威廉·贝塞尔 (Friedrich Wilhelm Bessel, 1784 ~ 1846) 的信中，提到了如何计算上下限为复数的积分。他指出复平面上的两个点之间有无数种不同路径，但只要函数在两条路径围成的区域内不趋于无穷，那么两条不同路径的积分值是一致的。他声称这个证明是容易的，但他并没有真正给出证明。接着，他断言复积分可以有多个值，取决于路径围绕变为无穷的点转了几圈。

然后高斯给了一个最基本的例子 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$，他说从 $x=1$ 出发，不经过零点的一条路径可以给出一个 $\ln x$ 的值，而如果围绕零点转若干圈，那么每转一圈就需要加上或减去 $2\pi i$，因此 $\ln x$ 会有无数个不同的值。之后高斯又举了几个类似的例子，可见当时高斯已经隐约意识到了复函数积分的一些法则，但他并没有给出严谨的叙述与证明。

2.2 柯西的积分理论

2.2.1 柯西定理

奥古斯丁-路易·柯西 (Augustin-Louis Cauchy, 1789 ~ 1857) 是法国著名数学家，他于 1814 年在巴黎科学院宣读的论文《关于定积分理论的报告》被视为复分析的起源。报告从积分 $\int f(y)\mathrm{d}y$ 讲起，其中 y 是一个关于 x, z 的函数。要使得这个积分良定义，就要求

$$\frac{\partial}{\partial x}\int f(y)\mathrm{d}y = f(y)\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\int f(y)\mathrm{d}y = f(y)\frac{\partial y}{\partial z}$$

分别再取这两式的 z, x 偏导，则有如下等式

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[f(y)\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(y)\frac{\partial y}{\partial z}\right] \tag{1}$$

接着他将 f, y 分别拆成实部和虚部，得到

$$y = M + Ni, f(y) = P' + P''i, f(y)\frac{\partial y}{\partial x} = S + Ti, f(y)\frac{\partial y}{\partial z} = U + Vi$$

其中

$$S=P'\frac{\partial M}{\partial x}-P''\frac{\partial N}{\partial x},T=P'\frac{\partial N}{\partial x}+P''\frac{\partial M}{\partial x}$$
$$U=P'\frac{\partial M}{\partial z}-P''\frac{\partial N}{\partial z},V=P'\frac{\partial N}{\partial z}+P''\frac{\partial M}{\partial z}$$

然后，式 (1) 就可重写为

$$\frac{\partial S}{\partial z}+\frac{\partial T}{\partial z}i=\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}i$$

拆分实部与虚部后得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial z}=\dfrac{\partial U}{\partial x}\\ \dfrac{\partial T}{\partial z}=\dfrac{\partial V}{\partial x}\end{cases}\tag{2}$$

接着柯西在等式两边同时乘以 $\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ 并在确定的上下限分别对 x,z 积分：

$$\begin{cases}\displaystyle\int_{x_0}^{X}S(x,Z)\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{X}S(x,z_0)\mathrm{d}x=\int_{z_0}^{Z}U(X,z)\mathrm{d}z-\int_{z_0}^{Z}U(x_0,z)\mathrm{d}z\\ \displaystyle\int_{x_0}^{X}T(x,Z)\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{X}T(x,z_0)\mathrm{d}x=\int_{z_0}^{Z}V(X,z)\mathrm{d}z-\int_{z_0}^{Z}V(x_0,z)\mathrm{d}z\end{cases}\tag{3}$$

在 1827 年出版该论文时，他在文中增加了一个脚注，将一式加上二式的 i 倍，得到

$$\begin{aligned}&\int_{x_0}^{X}(S(x,Z)+T(x,Z)i)\mathrm{d}x-\int_{x_0}^{X}(S(x,z_0)+T(x,z_0)i)\mathrm{d}x\\=&\int_{z_0}^{Z}(U(X,z)+V(X,z)i)\mathrm{d}z-\int_{z_0}^{Z}(U(x_0,z)+V(x_0,z)i)\mathrm{d}z\end{aligned}$$

此时，若考虑曲边四边形 $ABCD$，其中四条边 AB,BC,CD,DA 分别是曲线 $z=z_0,x=X,z=Z,x=x_0$，那么就可以将上式化简为

$$\int_{DC}f(y)\mathrm{d}y-\int_{AB}f(y)\mathrm{d}y=\int_{BC}f(y)\mathrm{d}y-\int_{AD}f(y)\mathrm{d}y$$

这便是柯西积分定理的一个特殊形式，若考虑 $y=x+zi$ 的特殊情况，则可以得出沿长方形的四条边走一圈积分值为 0。

在 1825 年，柯西写下了另一篇论文《关于积分限为虚数的定积分的报告》，被人们视为他最重要的论文。在论文中，他首先仿照实积分的定义给出了复积分的定义：

$$\int_{x_0+y_0i}^{X+Yi}f(z)\mathrm{d}z$$

定义为

$$
\begin{aligned}
&[(x_1-x_0)+(y_1-y_0)i]f(x_0+y_0i)+[(x_2-x_1)+(y_2-y_1)i]f(x_1+y_1i)\\
&\qquad+\cdots+[(X-x_{n-1})+(Y-y_{n-1})i]f(x_{n-1}+y_{n-1}i)
\end{aligned}
$$

在 x_k-x_{k-1},y_k-y_{k-1} 趋于 0 时的极限，其中 $(x_0,x_1,\cdots,X),(y_0,y_1,\cdots,Y)$ 都是单调递增或递减的。柯西的定义使得复积分得出的并不一定是唯一的，因此他紧接着给出了对特定道路的积分的结果。$x=\varphi(t),y=\chi(t)$ 是从 t_0 到 T 的单调递增函数，满足

$$
\varphi(t_k)=x_k,\chi(t_k)=y_k,\varphi(T)=X,\chi(T)=Y
$$

所以在 x_k-x_{k-1},y_k-y_{k-1} 趋于 0 时

$$
x_k-x_{k-1}=(t_k-t_{k-1})\varphi'(t_k),y_k-y_{k-1}=(t_k-t_{k-1})\chi'(t_k)
$$

因此根据实积分的定义，我们有

$$
\int_{x_0+y_0i}^{X+Yi}f(z)\mathrm{d}z=\int_{t_0}^{T}[\varphi'(t)+i\chi'(t)]f[\varphi(t)+i\chi(t)]\mathrm{d}t
$$

接着，柯西给出了柯西积分定理最早的一个证明，他声称在函数有限且连续时，积分值是唯一的，或者说，积分值与道路的选取无关。柯西采用类似变分的手法，将原先的道路 x,y 微扰为 $x+\varepsilon u,y+\varepsilon v$，其中 ε 是无穷小量，而 u,v 在端点处为 0。于是积分的差可以写为关于 ε 的级数，由于二阶以上的无穷小量都可以忽略，因此只需要考虑一阶小量的系数：

$$
\int_{t_0}^{T}[(u+vi)(x'+y'i)f'(x+yi)+(u'+v'i)f(x+yi)]\mathrm{d}t
$$

而由部分积分公式可知上述积分等于

$$
(u+vi)f(x+yi)\Big|_{t_0}^{T}=0
$$

这说明道路变化时积分的变化的一阶小量为 0，所以积分是独立于道路的选取的。虽然柯西的证明在当时看来是完全正确的，但从现代的角度看，这个证明并不严谨。因为在证明的过程中，柯西不仅使用到了 f 的导数的存在性，还使用了 f 的导数的连续性，但并没有在定理叙述中给出相关的条件。这是可能是因为在 19 世纪早期，人们都将函数理解为一个解析的表达式，而导数可以由常用的求导法则给出，因此人们普遍认为连续函数都是可导的。

2.2.2 留数定理

在柯西 1825 年的报告中，他接着讨论了 $f(z)$ 在 $z=a+bi$ 处趋于无穷的情况，并将此时对应的参数 t 设为 τ，同时假定

$$[(x-a)+(y-b)i]f(x+yi) \tag{4}$$

在 x,y 分别趋于 a,b 时存在极限，记为

$$\mathbf{f}=\varepsilon f(a+bi+\varepsilon)$$

接着，同之前一样，他对原本的道路 x,y 进行微扰变为 $x+\varepsilon u, y+\varepsilon v$ 并将积分值分别记为 $A+Bi, A'+B'i$，二者相减有

$$\begin{aligned}A'+B'i-(A+Bi)=&\int_{t_0}^{T}\left[x'+\varepsilon u'+\left(y'+\varepsilon v'\right)i\right]f[x+\varepsilon u+(y+\varepsilon v)i]\mathrm{d}t\\&-\int_{t_0}^{T}\left(x'+y'i\right)f(x+yi)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{5}$$

根据前面的结果，积分的差仅有在 $z=a+bi$ 即 $t=\tau$ 附近非零。于是柯西考虑代换

$$t=\tau+\varepsilon w$$

其中 w 的范围是从 $-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ 到 $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$。此时我们设

$$x'(\tau)=\alpha, y'(\tau)=\beta, u(\tau)=\gamma, v(\tau)=\delta$$

并设实数 λ,μ 满足

$$\lambda+\mu i=\frac{\gamma+\delta i}{\alpha+\beta i}$$

由于 εw 是无穷小量，我们有近似

$$\begin{aligned}\left(x'+y'i\right)f(x+yi)=&\frac{\left(x'+y'i\right)\mathbf{f}}{(x-a)+(y-b)i}\\=&\frac{\left(x'+y'i\right)\mathbf{f}}{\left(x'+y'i\right)(t-\tau)}\\=&\frac{\mathbf{f}}{\varepsilon w}\end{aligned}$$

类似地，我们有

$$\left[x'+\varepsilon u'+\left(y'+\varepsilon v'\right)i\right]f[x+\varepsilon u+(y+\varepsilon v)i]=\frac{\mathbf{f}}{\varepsilon(w+\lambda+\mu i)}$$

因此我们可以给出式 (5) 的近似

$$(A'+B'i)-(A+Bi)=\mathbf{f}\int_{-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}w}{w+(\lambda+\mu i)}-\mathbf{f}\int_{-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}w}{w}$$

虽然最后一项在 $w=0$ 处是趋于无穷的，但是我们考虑它的主值积分，则结果为 0，在 ε 趋于 0 时有

$$\begin{aligned}(A'+B'i)-(A+Bi)=&\mathbf{f}\int_{-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}\frac{\mathrm{d}w}{w+(\lambda+\mu i)}\\=&-\mathbf{f}i\int_{-\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}^{\varepsilon^{-\frac{1}{2}}}\frac{\mu\mathrm{d}w}{(w+\lambda)^2+\mu^2}\\=&\mp\pi\mathbf{f}i\end{aligned}\tag{6}$$

其中，正负号取决于 μ 的正负号。因为 μ 可以表示为

$$\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\alpha^2+\beta^2}$$

因此式 (6) 的正负号可由

$$x'(\tau)v(\tau)-y'(\tau)u(\tau)=x'\delta x-y'\delta y$$

的正负号决定。若取 x,y 向相反方向微扰的积分值为 $A''+B''i$，那么

$$(A''+B''i)-(A'+B'i)=\pm2\pi\mathbf{f}i\tag{7}$$

这便证明了留数定理在单极点时的一种特殊情况。

接着在报告中，柯西给出了另一种得到式 (6)，它的思想同样是非常重要的。他将函数 f 拆分成两部分

$$f(z)=\frac{\mathbf{f}}{z-a-bi}+\omega(z)$$

此时 ω 在 $z=a+bi$ 处是有限的。这使得我们在化简式 (5) 时，可以忽略 ω，得到

$$\begin{aligned}&\mathbf{f}\int_{t_0}^{T}\left[\frac{(x'+\varepsilon u')+(y'+\varepsilon v')\,i}{x-a+\varepsilon u+(y-b+\varepsilon v)i}-\frac{x'+y'i}{(x-a)+(y-b)i}\right]\mathrm{d}t\\=&\mathbf{f}\left[\ln[(x-a+\varepsilon u)+(y-b+\varepsilon v)i]-\ln[(x-a)+(y-b)i]\right]\Big|_{t_0}^{T}\\=&\mathbf{f}\left[\frac{1}{2}\ln\left[(x-a+\varepsilon u)^2+(y-b+\varepsilon v)^2\right]-\frac{1}{2}\ln\left[(x-a)^2+(y-b)^2\right]\right]\Bigg|_{t_0}^{T}\\&+i\mathbf{f}\left(\arctan\frac{y-b+\varepsilon v}{x-a+\varepsilon u}-\arctan\frac{y-b}{x-a}\right)\Bigg|_{t_0}^{T}\end{aligned}\tag{8}$$

因为 u,v 在 $t=t_0,T$ 处都为 0，因此

$$(A'+B'i)-(A+Bi)=i\mathbf{f}\arctan\left[\varepsilon\frac{(x-a)v-(y-b)u}{(x-a)(x-a+\varepsilon u)+(y-b)(y-b+\varepsilon v)}\right]\Bigg|_{t_0}^{T}$$

同样地，我们考虑这个式子的主值，将其分成两段，一段从 t_0 到 τ，另一段从 τ 到 T。而这两段的贡献均为 $\mp\frac{\pi}{2}i\mathbf{f}$，因此我们有

$$(A'+B'i)-(A+Bi)=i\mathbf{f}\left(\mp\frac{\pi}{2}-\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right)=\mp i\mathbf{f}\pi$$

这与式 (6) 是一致的。

注记 2.1. 在柯西的报告中并未说明是如何得到两段的贡献都是 $\mp\frac{\pi}{2}i\mathbf{f}$ 的，这似乎是错误的。从结果上来看，正确的说法应该是在 $t=\tau$ 的右侧时，系数为

$$\arctan\frac{x'v-y'u}{x'\left(\frac{x-a}{\varepsilon}+u\right)+y'\left(\frac{y-b}{\varepsilon}+v\right)}=\arctan\frac{x'v-y'u}{x'u+y'v}$$

同样地，在 $t=\tau$ 左侧时，系数为

$$\arctan\frac{x'v-y'u}{-x'u-y'v}$$

两段相加得到

$$(A'+B'i)-(A+Bi)=i\mathbf{f}\left(\arctan\frac{x'v-y'u}{-x'u-y'v}-\arctan\frac{x'v-y'u}{x'u+y'v}\right)=\mp i\mathbf{f}\pi$$

其中两个反正切相加之所以不是 0 而是 $\pm\pi$ 是因为实际上这里的 arctan 存在歧义，如果回到式 (8) 的积分式来看，在 $t=\tau$ 的左右两侧 $(x-a)+(y-b)i$ 的符号是相反的，也就是所差的 π，而正负号是由 $x'v-y'u$ 的正负号决定的。

虽然这一部分的内容柯西表述得非常难懂，但是他将函数拆成 ω 和 $\frac{\mathbf{f}}{z-a-bi}$ 的思想却是十分重要的。

柯西然后考虑了式 (4) 不收敛的情况，他假设

$$(z-a-bi)^m f(z)=\mathbf{f}(z)$$

在 $z=a+bi$ 处是有限的，那么式 (7) 就可以改为

$$\begin{aligned}(A''+B''i)-(A'+B'i)=&\int_{t_0}^{T}\left[(x'-\varepsilon u')+(y'-\varepsilon v')\,i\right]\frac{\mathbf{f}[x-\varepsilon u+(y-\varepsilon v)i]}{[x-a-\varepsilon u+(y-b-\varepsilon v)i]^m}\mathrm{d}t\\&-\int_{t_0}^{T}\left[(x'+\varepsilon u')+(y'+\varepsilon v')\,i\right]\frac{\mathbf{f}[x+\varepsilon u+(y+\varepsilon v)i]}{[x-a+\varepsilon u+(y-b+\varepsilon v)i]^m}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

与之前类似地，我们将 $\mathbf{f}$ 拆出一个在 $z=a+bi$ 处有界的函数 ω：

$$\mathbf{f}(z)=\mathbf{f}(a+bi)+\frac{\mathbf{f}'(a+bi)}{1}(z-a-bi)+\cdots+\frac{\mathbf{f}^{(m-1)}(a+bi)}{1\cdot 2\cdots(m-1)}(z-a-bi)^{m-1}+(z-a-bi)^{m}\omega(z)$$

