Fourier 分析的历史

柏竣文

2024 年 3 月

目录

记号约定

首先在这里约定一些基本记号, 某些记号会在文中给出定义.

用 $\mathbb{N}$ 表示自然数集, $\mathbb{Z}$ 表示整数集, $\mathbb{Q}$ 表示有理数集, $\mathbb{R}$ 表示实数集, $\mathbb{C}$ 表示复数集, 而 $\mathbf{T}$ 表示商 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. 对任意集合 A, 和正整数 n, 用 A^n 表示 A 自身的 n 次 Descartes 积.

$\mathbb{Z}^n$ 中的元素被记作 $m=(m_1,...,m_n)$. 定义其模长为 $|m|=\left(m_1^2+\cdots+m_n^2\right)^{1/2}$.

对 $x,y\in\mathbb{R}^n$, 它们的内积被定义为 $x\cdot y=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$. 将 Euclid 范数记为 $|\cdot|$, 其定义为: 对 $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 有 $|x|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$. 若 $x\in\mathbb{R}^n$ 且 $r>0$, 则

$$B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n:|x-y|<r\}$$

表示中心为 x, 半径为 r 的球. $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度记为 $\mathrm{d}x$. 单位球 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的超球面测度记为 $\mathrm{d}\sigma$. 若 E 为 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 用 $|E|$ 表示其 Lebesgue 测度, 并用 χ_E 表示特征函数, 对 $x\in E$ 取值为 1; 对 $x\notin E$ 为 0. 用几乎处处或几乎所有 x 表示一个性质对除一个零测集成立, 记为 a.e. 或 a.e. x.

$\mathbb{R}^n$ 上函数 f 关于第 j 分量 x_j 的导数记为 $\partial_j f$, 关于第 j 分量的 m 次导数记为 $\partial_j^m f$. f 的梯度是向量 $\nabla f=(\partial_1 f,...,\partial_n f)$. 多重指标是指 $\mathbb{N}^n$ 的元素. 对多重指标 $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, 用 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ 表示其长, 而 $\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$ 表示其元素的阶乘之积. 把偏导数 $\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}f$ 记作 $\partial^\alpha f$. $|\alpha|$ 被称为偏导数 $\partial^\alpha f$ 的阶. 由 $\mathbb{R}^n$ 上所有最多 N 阶导数都连续的函数构成的空间记为 $\mathscr{C}^N(\mathbb{R}^n)$, 而 $\mathbb{R}^n$ 上无穷次可微函数构成空间记为 $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\mathbb{R}^n$ 上紧支的 $\mathscr{C}^\infty$ 函数构成的空间为 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. 对 $x\in\mathbb{R}^n$ 和多重指标 $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$, 记 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$.

一维的 Leibniz 律是

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}(fg)=\sum_{k=0}^m\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}t^k}\frac{\mathrm{d}^{m-k}g}{\mathrm{d}t^{m-k}},\ \forall f,g\in\mathscr{C}^m(\mathbb{R}).$$

而其多维推广为

$$\partial^\alpha(fg)=\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}(\partial^\beta f)(\partial^{\alpha-\beta}g),\ \forall f,g\in\mathscr{C}^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$$

其中 α 为多重指标, 而 $\beta\le\alpha$ 意味着 $0\le\beta_j\le\alpha_j$ 对所有 $1\le j\le n$ 成立. 事实上, 多维的 Leibniz 律可以反复利用一维的推出, 而一维的可以用归纳法推导.

最后, 对 $x\in\mathbf{T}^n$, 用 $|x|$ 表示其通常的 Euclidean 范数. 若把 $\mathbf{T}^n$ 视作 $[-1/2,1/2]^n$, 则 $|x|$ 是元素 x 到原点的距离, 并且有 $0\le|x|\le\sqrt{n}/2$.

空间 $\mathscr{C}^k(\mathbf{T}^n)$ 是 $\mathbf{T}^n$ 上所有 k 次连续可微函数构成的空间 (也即, 对任意指数 $|\alpha|\le k$, 都有 $\partial^\alpha\varphi$ 存在且连续). 当 $k=0$ 时, $\mathscr{C}^0(\mathbf{T}^n)=\mathscr{C}(\mathbf{T}^n)$ 即为 $\mathbf{T}^n$ 上所有连续函数构成的空间. $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{T}^n)$ 为 $\mathbf{T}^n$ 上无穷次可微函数构成的空间, 它显然是所有 $\mathscr{C}^k(\mathbf{T}^n)$ 的交.

关于 Lebesgue 空间的记号, 可见2.1小节.

给定实数 s, 用 $[s]$ 表示小于 s 的最大整数, 用 $[[s]]$ 表示严格小于给定实数 s 的最大整数, 因此在 s 非整数时, $[[s]]$ 就是 s 的整数部分 $[s]$; 而 s 为整数时, $[[s]]=[s]-1$. 用 $\{s\}$ 表示 $s-[s]$.

对 $x>0$, 用 $\log^+$ 表示 $\max(\log x,0)$.

数学家简介

在正文中笔者将提及众多在此学科上做出卓越贡献的数学家, 遂在这里选取一些作简介.

Beckner 全称 William Beckner(1941-?), 美国数学家, 以其在调和分析领域的工作著称.

Bochner 全称 Salomon Bochner(1899-1982), 主要兴趣在于数学分析, 概率论和微分几何.

Calderón 全称 Alberto Pedro Calderón(1920-1998), 阿根廷数学家, 发展了奇异积分的理论, 和 Zygmund 一起创立了芝加哥分析学派. 他与老师 Zygmund 一起得到了许多重要结论, 可见 Zygmund 的条目.

Carleson 全称 Lennart Axel Edvard Carleson(1928-?), 瑞典数学家, 1992 年获 Wolf 奖, 以其在光滑动力系统和调和分析领域内的结果获 2006 年的 Abel 奖. 最著名的工作是在 1966 年解决了 Luzin 提出的猜想 (现被称为 Carleson 定理), 1974 年解决了拟共形映射中的延拓问题, 1991 年和 Benedicks 合作证明了 Hénon 映射中存在奇异吸引子.

在 Fourier 分析方面, 他证明了一个 2π 周期的 L^2 函数的 Fourier 级数几乎处处收敛. 他引入的 Carleson 测度也是调和分析中的重要研究对象.

d'Alembert 全称 Jean-Baptiste le Rond d'Alembert(1717-1783), 法国数学家, 物理学家, 哲学家. 在法国, 代数基本定理也以他的名字冠名.

他发现了一维的波方程, 并给出了 d'Alembert 公式作为通解的公式.

Dirichlet 全称 Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet(1805-1859), 德国数学家, 对数论, Fourier 级数的理论和数学分析的一些主题有贡献. 他被认为是最早给出函数的现代形式化定义的数学家之一.

他在 [9] 中利用现在被称为 Dirichlet 核的函数族 D_N 研究了分段单调函数的 Fourier 级数的收敛性问题.

Du Bois-Reymond 全称 Paul David Gustav du Bois-Reymond(1831-1889), 德国数学家, 其兴趣集中于 Sturm-Liouville 理论, 积分方程, 变分法和 Fourier 级数.

在 1873 年, 他构造了一个连续函数, 其 Fourier 级数在一点处不收敛. 他还证明了处处收敛到某个连续函数的三角级数必是该函数的 Fourier 级数.

Fourier 全称 Jean-Baptiste Joseph Fourier(1768-1830), 法国数学家, 物理学家, 以其对 Fourier 级数的研究及其在热传导和振动问题上的应用著称. 他毕业于法国巴黎高师, 最出名的著作是 1922 年的 [22]. 这本 Fourier 变换和 Fourier 热传导定律也以他的名字命名. 他通常被视为温室效应的发现者.

F.Riesz 全称 Frigyes Riesz(1880-1956), 匈牙利数学家, 在调和分析领域有卓越贡献. 常说的关于 Riesz 表示定理 (一个是 Hilbert 空间上连续线性泛函可被与元素作内积表示, 另外一个是用 Radon 测度表示线性泛函) 正是以他的名字命名. 关于 L^2 空间的一系列定理都被称为 Riesz-Fischer 定理, 这是 Fourier 分析中的重要结果.

Hardy 全称 Godfrey Harold Hardy(1877-1947), 英国数学家, 以在数论和数学分析方面的成就闻名. 他和 Littlewood 一起得到了许多重要结果, 包括一个 Tauber 型定理, 实分析中的极大算子, 解析数论中的圆法. 他还引入了调和分析中的一个重要研究对象, 即 Hardy 空间.

Hunt 全称 Richard Allen Hunt(1937-2009), 美国数学家, 其最重要的结果是将 Carleson 关于 L^p 函数的 Fourier 级数几乎处处收敛的结果从 $p=2$ 的情况推广到了 $p>1$ 的情况.

Lebesgue 全称 Henri Léon Lebesgue(1875-1941), 法国数学家, 最有名的贡献是其积分理论. 他在学位论文 [30] 中引入了测度和积分的现代理论. 关于该理论也可以参见其专著 [31]. 以他的名字命名的数学概念与定理有 Lebesgue 测度, Lebesgue 控制收敛定理; Lebesgue 微分定理和 Lebesgue 空间等等.

他将 Riemann-Lebesgue 引理的结果推广到了他的积分体系下, 因此该结果加上了他的名字.

Littlewood 全称 John Edensor Littlewood(1885-1977), 英国数学家, 以其在分析, 数论和微分方程方面的结果闻名. 他的主要结果包括, 实分析中熟知的 Littlewood 三原则, 调和分析中相当重要的 Littlewood-Paley 理论, 以及和 Hardy 合作得到的结果 (可见 Hardy 条目).

Luzin 全称 Nikolai Nikolayevich Luzin(1883-1950), 苏联数学家, 以其在描述集合论以及和点集拓扑紧密联系的数学分析方面的工作闻名. 他的第一个重要成果是在 1912 年构造了一个系数单调收敛到 0 且几乎处处发散的三角级数, 这给出了 Fatou 一个猜想的反例. 几乎同时, 他证明了实分析中著名的 Luzin 定理. 他还在 [33] 中证明了, 若某三角级数在一个正测集上绝对收敛, 则其系数绝对收敛, 进而该级数处处绝对一致收敛. 在 [34] 中他提出了 Luzin 猜想, 后来由 Carleson 解决.

他 1915 年完成, 次年发表的博士论文 [35] 对度量函数理论的发展产生了重大影响. 他于论文中还提出了一系列猜想, 长期受数学家关注.

Marcinkiewicz 全称 Józef Marcinkiewicz(1910-1940), 波兰数学家, 著名的成果包括 Marcinkiewicz 乘子定理, Marcinkiewicz 插值定理等.

M.Riesz 全称 Marcel Riesz(1886-1996), 匈牙利数学家, F.Riesz 的弟弟, 在分析, 数论, 偏微分方程, Clifford 代数方面卓有建树. 他证明了著名的 Riesz-Thorin 插值定理. 他的一些理论应用在三角级数上也有很强的结果.

Poussin 全称 Charles-Jean de la Vallée-Poussin(1866-1962), 比利时数学家. 他最著名的工作是在 1896 年独立于 Hadamard 证明了素数定理.

Riemann 全称 Georg Friedrich Bernhard Riemann(1826-1866), 德国数学家, 在分析, 数论, 微分几何方面有卓越贡献. 在实分析领域, 他第一个提出了积分的严格公式, 在 Fourier 级数方面也有突出工作. 在复分析方面, 他引入了 Riemann 面, 创立了对复分析的几何处理方法. 他 1859 年的论文 (其中包含了 Riemann 猜想的原始表述) 被视为解析数论的奠基性文章. 他对微分几何的贡献为相对论提供了基础.

他创立的积分理论是 Fourier 分析严格化的第一步基础. 在 Fourier 级数的理论上, 他给出了一个几乎无处可微连续函数的例子, 它能被其 Fourier 级数表示, 这是 Dirichlet 的结论没有涉及的情形; 此外, 他还在 1850 年至 1860 年间的一篇关于三角级数的专题学术论文中证明了现被称为 Riemann-Lebesgue 引理的结果 (当然是在 Riemann 积分体系下).

Stein 全称 Elias Menachem Stein(1931-2018), 美国数学家, 调和分析领域的领军人物, 在推广和明确 Calderón-Zygmund 理论方面做出了贡献. 他的成果包括 Stein 插值定理, Stein 极大原理, Tomas-Stein 限制定理, Hardy 空间 H^1 和空间 BMO 的 Fefferman-Stein 理论等. 他在调和分析领域编写了许多教材, 通常被视为标准的参考书.