因此有

$$(A''+B''i)-(A'+B'i)=s_0\mathbf{f}(a+bi)+\frac{s_1}{1}\mathbf{f}'(a+bi)+\cdots+\frac{s_{m-1}}{1\cdot 2\cdots(m-1)}\mathbf{f}^{(m-1)}(a+bi)$$

其中

$$s_n=\int_{t_0}^{T}\left\{\frac{x'-\varepsilon u'+(y'-\varepsilon v')\,i}{[x-a-\varepsilon u+(y-b-\varepsilon v)i]^{m-n}}-\frac{x'+\varepsilon u'+(y'+\varepsilon v')\,i}{[x-a+\varepsilon u+(y-b+\varepsilon v)i]^{m-n}}\right\}\mathrm{d}t$$

在 $m-n>1$ 时，由于 u,v 在 $t=t_0,T$ 时均为 0，因此 $s_n=0$。所以仅有 s_{m-1} 非零，且根据前面的结论，$s_{m-1}=\pm 2\pi i$。因此，我们有

$$(A''+B''i)-(A'+B'i)=\pm 2\pi i\frac{\mathbf{f}^{(m-1)}(a+bi)}{1\cdot 2\cdots(m-1)}$$

若想写成式 (7) 的形式，只需要定义

$$\mathbf{f}=\frac{\mathbf{f}^{(m-1)}(a+bi)}{1\cdot 2\cdots(m-1)}=\frac{1}{1\cdot 2\cdots(m-1)}\frac{\mathrm{d}^{m-1}\left[\varepsilon^{m}f(a+bi+\varepsilon)\right]}{\mathrm{d}\varepsilon^{m-1}}\tag{9}$$

接着柯西尝试讨论了式 (5) 此时的取值，但是在 $m>1$ 的情况下，即使我们考虑它的主值，也不是收敛的。这本质上是因为 $\int x^{-2k}\mathrm{d}x$ 在零处的主值积分是正无穷，就导致最终结果不收敛。若我们假设

$$\mathbf{f}^{(m-2)}(a+bi)=\mathbf{f}^{(m-4)}(a+bi)=\cdots=0$$

则可以得到与式 (6) 类似的结论

$$(A'+B'i)-(A+Bi)=\mp\frac{\pi i\mathbf{f}^{(m-1)}(a+bi)}{1\cdot 2\cdots(m-1)}=\mp\pi i\mathbf{f}$$

在柯西 1826 年的一篇论文《一种类似无穷小积分的新型积分》中进一步给出了留数的定义与应用。若函数 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 处趋于无穷，那么将 $f(x_1+\varepsilon)$ 展开为关于 ε 的幂级数，并将幂级数中 ε^{-1} 的系数定义为函数 f 在 $x=x_1$ 处的留数。虽然从现代的角度看，是否存在这样的幂级数是非平凡的，但柯西并没有对此进行说明。

柯西首先说明了如何计算 f 在一点处的留数。同 1825 年的报告中的方法类似，若 x_1 是 $\frac{1}{f(x)}=0$ 的单根，那么我们设

$$(x-x_1)\,f(x)=\mathbf{f}(x)$$

此时 $\mathbf{f}$ 在 $x=x_1$ 处是有界的，且

$$f(x)=\frac{\mathbf{f}(x)}{x-x_1}=\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{f}\left(x_1\right)+\mathbf{f}'\left(x_1+\theta\varepsilon\right)$$

其中 $0<\theta<1$。所以 f 在 $x=x_1$ 处的留数为

$$\mathbf{f}(x_1)=\varepsilon f\left(x_1+\varepsilon\right)$$

若 x_1 是 $\frac{1}{f(x)}=0$ 的 m 重根，则设

$$\left(x-x_1\right)^m f(x)=\mathbf{f}(x)$$

那么 $\mathbf{f}$ 在 $x=x_1$ 处是有界的，且有

$$f\left(x_1+\varepsilon\right)=\frac{1}{\varepsilon^m}f_0\left(x_1\right)+\frac{1}{\varepsilon^{m-1}}\frac{f_0'\left(x_1\right)}{1}+\cdots+\frac{1}{\varepsilon}\frac{f^{(m-1)}\left(x_1\right)}{1\cdot 2\cdots(m-1)}+\frac{f^{(m)}\left(x_1+\theta\varepsilon\right)}{1\cdot 2\cdots m}$$

其中 $0<\theta<1$。因此 f 在 $x=x_1$ 处的留数为

$$\frac{\mathbf{f}^{(m-1)}(x_1)}{1\cdot 2\cdots(m-1)}=\frac{1}{1\cdot 2\cdots(m-1)}\frac{\mathrm{d}^{m-1}\left[\varepsilon^m f\left(x_1+\varepsilon\right)\right]}{\mathrm{d}\varepsilon^{m-1}}$$

柯西接着定义了函数的积分留数，是其所有趋于无穷的点的留数之和，记为

$$\mathscr{E}((f(x)))$$

特别地，如果函数 f 具有分式形式

$$f(x)=\frac{\mathbf{f}(x)}{\mathbf{F}(x)} \tag{10}$$

那么我们用

$$\mathscr{E}\frac{\mathbf{f}(x)}{((\mathbf{F}(x)))}$$

来表示 f 在 $\mathbf{F}$ 的所有零点处的留数之和，并用

$$\mathscr{E}\frac{((\mathbf{f}(x)))}{\mathbf{F}(x)}$$

来表示 f 在 $\mathbf{f}$ 的所有趋于无穷的点处的留数之和。特别地，

$$f(x)=\frac{\mathbf{f}(x)}{(x-x_1)\varphi(x)}$$

在 $x=x_1$ 处的留数可以表示为

$$\mathscr{E}\frac{\mathbf{f}(x)}{((x-x_1))\varphi(x)}$$

因此对一般的函数 f，在 $x=x_1$ 处的留数为

$$\mathscr{E}\frac{(x-x_1)f}{((x-x_1))}$$

此外，对于 $\mathbf{f}^{(m-1)}(x)$ 有限的情况，我们分别有

$$\mathscr{E}\frac{\mathbf{f}}{(((x-x_1)^m))}=\frac{\mathbf{f}^{(m-1)}(x_1)}{1\cdot 2\cdots(m-1)} \tag{11}$$

若 f 有式 (10) 的形式，且 x_1 是 $\mathbf{F}(x)=0$ 的单根且 $\mathbf{f}(x_1)$ 有限，那么

$$\mathscr{E}\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))}=\varepsilon\frac{\mathbf{f}(x_1+\varepsilon)}{\varepsilon\mathbf{F}'(x_1+\theta\varepsilon)}=\frac{\mathbf{f}(x_1)}{\mathbf{F}'(x_1)}$$

然后便是这篇文章的核心：将函数 f 拆成两部分，使得其中一部分是有界的。首先，考虑一个点 $x=x_1$，设他是 $\frac{1}{f(x)}=0$ 的 m 重根，那么

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{\mathbf{f}(x)}{(x-x_1)^m}\\=&\frac{\mathbf{f}(x_1)}{(x-x_1)^m}+\frac{1}{1}\frac{\mathbf{f}'(x_1)}{(x-x_1)^{m-1}}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots(m-1)}\frac{\mathbf{f}^{(m-1)}(x_1)}{x-x_1}+\psi(x)\end{aligned}$$

其中 ψ 在 $x=x_1$ 处是有限的，且值为

$$\frac{\mathbf{f}^{(m)}(x_1)}{1\cdot 2\cdots m}$$

利用式 (11)，我们有如下代换

$$\begin{aligned}&\frac{\mathbf{f}(x_1)}{(x-x_1)^m}+\frac{1}{1}\frac{\mathbf{f}'(x_1)}{(x-x_1)^{m-1}}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots(m-1)}\frac{\mathbf{f}^{(m-1)}(x_1)}{x-x_1}\\=&\frac{1}{(x-x_1)^m}\mathscr{E}\frac{\mathbf{f}(z)}{((z-x_1))}+\frac{1}{(x-x_1)^{m-1}}\mathscr{E}\frac{\mathbf{f}(z)}{(((z-x_1)^2))}+\cdots+\frac{1}{x-x_1}\mathscr{E}\frac{\mathbf{f}(z)}{(((z-x_1)^m))}\\=&\mathscr{E}\frac{\mathbf{f}(z)}{(x-x_1)^m(((z-x_1)^m))}\left[(z-x_1)^{m-1}+(x-x_1)(z-x_1)^{m-2}+\cdots+(x-x_1)^{m-1}\right]\\=&\mathscr{E}\frac{\mathbf{f}(z)}{(x-x_1)^m(((z-x_1)^m))}\frac{(x-x_1)^m-(z-x_1)^m}{x-z}\\=&\mathscr{E}\frac{\mathbf{f}(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))}-\frac{1}{(x-x_1)^m}\mathscr{E}\frac{(z-x_1)^m\mathbf{f}(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))}\end{aligned}$$

其中，

$$\mathscr{E}\frac{(z-x_1)^m\mathbf{f}(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))}=\mathscr{E}\frac{(z-x_1)\mathbf{f}(z)}{(x-z)((z-x_1))}$$

是 $\frac{\mathrm{f}}{x-z}$ 在 $z=x_1$ 处的留数，因此为 0。所以有

$$\frac{\mathbf{f}(x_1)}{(x-x_1)^m}+\frac{1}{1}\frac{\mathbf{f}'(x_1)}{(x-x_1)^{m-1}}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots(m-1)}\frac{\mathbf{f}^{(m-1)}(x_1)}{x-x_1}=\mathscr{E}\frac{\mathbf{f}(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))}$$

这就说明

$$\mathscr{E}\frac{(z-x_1)f(z)}{(x-z)((z-x_1))}=\mathscr{E}\frac{(z-x_1)^m f(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))}=\mathscr{E}\frac{\mathbf{f}(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))}=f(x)-\psi(x)$$

这是 $\frac{f}{x-z}$ 在 $z=x_1$ 处的留数，且它是 f 与一个在 $x=x_1$ 处有限的函数 ψ 的差。因此，若我们考虑所有 $\frac{1}{f(x)}=0$ 的解处的留数之和，则由

$$f(x)-\mathscr{E}\frac{((f(z)))}{x-z}=\omega(x) \tag{12}$$

定义的函数 ω 在 f 的所有区域无穷的点处均有限。

在 1826 年的另一篇论文《交换积分顺序对二重积分的值可能产生的影响》中，再次讨论了有关式 (1) 的内容。前面我们推导的式 (3) 是基于式 (1) 连续且有界的情况得出的，而在这篇论文中，柯西考虑了

$$z=x+yi, f(z)=\frac{1}{(z-a-bi)^m}$$ [2]

的情况，并给出如下定义：

$$\varphi(x,y)=f(z)\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{[x-a+(y-b)i]^m},\chi(x,y)=f(z)\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{i}{[x-a+(y-b)i]^m}$$

首先考虑 $m=1$ 的情况，原本相等的两个积分现在差为

$$\begin{aligned}\Delta=&\int_{y_0}^{Y}[\chi(X,y)-\chi(x_0,y)]\mathrm{d}y-\int_{x_0}^{X}[\varphi(x,Y)-\varphi(x,y_0)]\mathrm{d}x\\
=&i\int_{y_0}^{Y}\left[\frac{1}{X-a+(y-b)i}-\frac{1}{x_0-a+(y-b)i}\right]\mathrm{d}y\\
&-\int_{x_0}^{X}\left[\frac{1}{x-a+(Y-b)i}-\frac{1}{x-a+(y_0-b)i}\right]\mathrm{d}x\\
=&\int_{y_0}^{Y}\frac{(y-b)\mathrm{d}y}{(X-a)^2+(y-b)^2}-\int_{y_0}^{Y}\frac{(y-b)\mathrm{d}y}{(x_0-a)^2+(y-b)^2}\\
&-\int_{x_0}^{X}\frac{(x-a)\mathrm{d}x}{(x-a)^2+(Y-b)^2}+\int_{x_0}^{X}\frac{(x-a)\mathrm{d}x}{(x-a)^2+(y_0-b)^2}\\
&+i\left[\int_{y_0}^{Y}\frac{(X-a)\mathrm{d}y}{(X-a)^2+(y-b)^2}-\int_{y_0}^{Y}\frac{(a-x_0)\mathrm{d}y}{(x_0-a)^2+(y-b)^2}\right.\\
&\left.+\int_{x_0}^{X}\frac{(Y-b)\mathrm{d}x}{(x-a)^2+(Y-b)^2}+\int_{x_0}^{X}\frac{(b-y_0)\mathrm{d}x}{(x-a)^2+(y_0-b)^2}\right]\\
=&\left[\arctan\frac{Y-b}{X-a}+\arctan\frac{b-y_0}{X-a}+\arctan\frac{Y-b}{a-x_0}+\arctan\frac{b-y_0}{a-x_0}\right.\\
&\left.+\arctan\frac{X-a}{Y-b}+\arctan\frac{X-a}{b-y_0}+\arctan\frac{a-x_0}{Y-b}+\arctan\frac{a-x_0}{b-y_0}\right]i\end{aligned}$$

[2]这里柯西将原先的 $f(y)$ 改成了 $f(z)$，即将 y 和 z 互换。

此时，根据 arctan 的计算法则，我们有

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{|x|}{x} \cdot \frac{\pi}{2}$$

因此若 (a,b) 在 x_0, y_0, X, Y 构成的矩形内部，那么 $\Delta = 2\pi i$，否则 $\Delta = 0$。而对于 $m > 1$ 的情况则有

$$\begin{aligned}
\Delta =& \int_{y_0}^{Y} \frac{i\mathrm{d}y}{[X-a+(y-b)i]^m} - \int_{y_0}^{Y} \frac{i\mathrm{d}y}{[x_0-a+(y-b)i]^m} \\
& - \int_{x_0}^{X} \frac{\mathrm{d}x}{[x-a+(Y-b)i]^m} + \int_{x_0}^{X} \frac{\mathrm{d}x}{[x-a+(y_0-b)i]^m} \\
=& \left.\frac{1}{(-m+1)[X-a+(y-b)i]^{m-1}}\right|_{y_0}^{Y} - \left.\frac{1}{(-m+1)[x_0-a+(y-b)i]^{m-1}}\right|_{y_0}^{Y} \\
& - \left.\frac{1}{(-m+1)[x-a+(Y-b)i]^{m-1}}\right|_{x_0}^{X} + \left.\frac{1}{(-m+1)[x-a+(y_0-b)i]^{m-1}}\right|_{x_0}^{X} \\
=& 0
\end{aligned}$$

因此，我们可以得出[3]

$$\Delta = \begin{cases} 2\pi i & (a,b) \text{ 在矩形内且 } m = 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{13}$$

式 (12) 与式 (13) 的结果被应用于柯西在 1826 年发表的另外一篇论文《函数的留数与定积分之间的关系》中。在这篇论文里，柯西考虑了一般的函数 f 沿一个矩阵绕一圈得到的积分值

$$\Delta = i \int_{y_0}^{Y} [f(X+yi) - f(x_0+yi)]\mathrm{d}y - \int_{x_0}^{X} [f(x+Yi) - f(x+y_0 i)]\mathrm{d}x$$

根据式 (12)，我们实际上只需要考虑

$$\mathscr{E}\frac{((f(z)))}{x-z}$$

绕矩阵一圈的积分就可以了。因此，我们对每个 $\frac{1}{f(z)} = 0$ 的点 $z = a + bi$ 分别考虑他们对 Δ 的贡献。如果 $a + bi$ 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的单根，那么直接通过式 (13) 我们就可以知道若 $a + bi$ 在矩阵内部则贡献为 $2\pi i$ 乘以 f 在 $z = a + bi$ 处的留数，若在外

[3] 柯西的论文中还讨论了 (a,b) 在矩阵边界上的情况，但这些讨论几乎是复杂且无意义的，因此我们忽略这些情况

侧则为 0。而 $a+bi$ 是 m 重根时则较为复杂。我们考虑与之前的化简相反的操作

$$\begin{aligned}
&\mathscr{E}\frac{(z-a-bi)^m f(z)}{(x-z)(((z-a-bi)^m))}\\
=&\mathscr{E}\frac{(z-a-bi)^m f(z)}{(x-a-bi)^m(((z-a-bi)^m))}\frac{(x-a-bi)^m-(z-a-bi)^m}{x-z}\\
=&\frac{1}{x-a-bi}A_1+\frac{1}{(x-a-bi)^2}A_2+\cdots+\frac{1}{(x-a-bi)^m}A_m
\end{aligned}$$

其中 A_k 为 $(z-a-bi)^{k-1}f(z)$ 在 $a+bi$ 处的留数。因此 $z=a+bi$ 处对 Δ 的贡献为 $2\pi i A_1$，也是 $2\pi i$ 乘以 f 在 $z=a+bi$ 处的留数。

将所有 $\frac{1}{f(z)}=0$ 的点对 Δ 的贡献加起来，可以得到

$$\Delta = 2\pi i {}_{x_0}^{X}\mathscr{E}_{y_0}^{Y}((f(z))) \tag{14}$$

其中 ${}_{x_0}^{X}\mathscr{E}_{y_0}^{Y}$ 表示仅考虑实部在 x_0 与 X 之间，虚部在 y_0 与 Y 之间的点的留数之和。这正是留数定理在曲线是矩阵的特殊情况。

在后续的论文中，柯西还对将留数定理的结论进一步推广做了一些工作。在 1826 年的又一篇论文《适用于函数留数的一些变换与在留数计算中的变量代换》中，首先讨论了导数的留数。设 $z=z_1$ 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的重数小于 m 的根，则 $\mathbf{f}(z)=(z-z_1)^m f(z)$ 在 $z=z_1$ 处为 0，且有

$$f'(z)=\frac{\mathbf{f}'(z)}{(z-z_1)^m}-m\frac{\mathbf{f}(z)}{(z-z_1)^{m+1}}$$

所以 f' 在 $z=z_1$ 处的留数为

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}\frac{(z-z_1)f'(z)}{((z-z_1))}=&\mathscr{E}\frac{\mathbf{f}'(z)}{(((z-z_1)^m))}-m\mathscr{E}\frac{\mathbf{f}(z)}{(((z-z_1)^{m+1}))}\\
=&\frac{\mathbf{f}^{(m)}(z_1)}{1\cdot 2\cdots(m-1)}-m\frac{\mathbf{f}^{(m)}(z_1)}{1\cdot 2\cdots m}=0
\end{aligned}$$

这说明任何函数的导数在任意点处的留数为 0。柯西利用这个结论，研究了变量代换对留数的影响。采用代换 $z=\psi(t)$，并设 $z=z_1$ 处 $f(z)$ 趋于无穷且 $\psi(t_1)=z_1$，要求 $\psi'(t_1)\neq 0$ 或无穷。设 z_1 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 重根，$\mathbf{f}(z)=(z-z_1)^m f(z)$，那么

$$f(z)=\mathscr{F}'(z)+\frac{1}{1\cdot 2\cdots(m-1)}\frac{\mathbf{f}^{(m-1)}(z_1)}{z-z_1}$$

其中，

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(z)=&-\frac{\mathbf{f}(z_1)}{(m-1)(z-z_1)^{m-1}}-\frac{1}{1}\frac{\mathbf{f}'(z_1)}{(m-2)(z-z_1)^{m-2}}-\frac{1}{1\cdot 2\cdots(m-2)}\frac{\mathbf{f}^{(m-2)}(z_1)}{z-z_1}\\
&+\frac{z-z_1}{1\cdot 2\cdots m}\mathbf{f}^{(m)}(z_1)+\frac{1}{2}\frac{(z-z_1)^2}{1\cdot 2\cdots(m+1)}\mathbf{f}^{(m+1)}(z_1)+\cdots
\end{aligned}$$

变量代换后，有

$$\mathscr{E}\frac{(t-t_1)f[\psi(t)]\psi'(t)}{((t-t_1))}=\mathscr{E}\frac{(t-t_1)\frac{\mathrm{d}\mathscr{F}[\psi(t)]}{\mathrm{d}t}}{((t-t_1))}+\frac{\mathbf{f}^{(m-1)}(z_1)}{1\cdot 2\cdots(m-1)}\mathscr{E}\frac{(t-t_1)\psi'(t)}{((t-t_1))[\psi(t)-\psi(t_1)]}$$

由于 $\psi'(t_1)\neq 0$ 或无穷，因此若设

$$\omega(t)=\ln\frac{\psi(t)-\psi(t_1)}{t-t_1}$$

则有

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)-\psi(t_1)}=\omega'(t)+\frac{1}{t-t_1}$$

由于 $\mathscr{F}'$ 和 ω' 都是函数的导数，因此留数为 0，所以

$$\mathscr{E}\frac{(t-t_1)f[\psi(t)]\psi'(t)}{((t-t_1))}=\frac{\mathbf{f}^{(m-1)}(z_1)}{1\cdot 2\cdots(m-1)}\mathscr{E}\frac{1}{t-t_1}=\mathscr{E}\frac{(z-z_1)f(z)}{((z-z_1))}\tag{15}$$

柯西同样考虑了 $\psi'(t_1)=0$ 或无穷的情况，这时，设

$$\frac{\psi(t)-\psi(t_1)}{(t-t_1)^{\mu}}$$

在 $t=t_1$ 处是有限且非零的，那么用类似的方法，用此式的对数代替原先的 ω，则可以得到

$$\mathscr{E}\frac{(t-t_1)f[\psi(t)]\psi'(t)}{((t-t_1))}=\mu\mathscr{E}\frac{(z-z_1)f(z)}{((z-z_1))}$$

将式 (15) 的结论应用于积分留数，则若 ψ 是单射，那么

$$\mathscr{E}((f(z)))=\mathscr{E}((f[\psi(t)]\psi'(t)))$$

接着，在柯西 1826 年的另一篇论文《在留数计算中添在 $\mathscr{E}$ 左右两侧的极限》中，将原先的符号 ${}_{x_0}^{X}\mathscr{E}_{y_0}^{Y}$ 进行了推广。我们假设 $z=\varphi(x,y)+i\chi(x,y)$，并用

$${}_{x=x_0}^{x=X}\mathscr{E}_{y=y_0}^{y=Y}((f(z)))$$

表示 $\frac{1}{f(z)}=0$ 的所有 $x_0<x<X, y_0<y<Y$ 的根的留数之和。更一般地，我们用

$${}_{x=x_0}^{x=X}\mathscr{E}_{y=f_0(x)}^{y=F(x)}((f(z)))$$

来表示 $\frac{1}{f(z)}=0$ 的所有 $x_0<x<X, f_0(x)<y<F(x)$ 的根的留数之和。根据式 (14) 的结论，我们有

$${}_{x_0}^{X}\mathscr{E}_{y_0}^{Y}((f(z)))={}_{x=x_0}^{x=X}\mathscr{E}_{y=y_0}^{y=Y}((f[\psi(t)]\psi'(t))),z=x+yi=\psi(t)$$

柯西接着考虑了极坐标的情况，设

$$f(z)=e^{z}\mathbf{f}(e^{z}),t=e^{z}=e^{x+yi}$$

在对数函数的一个分支中，我们可以得到

$${}_{x_0}^{X}\mathscr{E}_{y_0}^{Y}((e^{z}\mathbf{f}(e^{z})))={}_{x=x_0}^{x=X}\mathscr{E}_{y=y_0}^{y=Y}((\mathbf{f}(t)))={}_{(r_0)}^{(R)}\mathscr{E}_{(p_0)}^{(P)}((\mathbf{f}(t))),t=e^{x+yi}$$

其中，${}_{(r_0)}^{(R)}\mathscr{E}_{(p_0)}^{(P)}$ 用于表示 $\frac{1}{f(z)}=0$ 的所模长在 r_0,R 之间，辐角在 p_0,P 之间的根的留数之和。结合这一变换式与式 (14)，我们就可以得到

$$i\int_{p_0}^{P}[Rf(Re^{pi})-r_0f(r_0e^{pi})]e^{pi}\mathrm{d}p-\int_{r_0}^{R}[e^{Pi}f(re^{Pi})-e^{p_0i}f(re^{p_0i})]\mathrm{d}r=2\pi i{}_{(r_0)}^{(R)}\mathscr{E}_{(p_0)}^{(P)}((f(t)))$$

左侧的积分式本质上是绕模长在 r_0,R 之间，辐角在 p_0,P 之间的点围成的“扇形环”一圈的积分，而右侧是“扇形环”内部趋于无穷的点的留数之和。这是留数定理的又一特殊情况。利用上述的方法，同样可以证明圆环之外的一些图形的留数定理，但柯西并没有给出相应的结论和证明。

2.2.3 柯西积分公式

1831 年柯西在都灵作了一篇报告后，将报告内容整理成论文《关于天体力学与称为极限计算的新计算方式的报告总结》。在报告中，他首先回顾了一些基本结论，若 n 是正整数，那么

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{npi}\mathrm{d}p=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-npi}\mathrm{d}p=0$$

而在 $n=0$ 的情况下有，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}p=2\pi$$

因此，若 $f(x)$ 是一个多项式函数

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

那么，我们设 $\bar{x}=Xe^{pi}$，则有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(\bar{x})\mathrm{d}p=\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)\mathrm{d}p=2\pi a_0=2\pi f(0)$$

柯西希望将此结论推广至一般的函数 $f(x)$。他从一个等式

$$\frac{\mathrm{d}f(\bar{x})}{\mathrm{d}X}=\frac{1}{Xi}\frac{\mathrm{d}f(\bar{x})}{\mathrm{d}p}$$

开始考虑，然后将等式的左右两边同时对 X 从 0 到 X，p 从 $-\pi$ 到 π 积分，则左侧有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}p\int_{0}^{X}\frac{\mathrm{d}f(\bar{x})}{\mathrm{d}X}\mathrm{d}X=\int_{-\pi}^{\pi}[f(\bar{x})-f(0)]\mathrm{d}p=\int_{-\pi}^{\pi}f(\bar{x})\mathrm{d}p-2\pi f(0)$$

同时右侧有

$$\int_{0}^{X}\mathrm{d}X\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{Xi}\frac{\mathrm{d}f(\bar{x})}{\mathrm{d}p}\mathrm{d}p=0$$

因此结合起来可以得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(\bar{x})\mathrm{d}p=2\pi f(0)$$

这时，我们使用

$$\frac{\bar{x}[f(\bar{x})-f(x)]}{\bar{x}-x}$$

代替式中的 $f(\bar{x})$，则有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\bar{x}[f(\bar{x})-f(x)]}{\bar{x}-x}\mathrm{d}p=0$$

因此，我们就可以得出柯西积分公式

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\bar{x}f(\bar{x})}{\bar{x}-x}\mathrm{d}p=f(x)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\bar{x}}{\bar{x}-x}\mathrm{d}p=2\pi f(x)$$

然后柯西将这一公式变为无穷级数的形式，他观察到

$$\frac{\bar{x}}{\bar{x}-x}=1+\frac{x}{\bar{x}}+\frac{x^2}{\bar{x}^2}+\cdots$$

因此，我们有

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}f(\bar{x})\mathrm{d}p+x\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\bar{x})}{\bar{x}}\mathrm{d}p+x^2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^2}\mathrm{d}p+\cdots\right]$$

他在文中说这一幂级数展开在 x 的模长小于使得 $f(x)$ 有限且连续的最小模长时是收敛的，但柯西并未给出证明，仅以几个简单的函数为例说明了这是对的。

2.3 黎曼的共形映射理论

2.3.1 柯西-黎曼方程组

伯恩哈德 · 黎曼 (Bernhard Riemann, 1826 ~ 1866) 是德国著名数学家，他于 1851 发表的博士论文《单复变函数的一般理论基础》中，用与柯西不同的角

度讨论了复函数。他将两个复变量分别设为 $z=x+yi$ 和 $w=u+vi$，且 w 随 z 的变化而变化。接着，他考虑

$$x+yi, x+yi+\mathrm{d}x+\mathrm{d}yi$$

这两个相差为无穷小的自变量值，且

$$u+vi, u+vi+\mathrm{d}u+\mathrm{d}vi$$

是对应的因变量值，那么他们的变化量之比为

$$\frac{\mathrm{d}u+\mathrm{d}vi}{\mathrm{d}x+\mathrm{d}yi}$$

设 $\mathrm{d}x+\mathrm{d}yi=\varepsilon e^{\varphi i}$，则有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u+\mathrm{d}vi}{\mathrm{d}x+\mathrm{d}yi}=&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]\frac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}yi}{\mathrm{d}x+\mathrm{d}yi}\\=&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]e^{-2\varphi i}\end{aligned}$$

因此，我们可以看出，导数 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$ 的值与 $\mathrm{d}z$ 的模长无关，但与其方向有关。黎曼于是当导数 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$ 的值不随 $\mathrm{d}z$ 的变化而变时，称 w 为关于 z 的复函数。

黎曼接着提出了一个复函数的几何观点，他将 z 视为平面 A 上的一个点 O，其直角坐标为 (x,y)，w 为平面 B 上的一个点 Q，其直角坐标为 (u,v)。此时，若 u,v 是随 x,y 变化而连续变化的函数，那么每个平面 A 上的点就对应平面 B 上的一个点，平面 A 上的一条线对应平面 B 上的一条线，平面 A 上的连通块对应 B 上的连通块。因此，我们可以把 w 与 z 的对应关系视为平面 A 到平面 B 的映射。

然后他开始研究当 $w=u+vi$ 是关于 $z=x+yi$ 的函数时应满足的条件，将导数 $\frac{\mathrm{d}u+\mathrm{d}vi}{\mathrm{d}x+\mathrm{d}yi}$ 化为

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}i\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}i\right)\mathrm{d}yi}{\mathrm{d}x+\mathrm{d}yi}$$

由于我们希望此式在 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 取任意值时均相同，因此有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}\tag{16}$$

这便是 w 为 z 的函数所需要满足的充分必要条件，我们称其为柯西-黎曼方程组。之所以有柯西的名字，一方面是因为其在复分析领域做出了杰出的贡献，另一方面是他几乎得出了柯西-黎曼方程组的形式。若在式 (2) 中取 $y=x+zi$，就可以

得到柯西-黎曼方程组！但是柯西却将其化为了式 (3) 的积分的形式。这之间体现了柯西与黎曼的思考方式的不同。柯西更擅长从比较分析的角度，用无穷小量与积分来研究复函数；而黎曼则是从比较几何的角度，用导数的方向来研究复函数。除此之外，柯西当时实际上并没有意识到“连续的函数不一定有导数”这一事实，因此在柯西早期的论文中实际上都默认了复函数在各方向导数相同。另外，柯西-黎曼方程组最早并非由黎曼发现，在 1752 年，让 • 勒朗 • 达朗贝尔 (Jean Le Rond d'Alembert, 1717 – 1783) 发表了论文《关于流体阻力的新理论》，其中在研究流体的运动时，就提到了柯西-黎曼方程组。

2.3.2 黎曼面

接着黎曼开始研究这篇论文中最重要的内容，将 x, y 限制在有限的范围内，并且不再将 O 视为平面 A 上的一点，而是看做一个覆盖在平面上的曲面 (Fläche)T 上的一个点。相比于平面，在这个特殊的曲面 T 上，O 可以在多个不同的位置上取到相同的值。并且，曲面的两“叶”(Flächentheile) 不会沿着一条线连接，否则两层之间就会交叉。因此，平面上的每个点处，其上的曲面层数是一致的。接着他还讨论了所谓支点 (Windungspunkte)，即在其邻域处的点需在曲面上绕其旋转 m 圈才能回到原处的点。[4]

然后他描述了曲面的单连通性，首先，若曲面上的任何两点之间都存在一条曲面内部的线将他们相连，则称其为连通的。其次，他定义了横切 (Querschnitte) 的概念，即一条从边界上的一点直接（不经过其他边界上的点）连接边界上的另一点的线。最后，若连通曲面上任何横切都会将曲面分为两个连通的部分，则称其为单连通的，否则称为多连通的。接着他给出了几个有关单连通结论，一个单连通曲面被任何横切 ab 分为两个单连通曲面。采用反证法，假设其中一个部分不会被横切 cd 分为两部分，则有三种情况：第一种是 c, d 两点都不在 ab 上；第二种是 c 在 ab 上而 d 不在；第三种是 cd 都在 ab 上。那么我们将两部分分别沿着整条线 ab；线的 cb 部分；线的 cd 部分重新粘称一个曲面，这个曲面是原先的单连通曲面横切一次的结果，矛盾。