Young 全称 William Henry Young(1863-1942), 英国数学家, 主要工作领域是测度论, Fourier 级数, 微分学, 多复变函数等. 他的名字出现在 Young 卷积不等式和 Hausdorff-Young 不等式等众多结果中.

Zygmund 全称 Antoni Zygmund(1900-1992), 波兰数学家, 主要工作领域集中在数学分析, 尤其是调和分析上. 他被视为 20 世纪最伟大的分析学家之一. 他的学生包括先前提到的 Calderón, Marcinkiewicz, Stein 等. 他和 Calderón 共同创立了芝加哥分析学派.

其较为知名的结果包括 Zygmund-Calderón 分解定理, 是调和分析领域的基础定理, 用于对函数进行分块估计. 他还引入了 Zygmund-Calderón 核与算子等, 在非卷积型奇异积分的研究中相当重要.

Kolmogorov 全称 Andrey Nikolaevich Kolmogorov(1903-1987), 苏联数学家, 对概率论, 拓扑学, 湍流, 经典力学等学科做出了贡献. 他是 Luzin 的学生之一.

他在论文 [27] 中构造了一个 Fourier 级数几乎处处发散的 L^1 函数的例子.

1 Fourier 分析的起源

A more general value of b is easily formed by adding together several terms similar to the preceding, and we have

$$v = ae^{-x}\cos y + be^{-3x}\cos 3y + ce^{-5x}\cos 5y + de^{-7x}\cos 7y + \cdots.$$

It's evident that the function v denoted by $\phi(x,y)$ satisfies the equation $\frac{\mathrm{d}^2 v}{dx^2} + \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2} = 0$, and the condition $\phi(x, \pm\frac{1}{2}\pi) = 0$. A third condition remains to be fulfilled, which is express thus, $\phi(0,y) = 1$, and it is essential to remark that this result must exist when we give to y any value whatever included between $-\frac{1}{2}\pi$ and $+\frac{1}{2}\pi$.

–*The Analytical Theory of Heat*, Joseph Fourier, 1822.

首先介绍为何这门分析学科会被冠以 Fourier 的名字. 历史上, 一维三角级数出现于弦振动问题的研究. 在 d'Alembert, D.Bernoulli, Clairaut 和 Euler 等数学家的工作中都可寻到其踪迹. 而对高位振动体的研究自然引出了多重三角级数. 然而, 对于此类级数的系统性研究是在 Fourier 的工作后才开始的. Fourier 在研究金属板的热传导问题 (也就是解热方程) 时引入了现被称为 Fourier 级数的概念, 其最初的结果发表在文章 [21] 中. 历史上也有过许多数学家尝试过用三角级数的方法来研究热方程, 例如著名的 d'Alembert, Gauss 和 Bernoulli. Fourier 在他们的基础上做出了关键突破, 断言所有函数可以被三角级数表示 (虽然严格地说这个论断是错误的) 此方法同样也被用于波方程的研究当中, 之后 Fourier 将其工作整理成了专著 [22]. 在这一小节中, 我们将回顾热方程和波方程的推导, 以及如何用 Fourier 级数来求解. 当然, 下面的推导都将是形式上而非严格的. Fourier 分析的严格化经历了漫长的时间, 因为在 19 世纪早期, 函数和积分的概念还没有经过严格化. 后来 Dirichlet 和 Riemann 的工作才将 Fourier 的结果用精确的数学语言表达出来. 至于 Fourier 分析在 Lebesgue 的积分体系下的发展, 我们会在第3章中介绍.

1.1 波方程

1.1.1 波方程的推导

历史上, d'Alembert 推导出了一维的波方程. 波方程的推导需要用到 Newton 第二定律以及 Hooke 定律: 简单起见, 考虑一个线密度为 $\rho(x)$(单位 $\mathrm{Kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) 的弦, 不受外力. 其状态可以用时间 $t \in \mathbb{R}_+$ 和点的位置 $x \in \mathbb{R}$ 的二元函数 $u(x,t)$ 表示. 我们还利用 $\theta(x,t)$ 表示 t 时该弦和位于 x 处的水平直线间的夹角, 用 $T(x,t)$ 表示 t 时作用于该弦 x 处的张力. 我们考虑 t 时, 位于 x 和 $x+\Delta x$ 之间的这段弦, 其质量是 $\rho(x)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2}$, 受到右张力 $T(x+\Delta x, t)$, 与水平夹角 $\theta(x+\Delta x, t)$; 受到左张力 $T(x,t)$, 与水平夹角 $\theta(x,t)$. 竖直分量和水平分量的 Newton 第二定律表明:

$$\rho(x)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta u^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = T(x+\Delta x, t)\sin\theta(x+\Delta x, t) - T(x,t)\sin\theta(x,t),$$

$$T(x+\Delta x,t)\cos\theta(x+\Delta x,t)-T(x,t)\cos\theta(x,t)=0.$$

作变形处理, 并分别取 $\Delta x\to 0$ 的极限, 得到

$$\begin{aligned}\rho(x)\sqrt{1+(\frac{\partial u}{\partial x})^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)&=\frac{\partial}{\partial x}[T(x,t)\sin\theta(x,t)]\\&=\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\sin\theta(x,t)+T(x,t)\cos\theta(x,t)\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,t).\end{aligned}\tag{1.1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[T(x,t)\cos\theta(x,t)]=\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\cos\theta(x,t)-T(x,t)\sin\theta(x,t)\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,t)=0.\tag{1.1.2}$$

又注意到

$$\tan\theta(x,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\qquad \sin\theta(x,t)=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2}}\qquad \cos\theta(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2}}$$

$$\theta(x,t)=\tan^{-1}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial x}(x,t)=\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)}{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2}$$

将上面的这些关系和(1.1.2)代入(1.1.1)计算可得

$$T(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=\rho(x)[1+(\frac{\partial u}{\partial x})^2]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t).$$

若我们只考虑小幅振动, 可以认为 $|\theta(x,t)|\ll 1$, 因此 $|\tan\theta(x,t)|\ll 1$, 即 $|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)|\ll 1$, 于是可以将上面的 $1+(\frac{\partial u}{\partial x})^2$ 用 1 代替. 此时(1.1.2)又表明 $\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)=0$, 于是 T 只依赖于 t. 于是:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)=T(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

现在再假设弦是均匀的, 即 $\rho(x)$ 为常数 ρ, 且 $T(t)$ 为常数 T, 就得到了最终的波动方程:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t).$$

若我们将 $\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ 记为 c(单位 ms^{-1}), 通常称为波速, 方程化简为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

一般的, 对 $u(x,t):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, n 维的波动方程形如

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right).$$

对给定的 t, 方程的右式中后一因子是函数 $u(\cdot,t):U\to\mathbb{R}$ 的 Laplace 算子, 于是可简写为:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\Delta u.$$

1.1.2 波方程的解

我们来指定一个具体的物理情形, 结合上面推导出的波方程来求解. 将一根弦置于 x 轴的 $[0,\pi]$ 间, 固定端点 $x=0,\pi$ 处的位置为 $y=0$, 初始位置由 $[0,\pi]$ 上的函数 f 给出, 我们来考察这根弦的运动. 也即, 考虑 $u(x,t):[0,\pi]\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, 满足 $u(0,t)=u(\pi,t)=0$, 初始条件 $u(x,0)=f(x)$ 和波方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \forall x\in[0,\pi].$$

在解方程的过程中, 我们始终结合物理意义思考, 这样可能导致我们的推导不太严谨, 但作为引入已经足够了. 用分离变量法 (这里其物理意义就是考虑驻波) 求解: 假设 $u(x,t)=\varphi(x)\psi(t)$, 则方程化为

$$\varphi(x)\psi''(t)=\varphi''(x)\psi(t) \implies \frac{\psi''(t)}{\psi(t)}=\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

鉴于左式只依赖于 t, 右式只依赖于 t, 两边一定等于常数 λ, 于是方程化简为:

$$\begin{cases}\psi''(t)-\lambda\psi(t)=0\\ \varphi''(t)-\lambda\varphi(x)=0\end{cases} \tag{1.1.3}$$

方程(1.1.3)的解是熟知的. 若 $\lambda>0$, 则 ψ 的解是指数型的, 并不随着时间振荡, 不符物理情形, 于是我们仅考虑 $\lambda\le 0$. 不妨记 $\lambda=-m^2$, 这里 $m\ge 0$. 现在我们容易给出(1.1.3)的解为:

$$\psi(t)=A\cos mt+B\sin mt,\ \ \varphi(x)=\tilde{A}\cos mx+\tilde{B}\sin mx.$$

利用弦的端点固定这一性质, 我们有 $\varphi(0)=\varphi(\pi)=0$, 这表明 $\tilde{A}=0$, 且 m 为整数. 若 $m=0$, 解是平凡的, 我们只考虑 $m\ge 1$ 的情形. 此时对于每个整数 $m\ge 1$, 我们都给出了对应的解

$$u_m(x,t)=(A_m\cos mt+B_m\sin mt)\sin mx.$$

我们一般都将其视为驻波 (即波形为初始位置和时间的函数之积), 它是波方程的解. 波方程的线性性允许我们将驻波进行叠加, 因此我们猜测一般的解应形如:

$$u(x,t)=\sum_{m=1}^{+\infty}(A_m\cos mt+B_m\sin mt)\sin mx.$$

现在我们转过来看初始条件 f 和最终解 $u(x,t)$ 的关系: $u(x,0)=f(x)$ 给出了:

$$f(x)=\sum_{m=1}^{+\infty}A_m\sin mx$$

现在求 A_m 系数的问题就转化为了将 f 表示成正弦级数. 至于 B_m 的求解, 我们还需额外给出弦初始的速度 $g(x)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$. 总之, 该方程的求解化为了将初值条件表达为三角级数的问题, 这就是 Fourier 展开的功效.

关于解的严格化, 见4.5.1小节.

1.2 热方程

1.2.1 热方程的推导

我们在这里给出 (三维) 热方程的推导过程. Fourier 定律 (热传导定律) 指出, 热通量密度正比于热导率乘以负的温度梯度, 即 $\vec{q}=-k\nabla T$, 其中 $\vec{q}$ 是热通量密度, 单位 $\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^2$; k 是介质的热导率, 单位 $\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$; ∇T 是温度梯度, 单位 $\mathrm{K}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. 简单起见, 给定一个无热源环境, 假设介质各向同性且均匀, 且热导率不随温度变化. 这意味着可以将 k 视为常数. 同样地, 对介质的比热容 σ 也作此假设. 我们将温度 T 视作时间 $t\in\mathbb{R}_+$ 和空间位置 $x\in\mathbb{R}^3$ 的函数. 由能量守恒律, 对任意区域 U, 传导进 U 的热量等于穿入其边界 $\partial U=S$ 的热流, 因此:

$$\sigma\int_U \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}^3x=-\int_{\partial U}\vec{q}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}.$$

根据散度定理有:

$$\int_{\partial U} \vec{q} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_U \nabla \vec{q}\, \mathrm{d}^3 x = \int_U \nabla(-k\nabla T)\, \mathrm{d}^3 x = -k \int_U \Delta T\, \mathrm{d}^3 x.$$

其中 $\Delta = \nabla^2$ 是 Laplace 算子. 结合两式得到

$$\int_U \sigma \frac{\partial T}{\partial t}\, \mathrm{d}^3 x = \int_U k\Delta T\, \mathrm{d}^3 x.$$

由于区域 U 是任选的, 积分号下的表达式必定恒等, 即:

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} = k\Delta T.$$

这就是我们熟知的三维情况下的热方程. 一般而言, 给定 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 U 以及 $\mathbb{R}$ 的区间 I, 考虑函数 $u : U \times I \to \mathbb{R}$, 若其满足

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2},$$

则我们称 u 为热方程的解. 类似地, 此方程可以简写为:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u.$$

1.2.2 稳态热方程的解

充分久后, 系统趋于稳态, 不再有热传导出现, 即 $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. 我们得到了稳态热传导方程:

$$\Delta T = 0.$$

现在考虑此方程对应的 Dirichlet 问题. 为了方便, 我们只考虑二维情况, 并将区域限制到单位圆盘上. 给定单位圆盘 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ 及其边界 $\partial D = C$. 显然用极坐标研究这个问题更加方便, 此时 $D = \{(r, \theta) | 0 \leq r < 1\}, C = \{(r, \theta) | r = 1\}$. 我们假设 T 是 r, θ 的函数, 其在边界 $r = 1$ 处的值为 $T(1, \theta) = f(\theta)$, 我们希望从稳态热方程和边界条件中解出 T. 简单的链式法则推导给出了 Laplace 算子的极坐标表达式:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