除此之外，他还证明了一个关于曲面连通性的很重要的结论，一个曲面 T 上进行 n_1 次横切 q_1 后得到 m_1 个单连通块组成的曲面 T_1，进行 n_2 次横切 q_2 后得到 m_2 个单连通块组成的曲面 T_2，则 $n_1 - m_1 = n_2 - m_2$。为了证明这个结论，我们将对 T 的横切 q_2 拆分为对曲面 T_1 的横切 q_2'。为了计算 q_2' 的端点数量，我们将其分为两类：

[4]黎曼的原论文中对这些内容的描述与现代的语言大不相同，其描述大都是模糊的，我们只能尝试理解他的思想。

1. 除了在 q_1 的线上的 q_2 端点之外的其他 q_2 端点；
2. 同时在 q_1, q_2 的线上的点，且不在 q_1 端点处的点。

设 q_1, q_2 中的线汇合、分离的次数为 μ，在 q_2 的线上且为 q_1 端点的点数为 ν_1，在 q_1 的线上且为 q_2 端点的点数为 ν_2，同时为 q_1, q_2 的端点的点数为 ν_3。那么第一类的点共有 $2n_2 - \nu_2 - \nu_3$ 个，而第二类的点则有 $\mu - \nu_1$ 个，即 q_2' 共进行了

$$\frac{2n_2 - \nu_2 - \nu_3 + \mu - \nu_1}{2} = n_2 + s$$

次横切。同理可知，将对 T 的横切 q_1 拆分为对曲面 T_2 的横切 q_1'，则 q_1' 共进行了

$$\frac{2n_1 - \nu_1 - \nu_3 + \mu - \nu_2}{2} = n_1 + s$$

次横切。由于在曲面 T_1 上进行 $n_2 + s$ 次横切后得到的曲面与在曲面 T_2 上进行 $n_1 + s$ 次横切得到的曲面是完全相同的。而由前面的结论与假设，T_1 是由 m_1 个单连通块组成的，T_2 是由 m_2 个单连通块组成的。因此在它们分别进行 $n_2 + s, n_1 + s$ 次横切后，得到的曲面是由 $m_1 + n_2 + s = m_2 + n_1 + s$ 组成的。因此 $n_1 - m_1 = n_2 - m_2$。这给出了一个非常重要的不变量 $n_1 - m_1$，我们称其为曲面的连通度 (Ordnung des Zusammenhangs)。因此，对曲面进行一次横切，可以使它的连通度减一；对曲面进行一次从一个内点到边界上一点的切割，则会保持连通度不变，因为在此基础上进行一次横切（从这一内点到边界上另一点的切割）可以使整个过程变成一个横切；对曲面进行一次两个内点之间的切割，则会使得连通度加一，因为在此基础上进行两次次横切（从这两个内点分别到边界上一点的切割）可以使整个过程变成一个横切。最后，一个曲面的连通度等于它的多个连通块的连通度之和。在接下来的讨论中，黎曼假设我们所考虑的曲面都是连通的，并定义 n-连通曲面表示所有可以通过 $n-1$ 次横切变为单连通曲面的曲面。

然后他讨论了曲面的连通度与边界的连通性的关系。首先，对于单连通的曲面，他的边界是一条闭曲线。同样采用反证法，假设边界可以被分为多个连通分支，则有一个横切 q 从边界的一个连通分支 a 上的一点到另一个连通分支 b 上的一点。由于存在一条沿着 a，从 q 的一侧到 q 的另一侧的曲线，因此横切后的曲面仍然是连通的，与单连通曲面的定义矛盾。更进一步地，每进行一次横切，边界的连通块个数就加一或减一。这是因为我们可以把横切 q 分为三种情况：

1. q 的两个端点分别是边界的不同连通块 a, b 上的点，则 a, q, b, q 组成了边界的一个连通块，使得边界的总连通块数量减一；
2. q 的两个端点是同一连通块上的两个不同点，则横切后边界被分为两部分，

每部分连接上横切的线，都可以构成一个连通块，因此边界的总连通块数量加一；

3. q 的两个端点相同，则 q 可以视为由一个闭曲线 o 和一条从边界的连通块 a 上一点到 o 上一点的连线组成。在这种情况下，o 和由 a, l, o, l 组成的闭曲线都是边界的一个连通块，所以边界的总连通块数加一。

因此 n 连通曲面的边界的连通块个数为 n 或 n 减去一个偶数。除此之外，我们还有一个推论：若 n 连通曲面的边界的连通块个数为 n，则曲面内部的一条闭曲线切割必会将曲面分为两部分。因为切割后连通度不变，而边界的连通块数量加 2，因此若切割后仍连通，则这个 n 连通曲面的边界有 $n+2$ 个连通块，这是不可能的。

接着黎曼开始对曲面上的函数进行研究，设 X, Y 是关于 x, y 的连续函数，定义在覆盖在平面 A 之上的曲面 T 上。为计算积分 $\int \frac{\partial X}{\partial x}\mathrm{d}T$，我们将平面 A 上被 T 覆盖的部分用平行于 x 轴的直线切割成“横条”，并保证 T 的每个支点都在其中一条直线上。这样的话，T 上对应这些横条的每个部分由一个或多个梯形部分组成。因此每一个宽为 $\mathrm{d}y$ 的横条对积分 $\int \frac{\partial X}{\partial x}\mathrm{d}T$ 的贡献为

$$\mathrm{d}y \int \frac{\partial X}{\partial x}\mathrm{d}x \tag{17}$$

这里的积分是沿着 T 的横条内的一条线积分的。这条线依据横条的连通块可分为若干条线段，每条线段的左端点设为 $O_1, O_2, \cdots$，右端点设为 $O^{(1)}, O^{(2)}, \cdots$，并用 $X_1, X_2, \cdots$，
$X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots$ 来表示这些点上 X 的取值。由于这些点都在曲面 T 的边界上，我们用 $\mathrm{d}s_1, \mathrm{d}s_2, \cdots, \mathrm{d}s^{(1)}, \mathrm{d}s^{(2)}, \cdots$ 来表示对应点处边界的“变化趋势”，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots$ 表示对应点处向内的法线与 x 轴正半轴的夹角。则

$$\int \frac{\partial X}{\partial x}\mathrm{d}x = -X_1 - X_2 - \cdots + X^{(1)} + X^{(2)} + \cdots$$

并且 ξ 对于左端点是锐角，对于右端点是钝角，因此

$$\mathrm{d}y = \cos\xi_1 \mathrm{d}s_1 = \cos\xi_2 \mathrm{d}s_2 = \cdots = -\cos\xi^{(1)}\mathrm{d}s^{(1)} = -\cos\xi^{(1)}\mathrm{d}s^{(2)} = \cdots$$

代入可得式 (17) 可得

$$\mathrm{d}y \int \frac{\partial X}{\partial x}\mathrm{d}x = -\sum X\cos\xi\mathrm{d}s$$

将所有 T 的横条中的结果积分，可以得到

$$\int \frac{\partial X}{\partial x}\mathrm{d}T = -\int X\cos\xi\mathrm{d}s$$

同理可得

$$\int \frac{\partial Y}{\partial y}\mathrm{d}T = -\int Y\cos\eta\mathrm{d}s$$

其中 η 是边界上一点处向内的法线与 y 轴正半轴的夹角，将两式相加可得

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}T = -\int (X\cos\xi + Y\cos\eta)\mathrm{d}s$$

接着，我们用 p 来表示曲面边界的向内法方向，则有

$$\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{\partial y}{\partial p}=\cos\eta, \frac{\partial y}{\partial s}=-\frac{\partial x}{\partial p}=-\cos\xi$$

代入上式可得

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\mathrm{d}T = -\int \left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)\mathrm{d}s = \int \left(X\frac{\partial y}{\partial s}-Y\frac{\partial x}{\partial s}\right)\mathrm{d}s \tag{18}$$

我们将此式应用于满足条件

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0 \tag{19}$$

的情况下，可以得到

$$\int \left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)\mathrm{d}s = 0$$

若将覆盖于平面 A 上的曲面 T_1 分为两个部分 T_2, T_3，那么积分

$$\int \left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)\mathrm{d}s \tag{20}$$

在 T_2 的边界上的取值就等于其在 T_1, T_3 的边界上的取值之差，因为 T_1, T_3 边界重合的部分会相互抵消，剩余的部分恰好构成了 T_2 的边界。因此，在覆盖在平面 A 上的曲面上添加或减少满足式 (19) 的部分不会影响其边界上式 (20) 的取值。我们接着考虑 X, Y 在除了孤立的不连续点之外均满足式 (19) 的情况，此时，式 (20) 在曲面 T 的边界上的取值，等于其在每个不连续点附近的取值之和。无论包围不连续点的边界多曲折，其对整个积分的贡献都是不变的。若 $\rho X, \rho Y$ 在与不连续点 O 的距离 ρ 趋于零时同样趋于零，则以 O 为圆心 ρ 为半径的圆上，式 (19) 等于

$$\int_0^{2\pi} \left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)\rho\mathrm{d}\varphi$$

由于这个式子可以任意小，因此它等于零，也就是说在这种情况下，不连续点对整个积分的贡献为零。

对于覆盖于平面 A 之上的单连通曲面，若式 (20) 恒为零，那么曲面上的任何两个点 O_o, O 之间的两条路径 s_1, s_2 粘合后得到的闭路径 s_3 可以视为由一条

或多条闭曲线构成，而每条单连通曲面中的闭曲线会将曲面分为一个单连通分支和一个双联通的分支。因此，在闭曲线上

$$\int\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)\mathrm{d}s \tag{21}$$

为零，所以 s_3 上此式同样为零。这就说明两条路径 s_1, s_2 上，积分值是相等的。更一般地，对一般的曲面 T，若式 (19) 对任意点成立，将不连续点去除后，任何剩余部分的子曲面的边界上都有式 (21) 为零。因此若将其通过横切变为单连通曲面 T^*，则在 T^* 中任何两点 O_o, O 之间的道路上式 (21) 均保持一致。所以我们将其统一记为

$$\int_{O_o}^{O}\left(Y\frac{\partial x}{\partial s}-X\frac{\partial y}{\partial s}\right)\mathrm{d}s$$

我们接着考虑

$$X=u\frac{\partial u'}{\partial x}-u'\frac{\partial u}{\partial x}, Y=u\frac{\partial u'}{\partial y}-u'\frac{\partial u}{\partial y}$$

的情况，此时，

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=u\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\right)-u'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

因此，若 u, u' 满足条件

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}=0$$

那么式 (19) 成立。所以

$$\int\left(u\frac{\partial u'}{\partial p}-u'\frac{\partial u}{\partial p}\right)=\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)\mathrm{d}s=0$$

考虑单连通曲面 T 上的一个定点 O_o，满足 $u=u_0, x=x_0, y=y_0$，那么我们有

$$\frac{1}{2}\ln\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)=\ln r$$

由此可以得出

$$\frac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2}=\frac{(y-y_0)^2-(x-x_0)^2+(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}{\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right)^2}=0$$

因此，代入 $u'=\ln r$，则

$$\int\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial p}-\ln r\frac{\partial u}{\partial p}\right)\mathrm{d}s \tag{22}$$

在曲面 T 的边界上的取值与其在围绕 O_o 的任何闭曲线上的取值相同。考虑围绕 O_o，半径为 r 的圆，其上的积分值为

$$-\int_0^{2\pi} u\frac{\partial \ln r}{\partial r} r\mathrm{d}\varphi - \ln r\int \frac{\partial u}{\partial p}\mathrm{d}s$$

因为我们有

$$\int \frac{\partial u}{\partial p}\mathrm{d}s = 0$$

因此上式可化简为

$$-\int_0^{2\pi} u\mathrm{d}\varphi$$

当半径 r 趋于无穷小时，此式趋于 $-2\pi u_0$[5]，因此我们在曲面 T 的边界上积分有

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int \left(\ln r\frac{\partial u}{\partial p} - u\frac{\partial \ln r}{\partial p}\right)\mathrm{d}s$$

这说明单覆盖于平面 A 上的单连通曲面 T 与满足条件

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

的函数 u 若满足如下 4 个条件：

1. 不可求偏导的点不构成曲面上的一个“区域”；
2. 函数 $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 的不连续点不构成曲线；
3. 不连续点附近 $\rho\frac{\partial u}{\partial x}, \rho\frac{\partial u}{\partial y}$ 随 ρ 趋于零而趋于零；
4. u 无可去间断点

那么 u 与其偏导可以在整个曲面 T 上定义并且在任意点处连续且有界。

若在此基础上假设一条曲线上有 $u = \frac{\partial u}{\partial p} = 0$，那么在整个曲面上都有 $u = 0$。我们首先说明这样的一条曲线 λ 不能是某个 $u > 0$ 的区域 a 的边界。假设 λ 确实是 a 的边界，那么从 a 中取一个由 λ 和一个圆心为 O_o 的圆构成边界的区域，特别地 O_o 不在区域内。由于式 (22) 在 λ 上积分为零且其在任何区域的边界上积分为零，因此

$$\int u\mathrm{d}\varphi + \ln r\int \frac{\partial u}{\partial p}\mathrm{d}s = 0$$

由于

$$\int \frac{\partial u}{\partial p}\mathrm{d}s = 0$$

[5]事实上，这一式子与柯西积分公式是极为相似的，只不过黎曼将结论拓展到了更一般的定义于单连通曲面上的函数。

因此我们可以得出

$$\int u \mathrm{d}\varphi = 0$$

但是 a 中所有点都有 $u>0$，因此这是矛盾的。同理我们可以说明 λ 同样不能是某个 $u<0$ 的区域 b 的边界。现在回到最开始的条件，因为存在一条 $u=\frac{\partial u}{\partial p}=0$ 的曲线，考虑曲面 T 上 $u\neq 0$ 的区域，它要么以这条曲线为边界，要么被曲面的一个 $u=0$ 的区域限制在内。无论如何，它的边界都满足 $u=\frac{\partial u}{\partial p}=0$。根据前面的结论，这是不可能的。所以 u 在整个曲面上均为零。因此，当我们确定一条曲线上 u 和 $\frac{\partial u}{\partial p}$ 的值以后，整个曲面上 u 的值就是唯一的了。

沿以 O_o 为圆心的圆积分有

$$\int_0^{2\pi} (u-u_0)\mathrm{d}\varphi = 0$$

因此 u 不可能在曲面 T 内部取到极大值或极小值，更一般地 u 为一常值的所有点必构成一些将曲面 T 分为 u 更大与 u 更小的区域的曲线。

然后黎曼回到了对复函数 $w=u+vi$ 的讨论，他将复函数的定义域设置在曲面 T 上，并首先考虑了曲面 T 单连通且单覆盖于平面 A 上的情况。那么，若 w 的不连续点不构成曲线，且对于曲面上 $z=z'$ 的一点 O'，$(z-z')w$ 在 O 趋于 O' 时趋于零，设 $z-z'=\rho e^{i\varphi}$，则我们可以得到如下五个结论：

1. $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=0$；
2. $\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$；
3. u,v 的不连续点不构成曲线；
4. 对任一点 O'，$\rho u,\rho v$ 在 O 到 O' 的距离 ρ 趋于零时趋于零；
5. u,v 无可去间断点

根据结论 $2,3,4$，我们将 $X=u,Y=v$ 代入式 (21)，可知

$$\int_{O_o}^{O}\left(u\frac{\partial x}{\partial s}-v\frac{\partial y}{\partial s}\right)\mathrm{d}s$$

对 O_o 至 O 的任何曲线有相同取值，且对固定的 O_o，可将其视为一个连续函数 U，结合结论 5，有 $\frac{\partial U}{\partial x}=u,\frac{\partial U}{\partial y}=-v$，代入结论 1，有

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$$

因此根据前面的结论，U 与其偏导在整个曲面 T 都连续且有界。因此函数 $w = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} i$ 与其对 z 的导数也是连续且有界的。我们接着考虑 $(z - z')w$ 不趋于零的情况。此时 w 在 O 趋于 O' 时趋于无穷大。那么存在 ρ 的某个幂次使得 w 在 ρ 趋于零时有限或趋于零。设 μ 就是这样的一个幂次，且 n 是最小的满足 $n > \mu$ 的整数。那么我们有

$$(z - z')^n = \rho^n e^{n\varphi i} w$$

在 ρ 趋于零时趋于零。因此 $(z - z')^{n-1} w$ 作为 z 的一个函数满足之前叙述的条件。因此，它在 O' 处是连续且有界的。设其值为 a_{n-1}。则函数

$$(z - z')^{n-1} w - a_{n-1}$$

在 O' 处连续且为零，即当 ρ 趋于零时趋于零。因此，函数

$$(z - z')^{n-2} w - \frac{a_{n-1}}{z - z'}$$

在 O' 处连续且有界。重复此过程可得

$$w - \frac{a_1}{z - z'} - \frac{a_2}{(z - z')^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{(z - z')^{n-1}}$$

在 O' 处是连续且有界的。因此 w 在 O' 处的无穷大阶数是一个整数。若这个整数为 m，则 w 加上一个包含 $2m$ 个常数的函数将变为一个在 O' 处连续的函数。

接着我们考虑曲面 T 上存在支点的情况。设 O' 是一个 $n-1$ 阶支点，$z = z' = x' + y'i$，并被函数 $\zeta = (z - z')^{\frac{1}{n}}$ 映至另一平面 Λ 上，设 O 对应的函数 $\zeta = \xi + \eta i$ 在平面 Λ 的像为 Θ。那么连通曲面 T 的像是覆盖在平面 Λ 上的一个连通曲面。特别地，我们考虑以 O' 为圆心，半径为 R 的圆，并画出它平行于 x 轴的直径。那么在直径上 $z - z'$ 是实的。这条直径将曲面 T 分成了两边各 n 个半圆形的叶。将 $y - y'$ 为正的叶分别记为 $a_1, \cdots, a_n$，而反方向的叶记为 $a'_1, \cdots, a'_n$。进一步假设在 $z - z'$ 为负处，$a_1, \cdots, a_n$ 分别与 $a'_1, \cdots, a'_n$ 相连；在 $z - z'$ 为正处，$a_1, \cdots, a_n$ 分别与 $a'_n, a'_1, \cdots, a'_{n-1}$。此时，沿顺时针方向绕支点 O' 旋转将依次经过 $a_1, a'_1, a_2, a'_2, \cdots, a_n, a'_n$，接着再从 a'_n 返回 a_1。这样的假设是合理的，我们使用极坐标，设 $z - z' = \rho e^{\varphi i}, \zeta = \sigma e^{\psi i}$ 并将叶 a_1 的像取为 $(z - z')^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\varphi}{n} i}$，其中 $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$。那么 $\sigma \leqslant R^{\frac{1}{n}}, 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{n}$，即其在平面 Λ 上的像是以 Θ' 为圆心 $R^{\frac{1}{n}}$ 为半径角度从 $\psi = 0$ 至 $\psi = \frac{\pi}{n}$ 的扇形。这样每个 a_1 中的点与扇形中的点是一一对应的，因此 a_1 的像是一个单覆盖在扇形上的连通曲面。类似地，$a'_1, a_2, \cdots, a'_n$ 的像分别对应从 $\varphi = \frac{\pi}{n}$ 到 $\varphi = \frac{2\pi}{n}$，从 $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ 到 $\varphi = \frac{3\pi}{n}$，……，从 $\varphi = \frac{(2n-1)\pi}{n}$ 到 $\varphi = 2\pi$ 的扇形。通过将它们相交处的点一一对应，这些扇形通过与 a，a' 之

间相同的方式拼接。因此我们可以将这些扇形连接在一起形成 T 在 O' 附近的一小部分的像，并且这个像显然是一个单覆盖在平面 Λ 上的曲面。

因为 O 和 Θ 之间是一一对应的，因此关于 z 的函数也可以视为关于 ζ 的函数。因此，若我们将 w 视为关于 $(z-z')^{\frac{1}{n}}$ 的函数，那么通过前面的结论可知，函数 w 加上形如

$$\frac{a_1}{(z-z')^{\frac{1}{n}}}+\frac{a_2}{(z-z')^{\frac{2}{n}}}+\cdots+\frac{a_m}{(z-z')^{\frac{m}{n}}}$$

的式子，可使其在 O' 处连续。

然后我们考虑复函数的一些几何性质。我们假设函数 w 定义在曲面 T 上，且非常值。那么假设 w 在某条曲线上为常值 $a+bi$，则 $u-a$ 与 $\frac{\partial u-a}{\partial p}=-\frac{\partial v}{\partial s}$ 在这条曲线上为零，且

$$\frac{\partial^2(u-a)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(u-a)}{\partial y^2}=0$$

因此在整个曲面上都有 $u-a=0$。同理，在整个平面上都有 $v-b=0$，即 $w=a+bi$ 为常值，这与我们的假设矛盾，因此 w 在任何曲线上都不可能取常值。所以若我们将点 O 处的 w 的值几何地看作平面 B 上的一个点 Q，那么 Q 的位置可以根据 O 的位置变化而连续变化，这说明我们可以将 Q 视为在一个曲面 S 上，且每一点对应曲面 T 上的一点 O，并随 O 的变化而连续变化。

2.3.3 共形映射

在黎曼的博士论文的第 3 小节中，给出了一个非常重要的结论。由于 $w=u+vi$ 是关于 $z=x+yi$ 的函数，因此，它的导数 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}$ 是与 $\mathrm{d}z$ 无关的。从几何的角度，我们设 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 是两个点 o 和 q 相对于 O 和 Q 的直角坐标，且 $\mathrm{d}x+\mathrm{d}yi=\varepsilon e^{\varphi i},\mathrm{d}u+\mathrm{d}v=\eta e^{\psi i}$。那么 ε,φ 和 η,ψ 就分别为 o 和 q 相对于 O 和 Q 的极坐标。现在，我们假设 o',o'' 是两个无限接近于点 O 的点，根据 w 是关于 z 的函数的假设，我们有

$$\frac{\mathrm{d}u'+\mathrm{d}v'i}{\mathrm{d}x'+\mathrm{d}y'i}=\frac{\mathrm{d}u''+\mathrm{d}v''i}{\mathrm{d}x''+\mathrm{d}y''i}$$

因此

$$\frac{\eta'}{\eta''}e^{(\psi'-\psi'')i}=\frac{\mathrm{d}u'+\mathrm{d}v'i}{\mathrm{d}u''+\mathrm{d}v''i}=\frac{\mathrm{d}x'+\mathrm{d}y'i}{\mathrm{d}x''+\mathrm{d}y''i}=\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}e^{(\varphi'-\varphi'')i}$$

所以

$$\frac{\eta'}{\eta''}=\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''},\psi'-\psi''=\varphi'-\varphi''$$

这说明三角形 $o'Oo''$ 与三角形 $q'Qq''$ 是相似的，特别地，这个夹角是相同的。因此，当我们考虑一个无穷小的“区域”时，函数会保持其形状。因此，我们称其

为共形的。将这一结论应用于函数 w 的像曲面 S 上，可以得知，曲面 S 与 T 有着相似的结构，可以视为由很多叶组成的曲面，且任何两叶不沿一条曲线连接，且它们是不交叉的。

从相反的角度看，对于曲面 S 上的每一个点 Q，都有唯一一个确定的值 z，且由于 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}$ 关于方向是不变的，z 的值会随着 Q 的位置变化而连续变化。因此 z 是定义在曲面 S 上的一个关于 w 的连续函数。若我们给定曲面 T 和 S 上的两点 O' 和 Q'，分别满足 $z = z', w = w'$，那么若它们均不是支点，则 $\frac{w-w'}{z-z'}$ 在 O 趋于 O' 时趋向一个有限的值，并且一个无穷小的区域的像与其是相似的，即它是共形的。另外，当 Q' 是一个 $n-1$ 阶支点，O' 是一个 $m-1$ 阶支点时，$\frac{(w-w')^{\frac{1}{n}}}{(z-z')^{\frac{1}{m}}}$ 在 O 趋于 O' 时趋向一个有限的值。

2.3.4 狄利克雷法则

在论文剩余的部分，黎曼解释了狄利克雷法则并用其给出了研究复函数的一种方式。设 α, β 为关于 x, y 的函数，且满足覆盖在 A 上的曲面 T 上的积分

$$\int \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right] \mathrm{d}T$$

是有限的。若我们将 α 加上一个在边界处为零且不连续点孤立的函数，则积分将在某些函数处取到最小值。特别地，如果没有可去间断点，那么使积分取到最小值的函数是唯一的。设 λ 是未定的边界处为零且不连续点孤立的函数，并且积分

$$L = \int \left(\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 \right) \mathrm{d}T$$

是有限的。用 ω 表示函数 $\alpha + \lambda$，并记

$$\Omega = \int \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right] \mathrm{d}T$$

因为 Ω 是有限的，它不可能小于 0 且当 L 趋于无穷时，Ω 也趋于无穷。因此，必定有 λ 取到 Ω 的最小值。为证明无可去间断点时的唯一性，我们设 u 为 Ω 取到最小值时 ω 的其中一种取值。设 h 为一个未定的常数，则对 $\omega = u + h\lambda$，我们

将 Ω 写为

$$
\begin{aligned}
&\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}T\\
&+2h\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right]\mathrm{d}T\\
&+h^2\int\left(\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2\right)\mathrm{d}T\\
&=M+2Nh+Lh^2
\end{aligned}
$$

由于 $h=0$ 时 Ω 取到最小值即 M，因此对任何 λ 有 $N=0$，否则

$$
2Nh+Lh^2=Lh^2\left(1+\frac{2N}{Lh}\right)
$$

在 h 与 N 符号相反且绝对值小于 $\left|\frac{2N}{L}\right|$ 时为负。因此 $\omega=u+\lambda$ 时 Ω 的值为 $M+L$ 是严格大于 M 的，除非 $L=0$。设 $\omega=u'=u+\lambda'$ 处 Ω 同样等于 M，则

$$
\frac{\partial \lambda'}{\partial x}=\frac{\partial \lambda'}{\partial y}=0
$$

并且因为 λ' 在边界上取值为零且不连续点孤立，所以它仅在某些孤立点处非零，即 u 与 u' 仅在某些孤立点处不同。然而 u 没有可去间断点，因此 u 与 u' 是相同的，即取到 Ω 的最小值的函数是唯一的。

根据前文的证明过程，对任意的 λ，我们有 $N=0$，这里

$$
N=\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right]\mathrm{d}T
$$

是曲面 T 上的积分。从 T 中移除一些 u,β,λ 的不连续点周围的小块 T'，根据式 (18)，代入函数

$$
X=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\lambda, Y=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\lambda
$$

可知 T 的剩余部分 T'' 上 N 的贡献为

$$
-\int\lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}T-\int\left(\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial \beta}{\partial s}\right)\lambda\mathrm{d}s
$$

因为 λ 在 T 的边界处取值为零，因此 T'' 的边界中与 T 的边界重合的部分对积分

$$
-\int\left(\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial \beta}{\partial s}\right)\lambda\mathrm{d}s
$$

的贡献为零。因此，我们可以将 N 视为 T'' 上的积分

$$-\int \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \mathrm{d}T$$

与分别在 T' 和其边界上的积分

$$\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right] \mathrm{d}T+\int \left(\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial \beta}{\partial s}\right)\lambda \mathrm{d}s$$

的和。所以若 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 非零，那么我们设 λ 在 T' 内为零，且在 T' 中始终保持 $\lambda\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$ 的符号不变，则 N 就是非零的，不符合条件。因此我们要求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，那么 T'' 对 N 的贡献为零。所以 $N=0$ 意味着不连续点处的贡献为零。设

$$X=\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}, Y=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}$$

则它们满足

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0$$

且沿 T 的任意部分的边界积分有

$$\int \left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right) \mathrm{d}s=0$$

若 T 是一个多连通曲面，我们将 T 横切为一个单连通曲面 T^*，那么积分

$$-\int_{O_o}^{O} \left(\frac{\partial u}{\partial p}+\frac{\partial \beta}{\partial s}\right) \mathrm{d}s$$

对于 T^* 内部任意从 O_o 到 O 的曲线有相同的取值。固定 O_o，则可将此积分视为一个关于 x, y 的连续函数 ν。为方便叙述，设 $v=\beta+\nu$，那么

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

则我们可以将上述结论描述为：设 $\alpha+\beta i$ 是关于 x, y 的一个复值函数，它定义在连通曲面 T 上且可被横切分割为单连通曲面 T^*。若对整个曲面的积分

$$\int \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}-\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)^2\right] \mathrm{d}T$$

是有限的，则有且仅有一种函数 $\mu+\nu i$ 的取值，满足以下条件：

1. μ 在边界处为零，或仅在孤立点处非零；

2. ν 由一点处的任意值确定；

3. μ 在 T 上的变化和 ν 在 T^* 上的变化仅在孤立点处不连续，且不连续点被

$$\int\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}T,\int\left[\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\nu}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}T$$

在曲面上有限所限制，且 ν 的变化在横切的两侧相同；

4. $\alpha+\beta i+\mu+\nu i$ 是关于 $z=x+yi$ 的函数。

这一结论是黎曼对复分析的研究的核心思想，开辟了复分析研究的一个全新的分支。从黎曼的观点来看，“基于这一结论的法则给出了我们独立于函数的表达式来研究特定的复变量函数的方法”[6]。对于覆盖在平面 A 上的单连通曲面，我们可以通过以下条件来完全确定关于 z 的函数 $u+vi$：

1. 给定 u 在边界上的值且位置微小变化产生的无穷小变化量是等阶的；
2. v 由一个点处的任意值给定；
3. 函数在所有点处连续且有界。

而对于 z 定义于多连通曲面的情况，我们同样可以基于上述的结论来确定关于 z 的函数。除了以上的三个条件之外，我们还需要对每个横切给定一个常数，用于表示穿过这个横切的变化量。

在黎曼以前对复函数的研究大都基于函数的解析表达式，而经过黎曼的研究我们可以发现，因为复函数本身所拥有的特殊性质，定义中的其中一部分的性质 (Bestimmungsstücke) 就足以确定整个函数的其他性质了。因此，我们将这些性质“剔除”，使得剩余的性质足以完全确定整个函数。例如，为了证明两个复函数相等，以前我们需要将其中一个复函数变换为另一复函数，即说明两个函数在任何位置都恰好相同；而现在，我们只需要在一个特别有限的定义域内验证这一点即可。

2.4 魏尔斯特拉斯与解析函数

2.4.1 解析函数

卡尔・魏尔施特拉斯 (Karl Weierstrass, 1815 ~ 1897) 是另一位复分析中非常重要的奠基之人。他的工作大多并未及时发表，通过在波林大学的演讲，他的

[6] Die Principien, welche dem Lehrsatz am Schusse des vorigen Art. zu Grunde liegen, eröffnen den Weg, bestimmte Functionen einer veränderlichen complexen Grösse (unabh¨angig von einem Ausdrucke für dieselben) zu untersuchen

许多工作才被人们知晓。虽然他的很多成果都已经被其他人发表过，但他并不关心优先权，而更关心阐明他发展函数论的方法。魏尔斯特拉斯的复函数理论与柯西和黎曼不同，他的研究基于幂级数理论，并在此基础上建立了解析延拓的方法。考虑两个幂级数 $f(x|b), g(x|a)$ 的收敛圆，设 c_1 是它们的重叠部分中的一个点。因为 c_1 同时在两个收敛圆中，因此我们可以将 $f(x|b)$ 变换为 $f_1(x|c_1)$，将 $g(x|a)$ 变换为 $g_1(x|c_1)$。那么，f_1 和 g_1 一定分别在 c_1 周围半径为 $r-|c_1-a|$ 和 $s-|c_1-b|$ 的范围内收敛，其中 r 和 s 分别为 f 和 g 的收敛半径。我们称 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 c 处相等，若 $f(x|c)$ 与 $g(x|c)$ 完全相同，那么我们有如下结论：若两个幂级 $f(x|b), g(x|a)$ 在同时在两个级数的收敛圆内的某点 c_1 处相等，那么它们在两个收敛圆共同部分中的任何一点 c_n 处都相等。我们取一串点列 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，假设每个 c_ν 都在 $f(x|c_{\nu-1})$ 和 $g(x|c_{\nu-1})$ 的收敛半径中，这是一定可以做到的，因为它们的收敛半径有一定的下限。因此由 $f_1(x|c_1)$ 就可以导出 $f_2(x|c_2)$，接着导出 $f_3(x|c_3)$ 等等，$g_1(x|c_1), g_2(x|c_2), \cdots, g_n(x|c_n)$ 也是同理。因为 $f(x|b)$ 与 $f_1(x|c_1)$ 在 c_1 的一个邻域内是完全一致的，且 $f_1(x|c_1)$ 与 $f_2(x|c_2)$ 在 c_2 的一个邻域内是完全一致的，因此，$f(x|b)$ 与 $f_2(x|c_2)$ 在 c_2 的一个邻域内是一致的。同时，若直接从 $f(x|b)$ 导出 $f_2'(x|c_2)$，那么它们在 c_2 的一个邻域内也是一致的，所以 $f_2(x|c_2) \equiv f_2'(x|c_2)$，同理有 $g_2(x|c_2) \equiv g_2'(x|c_2)$。归纳可知，从 $f(x|b), g(x|a)$ 中直接导出的幂级数 $f_n'(x|c_n)$ 和 $g_n'(x|c_n)$ 同样满足 $f_n(x|c_n) \equiv f_n'(x|c_n), g_n(x|c_n) \equiv g_n'(x|c_n)$。又由于 $f_1(x|c_1) \equiv g_1(x|c_1)$ 归纳可得 $f_n(x|c_n) \equiv g_n(x|c_n)$，所以 $f_n'(x|c_n) \equiv g_n'(x|c_n)$ 成立。