对 $\Delta T = 0$ 一式进行变形得到

$$r^2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + r\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}.$$

为了求解这个方程, 同波方程一样, 我们仍然用分离变量法求出特解, 再利用方程的线性性得出一般解. 假设 $T(r, \theta) = F(r)G(\theta)$, 经过整理的方程为

$$\frac{r^2 F''(r) + rF'(r)}{F(r)} = -\frac{G''(\theta)}{G(\theta)}.$$

同样地, 左边仅依赖于 r, 右边仅依赖于 θ, 于是两边都等于常数 λ, 方程化为:

$$G''(\theta) + \lambda G(\theta) = 0, \tag{1.2.1}$$

$$r^2 F''(r) + rF'(r) - \lambda F(r) = 0. \tag{1.2.2}$$

我们熟知(1.2.1)的解. 因为 G 必然以 2π 为周期, 我们知道 $\lambda = m^2(\ m \in \mathbb{Z})$, 这表明

$$G(\theta) = \tilde{A}\cos m\theta + \tilde{B}\sin m\theta = Ae^{im\theta} + Be^{-im\theta}.$$

方程(1.2.2)是典型的二阶齐次线性方程, 其解由基本解的线性组合给出. 假若 $m=0$, 则 $F(r)=1$ 和 $F(r)=\log r$ 是两个基本解, 但 $\log r$ 再 $r\to 0$ 时无界, 不符物理场景. 故此时 F 只能是 1 自身的线性组合, 即常数. 若 $m\neq 0$, 则 $F(r)=r^m$ 和 $F(r)=r^{-m}$ 为两个基本解, 其中 $r^{-|m|}$ 在 $r\to 0$ 时无界, 理应舍去. 综合上述, 我们对 $m\in\mathbb{Z}$ 给出了对应的解

$$u_m(r,\theta)=r^{|m|}e^{im\theta},\ \forall m\in\mathbb{Z}.$$

热方程是线性的, 我们猜测一般的解为:

$$u(r,\theta)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_m r^{|m|}e^{im\theta}.$$

现在考察边界条件, 我们知道:

$$u(1,\theta)=\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_m e^{im\theta}=f(\theta).$$

也即, 解可由边界条件的 Fourier 展开给出. 利用 Euler 公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, 这里的 Fourier 展开就和波方程解中出现的 Fourier 展开相合.

关于解的严格化, 见4.5.2小节.

1.3 Fourier 级数的定义

考察了上面两个例子之后, 我们现在关心如何将一个 2π 周期函数展开为三角级数. 注意到, 可以将 $\mathbb{R}$ 上以 2π 周期的函数 f 通过 $g(e^{ix})=f(x)$ 的方式等同为单位圆周 $\mathbf{S}^1=\{e^{ix}:x\in\mathbb{R}\}$ 上的函数. 于是我们在 $\mathbf{S}^1$ 上考虑问题. 我们首先假设这样的展开式成立, 我们希望将系数 a_m 表示出来. 注意到函数族 $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 有如下的正交性:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{S}^1}e^{in\theta}\overline{e^{im\theta}}\,\mathrm{d}\theta=\begin{cases}1 & n=m,\\ 0 & n\neq m.\end{cases}=\delta_{nm}.$$

其中 δ 是 Kronecker 记号. 于是可以 (不严格地) 交换展开式和积分的顺序得到:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{S}^1}f(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta&=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{S}^1}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_m e^{im\theta}\right)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&=\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_m\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{S}^1}e^{im\theta}\overline{e^{in\theta}}\,\mathrm{d}\theta\\&=\sum_{m\in\mathbb{Z}}a_m\delta_{nm}=a_n.\delta\end{aligned}$$

这样我们就知道了如何求出一个函数的 Fourier 展开, 引出了下面的定义:

定义 1.3.1. *假设 f 是定义在 $\mathbf{S}^1$ 上的 (Riemann 或 Lebesgue) 可积函数, 我们定义其第 n 个 Fourier 系数为:*

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{S}^1}f(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

而 f 的 Fourier 级数用下面的式子表示:

$$f(\theta)\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n e^{in\theta}.$$

这里我们使用 $\sim$ 而非等号是因为我们现在对于该级数的收敛性一无所知, 即便收敛, 我们也不清楚它是否收敛到原函数的值. 我们需要确定 f 的条件和收敛的意义来判断收敛性, 这是我们在3章中的重要议题. 值得一提的是, 我们也经常将定义中的 $\mathbf{S}^1$ 改为 $\mathbf{T}^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, 它可以实现为粘合端点的 $[0,1]$. 这时对应的 Fourier 级数也需作相应变化, 具体地说, 这时 f 的 Fourier 系数为:

$$a_n=\int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}\,\mathrm{d}x. \tag{1.3.1}$$

其 Fourier 级数为:

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_ne^{2\pi inx}. \tag{1.3.2}$$

当然, 我们也可以将定义延拓到 $\mathbb{R}$ 上任意以常数 $L>0$ 为周期的函数上, 这里不再赘述.

历史上, 最早出现的是关于正弦函数和余弦函数的 Fourier 展开, 即:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x. \tag{1.3.3}$$

这时对应其 Fourier 级数为:

$$f(x)\sim\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+\sin nx).$$

Hardy 曾在其专著中指出过, 上面公式(1.3.3)早于 Fourier 的工作出现. Burkhardt 的论文指出, 这两个公式可以追溯到 Clairaut(1757). 其实 Euler 很早就知悉了此结果, 并在在 1777 年利用逐项积分给出了一般化的推导.

1.4 Fourier 变换的定义

我们现在只能对周期函数作 Fourier 展开. 对 $\mathbb{R}$ 上的函数, 我们可以将其视作周期无穷大的函数, 这种意义下 Fourier 级数的极限就成为了 Fourier 变换. 具体地说, 仔细考察 Fourier 系数和级数的定义(1.3.1)和(1.3.2), 将定义式中离散的记号变为它们的连续版本 (例如和变为积分, 整数变为实数), 则对 $\mathbb{R}$ 上的函数 f, 可以定义其 Fourier 变换为:

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-2\pi ix\xi}\,\mathrm{d}x.$$

而后面利用 Fourier 级数表示原来函数的公式就变成了 Fourier 反演公式:

$$f(x)\sim\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

同样的问题是, 我们不知道定义 Fourier 变换的积分式何时收敛, 也不知道上述提及的反演公式是否成立. 这些问题是第4章中的重要主题.

2 预备知识

我们将在这里统一给出正文所需的一些前置知识. 限于篇幅, 这些内容我们只给出基本的定义和关键的性质. 一些简单性质的证明只给出精简的评论.

2.1 Lebesgue 空间和弱 Lebesgue 空间

我们在这一节中回顾 L^p 空间和弱 L^p 空间的基本事实. 尽管空间被冠以 Lebesgue 的名字, 但在历史上, 是 F.Riesz 首先在 [40] 中研究了 $L^p[a,b]$, 得到了许多重要性质. 下面是 Lebesgue 空间定义和性质的综述.

一个测度空间是一个带有 σ-代数的集合 X 以及一个从该 σ-代数到 $[0,\infty]$ 的函数 μ, 满足 $\mu(\varnothing) = 0$ 和可数可加性. μ 称为 X 上的 (正) 测度, σ-代数的元素称为可测集. 若全空间可以表示成可数个有限测度集的并, 测度空间称为 σ-有限的, 一个实值函数 f 是可测的, 当且仅当 $\{x \in X: f(x) > \lambda\}$ 总是可测的. 一个复值函数 f 是可测的, 当且仅当其实虚部都是可测的. 简单函数是可测集特征函数的有限线性组合, 有限简单函数是那些可测集测度均有限的简单函数, 恰是那些可积的简单函数. 每个非负可测函数是一个递增简单函数列的点态极限. 若测度空间是 σ-有限的, 这些简单函数都可以是有限的.

对 $0 < p < \infty$, $L^p(X,\mu)$ 表示全体绝对值的 p 次幂可积的复值 μ 可测函数. $L^\infty(X,\mu)$ 表示全体使得存在 $B > 0$, 让集合 $\{x: |f(x)| > B\}$ 零测的复值 μ-可测函数. 两个 $L^p(X,\mu)$ 内的函数相等当且仅当它们 μ-处处相等. 对 $0 < p < \infty$, 有限简单函数在 $L^p(X,\mu)$ 内稠密. 若上下文无歧义, 我们简写 $L^p(X,\mu)$ 为 L^p.

记号 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 表示 $L^p(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, 其中 $|\cdot|$ 表示 n 维 Lebesgue 测度 (记为 $\mathrm{d}x$) 配备计数测度的空间 $L^p(\mathbb{Z})$ 一般记为 $\ell^p(\mathbb{Z})$ 或 ℓ^p.

对 $0 < p < \infty$, 我们定义 f 的 L^p 范数 (在 $p < 1$ 时为拟范数) 被定义为

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} = \left(\int_X |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

对 $p = \infty$, 定义为

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} = \operatorname{ess.sup}|f| = \inf\{B > 0: \ \mu(\{x: |f(x)| > B\}) = 0\}.$$

熟知 Minkowski 不等式: 对 $1 \le p \le \infty$ 和任意 $f, g \in L^p(X,\mu)$, 有

$$\|f+g\|_{L^p(X,\mu)} \le \|f\|_{L^p(X,\mu)} + \|g\|_{L^p(X,\mu)}. \tag{2.1.1}$$

由于 $\|f\|_{L^p(X,\mu)} = 0$ 蕴含 $f = 0$ ($\mu-$a.e.), 在 $1 \le p \le \infty$ 时, L^p 空间是赋范线性空间. 在 $0 < p < 1$ 时, 不等式(2.1.1)对 $f, g \ge 0$ 反向. 但我们仍有(2.1.1)的替代:

$$\|f\|_{L^p(X,\mu)} \le 2^{\frac{1-p}{p}}(\|f\|_{L^p(X,\mu)} + \|g\|_{L^p(X,\mu)}).$$

因此 L^p 空间是赋拟范线性空间. 对 $0<p\leq\infty$, 可以证明 L^p 内的 Cauchy 列都是收敛的, 因此 L^p 是完备的. 现在我们知道 L^p 在 $1\leq p\leq\infty$ 时是 Banach 空间; 在 $0<p<1$ 时是拟 Banach 空间. 对所有 $p\in(0,\infty)\backslash\{1\}$, 我们定义其共轭指数 $p'=\frac{p}{p-1}$; 此外规定 $1'=\infty$ 和 $\infty'=1$. 这样, $p''=p$ 对 $p\in(0,\infty]$ 成立. 由 Hölder 不等式, 对 $p\in[1,\infty]$ 和可测函数 f,g, 我们有

$$\|fg\|_{L^1}\leq\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}.$$

熟知, 对 $1<p<\infty$, L^p 空间的对偶是 $L^{p'}$. 若 (X,μ) 是 σ-有限的, 则对 $p=1$ 也成立. 此外, 函数的 L^p 范数可以通过对偶得到 (其中 $1\leq p<\infty$, 若空间 σ 有限, 则对 $p=\infty$ 也成立):

$$\|f\|_{L^p}=\sup_{\|g\|_{L^{p'}}=1}\left|\int_X fg\,\mathrm{d}\mu\right|.$$

我们还需要弱 Lebesgue 空间的概念, 这需要从下面的分布函数说起.

2.1.1 分布函数和弱 Lebesgue 空间

定义 2.1.1. *设 f 是 X 上的可测函数, 则其分布函数 d_f 在 $[0,\infty)$ 上定义为:*

$$d_f(\alpha)=\mu(\{x\in X:\ |f(x)|>\alpha\}).$$

显然, d_f 关于 α 单减 (不一定严格). 从定义中立刻可以得出下列性质:

命题 2.1.2. *设 f,g 是可测函数, 则对所有 $\alpha,\beta>0$,*

1. $d_{cf}(\alpha)=d_f(\alpha/|c|),\ \forall c\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$.
2. $d_{f+g}(\alpha+\beta)\leq d_f(\alpha)+d_g(\beta)$.

分布函数 d_f 的信息足以用于给出函数的 L^p 范数.