两个在收敛圆交集的任何点处都完全一致的幂级数，如 $f(x|b)$ 与 $g(x|a)$，互相被称为是对方的直接延拓 (unmittelbare Fortsetzung)。从一个定义在 a 处的幂级数 $f(x|a)$ 开始，我们可以构造出一个幂级数列，其中每一个幂级数都是前一个的直接延拓，且其中任何两个幂级数被称为对方的间接延拓 (mittelbare Fortsetzung)。而从一个幂级数 $f(x|a)$ 出发，我们可以得到无限个它的直接延拓和间接延拓。一个幂级数 $P(x|a)$ 的所有延拓的收敛圆合起来，将形成一个连续的区域。若 $P(x|a)$ 在点 $\bar{a}$ 处存在一个延拓，记为 $\bar{P}(x|\bar{a})$，且 $\bar{\bar{a}}$ 是 $\bar{a}$ 的收敛邻域内的一点，则 $\bar{P}(x|\bar{a})$ 可以变换为 $\bar{\bar{P}}(x|\bar{\bar{a}})$，因此 $\bar{\bar{P}}(x|\bar{\bar{a}})$ 也是 $P(x|a)$ 的一个延拓，所以若 $P(x|a)$ 在点 $\bar{a}$ 处存在一个延拓，那么在 $\bar{a}$ 的一个邻域内也都存在一个 $P(x|a)$ 的延拓，因此，这样的 $\bar{a}$ 构成一个连续的区域。

我们称一个可以被延拓的幂级数为函数元素 (FunktionenElement)，那么我们给出解析函数的定义：若 x' 是一个初始的函数元素 $f(x|a)$ 的延拓的收敛圆内的点，则可以给出 x' 处的一个特定的值，我们称其为由初始函数元素决定的解析函数的一个值（由于在 x' 处存在若干不同的延拓，因此我们还不能保证这个值是唯一的）。一旦所有可能的延拓都被 $f(x|a)$ 导出，那么无论从哪个函数元素作

为起始，都可以决定由 $f(x|a)$ 给出的解析函数。若将幂级数 $f(x|a)$ 中的 $(x-a)$ 替换为 $(x-a_1)+(a_1-a)$ 并将其展开为 $(x-a_1)$ 的多项式，我们称得出的幂级数为 $f(x|a_1)$，是幂级数 $f(x|a)$ 的变换。我们将说明任何函数元素都可以通过其他函数元素变换得到。

设 $f(x|a)$ 的收敛圆半径为 r，若 a_1 在圆内，则 $f(x|a)$ 可变换为 $f(x|a|a_1)$，设 $|a_1-a|=d$，那么 $f(x|a|a_1)$ 的收敛圆半径为 $(r-d)$。如果 $d<r-d$，即 $d<\frac{r}{2}$，则 a 在 $f(x|a|a_1)$ 的收敛圆内，因此可以由 $f(x|a|a_1)$ 导出级数 $f(x|a|a_1|a)$，是 $(x-a)$ 的幂级数。现在 $f(x|a)$ 与 $f(x|a|a_1)$ 在以 a_1 为圆心的一个圆内是完全相等的，另一方面，$f(x|a|a_1)$ 与 $f(x|a|a_1|a)$ 在以 a 为圆心的一个更小的圆内是完全相等的。由此可知，$f(x|a)$ 与 $f(x|a|a_1|a)$ 在以 a 为圆心的一个圆内是完全相等的，且这个圆完全位于以 a_1 为圆心的圆内。这说明同为 $(x-a)$ 的幂级数的 $f(x|a)$ 与 $f(x|a|a1|a)$ 系数完全相同，是同一个幂级数。因此 $f(x|a)$ 与 $f(x|a|a_1)$ 可以相互变换得到。

若 a_1 在 $f(x|a)$ 的收敛圆内而 a 不在 $f(x|a|a_1)$ 的收敛圆内，即 $d\geqslant\frac{r}{2}$，那么我们同样可以由 $f(x|a)$ 变换得到 $f(x|a|a_1)$，但不能直接从 $f(x|a|a_1)$ 变换得到 $f(x|a)$。我们在 a 与 a_1 之间添加点 $c_1,c_2,\cdots,c_n$，那么若 $f(x|a)$ 变换得到 $f(x|a|c_1)$，$f(x|a|c_1)$ 变换得到 $f(x|a|c_1|c_2)$，……，$f(x|a|c_1|c_2|\cdots|c_n)$ 变换得到 $f(x|a|c_1|c_2|\cdots|c_n|a_1)$，则可以反过来，由与 $f(x|a|a_1)$ 相等的最后一个幂级数变换得到倒数第二个幂级数，……，由第二个幂级数 $f(x|a|c_1)$ 变换得到 $f(x|a)$，从而间接地从 $f(x|a|a_1)$ 变换为 $f(x|a)$。唯一需要要求满足的条件为 $|c_1-a|<\frac{r}{2},|c_2-a|<\frac{r-|c_1-a|}{2},\cdots,|a_1-c_n|<\frac{r-|c_n-a|}{2}$。

如果两个幂级数在它们收敛圆的共同的部分中完全相同，即一个是另一个的直接延拓，那么我们可以通过如下方法将一个幂级数变换为另一个：设 c 是它们收敛圆的重合部分中的一点，那么一个级数 $f(x|a)$ 可以被变换为 $f(x|a|c)$。由于 c 同时也在 $g(x|b)$ 的收敛圆内，因此 $f(x|a|c)$，也即 $g(x|b|c)$，可以变换为 $g(x|b)$。由此可以看出，对于任何延拓，我们都可以对应地给出一串函数元素，使得它们可以一次变换到后一个元素。

设 x' 在由 $f(x|a)$ 定义的解析函数的定义域中，那么 $f(x|a)$ 必定可以导出幂级数 $f(x|a|a'|a''\cdots|a^{(n)}|x')$，这一幂级数的首项即为该解析函数在 x' 处的值。由于不同的变换"路径"可能最终得出的幂级数不同，因此，即使在同一个点处，也可能有多个不同的值。我们称一个点 a 处可以反映整个函数的特征，若我们可以在点 a 处进行幂级数展开。解析函数的一大性质便是任何一点都可以反映整个函数的特征，除了一些特殊的点之外。特别地，当我们考虑有理函数时，仅有分母为零且分子不为零的点处不能反映整个函数的特征。

2.4.2 奇点

考虑多项式 $f(x)=A_0+A_1x^{m_1}+A_2x^{m_2}+\cdots+A_\ell x^{m_\ell}$，其中 $m_1,m_2,\cdots,m_\ell$ 是正或复整数。我们设 x 的模长为 r，此时 $|f(x)|$ 的最大值为 g。若 $x=u+iv$ 并因此 $u^2+v^2=r^2$，那么 $|f(x)|$ 是一个关于 u,v 的连续函数，最大值为 g。我们希望说明 $|A_0|\leqslant g$ 一定成立。设 $x=r\xi$，且 ξ 可以取满足 $|\xi|=1$ 的所有值，那么 $|\xi^m|=1$。取 $x=r\cdot\xi^\nu$，则 $|\xi^\nu|=1$，即 $|x|=r$，那么有

$$f\left(r\cdot\xi^\nu\right)=A_0+A_1r^{m_1}\cdot\xi^{m_1\nu}+A_2r^{m_2}\cdot\xi^{m_2\nu}+\cdots+A_\ell r^{m_\ell}\cdot\xi^{m_\ell\nu}$$
$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}f\left(r\cdot\xi^\nu\right)=A_0+\frac{1}{n}A_1r^{m_1}\cdot\frac{1-\xi^{m_1n}}{1-\xi^m}+\cdots+\frac{1}{n}A_\ell r^{m_\ell}\cdot\frac{1-\xi^{m_\ell n}}{1-\xi^{m_\ell}}$$

若我们让 n 不断增长,则左侧的模长一定不会超过 g,因为对任意 ν 有 $|f\left(r\cdot\xi^\nu\right)|\leqslant g$。但对于右侧，除了第一项之外，每一项都随着 $\frac{1}{n}$ 趋于零而趋于零，因为由 $|\xi^m|=1$ 知 $|1-\xi^m|$ 不大于 2。我们设右侧的模长为 $|A_0|+\delta$，那么当 n 充分大时，δ 可为任意小，但 $|A_0|+\delta\leqslant g$，因而 $|A_0|\leqslant g$。

我们可以立马将这个定理推广至幂级数的情况，设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots$，则有

$$x^{-m}f(x)=a_0x^{-m}+a_1x^{-m+1}+\cdots+a_{m-1}x^{-1}+a_m+a_{m+1}x+\cdots+a_{m+s}x^s+\sum_{\kappa=s+1}^{\infty}a_{m+\kappa}x^\kappa$$

取一个任意小的量 ε，则取 s 足够大可使剩余项的模长小于 ε。同样设 g 为 $|f(x)|$ 在 x 的模长为 r 时的最大值，则

$$\left|x^{-m}f(x)-\sum_{\kappa=s+1}^{\infty}a_{m+\kappa}x^\kappa\right|<g\cdot r^{-m}+\varepsilon$$

根据前面的结论，我们有 $|a_m|\leqslant g\cdot r^m+\varepsilon$，由于 ε 可任意小，因此 $|a_m|\leqslant g\cdot r^m$，即 $|a_mx^m|\leqslant g$。

我们现在考虑一个幂级数 $f(x)$，它在 $|x|<r$ 时收敛，那么 $|x|+|h|<r$ 时，有

$$f(x+h)=S_{\nu=0}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}h^\nu$$

然而这一幂级数可能可以在 $|h|<r-|x|$ 的基础上扩大，我们设其收敛圆半径为 H，那么对于每个 $|x|<r$ 的 x，都有一个对应的 H。我们说明，如果对圆中任意的 x，对应的 H 都不小于一个非零常数 ρ，则 $f(x)$ 的收敛圆可以在半径为 r 的圆的基础上进行扩展。我们考虑两个圆 $0(r)$ 和 $0(r+\rho_1)$，其中 $\rho_1<\rho$。则 $f(x)$ 在 $0(r)$ 内的点处是收敛的。我们现在给出一个新的函数使得它在 $0(r)$ 内与

$f(x)$ 是一致的，且在所有 $0(r+r_1)$ 内部和边界的点处都收敛。设 x' 是 $0(r+\rho_1)$ 中的一点，设 a 是 $0(r)$ 中的一点，满足 $|a-x'|<\rho$。因为 $\rho_1<\rho$，所以 x' 在 $0(r+\rho_1)$ 边界上时同样可以取到对应的 a。那么

$$F(x|a)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^{\nu}$$

对满足 $|x-a|<\rho$ 的 x 都收敛，因为其收敛半径 H 不小于 ρ。对任意在 $0(r)$ 与以 a 为圆心 ρ 为半径的圆中的点 x，$F(x|a)$ 与 a 无关，且由 $f(a+(x-a))$ 的泰勒展开式知其与给定的幂级数 $f(x)$ 相等。我们接着说明对 $0(r)$ 外且在以 a 为圆心 ρ 为半径的圆内的点 x 同样有 $F(x|a)$ 独立于变量 a。设 x 是圆 $0(r)$ 与 $0(r+\rho_1)$ 之间的一点，且 a,a' 是圆 $0(r)$ 内的两点，满足 $|x-a|<\rho,|x-a'|<\rho$。那么对于在圆 $0(r)$ 及以 a,a' 为圆心 ρ 为半径的圆中的点 x，$F(x|a)$ 与 $F(x|a')$ 是相等的。因此，对于以 a,a' 为圆心的这两个圆来说，它们相交的部分是完全相同的，即 $F(x|a)\equiv F(x|a')$。因此 $F(x|a)$ 的取值是独立于 a 的。考虑满足 $|x-a|=\rho_1$ 的 x，设 $F(x)$ 的最大值为 G，根据前面得出的不等式，我们有

$$\left|\frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!}\right|\leqslant G\cdot\rho_1^{-\nu}$$

因此它小于 $G\cdot\rho_2^{-\nu}$ 对所有 $\rho_2<\rho_1$ 成立。设初始的幂级数 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$，我们接下来说明 $f(x)$ 对 $0(r+\rho_1)$ 中的点都收敛。在式

$$\sum\frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!}h^{\nu}$$

中设 $h=\varepsilon x_1$，其中 ε 需满足 $\varepsilon|x_1|<\rho$，因为只有这样才能使得幂级数对任何 $|x_1|<r$ 是有意义的。设此时 $h=\frac{\rho_0}{r}x_1$，满足 $\rho_0<\rho_2<\rho_1<\rho$，则有 $x_1+h=x_1\left(1+\frac{\rho_0}{\rho}\right)$。记

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!}\left(\frac{\rho_0}{r}\right)^{\nu}\cdot x_1^{\nu}=(\Sigma)$$

由不等式

$$\left|\frac{f^{(\nu)}(x_1)}{\nu!}\right|<G\cdot\rho_2^{-\nu},|x_1|^{\nu}\left(\frac{\rho_0}{r}\right)^{\nu}\leqslant\rho_0^{\nu}$$

可得如下估计：

$$|\Sigma|<\sum_{\nu=0}^{n-1}G\rho_2^{-\nu}\rho_0^{\nu}=G\cdot\frac{1-\left(\frac{\rho_0}{\rho_2}\right)^{n}}{1-\frac{\rho_0}{\rho_2}}<G\cdot\frac{1}{1-\frac{\rho_0}{\rho_2}}$$

同时，Σ 可以被视为 x_1 的幂级数，我们设其 n 次项系数为 A_n，而我们又有

$$\Sigma = f\left(x_1 + \frac{\rho_0}{r}x_1\right)$$

由此我们可以给出 A_n 与 a_n 的关系：

$$A_n = a_n\left(1+\frac{\rho}{r}\right)^n$$

因此，对于 $|x| < r+\rho_0$，我们有

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} A_n\left(\frac{x}{1+\frac{\rho_0}{r}}\right)^n < \frac{G}{1-\frac{\rho_0}{\rho_2}}$$