命题 2.1.3. *设 (X,μ) 是 σ-有限的测度空间, 则对 $0<p<\infty$ 和 $f\in L^p(X,\mu)$, 我们有*

$$\|f\|_{L^p}^p=p\int_0^\infty\alpha^{p-1}d_f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

一般地, 对所有 $[0,\infty)$ 上的单增连续可微函数 φ, 有

$$\int_X\varphi(|f|)\,\mathrm{d}\mu=\int_0^\infty\varphi'(\alpha)d_f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

证明. 用 Fubini 定理 (这要求测度空间是 σ-有限的) 计算:

$$\begin{aligned}p\int_0^\infty\alpha^{p-1}d_f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha&=p\int_0^\infty\alpha^{p-1}\int_X\chi_{\{x:\ |f(x)|>\alpha\}}\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}\alpha.\\&=\int_X\int_0^{|f(x)|}p\alpha^{p-1}\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\mu(x)=\int_X|f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x)=\|f\|_{L^p}^p.\end{aligned}$$

而关于 $\varphi(x)$ 的结论证明是类似的. □

定义 2.1.4. *对 $0<p<\infty$, 弱 $L^p(X,\mu)$ 由所有 μ-可测的满足下述条件的 f 组成:*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}}=\inf\left\{C>0:\ d_f(\alpha)\leq\frac{C^p}{\alpha^p},\ \forall\alpha>0\right\}=\sup\left\{\gamma d_f(\gamma)^{1/p}:\ \gamma>0\right\}<\infty$$

由定义, 弱 $L^\infty(X,\mu)$ 空间恰为 $L^\infty(X,\mu)$. 我们常把弱 $L^p(X,\mu)$ 空间记为 $L^{p,\infty}(X,\mu)$. 将 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n,|\cdot|)$ 简记为 $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

$L^{p,\infty}$ 上的两个函数被视为相同, 当且仅当它们几乎处处相等. 利用命题2.1.2 (1), 容易证明

$$\|kf\|_{L^{p,\infty}} = |k| \, \|f\|_{L^{p,\infty}}\,, \ \forall k \in \mathbb{C}. \tag{2.1.2}$$

在命题2.1.2 (2) 中取 α, β 均为 $\alpha/2$, 可以证明与(2.1.1)类似的不等式:

$$\|f+g\|_{L^{p,\infty}} \le \max\{2, 2^{1/p}\}(\|f\|_{L^{p,\infty}} + \|g\|_{L^{p,\infty}}). \tag{2.1.3}$$

并且,

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = 0 \Rightarrow f = 0 \ (\mu - \text{a.e.}) \tag{2.1.4}$$

综合(2.1.2), (2.1.3), (2.1.4), 我们知道对 $0 < p < \infty$, $L^{p,\infty}$ 是赋拟范线性空间.

弱 L^p 空间比 L^p 空间更大. 我们有下面命题:

命题 2.1.5. *对 $0 < p < \infty$ 和 $f \in L^p(X, \mu)$, 我们有*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} \le \|f\|_{L^p}\,.$$

因此, 我们有嵌入 $L^p(X,\mu) \subseteq L^{p,\infty}(X,\mu)$.

证明. Chebyshev 不等式表明:

$$\alpha^p d_f(\alpha) \le \int_{\{x:\ |f(x)|>\alpha\}} |f(x)|^p \,\mathrm{d}\mu(x) \le \|f\|_{L^p}^p\,.$$

这就是说 $\|f\|_{L^{p,\infty}} \le \|f\|_{L^p}$. □

包含关系 $L^p \subseteq L^{p,\infty}$ 一般是严格的.

命题 2.1.6. *设 $0 < p \le \infty$, 且 $f_n, f \in L^p(X,\mu)$. 若在 L^p 中 $f_n \to f$, 则在 $L^{p,\infty}$ 中 $f_n \to f$.*

证明. 首先假设 $0 < p < \infty$. 命题2.1.5表明 $\|f_n - f\|_{L^{p,\infty}} \le \|f_n - f\|_{L^p} \to 0$, 即在弱 L^p 中收敛. $p = \infty$ 的情况是平凡的. □

$L^{p,\infty}$ 空间也是完备的, 因此是拟 Banach 空间.

2.1.2 插值理论的基础

下面的定理表明 L^r 是 L^p 和 L^q 中间的空间, 这解释了“插值”这个名字的由来.

若 $f \in L^p \cap L^q$, 则 $f \in L^r$ 对 $p < r < q$ 成立. 我们可以把此结论推广到 $L^{p,\infty}$ 上.

命题 2.1.7. *设 (X,μ) 是 σ-有限的测度空间. 若 $0 < p < q \le \infty$ 且 $f \in L^{p,\infty} \cap L^{q,\infty}$, 则对 $p < r < q$, 有 $f \in L^r(X,\mu)$, 并成立范数估计 (我们认为 $1/\infty = 0$).*

$$\|f\|_{L^r} \le \left(\frac{r}{r-p} + \frac{r}{q-r}\right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{L^{p,\infty}}^{\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}} \|f\|_{L^{q,\infty}}^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\,. \tag{2.1.5}$$

证明. 首先考虑 $q < \infty$ 的情况. 由弱型范数的定义, 我们知道

$$d_f(\alpha) \le \min\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^q}^q}{\alpha^q}\right). \tag{2.1.6}$$

令

$$B = \left(\frac{\|f\|_{L^q}^q}{\|f\|_{L^p}^p}\right)^{\frac{1}{q-p}}. \tag{2.1.7}$$

我们现在对 f 的 L^r 进行估计: 由(2.1.6), (2.1.7)和命题2.1.3知

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^r(X,\mu)}^r &= r\int_0^\infty \alpha^{r-1} d_f(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha \\
&\le r\int_0^\infty \alpha^{r-1}\min\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\infty}}^p}{\alpha^p}, \frac{\|f\|_{L^{q,\infty}}^q}{\alpha^q}\right)\mathrm{d}\alpha \\
&= r\int_0^B \alpha^{r-1-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p\,\mathrm{d}\alpha + r\alpha\int_B^\infty \alpha^{r-1-q}\|f\|_{L^{q,\infty}}^q\,\mathrm{d}\alpha \\
&= \frac{r}{r-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p B^{r-p} + \frac{r}{q-r}\|f\|_{L^{q,\infty}}^q B^{r-q} \\
&= \left(\frac{r}{r-p}+\frac{r}{q-r}\right)(\|f\|_{L^{p,\infty}}^p)^{\frac{q-r}{q-p}}(\|f\|_{L^{q,\infty}}^q)^{\frac{r-p}{q-p}}.
\end{aligned} \tag{2.1.8}$$

注意上面的积分收敛是因为 $r-p>0$ 和 $r-q<0$.

$q=\infty$ 的情况更为简单. 因为 $d_f(\alpha)=0$ 对所有 $\alpha>\|f\|_{L^\infty}$ 成立, 我们只需要用不等式 $d_f(\alpha)\le\alpha^{-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p$, $\forall\alpha\le\|f\|_{L^\infty}$, 即可估计(2.1.8)中的积分:

$$\|f\|_{L^r}^r \le \frac{r}{r-p}\|f\|_{L^{p,\infty}}^p\|f\|_{L^\infty}^{r-p}.$$

这正是(2.1.5)中 $q=\infty$ 的情况. 我们完成了证明. □

处理局部位于 L^p 空间内的函数通常是方便的, 这引出下面的定义:

定义 2.1.8. *对 $0<p<\infty$, $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n,|\cdot|)$ 或 $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ 是所有 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 可测函数, 使得*

$$\int_K |f(x)|^p\,\mathrm{d}x<\infty.$$

对所有 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集 k 成立. 若 $p=1$, 我们称该函数在 $\mathbb{R}^n$ 上局部可积.

对 $1\le p\le\infty$, 都有 $L^p(\mathbb{R}^n)\subseteq L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. 更一般地, 我们有如下的关系对 $1\le p<q<\infty$,

$$L^q(\mathbb{R}^n)\subseteq L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)\subseteq L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

2.2 拓扑群上的积分理论

拓扑群在 1925 年至 1940 年间得到了广泛的研究. Haar 和 Weil(分别在 1933 年和 1940 年) 在拓扑群上建立了积分理论 Fourier 级数是一大类拓扑群上 Fourier 分析的特殊情况.

卷积的概念可以被定义在带有群结构的测度空间上. 这使得我们可以统一研究 $\mathbb{R}^n,\mathbb{Z}^n$ 和 $\mathbf{T}^n$. 实调和分析主要研究欧式空间. 下面卷积的基本性质和单位逼近并不需要群运算交换.

2.2.1 拓扑群和 Haar 测度

一个拓扑群是一个 Hausdorff 拓扑空间[1], 同时是群, 有乘法运算:$(x,y)\mapsto xy$, 满足其运算 $(x,y)\mapsto xy$ 和 $x\mapsto x^{-1}$ 都是连续的. 群单位元记为 e. 我们会使用记号 $AB=\{ab:\ a\in A, b\in B\}$ 和 $A^{-1}=\{a^{-1}:\ a\in A\}$. 注意, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. 每个拓扑群都有一个由 e 的对称邻域 (开集 U 使得 $U^{-1}=U$) 组成的局部基. 一个拓扑群被称为是局部紧的, 当且仅当存在 e 的邻域 U 满足 $\overline{U}$ 是紧的 (或者说, 群里的每个元素都存在一个邻域, 使得其闭包紧).

为了在局部紧拓扑群上建立测度, 我们需要下面的定理:

[1]事实上, 一个拓扑群最一般的定义不需要 Hausdorff 性, 只需要群运算连续即可. 但我们可以证明, 只要拓扑群满足 T_1 分离性质, 它就满足 T_2 分离性质, 而若一个拓扑群 G 非 T_1 的, 则它商去单位元的闭包后得到的群 $G/\overline{e}$ 将是 T_1 的. 由此, 为了应用的方便, 我们一般都假设拓扑群满足 Hausdorff 分离性质.

定理 2.2.1 (Riesz-Markov-Kakutani). *令 X 为局部紧 Hausdorff 空间, 而 Λ 为 $\mathscr{C}_c(X)$ 上的正线性泛函, 则存在 X 上的 σ-代数 $\mathfrak{M}$, 它包含 X 中全体 Borel 集合, 且存在 $\mathfrak{M}$ 上唯一的 Radon 测度 (即局部有限, 在 Borel 集上外正则, 在开集上内正则), 在如下意义下表示了 Λ:*

$$\Lambda f=\int_X f\,\mathrm{d}\mu,\ \forall f\in\mathscr{C}_c(X).$$

令 G 是一个局部紧拓扑群, 利用 Riesz[2]表示定理和一些努力, 我们可以证明, 存在一个定义于 Borel 集上的正测度 λ, 它在所有非空开集上非零, 在紧集上有限, 并且是左不变的:

$$\lambda(tA)=\lambda(A),\ \forall A\text{可测},\ t\in G. \tag{2.2.1}$$

我们称其为左 Haar 测度. 同样的, 群上存在右 Haar 测度. 此外, Haar 测度在相差一个正常数的意义下是唯一的. 若 G 是 Abel 群, 则每个左 Haar 测度都是某给定右 Haar 测度的正常数倍. 若一个局部紧拓扑群为可数个紧子集的并, 称其为 σ-紧的. σ-紧的局部紧拓扑群在 Haar 测度下是 σ 有限的.

下面是关于拓扑群和 Haar 测度的几个常见例子:

- $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{Z}^n$ 在配备标准拓扑和通常的向量加法时是拓扑群.
- 另一个例子是 $\mathbf{T}^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n=[0,1)^n$. 其拓扑和群运算都源于商群.
- 配备一般加法的 $\mathbb{Z}^n$ 上的计数测度是 Haar 测度. 乘法群 $\mathbb{R}_+$ 上的 Haar 测度是 $\mathrm{d}x/x$, 其中 $\mathrm{d}x$ 是 Lebesgue 测度.

2.2.2 卷积和卷积不等式

在这节的余下部分, 我们都设 G 是一个局部紧且 σ-紧的拓扑群, 而 λ 是 G 上的一个左 Haar 测度. 这样 (G,λ) 构成了一个 σ-有限的测度空间. 我们将 $L^p(G,\lambda)$ 和 $L^{p,\infty}(G,\lambda)$ 分别简记为 $L^p(G)$ 和 $L^{p,\infty}(G)$.

现在我们来定义卷积.

定义 2.2.2. *对 $f,g\in L^1(G)$, 它们的卷积 $f*g$ 定义为*

$$(f*g)(x)=\int_G f(y)g(y^{-1}x)\,\mathrm{d}\lambda(y). \tag{2.2.2}$$

注意, 用 Fubini 定理和(2.2.1), 我们得到

$$\int_G\int_G |f(y)||g(y^{-1}x)|\,\mathrm{d}\lambda(y)\mathrm{d}\lambda(x)=\|f\|_{L^1(G)}\|g\|_{L^1(G)}<\infty.$$

故(2.2.2)的右边是几乎处处存在的, 这说明卷积的概念是良定义的. 上式还表明

$$\|f*g\|_{L^1(G)}\le\|f\|_{L^1(G)}\|g\|_{L^1(G)}\,.$$

于是, 两个 L^1 函数的卷积也是 L^1 函数.

例如, 若 $G=\mathbb{R}^n$, 则我们可以把(2.2.2)写成:

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}\lambda(y).$$

直接验证可以得到如下性质:

[2]这里指 F.Riesz

命题 2.2.3. 对 $f,g,h \in L^1(G)$,

1. 结合律:$f*(g*h)=(f*g)*h$.
2. 分配律:$f*(g+h)=f*g+f*h$ 和 $(f+g)*h=f*h+g*h$.

性质2.2.3说明, $L^1(G)$ 在卷积作为乘法的意义下是一个 Banach 代数 (不一定交换).

恰当地利用 Hölder 不等式和 Fubini 定理, 可以得到最基本的卷积不等式如下:

定理 2.2.4 (Minkowski 不等式)**.** 设 $1 \leq p \leq \infty$. 对 $f \in L^p(G)$ 和 $g \in L^1(G)$, 我们有 $g*f$ 几乎处处存在, 且

$$\|g*f\|_{L^p(G)} \leq \|g\|_{L^1(G)} \|f\|_{L^p(G)}.$$

在 G 非 Abel 群时, 上述不等式可能对 $f*g$ 并不成立. 对所有 $h \in L^1(G)$, 定义 $\tilde{h}(x)=h(x^{-1})$. 若我们总有

$$\|h\|_{L^p(G)} = \left\|\tilde{h}\right\|_{L^p(G)}, \tag{2.2.3}$$

则该不等式对 $f*g$ 也成立, 即对 $f \in L^p(G)$ 和 $g \in L^1(G)$,

$$\|f*g\|_{L^p(G)} \leq \|g\|_{L^1(G)} \|f\|_{L^p(G)}.$$

注意到, 若左 Haar 测度满足 $\lambda(A^{-1})=\lambda(A)$, 则前述假设是正确的.

事实上 Minkowski 不等式是 Young 不等式的推论:

定理 2.2.5 (Young 不等式)**.** 设 $1 \leq p,q,r \leq \infty$ 满足

$$\frac{1}{r}+1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

则对所有 $f \in L^p(G)$ 和 $g \in L^q(G)$, 我们有 $f*g$ 几乎处处存在, 并且

$$\|g*f\|_{L^r(G)} \leq \|g\|_{L^q(G)} \|f\|_{L^p(G)}.$$

若 g 满足 $\|g\|_{L^q(G)}=\|\tilde{g}\|_{L^q(G)}$, 则

$$\|f*g\|_{L^r(G)} \leq \|g\|_{L^q(G)} \|f\|_{L^p(G)}.$$

证明. 和 Minkowski 不等式的证明类似, 利用 Hölder 不等式 (三元情况) 和 Fubini 定理. □

在最常见的情形下, 我们取 $G=\mathbb{R}^n$, 这时卷积的顺序没有区别, 我们得到:

$$\|g*f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Beckner 在 [2] 中证明了更强的结果, 给出了上面不等式的最佳系数: 我们记 $A_p^2=p^{1/p}(p')^{1/p'}$, 则

$$\|g*f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq (A_pA_qA_{r'})^n \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

事实上, 我们还有下面关于弱 Lebesgue 空间的 Young 不等式:

定理 2.2.6 (弱空间中的 Young 不等式)**.** 设 $1 \leq p < \infty$ 和 $1 < q,r < \infty$ 满足

$$\frac{1}{q}+1=\frac{1}{p}+\frac{1}{r}.$$

则存在常数 $C_{p,q,r}>0$ 使得对所有 $f \in L^p(G)$ 和 $g \in L^{r,\infty}(G)$, 我们有 $g*f$ 几乎处处存在且

$$\|g*f\|_{L^q(G)} \leq C_{p,q,r} \|g\|_{L^{r,\infty}(G)} \|f\|_{L^p(G)}.$$

若 g 满足 $\|g\|_{L^r(G)}=\|\tilde{g}\|_{L^r(G)}$, 则

$$\|f*g\|_{L^q(G)} \leq C_{p,q,r} \|g\|_{L^{r,\infty}(G)} \|f\|_{L^p(G)}.$$

2.2.3 单位逼近

Banach 代数 $L^1(G)$ 可能没有单位元, 也就是不存在 $f_0 \in L^1(G)$ 使得

$$f_0 * f = f = f * f_0,\ \forall f \in L^1(G).$$

特别地, 对 $G=\mathbb{R}$, 单位元确实不存在. 事实上, 满足单位运算律的 f_0 是 Dirac 分布而非 $L^1(\mathbb{R})$ 函数, 可见. 但在逼近意义下, 可以存在 "单位", 也即, 一族函数 k_ε 使得 $k_\varepsilon * f$ 在 $L^1(G)$ 中收敛于 f.

定义 2.2.7 (单位逼近). *一个单位逼近是一组 $L^1(G)$ 函数 k_ε 满足:*

1. $\exists c>0,\ s.t.\ \|f\|_{L^1(G)} \le c,\ \forall \varepsilon > 0$
2. $\displaystyle\int_G k_\varepsilon \,\mathrm{d}\lambda(x) = 1,\ \forall \varepsilon > 0.$
3. 对任意e的邻域V, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{V^c} |k_\varepsilon| \,\mathrm{d}\lambda(x) = 0.$

有时我们也认为单位逼近是序列 $\{k_n\}_n$. 这时, 性质 3 被替换为 $n\to\infty$ 时的极限. 从直观上看, 我们可以把单位逼近视作一列正函数, 它们在 0 处有尖峰, 且积分值不变 (为 1), 但支撑收缩到 0.

在 $\mathbb{R}$ 上定义 $P(x) = (\pi(x^2+1))^{-1}$ 和 $P_\varepsilon = \varepsilon^{-1}P(\varepsilon^{-1}x) = \varepsilon/(\pi(\varepsilon^2+x^2)),\ \forall\varepsilon>0$. 计算表明 P_ε 是单位逼近, 称为 Poisson 核. 下面的例子相当重要, 涵盖了大量的单位逼近:

例子 2.2.8. *在 $\mathbb{R}^n$ 上, 设 $k\in L^1$ 的积分值为 1. 令 $k_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}k(\varepsilon^{-1}x)$, 则 k_ε 是单位逼近.*

下面的定理解释了我们将满足这些条件的函数族称为单位逼近的原因.

定理 2.2.9. *设 k_ε 是 G 上单位逼近.*

1. *若 $f\in L^p(G)$, $1\le p<\infty$, 则 $\|k_\varepsilon * f - f\|_{L^p(G)} \to 0\ (\varepsilon\to 0)$.*
2. *若 $f\in L^\infty(G)$ 在 $K\subset G$ 上是一致连续的 (对任意 $\delta>0$, 存在 e 的邻域 V 使得 $|f(y^{-1}x) - f(x)| < \delta$ 对 $x\in K$ 核 $y\in V$ 总成立), 则我们有 $\|k_\varepsilon * f - f\|_{L^\infty(K)} \to 0\ (\varepsilon\to 0)$. 特别地若 f 有界且在 $x_0\in G$ 上连续, 则 $k_\varepsilon * f(x_0) \to f(x_0)\ (\varepsilon\to 0)$.*

证明. 对 $1\le p<\infty$, 由于 $\mathcal{C}_c(G)$ 在 $L^p(G)$ 中是稠密的, 我们可以用紧支连续函数来逼近 f, 这化简了问题. 再对定义域进行划分, 利用单位逼近的条件进行分别估计即可. 对 $p=\infty$, 方法类似. □

若 Haar 测度满足前面提到的条件(2.2.3), 则上述结论对 $f * k_\varepsilon$ 也成立.

此定理在 Fourier 级数收敛性的研究中有基本的作用. 我们将会在命题3.1.6中看到, Fejér 核是单位逼近, 因此 Cesàro 平均的收敛性质很好.

2.3 插值理论

向量空间的插值定理起源于 Marcinkiewicz 的观察, 我们在2.1.2已经提到过.

我们在这里介绍三个最重要的插值定理, 依次是: Marcinkiewciz 插值定理 (实变方法); Riesz[3]-Thorin 插值定理 (复变方法); Stein 的解析算子族插值定理.

在开始之前, 固定本节的记号: 设 (X,μ) 和 (Y,ν) 是两个测度空间. 设 T 是一个从 (X,μ) 上复值可测函数到 (Y,ν) 上几乎处处有限的复值可测函数的算子. 若其满足

$$T(f+g) = T(f) + T(g) \text{ 和 } T(\lambda f) = \lambda T(f),\ \forall\lambda\in\mathbb{C},$$

[3]这里是指 M.Riesz

我们称 T 是线性的. 若其满足

$$|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)| \text{ 和 } |T(\lambda f)| = |\lambda||T(f)|, \ \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

称 T 为次线性的.

将 L^p 映到 L^q 的算子称为强 (p,q) 型, 而将 L^p 映到 $L^{q,\infty}$ 的算子称为弱 (p,q) 型. 实际上我们也不需要假定 T 定义在 (X,μ) 的全体复值可测空间上. 假设我们有一个线性算子, 定义在 X 的所有简单函数上, 并且 $T(f)$ 是 Y 上 ν-可测函数. 对 $0<p<\infty$ 和 $0<q<\infty$, 若存在常数 $C_{p,q}>0$ 使得对 X 上的所有简单函数 f,

$$\|T(f)\|_{L^q(Y,\nu)} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(X,\mu)}.$$

则由简单函数的稠密性, 存在 T 的有界延拓: $L^p(X,\mu) \to L^q(Y,\nu)$, 也能回到原本的设定中.

2.3.1 Marcinkiewicz 插值定理

此插值定理主要使用的是实变方法.

定理 2.3.1. 设 (X,μ) 和 (Y,ν) 都是 σ-有限的测度空间. 令 $0<p_0<p_1\leq\infty$, 且 T 是定义在 $L^{p_0}(X)+L^{p_1}(X)$ 上的次线性算子, 值在 Y 的可测函数空间内. 假设存在 $A_0, A_1<\infty$ 使得

$$\|T(f)\|_{L^{p_0,\infty}(Y)} \leq A_0 \|f\|_{L^{p_0}(X)}, \ \forall f \in L^{p_0}(X),$$

$$\|T(f)\|_{L^{p_1,\infty}(Y)} \leq A_1 \|f\|_{L^{p_1}(X)}, \ \forall f \in L^{p_1}(X),$$

则对所有 $p_0<p<p_1$ 和 $f \in L^p(X)$, 我们有

$$\|T(f)\|_{L^p(Y)} \leq A \|T(f)\|_{L^p(X)},$$

其中

$$A = 2\left(\frac{p}{p-p_0}+\frac{p}{p_1-p}\right)^{\frac{1}{p}} A_0^{\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}} A_1^{\frac{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}}.$$

证明. 证明的关键是如下观察: 对若 $f \in L^{p,\infty}(X,\mu)$, 定义 $f_\gamma = f\chi_{|f|>\gamma}$ 和 $f^\gamma = f\chi_{|f|\leq\gamma}$. 则 $f^\gamma \in L^q(X,\mu)$ 对所有 $q>p$ 成立, 且 $f_\gamma \in L^q(X,\mu)$ 对所有 $q<p$ 成立. 根据上面的分解, 我们可以选取合适的 α 值, 结合算子的弱型估计以及分布函数与函数 L^p 范数的关系得到上面的结论. □

此定理最初出现在 Marcinkiewciz 的笔记 [37] 中, 但没有给出证明. 他死于二战期间, 此定理长期都没有被人注意到, 直到 Zygmund 在 [59] 中重新引入了该定理. 在该参考文献中, Zygmund 证明了一个更困难的非对角版本.

2.3.2 Riesz-Thorin 插值定理

此插值定理主要使用的是复变方法.