又因为 ρ_0 可以任意趋近于 ρ，因此，对任意 $|x| < (r+\rho)$ 有 $f(x)$ 收敛。

考虑一个收敛半径为 r 的幂级数，我们希望得到幂级数在边界处的行为。根据前面的讨论我们知道，$f(x+h)$ 的收敛半径 H 的变化必须可以达到无穷小，因此，在 $f(x)$ 的收敛圆的边界上，必有一点 x_0，使得它的任一邻域中，都可使 H 达到无穷小。我们设 $x = u+vi$，则任何一个收敛圆中的数对 (u,v) 对应于一个半径 H。我们将收敛圆切割为若干小长方形，用 $\left(\frac{\mu}{a},\frac{\mu'}{a}\right)$ 表示所有 u 落在 $\frac{\mu}{a}$ 与 $\frac{\mu+1}{a}$ 之间，v 落在 $\frac{\mu'}{a}$ 与 $\frac{\mu'+1}{a}$ 之间的点 x 组成的集合，其中 μ 和 μ' 为整数，a 为正整数。因为 H 可以达到无穷小，因此它必定会在某一小长方形中达到无穷小。同时，将 a 取遍所有正整数，我们可以得到无数中不同的分割方式。所以必有 (u_0,v_0) 满足其任何邻域中都存在可使 H 达到无穷小的点集 $\left(\frac{\mu}{a},\frac{\mu'}{a}\right)$，即对任意区间 $u_0-\delta$ 至 $u_0+\delta$ 与 $v_0-\delta$ 至 $v_0+\delta$，其中 δ 可任意小，我们总可以取充分大的 a 与区间 $\frac{\mu}{a}$ 至 $\frac{\mu+1}{a}, \frac{\mu'}{a}$ 至 $\frac{\mu'+1}{a}$，使其完全位于区间 $u_0-\delta$ 至 $u_0+\delta$ 与 $v_0-\delta$ 至 $v_0+\delta$ 内，且 H 可达到无穷小。此外，点 (u_0,v_0) 必须落在 $f(x)$ 收敛圆的圆周上，因为其不能位于圆外，否则对于充分大的 a，点集 $\left(\frac{\mu}{a},\frac{\mu'}{a}\right)$ 将完全落在收敛圆外；同时若 $u_0+iv_0 = x_0$ 位于收敛圆内，则 $f(x_0+h)$ 将有一个收敛圆，那么无论邻域多小，都不能使 H 为零，因为 H 不能小于 $r-|x_0|$，所以 $x_0 = u_0+iv_0$ 必须落在收敛圆圆周上。

设 x_1 为收敛圆圆周上一点，那么要么存在一个 $f(x)$ 的延拓 $f(x|x')$ 使得 x_1 位于 $f(x|x')$ 的收敛圆内，要么不存在这样的延拓 $f(x|x')$。我们证明一旦 x_1 位于 $f(x|x')$ 的收敛圆内，则 H 将在 x 趋于 x_1 时始终保持不小于一个特定的值。因为 $f(x)$ 可以变换为 $f(x|x')$，且 x_1 位于 $f(x|x')$ 的收敛圆内，因此 $f(x|x')$ 可以变换为 $f(x|x'|x_1)$。同时，$f(x)$ 与 $f(x|x')$ 在二者收敛圆的共同部分中是相等的，$f(x|x')$ 与 $f(x|x'|x_1)$ 也同样在它们收敛圆的共同部分中是一样的，因此 $f(x|x'|x_1)$ 与 $f(x)$ 在三个圆相交处相同。对于 $f(x|x_1)$ 的收敛圆中的一点 x_2，我们可以导出 $f(x|x_1|x_2)$，它在 $|x-x_2| < r_1-|x_2-x_1|$ 内是收敛的，其中 r_1 为

$f(x|x_1)$ 的收敛圆半径。若 x_2 趋于点 x_1，则收敛半径 $|x-x_2|$ 将不会趋于零。因此 x_1 不是一个满足 H 在其任何邻域内可趋于零的点。然而，如果 x_0 是满足这个条件的点，那么根据上述讨论我们知道，即使 x' 非常靠近 x_0，$f(x|x')$ 也不可能在 $x=x_0$ 处是收敛的。因此 $f(x|x_0)$ 不可能被导出。因此，我们可以说，至少存在收敛圆的边界上的一点 x_0，使其幂级数在此处失去了整个函数的特征。同时，若 x_1 不是如 x_0 这样的点，那么在收敛圆的边界上存在一个 x_1 的小邻域，使得邻域内不存在像 x_0 这样的点。我们称 x_0 这样的点为奇点 (Singuläre)。

接着我们将前述的结果应用于一个例子中。设

$$f(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots}{b_0+b_1x+\cdots}\equiv\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

我们希望得出在什么情况下这一函数可以被展开为幂级数并且其收敛半径是多少。当然，我们需要假设幂级数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 均有一个收敛区域，并且仅能定义 $f(x)$ 在 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 均收敛时的取值。我们首先假设 $b_0\neq 0$，a_0 可任取，否则若 $a_0=b_0=0$ 则可将分子与分母同时除以 x。若 x_0 位于 $\phi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的收敛圆内，则可将商转化为

$$\frac{\varphi(x|x_0)}{\psi(x|x_0)}=\frac{A_0+A_1(x-x_0)+\cdots}{B_0+B_1(x-x_0)+\cdots}$$

如果 $A_0\neq 0$ 且 $B_0=0$，那么商在 $|x-x_0|$ 趋于零时趋于无穷。若 $A_0=A_1=\cdots=A_{n-1}=0, B_0=B_1=\cdots=B_{n-1}=0$，则我们可将分子和分母同时除以 $(x-x_0)^n$ 并将 $\frac{A_n}{B_n}$ 作为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的取值。我们接着证明如下事实：

1. 若对分子和分母的收敛圆的公共区域中任意一点 x，商均不趋于无穷大，那么我们可以通过待定系数法给定一个等于 $f(x)$ 的形式幂级数，它在这个公共收敛区域中收敛。

2. 如果商在公共收敛区域的某些特定点处趋于无穷大，那么形式幂级数的收敛圆内不包含这些点，其半径是它们中模长的最小值。

注意到对形式幂级数 $P(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$，一旦 $\varphi(x_0),\psi(x_0),P(x_0)$ 均收敛，则 $P(x)$ 在 $x=x_0$ 处为真实的幂级数。我们先证明 1.，设半径为 ρ 的圆覆盖了 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的收敛圆的公共部分，即二者半径的较小值，并设幂级数 $P(x)$ 的收敛半径为 r。我们说明在 $r<\rho$ 这一假设下，没有任何一个 $0(r)$ 圆周上的点使得 $P(x)$ 在其附近的行为与整个函数不一致，即不能反映整个函数的特征。一旦证明了这一点，根据前面给出的结论，$P(x)$ 的收敛圆就可以在 $0(r)$ 的基础上进行，即其为 $0(\rho)$ 本身，如同 1. 中声称的那样。设 x_0 为 $0(r)$ 圆周上的一点，因为 $\varphi(x_0),\psi(x_0)$ 均

收敛，因此 $\varphi(x)$ 可以转化为 $\varphi(x|x_0)$，$\psi(x)$ 可以转化为 $\psi(x|x_0)$，因此商变为

$$\frac{\varphi(x|x_0)}{\psi(x|x_0)}=\frac{A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+\cdots}{B_0+B_1(x-x_0)+B_2(x-x_0)^2+\cdots}$$

我们形式化地将其转化为

$$C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)^2+\cdots=\bar{P}(x|x_0)$$

并且幂级数 $\bar{P}(x|x_0)$ 必定有一个收敛圆。由于 $P(x)$ 与 $\bar{P}(x|x_0)$ 在这个收敛圆与 $0(r)$ 的相交区域内是相等的，因此 $\bar{P}(x|x_0)$ 是 $P(x)$ 的一个延拓，这说明在 $0(r)$ 的圆周上任何一点 x_0 处都有一个 $P(x)$ 的延拓，根据我们前面的结论，这证明了 1. 的正确性。我们接着证明 2.，假设 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ 在某些点处趋于无穷大，设 x_1 为它们之中模长最小的那么 $P(x)$ 的收敛趋于显然不能超过 x_1，因此我们只需要说明 $P(x)$ 的收敛圆确实经过了 x_1。设 $P(x)$ 的收敛圆半径为 r，因为 $P(x)$ 的收敛圆不能在 $0(r)$ 的基础上继续扩展，因此必有一个圆周上的点 x_0，使得 $P(x)$ 不能转化为 $P(x|x_0)$。在 x_0 处没有幂级数可以表示这一商的结果，这只能在 $x=x_0$ 时趋于无穷大的情况下成立，因为任何其它情况都可以被表示为 $P(x|x_0)$。

特别地，我们现在考虑商为有理函数的情况。设

$$f(x)=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}=c_0+c_1x+\cdots$$

则这一幂级数的收敛圆必为有界的。我们首先说明，如果它始终有界，那么它的值可为任意大（这对任何幂级数均成立）。考虑所有模长为 r 的点 x，幂级数 $|\sum c_\nu x^\nu|$ 有上界 g，那么根据前面的结论，$|c_n|<g\cdot r^{-n}$。现在，如果幂级数 $|\sum c_\nu x^\nu|$ 总是小于一个确定的值 G，那么 $G\geqslant g$，因而 $|c_n|<G\cdot r^{-n}$。所以通过取 r 充分大，可使 $|c_n|$ 的值任意小，因此 $|c_n|=0$。这就证明了这样一个事实：如果一个幂级数总是小于一个特定的值，那么它的收敛范围必须是有限的；如果一个幂级数始终收敛且从不超过一个特定的量，那么它只能保持常值。我们现在证明幂级数

$$c_0+c_1x+\cdots=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}$$

不会超过一个特定的值，并且由于 $b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$ 不为 $a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ 的因式，因此 $c_0+c_1x+\cdots$ 的收敛圆有界。我们首先假设 $n\leqslant m$，此时我们可以将商写为

$$x^{n-m}\frac{a_n+a_{n-1}x^{-1}+\cdots+a_0x^{-n}}{b^m+b^{m-1}x^{-1}+\cdots+b_0x^{-m}}$$

因为 $n-m\leqslant 0$，在 x 不断增大的过程中，商变得越来越小，所以它显然保持一直小于一个特定的量。如果 $n<m$，则有

$$\frac{a_n+a_{n-1}x^{-1}+\cdots+a_0x^{-n}}{b^m+b^{m-1}x^{-1}+\cdots+b_0x^{-m}}=c_0x^{m-n}+c_1x^{m-n+1}+\cdots$$

在 x 不断增大的过程中，由于左侧始终保持小于某一特定值，右侧的正次数项不能无限制的增长。这说明幂级数 $c_0+c_1x+\cdots$ 的收敛圆是有限的，因此在其圆周上必有一点 x_0 使得商趋于无穷大。

如果我们假设商的分子为 1，而分母为 m 次的多项式，那么等式

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_mx^m=0$$

至少有一个根。事实上，我们可以证明它恰有 m 个根，考虑商 $\frac{f'(x)}{f(x)}$，设 $f(x)$ 在 x_1 处为零，且为 λ_1 重根。将 $f(x)$ 在 x_1 处展开得到 $f(x)=c_{\lambda_1}(x-x_1)^{\lambda_1}+\cdots$，$f'(x)$ 展开为 $f'(x)=\lambda_1c_{\lambda_1}(x-x_1)^{\lambda_1-1}+\cdots$，且 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 展开为

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\lambda_1c_{\lambda_1}+\cdots}{c_{\lambda_1}(x-x_1)+\cdots}=\frac{\lambda_1}{x-x_1}+P(x-x_1)$$

我们接着设 $f(x)=0$ 有 n 个不同的根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，它们分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 重根，考虑函数

$$\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{\lambda_1}{x-x_1}-\frac{\lambda_2}{x-x_2}-\cdots-\frac{\lambda_n}{x-x_n}$$

则它不在任何点 x 处趋于无穷，因此它始终收敛，设为 $P(x)$。另一方面，$P(x)$ 在 x 充分大时可任意小，因此 $P(x)$ 只能为常数 0，即

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\lambda_1}{x-x_1}-\frac{\lambda_2}{x-x_2}-\cdots-\frac{\lambda_n}{x-x_n}$$

又因为

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}=&\frac{ma_mx^{m-1}+(m-1)a_{m-1}x^{m-2}+\cdots}{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots}\\=&\frac{m+(m-1)\frac{a_{m-1}}{a_m}x^{-1}+\cdots}{1+\frac{a_{m-1}}{a_m}x^{-1}+\cdots}=mx^{-1}+P\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\lambda_1}{x-x_1}+\frac{\lambda_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{\lambda_n}{x-x_n}=\lambda_1x^{-1}+\lambda_2x^{-1}+\cdots+\lambda_nx^{-1}+P\left(\frac{1}{x}\right)$$

可得

$$m=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$$

这就证明了代数基本定理：多项式的根的个数与其次数相等。同时，通过对比 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 与 $\sum\frac{\lambda_i}{x-xi}$ 的更高次项系数，我们可以用多项式的系数 a_ν 表示出 $\sum\limits_{i=1}^{i=n}\lambda_ix_i^d$。

2.4.3 解析函数的导数

解析函数系统的定义如下:在一个点 a 处有 n 个函数元素 $f_1(x|a), f_2(x|a), \cdots, f_n(x|a)$,通过延拓,每一个元素都可以生成一个解析函数 f_ν。如果 a' 在每一个函数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的共同区域内,并且可以通过相同的"路径"由 $f_1(x|a)$ 导出 $\bar{f}_1(x|a')$ 由 $f_2(x|a)$ 导出 $\bar{f}_2(x|a')$ 等等。那么由这种方式得到的元素系统 $\bar{f}_1(x|a'), \cdots, \bar{f}_n(x|a')$ 的整体被称为 n 个解析函数组成的系统。

考虑幂级数 $f(x|a)$,那么这一函数元素有任何阶的导数 $f'(x|a), f''(x|a), \cdots$。如果我们可以从 $f(x|a)$ 导出 $f(x|x_0)$,那么这一函数元素同样有导数 $f'(x|x_0), f''(x|x_0), \cdots$。然而一个解析函数在 $x = x_0$ 处的导数有着与函数元素 $f(x|x_0)$ 在 x_0 处的值相同的数量,因此导数仅在我们给定它是从哪个函数元素导出的之后才可以被完全确定。我们接下来证明:由 $f(x|a)$ 与其导数 $f'(x|a), f''(x|a), \cdots$ 组成的元素系统生成了一个解析函数系统,则对于任意函数元素系统 $f(x|x_0), f'(x|x_0), f''(x|x_0)$,它们每一个都是前一个的一阶导数。设 $f(x|x_0), f'(x|x_0), \cdots$ 是由 $f(x|a), f'(x|a), \cdots$ 经过点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 导出的,那么我们首先由 $f(x|a)$ 给出 $f(x|a|a_1)$,即

$$f(x|a|a_1) = \sum \frac{f^{(\mu)}(a_1|a)}{\mu!}(x - a_1)^\mu$$

然后由 $f'(x|a)$ 给出

$$f'(x|a|a_1) = \sum \frac{f^{(\mu+1)}(a_1|a)}{\mu!}(x - a_1)^\mu$$

因此 $f'(x|a|a_1)$ 事实上就是 $f(x|a|a_1)$ 的导数。因此我们首先由 $f(x|a), f'(x|a), f''(x|a), \cdots$ 变换为 $f(x|a1), f'(x|a1), f''(x|a1), \cdots$,再由此变换为 $f(x|a2), f'(x|a2), f''(x|a2), \cdots$,最后变换为 $f(x|x_0), f'(x|x_0), f''(x|x_0), \cdots$,而第一次变换后每一项都是前一项的导数,因此同样的关系对第二次变换后,第三次变换后等等都成立,包括最后一次变换后的结果,这就证明了上面的结论。

设 $f_1(x|a), f_2(x|a), \cdots$ 是一系列的函数元素,且它们之间满足多项式 $G(f_1, \cdots, f_n) = 0$。那么,我们说明这一等式对解析函数系统 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 的任何函数元素系统均成立。由 $f_1(x|a), \cdots$ 我们可以沿 $a, a_1, \cdots, a_m, x_0$ 导出系统 $\bar{f}_1(x|x_0), \cdots, \bar{f}_n(x|x_0)$。如果我们说明由 $G(f_1(x|a), \cdots, f_n(x|a)) = 0$ 可以推出 $G(f_1(x|a|a_1), \cdots, f_n(x|a|a_1)) = 0$,那么我们立刻可以得到 $G\left(\bar{f}_1(x|x_0), \cdots, \bar{f}_n(x|x_0)\right) = 0$。首先考虑一个 $f_1, \cdots, f_n$ 的有理函数 $F(f_1, \cdots, f_n)$,那么 $F(f_1(x|a), \cdots, f_n(x|a))$ 可以被扩展为 $P(x|a)$,更进一步地,我们可以将 $F(f_1(x|a|a_1), \cdots, f_n(x|a|a_1))$ 扩展为 $P(x|a_1)$,我们现在希望说明 $P(x|a_1) = P(x|a|a_1)$。考虑 $P(x|a)$ 的收敛圆以及 $P(x|a_1)$ 的收敛圆,则它们的共同部分的所有点均有 $P(x|a) = P(x|a_1)$,因为对于这些点,$f_1(x|a) =$