定理 2.3.2. 设 (X,μ) 和 (Y,ν) 都是 σ-有限的测度空间. 设 T 是定义在 X 的有限简单函数上的线性算子, 值为 Y 上的可测函数. 令 $1\leq p_0,p_1,q_0,q_1\leq\infty$, 且

$$\|T(f)\|_{L^{q_0}(Y)} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}(X)},$$

$$\|T(f)\|_{L^{q_1}(Y)} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}(X)},$$

对所有 X 上有限简单函数成立, 则对所有 $0<\theta<1$, 我们有

$$\|T(f)\|_{L^q(Y)} \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L^p(X)}.$$

对所有 X 上的简单有限函数成立, 其中

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1},\ \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}.$$

因而, 当 $p<\infty$ 时, 由稠密性, T 有一个有界扩张:$L^p(X,\mu)\to L^q(Y,\nu)$.

事实上, 我们可以将上面的定理用下面的方法表述: 我们称一个算子 T 的 Riesz 图像为 $\{(x,y): 0\le x,y\le 1 : T是(\frac{1}{x},\frac{1}{y})型的\}$ 用 $M_{x,y}$ 表示 T 作为 $(\frac{1}{x},\frac{1}{y})$ 型算子的范数, 则我们有:

推论 2.3.3. *在定理2.3.2的条件下, 我们有:*

1. *T 的 Riesz 图像为凸集.*

2. *$\log M_{x,y}$ 为该凸集上的凸函数.*

此定理最初的版本实际上更接近这个推论, 由 Riesz 于 [42] 中以双线性型的语言证明, 我们一般将其称之为 Riesz 凸性定理. 事实上他只解决了 $0\le x,y\le 1, x+y\ge 1$ 时的情况, 而他的学生 Thorin 在 [53] 中将定理推广到 $0\le x,y\le 1$, 并将双线性型推广为多变量整函数. 二战结束后, Thorin 将其发表在了论文 [54] 中, 对定理进行了证明, 并给出了诸多应用. Thorin 的证明较为冗杂, 几年之后 Tamarkin 和 Zygmund 在文章 [51] 中给出了利用最大模原理的证明, 相当简短而优雅. 现在, 我们常常把这个定理称为 Riesz-Thorin 插值定理.

现在我们来给出此定理的证明.

证明. 我们用对偶空间来控制范数.

$$\|T(f)\|_{L^q(Y)} = \sup_g \left| \int_Y T(f)(y) g(y)\, \mathrm{d}\nu(y) \right|.$$

其中我们要求 g 是 Y 上的简单有限函数, 其 $L^{q'}$ 范数小于等于 1. 现在设

$$f=\sum_{k=1}^m a_k e^{i\alpha_k}\chi_{A_k},\ g=\sum_{j=1}^n b_j e^{i\beta_j}\chi_{B_j},$$

都是有限简单函数, $a_k,b_j>0$ 且 $\alpha_k,\beta_j\in\mathbb{R}$, 而 A_k μ-测度有限, 两两不交,B_j μ-测度有限两两不交. 令

$$P(z)=\frac{p}{p_0}(1-z)+\frac{p}{p_1}z \text{ 和} Q(z)=\frac{q'}{q_0'}(1-z)+\frac{q'}{q_1'}(z).$$

对 $z\in\overline{S}=\{z\in\mathbb{C}:\ 0\le\Re(z)\le 1\}$, 定义

$$f_z=\sum_{k=1}^m a_k^{P(z)} e^{i\alpha_k}\chi_{A_k},\ g_z=\sum_{j=1}^n b_j^{P(z)} e^{i\beta_j}\chi_{B_j},$$

以及

$$F(z)=\int_Y T(f_z)(y) g_z(y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

注意到, $f_\theta=f$ 与 $g_\theta=g$, 由线性性,

$$F(z)=\sum_{k=1}^m\sum_{j=1}^n a_k^{P(z)} b_j^{P(z)} e^{i\alpha_k} e^{i\beta_k}\int_Y T(\chi_{A_k})(y)\chi_{B_j}(y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

由 Hölder 不等式,

$$\int_Y T(\chi_{A_k})(y)\chi_{B_j}(y)\,\mathrm{d}\nu(y) \le \|\chi_{A_k}\|_{L^{q_0}} \left\|\chi_{B_j}\right\|_{L^{q_0'}} \le M_0\mu(A_k)\nu(B_j) < \infty.$$

由于 $a_k, b_j > 0$,F 关于 z 是解析的. 现在只需要三线引理2.3.4就可以得出结论. □

引理 2.3.4. 设 F 在 $S = \{z \in \mathbb{C}:\ 0 < \Re(z) < 1\}$ 上解析, 并且在 $\overline{S}$ 上连续有界. 若 $|F(z)| \le B_0\ (\Re(z) = 0)$ 和 $|F(z) \le B_1|\ (\Re(z) = 1)$, 其中 $0 < B_0, B_1 < \infty$, 则对任意 $0 \le \theta \le 1$,

$$|F(z)| \le B_0^{1-\theta} B_1^{\theta}\ (\Re(z) = \theta).$$

证明. 三线引理的本质是最大模原理, 我们略去不证. □

2.3.3 Stein 解析算子族插值定理

定理2.3.2可以被推广到一族算子的情况. 特别是这族算子关于参数 z 解析时, 其证明也可以自然地沿用. 我们首先给出一些基本的定义.

同样假设 (X, μ) 和 (Y, ν) 是两个 $\sigma-$ 有限的测度空间, 并且每个 $z \in \overline{S} = \{z \in \mathbb{C}:\ 0 \le \Re(z) \le 1\}$ 都对应一个线性算子 T_z(定义在 X 中的有限简单函数上, 以 Y 中的可测函数为值) 使得

$$\int_Y |T_z(\chi_A)\chi_B|\,\mathrm{d}\nu < \infty,\ \forall \mu(A), \nu(B) < \infty.$$

如果对任意的有限简单函数 f, g, 映射

$$z \mapsto \int_Y T_z(f) g\,\mathrm{d}\nu$$

在 $S = \{z \in \mathbb{C}:\ 0 < \Re(z) < 1\}$ 上是解析的, 并且在 $\overline{S}$ 上是连续的, 我们就称算子族是关于 z 解析的. 如果存在常数 $0 \le \tau_0 < \pi$ 使得所有简单函数 f, g 都对应一个常数 $C(f, g)$ 使得

$$\log\left|\int_Y T_z(f) g\,\mathrm{d}\nu\right| \le C(f, g)e^{\tau_0|\Im(z)|},\ \forall 0 \le \Re(z) \le 1,$$

则解析算子族 $\{T_z\}$ 被称为容许增长的.

定理 2.3.5. 设 T_z 是定义在 σ-有限测度空间 (X, μ) 上, 以 σ-有限测度空间 (Y, μ) 中可测函数为值的容许增长解析线性算子族. 设 $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$. 设 $\mathbb{R}$ 上正函数 M_0, M_1 满足: 存在 $\tau_1 \in [0, \pi)$,

$$\sup_{-\infty<y<\infty} e^{-\tau_1|y|}\log M_j(y) < \infty\ (j = 0, 1)$$

固定 $\theta \in (0, 1)$, 并取

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\ \text{和}\ \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

并且对所有 X 上的有限简单函数 f, 都成立

$$\|T_{iy}(f)\|_{L^{q_0}} \le M_0(Y)\,\|f\|_{L^{p_0}},\ \|T_{1+iy}(f)\|_{L^{q_1}} \le M_1(Y)\,\|f\|_{L^{p_1}}.$$

则对所有 f 上的有限简单函数,

$$\|T_\theta(f)\|_{L^q} \le M(\theta)\,\|f\|_{L^p}.$$

其中,

$$M(x) = \exp\left\{\frac{\sin(\pi x)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\log M_0(t)}{\cosh(\pi t) - \cos(\pi x)} + \frac{\log M_1(x)}{\cosh(\pi t) + \cos(\pi x)}\right]\mathrm{d}t\right\},\ \forall 0 < x < 1.$$

因此, T_θ 有唯一的有界延拓: $L^p(X, \mu) \to L^q(Y, \nu)$.

此定理是 Stein 在 [44] 中证明的. 正如我们所提及的, 此定理和 Riesz-Thorin 定理的证明类似(也因此我们不再重复), 它依赖于下面的关键引理:

引理 2.3.6. 设 F 在开条带 S 上解析, 并且在 $\overline{S}$ 上连续, 且对 $A < \infty$ 和 $0 \le \tau_0 < \pi$, 有

$$\log|F(z)| \le Ae^{\tau_0|\Im(z)|}, \ \forall z \in \overline{S}.$$

则对 $0 < x < 1$ 和 $y \in \mathbb{R}$ 有

$$|F(x+iy)| \le \exp\left\{\frac{\sin(\pi x)}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\log|F(x+iy)|}{\cosh(\pi t)-\cos(\pi x)} + \frac{\log|F(1+it+iy)|}{\cosh(\pi t)+\cos(\pi x)}\right]\mathrm{d}t\right\}$$

此引理是 Hirschman 在 [17] 中得到的. 此引理的证明需要用到复分析中的次调和函数, 共形映射的理论, 较为繁琐, 在此略去.

目前为止我们已经对三个主要的插值定理有了一定了解. 插值理论实际上相当丰富, 可以往多个方向进行推广. 例如, Calderón 在 [7] 中将 Riesz-Thorin 定理的复变证明推广到了更一般的 Banach 空间之间的插值. Kalton 在 [24] 和 [25] 中发展了拟 Banach 空间上的复插值方法. 对于算子的类型而言, Calderón 和 Zygmund 的 [6] 给出了次线性算子的复插值. 插值理论的对象也不仅限于 Lebesgue 空间. 关于 Lorentz 空间, 也有许多对应的插值定理, 例如 Hunt 在 [18] 中给出了 Marcinkiewicz 定理对 Lorentz 空间的推广. 限于文章的主题, 我们在这里就不再详尽介绍了.

2.4 极大函数

平均算子在分析中有重要地位, 而它一般可以表示为函数和某种密度函数的卷积. 我们在这里引入极大算子来研究这些平均算子. 一维极大函数起源于 Hardy 和 Littlewood. 其中他们使用了引理2.4.3来证明其 L^p 有界性.

给定 Lebesgue 可测集 $A \subset \mathbb{R}^n$, 用 $|A|$ 记其 Lebesgue 测度. 对 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $r > 0$, 用 $B(x,r)$ 表示中心位于 x 处, 半径为 r 的开球. 同样使用记号 $aB(x,\delta) = B(x,a\delta)$ $(a > 0)$ 来表示同一中心的开球. 给定 $\delta > 0$ 和局部可积函数 f, 用

$$\operatorname*{Avg}_{B(r,\delta)} |f| = \frac{1}{|B(x,\delta)|}\int_{B(x,\delta)} |f(y)|\,\mathrm{d}y.$$

表示 $|f|$ 在球 $B(r,\delta)$ 上的平均.

2.4.1 Hardy-Littlewood 极大算子

定义 2.4.1. 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 中的局部可积函数, 则

$$\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{\delta>0}\operatorname*{Avg}_{B(r,\delta)} f = \sup_{\delta>0}\frac{1}{v_n\delta^n}\int_{|y|<\delta}|f(x-y)|\,\mathrm{d}y$$

被称作 f 的中心化 *Hardy-Littlewood* 极大函数.

显然有 $\mathcal{M}(f) = \mathcal{M}(|f|) \ge 0$, 因此极大函数是正算子. 我们将会证明 $\mathcal{M}(f)$ 逐点地控制了 f(即 $\mathcal{M}(f) \ge |f|$ 几乎处处成立). 注意到 $\mathcal{M}$ 将 L^∞ 映射到自身, 即

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^\infty}.$$

$\mathcal{M}$ 是一个次线性算子, 也即, 它满足 $\mathcal{M}(f+g) \le \mathcal{M}(f) + \mathcal{M}(g)$, 且 $\mathcal{M}(\lambda f) = |\lambda|\mathcal{M}(f)$ 对所有局部可积函数 f, g 和复数 λ 成立. 它有下面的有趣性质:

若 f 是局部可积的, 我们考虑其在球 $B(x,|x|+R)$(这包含了 $B(0,R)$) 上的平均, 得到

$$\mathcal{M}(f)(x) \geq \frac{\int_{B(0,R)} |f(y)|\,\mathrm{d}y}{v_n(|x|+R)^n}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{2.4.1}$$

从(2.4.1)出发可以证明, 若 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\mathcal{M}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则 $f=0$ a.e.

显然, 若 $\mathcal{M}(f)(x_0)=0$ 对某 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 成立, 则 $f=0$ a.e.

一个与 $\mathcal{M}(f)$ 相关的类似是非中心化版本 $M(f)$, 定义为 f 在所有包含某点的开球上的平均的上确界.

定义 2.4.2. *f 的非中心化 Hardy-Littlewood 极大函数:*

$$M(f)(x) = \sup_{\delta>0,|y-x|<\delta} \operatorname*{Avg}_{B(y,\delta)} |f|,$$

被定义为 $|f|$ 在所有包含 x 的开球 $B(y,\delta)$ 上的平均的上确界.

显然有 $\mathcal{M}(f) \leq M(f)$; 换句话说 M 是比 $\mathcal{M}$ 更大的算子. 然而, 我们有 $M(f) \leq 2^n\mathcal{M}(f)$, 于是 M 的有界性和 $\mathcal{M}$ 是相同的. 我们现在来讨论一些极大函数的基本性质, 这需要下面的覆盖引理:

引理 2.4.3. *设 $B_1,B_2,...B_k$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中有限个开球的列. 则存在两两不交的球 $\{B_{j_1},...,B_{j_l}\}$ 构成的子列, 使得*

$$\sum_{r=1}^{l} |B_{j_r}| \geq 3^{-n} \left|\bigcup_{r=1}^{l} B_{j_r}\right| \tag{2.4.2}$$

证明. 不妨将开球按半径排序如下:

$$|B_1| \geq |B_2| \geq \cdots \geq |B_k|.$$

令 $j_1=1$. 在取定 $j_1,j_2,...j_i$ 后, 我们令 j_{i+1} 为最小的使得 $s>j_i$ 的指标, 使得 $\bigcup\limits_{m=1}^{i} B_{j_m}$ 和 B_s 不交. 因为开球个数有限, 此过程必定终止, 设用 l 步. 现在我们得到了一列两两不交的开球 $B_{j_1},...B_{j_l}$. 若 B_m 不在其中, 则存在 $j_r<m$ 使得 B_{j_r} 和 B_m 相交. 则 B_m 的半径比 B_{j_r} 小, 必有 $B_m \subseteq 3B_{j_r}$. 这表明未被选择的球之并包含与所有被选择的球的三倍扩张之并. 从而, 所有球的并被包含在所有选择球的三倍扩张之并中, 于是

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right| \leq \left|\bigcup_{r=1}^{l} 3B_{j_r}\right| \leq \sum_{r=1}^{l} |3B_{j_r}| = 3^n \sum_{r=1}^{l} |B_{j_r}|.$$

□

此引理是 Vitali 覆盖引理的变种. Vitali 在 [56] 中证明的定理是这样的: 给定 $\mathbb{R}^n$ 中一族闭方体, 满足对任意 $x \in A \subset \mathbb{R}^n$, 都存在属于这一族方体的点构成的序列, 使其收敛于 x. 则我们可以从方体族中取出不交的序列 $\{E_j\}$, 使得 $|A \backslash \bigcup_j E_j| = 0$.

我们先前已经证明 $\mathcal{M}(f)$ 和 $M(f)$ 不会在 L^1 中 (除非 $f=0$ a.e.). 然而, 在 $f \in L^1$ 时, 它们是 $L^{1,\infty}$ 内的函数, 也即: 中心化和非中心化的极大算子都是弱 (1,1) 型的.

定理 2.4.4. *中心化和非中心化的 Hardy-Littlewood 极大算子将 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 映到 $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ 中, 算子范数最大为 3^n. 对 $1<p<\infty$, 将 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 映到 $L^p(\mathbb{R}^n)$, 算子范数最大为 $3^{n/p}p(p-1)^{-1}$. 对任意 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 我们同样有:*

$$|\{M(f)>\alpha\}| \leq \frac{3^n}{\alpha} \int_{\{M(f)>\alpha\}} |f(y)|\,\mathrm{d}y. \tag{2.4.3}$$

证明. 下面先考察 M(非中心化) 的情形. 我们首先证明 $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : M(f)(x) > \alpha\}$ 是开集. 事实上, 对 $x \in E_\alpha$, 存在包含 x 的开球 B_x 使得 $|f|$ 在 B_x 上的平均严格比 α 大. 则对球内的其它点, 非中心化极大函数的值也是大于 α 的 (就取 B_x 上的平均), 于是 $B_x \subseteq E_\alpha$, 也即 E_α 开.

现在令 K 为 E_α 的紧子集, 对每一个 $x \in K$, 都存在包含 x 的开球 B_x 使得

$$\int_{B_x} |f(y)|\,\mathrm{d}y > \alpha|B_x|. \tag{2.4.4}$$

类似地论证知 $B_x \subset E_\alpha$. 由紧性, 存在 K 地有限开覆盖 $\{B_{x_1}, ...B_{x_k}\}$. 利用引理2.4.3, 我们可以找到两两不交开球子族 $\{B_{x_{j_1}}, ...B_{x_{j_l}}\}$ 使得(2.4.2)成立. 于是由(2.4.4)和(2.4.2), 以及子族的不交性:

$$|K| \le \left|\bigcup_{i=1}^{k} B_{x_i}\right| \le 3^n \sum_{i=1}^{l} |B_{x_{j_i}}| \le \frac{3^n}{\alpha} \sum_{i=1}^{l} \int_{B_{x_{j_i}}} |f(y)|\,\mathrm{d}y \le \frac{3^n}{\alpha} \int_{E_\alpha} |f(y)|\,\mathrm{d}y.$$

关于所有紧集 $K \subset E_\alpha$ 取上确界, 利用 Lebesgue 测度的内正则性, 我们证明了(2.4.3). 我们现在已经证明 $M : L^1 \to L^{1,\infty}$ 的算子范数至多为 3^n, 而显然有 M 将 L^∞ 映到 L^∞, 算子范数为 1. 现在 Marcinkiewicz 插值定理 (定理2.3.1) 表明 M 将 L^p 映到 L^p 自身, 其算子范数不超过 $2(\frac{p}{p-1})^{\frac{1}{p}} 3^{\frac{n}{p}}$. 利用 $M(f) \le M(|f|)$ 的性质, 我们还知道:

$$\|M\|_{L^p \to L^p} \le \frac{p 3^{n/p}}{p-1}.$$

最后 $\mathcal{M}$ 的有界性是 M 有界性的推论. □

关于这两种 Hardy-Littlewood 极大算子的算子范数, 我们评注如下:

前面的证明给出了 M 的算子范数的估计关于维数指数增长. 这个界并不可能改进到为不关于维数 n 指数增长的界 ($n \to \infty$). 事实上, Grafakos 和 Montgomery-Smith 在 [11] 中证明了, 给定 $1 < p < \infty$, 存在 $C_p > 1$ 使得 $\|M\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)} \ge C_p^n$. 对于 $n = 1$ 的情况, 同样是在 [11] 中, 他们得到了如下结论: $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上非中心化极大算子 M 的算子范数恰为方程 $(p-1)x^p - px^{p-1} - 1 = 0$ 的唯一正根.

然而对于中心化的极大算子, Stein 在 [45] 中证明了 $\mathcal{M}$ 的算子范数有和维数无关的界. Stein 和 Strömberg 的 [46] 中也有这个结果. 根据 Melas 在 [38] 中的结果, $\mathcal{M}$ 作为弱 $(1,1)$ 型算子, 其范数精确值为二次方程 $12x^2 - 22x + 5 = 0$ 的大根, 也就是 $\frac{11+\sqrt{61}}{12}$.

实际上极大函数还有许多中变体, 例如关于方体的 (中心化或非中心化) 极大函数, 关于凸体的极大算子, 强极大算子等. 对于这些不同的极大算子也有许多相关的结果, 我们不在这里赘述.

2.4.2 其他极大算子的控制

我们在这一小节中给出 Hardy-Littlewood 极大函数的一个相当重要的性质.

给定 $\mathbb{R}^n$ 上函数 g 和 $\varepsilon > 0$, 我们用 g_ε 表示下面的函数 $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} g(\varepsilon^{-1}x)$. 我们知道在例子2.2.8中已经知道, 若 g 是可积函数, 积分值为 1, 则(2.1.7)中的函数族是单位逼近. 因此, 和 g_ε 作卷积是平均算子. Hardy-Littlewood 极大函数也可以通过和这类函数的卷积表示:

$$\mathcal{M}(f)(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{v_n \varepsilon^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \chi_{B(0,1)}(\frac{y}{\varepsilon})\,\mathrm{d}y = \sup_{\varepsilon > 0} (|f| * k_\varepsilon)(x).$$

我们称一个函数是径向的, 当且仅当 $f(x) = f(y)$ 对所有 $|x| = |y|$ 成立. 注意一个 $\mathbb{R}^n$ 上的径向函数具有形式 $f(x) = \varphi(x)$, 其中 φ 定义在 $\mathbb{R}_{\ge 0}$ 上. 一个重要的结果是, 事实上 Hardy-Littlewood 极大函数控制了一个函数关于一个径向单减 L^1 函数的平均.

定理 2.4.5. 设 $k \geq 0$ 是一个 $[0,\infty)$ 上的函数, 在除有限个点外连续. 假设 $K(x) = k(|x|)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可积函数, 满足:

$$K(x) \geq K(y),\ \forall |x| \leq |y|. \tag{2.4.5}$$

即 k 是单减的, 则下面的估计对所有 $\mathbb{R}^n$ 上局部可积函数成立:

$$\sup_{\varepsilon>0}(|f| * K_\varepsilon)(x) \leq \|K\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x). \tag{2.4.6}$$

证明. 我们只用对一个径向, 满足(2.4.5)且紧支连续的函数证明(2.4.6)即可. 在证明这种情况之后, 选取一列径向单减紧支连续函数 K_j 单增到 K(因为 K 仅在有限点处不连续, 这是可能的). 现在(2.4.6)对每个 K_j 成立, 取极限知道对 K 也成立. 又注意到, 因为我们可以用 $f(t+x)$ 代替 $f(t)$ 来证明点 x 处的情况, 只需要对 $x=0$ 证明(2.4.6)即可.

现在取定一个径向单减紧支函数 K, 不妨设支撑含于 $B(0,R)$ 中, 且 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}, x=0$. 令 e_1 为单位球 $\mathbf{S}^{n-1}$ 上的向量 $(1,0,...,0)$. 极坐标换元给出:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| K_\varepsilon(-y)\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \int_{\mathbf{S}^{n-1}} |f(r\theta)| K_\varepsilon(re_1) r^{n-1}\,\mathrm{d}\theta \mathrm{d}r. \tag{2.4.7}$$

我们定义函数

$$F(r) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} |f(r\theta)|\,\mathrm{d}\theta \quad G(r) = \int_0^r F(s)s^{n-1}\,\mathrm{d}s.$$

其中 $\mathrm{d}\theta$ 表示 $\mathbf{S}^{n-1}$ 的球面测度, 于是(2.4.7)和分部积分可以进一步推出:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| K_\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\varepsilon R} F(r) r^{n-1} K_\varepsilon(re_1)\,\mathrm{d}r \\ &= G(\varepsilon R)K_\varepsilon(\varepsilon Re_1) - G(0)K_\varepsilon(0) - \int_0^{\varepsilon R} G(r)\,\mathrm{d}K_\varepsilon(re_1) \\ &= \int_0^\infty G(r) d(-K_\varepsilon(re_1)),\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

其中有两个积分是 Lebesgue-Stieltjes 型的, 我们已经用到了 $G(0)=0, K_\varepsilon(0)<\infty, G(\varepsilon R)<\infty$ 和 $K_\varepsilon(\varepsilon Re_1)=0$ 的假设. 进一步,

$$G(r) = \int_0^r F(r)s^{n-1}\,\mathrm{d}s = \int_{|y|\leq r} |f(y)|\,\mathrm{d}y \leq \mathcal{M}(f)(0) v_n r^n.$$

于是(2.4.8)中的表达式被

$$\mathcal{M}(f)(0)v_n \int_0^\infty r^n \mathrm{d}(-K_\varepsilon(re_1)) = \mathcal{M}(f)(0) \int_0^\infty n v_n r^{n-1} K_\varepsilon(re_1)\,\mathrm{d}r = \mathcal{M}(f)(0)\|K\|_{L^1}.$$

控制, 其中我们用到了分部积分以及单位球 $\mathbf{S}^{n-1}$ 的球面测度为 nv_n 的事实. 定理证明完毕. □

定理2.4.5可以作如下推广: 若 K 是一个 $\mathbb{R}^n$ 上的 L^1 函数, 且满足 $|K(x)| \leq k_0(|x|) = K_0(x)$, 其中 k_0 是 $[0,\infty)$ 上非负单减, 在除有限个点外连续的函数. 则在(2.4.6)中把 $\|K\|_{L^1}$ 换为 $\|K_0\|_{L^1}$ 也成立. 这样的 K_0 被称为 K 的一个径向单减控制函数. 我们将其总结如下:

推论 2.4.6. 若函数 φ 有一个可积径向单减控制函数 Φ, 则对所有 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数 f, 有:

$$\sup_{t>0}|(f*\varphi_t)(x)| \leq \|\Phi\|_{L^1} \mathcal{M}(f)(x).$$

2.4.3 弱型估计和几乎处处收敛

这一小节的主题是 Hardy-Littlewood 极大函数函数的有界性在收敛理论中的应用.