$f_1(x|a|a_1), f_2(x|a) = f_2(x|a|a_1), \cdots$，因此 $F(f_1(x|a), \cdots) = F(f_1(x|a|a_1), \cdots)$。所以 $P(x|a|a_1)$ 与 $P(x|a)$ 的系数是一致的，根据我们前面所说的有

$$\begin{aligned} F\left(\bar{f}_1(x|x_0), \cdots \bar{f}_n(x|x_0)\right) =& P(x|x_0) \\ =& F(f_1(x|a|a_1 \cdots a_n|x_0), \cdots) = P(x|a|a_1 \cdots |a_n|x_0) \end{aligned}$$

如果 $F(f_1(x|a), \cdots, f_n(x|a)) = P(x|a)$ 的所有系数均为 0,那么这显然对 $P(x|a|a_1 \cdots |x_0)$ 也成立，这就说明了我们所希望的结论的正确性。[7]这个结论的一个特殊情况是：设 $G(x, f(x), f'(x) \cdots f^{(n)}(x)) = 0$ 是一个微分方程，如果我们能给出一个满足这个微分方程的函数元素，那么由这个函数元素给出的解析函数在它的整个区域内均满足此方程，即这个解析函数的任何其它函数元素与其导数均满足 $G = 0$。

2.4.4 孤立奇点

我们先考虑有理函数的情况，将有理函数中那些趋于无穷大的点除去，剩余的区域就构成了一个解析函数。对于排除的点，它可以被表示为：

$$\frac{A_0 + A_1(x-a) + \cdots}{B_0(x-a)^m + B_1(x-a)^{m+1} + \cdots} = (x-a)^{-m}\left(\frac{A_0}{B_0} + C_1(x-a) + \cdots\right)$$

如果 a 是这样一个被排除的点，那么我们可以通过乘以 $(x-a)$ 的一个正整数次幂使其变为正常的点。在 x 接近无穷远点时，我们有与此类似的现象：

$$\frac{A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \cdots}{B_0 x^q + B_1 x^{q-1} + \cdots} = \left(\frac{1}{x}\right)^{q-p}\left(\frac{A_0}{B_0} + C_1\frac{1}{x} + \cdots\right)$$

如果 $q \geqslant p$，那么对于充分大的 x，这个函数可以表示为 $\frac{1}{x}$ 的幂级数，在这种情况下我们说这个函数在趋于无穷时表现得正常 (verhalte sich regulär)。若 $q < p$，那么我们可以通过乘以一个 $\frac{1}{x}$ 的正整数次幂使得它在无穷处表象得正常。用 a 处的 $x - a$ 类比无穷远处的 $\frac{1}{x}$，我们可以给出如下定义：我们称一个单值函数在 a 处表现得正常，若它可在 a 处被表示为一个幂级数 $(x-a)$。如果这不成立，那么我们称这个函数在 a 处表现得奇异 (rhalte sich singulär)，并且我们称其为非本性 (außerwesentlich) 奇异，若函数可以通过乘以 $(x-a)$ 的一个正整数次幂变换为一个在 a 处表现得正常的函数，否则称其为本性 (Wesentlich) 奇异。有理函数可以有奇点，但是只能是非本性奇点。这一定理的逆定理也成立，并且是魏尔斯特拉斯的函数论的一个基本定理。

这个逆定理描述为：如果一个单值函数仅有非本性奇点，那么这个函数一定是有理函数。下面我们来证明这一定理。首先假设函数没有有限的奇点。那么，

[7]这个结论可以更直接地通过解析函数的有理函数或无穷级数还是解析函数的事实来说明

它一定可以表示为一个始终收敛的 x 的幂级数，因为如果它的收敛圆有界，那么根据之前的讨论它的圆周上必定有一个奇点。这一幂级数可以包含有限或者无限项，对于后者，无穷远点必定是一个本性奇点，因为 $p(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots$，它不可能通过乘以某个 $\left(\frac{1}{x}\right)$ 的正整数幂次变为一个关于 $\frac{1}{x}$ 的幂级数，它将变为

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}\right)^m P(x)=&P_1\left(\frac{1}{x}\right)\\=&A_0\left(\frac{1}{x}\right)^m+A_1\left(\frac{1}{x}\right)^{m-1}+\cdots+A_{m-1}\left(\frac{1}{x}\right)+A_m+A_{m+1}x+\cdots\end{aligned}$$

对于充分大的 x 它将变为 $\bar{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)=A_m+A_{m+1}x+A_{m+2}x^2+\cdots$，这不可能是有限的。如果 $P(a)$ 停止于某项，则无穷远处仍然是一个奇点，但是它是非本性的。

我们将说明如果一个函数只有非本性奇点，那么它只能有有限个。如果这一结论成立，且 $f(x)$ 是一个仅有非本性奇点的函数，则我们可以假设这些奇点为 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 并且相对应的幂次为 $m_1,m_2,\cdots,m_r$，那么函数

$$\varphi(x)=(x-a_1)^{m_1}\cdot(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_r)^{m_r}f(x)\tag{23}$$

是一个没有有限奇点的函数，并且根据假设，在无穷远处至多只是一个非本性奇点，因此根据上面的证明，$\varphi(x)$ 只能是整有理函数，因此 $f(x)$ 也是有理函数。所以我们只剩下需要证明仅有非本性奇点的函数 $f(a)$ 只能有有限个奇点。如果存在无穷个奇点，那么必有一个点 x_0，它的任意邻域中都有一个奇点，但这对于非本性奇点是不可能的，我们可以说明对于一个非本性奇点 a，它一定有一个邻域使得其中没有其它的非本性奇点。在点 a 处 $f(x)$ 可以表示为

$$f(x)=(x-a)^{-m}(C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+\cdots)=(x-a)^{-m}P(x|a)$$

我们可以确定一个 a 的邻域使得其中任何一点 a_1，都可以将 $P(x|a)$ 变换为 $P(x|a_1)$，即

$$f(x)=(x-a)^{-m}P_1(x|a_1)=[(a_1-a)+(x-a_1)]^{-m}P_1(x|a_1)$$

这个式子可以变换为一个关于 $(x-a_1)$ 的幂级数，因此 $f(x)$ 在点 a_1 处表现得正常。所以不可能有无限个非本性奇点。

我们可以很容易地给出在特定位置上为本性奇点的函数，例如，如果函数 $G_1(x)$,
$G_2(x),\cdots,G_n(x)$ 在所有有限点处都可以反映整个函数的特征，那么函数

$$G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right)+G_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right)+\cdots+G_n\left(\frac{1}{x-a_n}\right)$$

就在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 处都是本性奇点。

我们下面考虑始终收敛的幂级数，那么它只能在无穷远处有一个本性奇点。接下来我们用 G 来表示没有有限的奇点的函数，那么我们似乎显然有如下结论：如果函数在有限时只有非本性奇点，且仅有本性奇点在无穷远处，那么这个函数可以表示为 $\frac{G_1(x)}{G_2(x)}$。然而这个结论的证明有一个本质困难的点，我们需要考虑函数有无穷个非本性奇点的情况，如果 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 是 $f(x)$ 的非本性奇点，我们需要构造一个整函数 (ganze Funktion)（整函数指的是所有始终收敛的幂级数）$G_1(x)$，使其在所有 a 处为零，即拥有所有表达式 $(x - a_\nu)m^\nu$ 作为因子。那么 $G_1(x) \cdot f(x) = G_2(x)$ 为另一整函数，所以 $f(x) = \frac{G_2(x)}{G_1(x)}$。如果一个函数 $G(x)$ 在 a 处为零，设 $G(x) = (x-a)^m \cdot P(x)$，那么 a 被称为 $G(x)$ 的一个 m 重零点并且 m 为 a 的阶数。因此为了将 $f(x)$ 表示为 $\frac{G_1(x)}{G_2(x)}$ 的形式，我们需要解决“如何构造一个关于 x 并且指定了一系列零点的整函数”的问题。如果 $a_1, a_2, \cdots$ 为一系列的零点，那么 $G(x) = \prod(x - a_\lambda)$ 便是一个在 $x = a_1, a_2, \cdots$ 处都收敛的函数，或者函数

$$\frac{G(x)}{G(x_0)} = \prod \frac{x - a_\lambda}{x_0 - a_\lambda} = \prod \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0 - a_\lambda}\right)$$

但这一乘积仅在级数

$$\sum \frac{x - x_0}{x_0 - a_\lambda} = (x_0 - x) \sum \frac{1}{a_\lambda} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x_0}{a_\lambda}}$$

收敛时才有意义。由于 $|a_\lambda|$ 随着 λ 变大而不断增大，而 x_0 可以任意小，这一级数的敛散性与级数 $\sum_\lambda \frac{1}{a_\lambda}$ 相同，这种情况下构造出 $G(x)$ 是可能的。

3 复分析理论的发展

3.1 级数与无穷乘积

3.1.1 魏尔斯特拉斯的探索

魏尔斯特拉斯对解析函数的级数和无穷乘积进行了详细的讨论，虽然在他之前已有不少人研究了这些问题，但是大都不严格。魏尔斯特拉斯用自己严格的定义重述了他们的工作，并在他们的基础上进一步完善。

3.1.2 洛朗级数

皮埃尔 • 阿方斯 • 洛朗 (Pierre Alphonse Laurent, 1813 ∼ 1854) 是一位法国数学家，在他 1843 年的一次报告中，提出了洛朗级数的概念，推广了泰勒级数，可以将定义在一个圆环上的解析函数展开为更一般的幂级数。

3.1.3 伽马函数

伽马函数早在伯努利、欧拉的时代就已经出现，最早是作为阶乘的一种推广，后来逐步被推广。魏尔斯特拉斯用整函数的典范乘积理论得到了伽马函数，并给出它的不少性质。

3.1.4 阿达马因子分解定理

雅克 • 阿达马 (Jacques Hadamard, 1865 ∼ 1963) 是法国著名数学家，他继续深入研究了整函数的性质，基于约翰 • 琴生 (Johan Jensen, 1859 ∼ 1925) 的琴声公式，发现了阿达马因子分解定理，并用于解决了素数定理。

3.1.5 黎曼 ζ 函数

黎曼 ζ 函数早在欧拉的时代就已经有研究，在黎曼 1859 年的文章《论小于给定值的素数个数》中将黎曼 ζ 函数延拓至整个复平面，并证明了它是亚纯的。这篇文章中还提出了著名的黎曼猜想，至今仍是未解之谜。

3.2 共形映射理论的发展

3.2.1 黎曼映射定理

黎曼映射定理最早由黎曼提出，在 1914 年被保罗 • 克伯 (Paul Koebe, 1882 ∼ 1945) 证明。这个定理说明，任何两个不是平面本身的单连通域，都存在一个他

们之间的共形映射，并在满足一定条件下是唯一的。

3.2.2 多边形的共形映射

黎曼映射定理的一个特殊情况便是将多边形映成单位圆的共形映射。埃尔温·布鲁诺·克里斯托费尔 (Elwin Bruno Christoffel, 1829 ~ 1900) 和赫尔曼·施瓦茨 (Hermann Schwarz, 1843 ~ 1921) 分别于 1867 和 1869 年独立给出了关于这个共形映射的反函数的形式，被称为施瓦茨-克里斯托费尔公式。

3.3 双周期函数

3.3.1 椭圆积分与双周期函数

尼尔斯·亨里克·阿贝尔 (Niels Henrik Abel, 1802 ~ 1829) 与卡尔·古斯塔夫·雅各布·雅可比 (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804 ~ 1851) 在 19 世纪初期时做了很多关于椭圆积分的工作，并分别给出了两种椭圆函数。刘维尔发现这些函数的都有两个周期，一实一虚，他将这样的函数称为双周期函数并给出了一系列双周期函数的性质。

3.3.2 魏尔斯特拉斯的理论

魏尔斯特拉斯从一个有二重极点的双周期函数出发，给出一般椭圆函数的一种表示形式，并写出了这个双周期函数的反函数，揭示了双周期函数与椭圆积分的关系。

参考文献

[Bom66] Raphaël Bombelli. *L'algebra*. Biblioteca scientifica Feltrinelli. Feltrinelli, 1966.

[Bot86] Umberto Bottazini. *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*. Springer, 1986. ISBN: 9780387963020.

[Car45] Gerolamo Cardano. *Artis Magnae, Sive de Regulis Algebraicis Liber Unus*. 1545.

[Cau16] Augustin-Louis Cauchy. "Résumé d'un Mémoire sur la Mécanique Céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites". In: *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy*. Vol. (2). 12. Paris, Gauthier-Villars, 1916, pp. 48–112.

[Cau74] Augustin-Louis Cauchy. "Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires". In: *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* 7 (1874), pp. 265–304.

[Cau87a] Augustin-Louis Cauchy. "De l'influence que peut avoir, sur la valeur d'un intégral double". In: *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy*. Vol. (2). 6. Paris, Gauthier-Villars, 1887, pp. 113–123.

[Cau87b] Augustin-Louis Cauchy. "Mémoire sur les intégrales définies". In: *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy*. Vol. (1). 1. Paris, Gauthier-Villars, 1887, pp. 319–506.

[Cau87c] Augustin-Louis Cauchy. "Sur diverses relations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales définies". In: *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy*. Vol. (2). 6. Paris, Gauthier-Villars, 1887, pp. 124–125.

[Cau87d] Augustin-Louis Cauchy. "Sur les limites placées à droite et à gauche du signe $\mathscr{E}$ dans le calcul des résidus". In: *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy*. Vol. (2). 6. Paris, Gauthier-Villars, 1887, pp. 256–285.

[Cau87e] Augustin-Louis Cauchy. "Sur quelques transformations applicables aux résidus des fonctions et sur le changement de variable indépendante dans le calcul des résidus". In: *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy*. Vol. (2). 6. Paris, Gauthier-Villars, 1887, pp. 210–220.

[Cau87f] Augustin-Louis Cauchy. “Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitésimal”. In: *Œuvres complètes d’Augustin Cauchy*. Vol. (2). 6. Paris, Gauthier-Villars, 1887, pp. 23–37.

[De 07] Abraham De Moivre. “Aequationum quarundam potestatis tertiae, quintae, septimae, nonae, & superiorum, ad infinitum usque pergendo, in termimis finitis, ad instar regularum pro cubicis quae vocantur Cardani, resolutio analytica”. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London (in Latin)* 25 (1707), pp. 2368–2371. DOI: 10.1098/rstl.1706.0037.

[De 22] Abraham De Moivre. “VII. De sectione anguli”. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 32 (1722), pp. 228–230. DOI: 10.1098/rstl.1722.0039.

[Eul49] Leonhard Euler. “De la controverse entre Mrs. Leibnitz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires”. In: *Mémoires de l’académie des sciences de Berlin* 5 (1749), pp. 139–179.

[Gau00] Carl Friedrich Gauss. “Carl Friedrich Gauss Werke”. In: ed. by Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften zu Göttingen. Vol. 8. Gedruckt in der Dieterichschen universitätsdruckerei (W.F. Kaestner), 1900, pp. 90–92.

[Gau99] Carl Friedrich Gauss. *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*. Apud C.G. Fleckeisen, Helmstadii, 1799.

[Gra15] Jeremy Gray. *The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century*. Springer undergraduate mathematics series. Springer International Publishing, 2015. ISBN: 9783319237169.

[Kli90] Morris Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, 1990.

[Rie04] Bernhard Riemann. *Collected Papers*. Ed. by H. Weber. Trans. by Roger Baker, Charles Christenson, and Henry Orde. Kendrick Press, 2004. ISBN: 9780974042732.

[Rie76] Bernhard Riemann. “Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse”. In: *Bernard Riemann’s* *gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*. Ed. by H. Weber. Teubner, Leipzig, 1876, pp. 3–47.

[Smi97] Frank Smithies. *Cauchy and the Creation of Complex Function Theory*. Cambridge University Press, 1997. ISBN: 9780521592789.

[Wal85] John Wallis. *A Treatise of Algebra, Historical and Practical*. Richard Davis, 1685.

[Wes99] Caspar Wessel. "Om Directionens analytiske Betegning, et forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning". In: *Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter* 5 (1799), pp. 469–518.

[WH88] Karl Weierstraß and Adolf Hurwitz. *Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen*. Ed. by Peter Ullrich. Die Wissenschaft. Vieweg+Teubner Verlag, 1988. ISBN: 9783528063344.