现在证明 Hardy-Littlewood 极大函数的弱 (1,1) 型性质蕴含一族函数的几乎处处收敛. 考虑更一般的情况, 也即一族线性算子上确界的弱 (p,q) 型估计蕴含其几乎处处收敛.

设 (X,μ) 和 (Y,ν) 是两测度空间, 且 $0<p\leq\infty, 0<q\leq\infty$. 令 D 为 $L^p(X,\mu)$ 的稠密子集, 这意味着对任意 $f\in L^p$ 和 $\delta>0$, 都存在 $g\in D$ 使得 $\|f-g\|_{L^p}<\delta$. 现在假设每个 $\varepsilon>0$ 对应线性算子 T_ε 将 $L^p(X,\mu)$ 映到可测函数的一个子空间 (在 Y 上几乎处处有定义). 对 $y\in Y$, 我们定义一个次线性算子:

$$T_*(f)(y)=\sup_{\varepsilon>0}|T_\varepsilon(f)(y)|$$

并设 $T_*(f)$ 对所有 $f\in L^p(X,\mu)$ 总是 ν 可测的. 我们有下面的定理:

定理 2.4.7. *设 $0<p,\infty,0<q<\infty$. 算子 T_ε 和 T_* 定义如前. 假设存在 $B>0$ 使得*

$$\|T_*(f)\|_{L^{q,\infty}}\leq B\|f\|_{L^p},\ \forall f\in L^p(X)$$

并且对任意 $f\in D$, 有

$$\lim_{\varepsilon\to0}T_\varepsilon(f)=T(f)\tag{2.4.9}$$

ν 几乎处处存在且有限 (也就定义了一个 D 上的线性算子), 则对所有 $L^p(X,\mu)$ 中的函数 f, 极限(2.4.9)都 ν 几乎处处存在且有限, 因而定义了一个 $L^p(X)$ 上的线性算子 T(是定义在 D 上的 T 的唯一延拓), 满足:

$$\|T(f)\|_{L^{q,\infty}}\leq B\|f\|_{L^p},\ \forall f\in L^p(X).\tag{2.4.10}$$

这个定理是我们证明 Fourier 级数几乎处处收敛的一个重要理论工具.

证明. 给定 L^p 中的函数 f, 我们定义其震荡:

$$O_f(y)=\limsup_{\varepsilon\to0}\limsup_{\theta\to0}|T_\varepsilon(f)(y)-T_\theta(f)(y)|.$$

我们现在证明对 $f\in L^p$ 和 $\delta>0$, 有

$$\nu(\{y\in Y:O_f(y)>\delta\})=0.\tag{2.4.11}$$

只要证明了(2.4.11), 对 $f\in L^p(X)$, 我们知道 $O_f(y)=0$ 对 y 是 ν 几乎处处成立的, 于是 $T_\varepsilon(f)(y)$ 是对 y 是 ν 几乎处处 Cauchy 的, 因此在 $\varepsilon\to0$ 时 $\nu-\text{a.e.}$ 收敛到某 $T(f)(y)$. 由此方法在 L^p 上定义的 T 的确是线性的, 将 D 上的 T 延拓.

为了估计 O_f, 我们利用稠密性. 给定 $\eta>0$, 取函数 $g\in D$ 使得 $\|f-g\|_{L^p}<\eta$. 由于 $T_\varepsilon\to T_g$ $\nu-\text{a.e}$, 我们知道 $O_g=0$ $\nu-\text{a.e.}$ 由此和 T_ε 的线性性:

$$O_f(y)\leq O_g(y)+O_{f-g}(y)=O_{f-g}(y)\ \nu-\text{a.e.}$$

现在对任意 $\delta>0$, 我们都有:

$$\begin{aligned}\nu(\{y\in Y:O_f(y)>\delta\})&\leq\nu(\{y\in Y:O_{f-g}(y)>\delta\})\\&\leq\nu(\{y\in Y:2T_*(f-g)(y)>\delta\})\\&\leq(2B\|f-g\|_{L^p}/\delta)^q\\&\leq(2B\eta/\delta)^q.\end{aligned}$$

令 $\eta\to0$, 我们得到(2.4.11). 因此 $T_\varepsilon(f)$ 是 Cauchy 列, 故 $\nu-\text{a.e.}$ 收敛到某 $T(f)$. 因为 $|T(f)|\leq|T_*(f)|$, 在(2.4.10)中的结论自然成立. □

下面给出一些应用. 首先我们转向 Poisson 核相关的 $f*P_y$ 的几乎处处收敛问题上.

例子 2.4.8. *给定 $1\le p<\infty$ 以及 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. 令*

$$P(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 上的 Poisson 核, 并让 $P_\varepsilon=\varepsilon^{-n}P(\varepsilon^{-1}x)$. 我们将证明 $f*P_\varepsilon$ 几乎处处收敛到 f. 令 D 为全体 $\mathbb{R}^n$ 上紧支连续函数构成的空间. 因为 P_ε 是单位逼近, 定理2.2.9(2) 表明对在 D 中的 f, 我们都有 $f*P_\varepsilon\to f$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的紧集上一致成立, 因此处处点态收敛. 由定理2.4.5, 算子族 $f*P_\varepsilon$ 的上确界被 Hardy-Littlewood 极大函数控制, 于是将 L^p 映到 $L^{p,\infty}$ $(1\le p<\infty)$. 于是定理2.4.7表明 $f*P_\varepsilon$ 几乎处处收敛到 f.

这个结果的一个重要应用是解决 Dirichlet 问题: 注意 P_ε 满足

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varepsilon^2}P_\varepsilon+\sum_{k=1}^n\partial_k^2P_t=0.$$

也即, $\{P_\varepsilon\}$ 是关于 $(x_1,...,x_n,\varepsilon)$ 的调和函数. 这时对任意 $f\in L^p$, 卷积的性质给出 $u(x,\varepsilon)=f*P_\varepsilon$ 仍是调和函数. 于是 $u(x,\varepsilon)$ 是下面 Dirichlet 问题的解:

$$\partial_\varepsilon^2u+\sum_{k=1}^n\partial_k^2u=0,\ \forall(x,\varepsilon)\in\mathbb{R}^{n+1}.$$

$$u(x,0)\to f(x),\ \ a.e.\ x\in\mathbb{R}^n.$$

由此可见, 热方程和 Poisson 核密切相关.

我们在上面的例子中论证的过程可以进行推广:

推论 2.4.9 (单位逼近的微分定理)**.** *设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 上积分为 1 的可积函数, 并且有一个连续径向单减控制函数, 则对任意 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\le p<\infty)$, 在 $\varepsilon\to0$ 时, $f*K_\varepsilon\to f$ a.e.*

证明. 例子2.2.8表明 K_ε 是一族单位逼近. 定理2.2.9表明, 若 f 连续, 则 $f*K_\varepsilon\to f$ 在紧集上一致. 令 D 为紧支连续函数空间, 则对 $f\in D$ 有 $f*K_\varepsilon\to f$ a.e. 因此推论2.4.6表明 $T_*(f)=\sup\limits_{\varepsilon>0}|f*K_\varepsilon|$ 将 L^p 映到 $L^{p,\infty}$ 中, 于是定理2.4.7表明此推论成立. □

2.5 泛函分析中的基本定理

我们之后可能会用到一些泛函分析的相关知识, 将其罗列如下:

定理 2.5.1 (Baire 纲定理)**.** *若 X 为度量空间, 则其中可数稠密开集之交仍稠密.*

利用 Baire 纲定理可以得到下面的一致有界性原理:

定理 2.5.2 (Banach-Steinhaus)**.** *若 X 为 Banach 空间, 而 Y 为赋范空间, 而 Λ_α $(\alpha\in A)$ 为一族 $X\to Y$ 的有界线性变换. 则或者*

$$\sup_{\alpha\in A}\|\Lambda_\alpha\|<\infty$$

或者存在一个 G_δ 集合 $Z\subset X$, 使得对任意 $x\in Z$ 都有

$$\sup_\alpha\|\Lambda_\alpha x\|_Y=\infty.$$

3 Fourier 级数的基本理论

这一节我们主要介绍经过严密化后 Fourier 分析的理论结果. 需要说明的是, 本章的理论依赖于第3章中关于卷积, 极大算子的基本知识. 尽管在 Riemann 积分的体系下的 Fourier 分析理论已相当丰富, 但鉴于其后续的发展都置于 Lebesgue 积分的体系下, 我们这里只考虑后者的情况. 这些工作主要起源于 Poussin 和 Fatou. 关于多重 Fourier 级数的经典理论, 可以参见 Bochner 的专著 [4] 和 [5].

3.1 Fourier 系数

我们直接考虑一般的 n 维 Fourier 级数. 正如我们在第1.3节看到的, 我们考虑的函数都具有一定的周期性. 为了向高维推广, 引入 n 维环面的概念. 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义等价关系 $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^n$, 在此关系下得到的商空间为 $\mathbf{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, 这就是所谓的 n 维环面. 将 $\mathbb{R}^n$ 视为加法群, 则 $\mathbf{T}^n$ 自然具备商群结构, 其单位元是 0 对应的等价类. 为了方便, 常将 $\mathbf{T}^n$ 记为 $[-1/2, 1/2]^n$, 并将其边界按规则等同起来. $\mathbf{T}^n$ 上的函数就是 $\mathbb{R}^n$ 中对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $m \in \mathbb{Z}^n$ 都满足 $f(x+m) = f(x)$ 的函数 f. $\mathbf{T}^n$ 上的 Haar 测度就是 n 维 Lebesgue 测度在 $\mathbf{T}^n = [-1/2, 1/2]^n$ 上的限制, 仍记为 $\mathrm{d}x$. Lebesgue 测度的平移不变性和 $\mathbf{T}^n$ 上函数 f 的周期性表明

$$\int_{\mathbf{T}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[-1/2,1/2]^n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{[a_1,a_1+1]\times\cdots\times[a_n,a_n+1]} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$$

同样由周期性, 环面上的分部积分并不产生边界项, 因此对两个 $\mathbf{T}^n$ 上的连续可微函数 f, g 有

$$\int_{\mathbf{T}^n} \partial_j f(x) g(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{\mathbf{T}} \partial_j g(x) f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall 1 \le j \le n. \tag{3.1.1}$$

3.1.1 Fourier 系数

我们此前已经考察过一维情况的 Fourier 级数. 自然地, 我们可以将其推广到 n 维:

定义 3.1.1. *对复值函数 $f \in L^1(\mathbf{T}^n)$ 和 $m \in \mathbb{Z}^n$, 我们定义 f 的第 m 个 Fourier 系数为*

$$\widehat{f}(m) = \int_{\mathbf{T}^n} f(x) e^{-2\pi i m\cdot x}\,\mathrm{d}x.$$

f 在点 $x \in \mathbf{T}^n$ 处的 Fourier 级数是

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m\cdot x}. \tag{3.1.2}$$

目前, 我们并不知道在何种意义下, 对哪些 x, 上面的级数是收敛的. Fourier 级数的收敛性是本章的重要论题.

我们约定记号: $\overline{f}$ 表示 f 的复共轭, $\tilde{f}$ 表示函数 $\tilde{f}(x) = f(-x)$, 并且 $\tau^y(f)$ 为函数 $\tau^y(f)(x) = f(x-y)$. 从其定义出发, Fourier 系数满足下面的基本性质.

命题 3.1.2. 设 $f, g \in L^1(\mathbf{T}^n)$, 则对所有 $m, k \in \mathbb{Z}^n$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}, y \in \mathbf{T}^n$ 及多重指标 α, 有

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \widehat{f+g}(m) = \widehat{f}(m) + \widehat{g}(m),\\
&(2)\ \widehat{\lambda f}(m) = \lambda \widehat{f}(m),\\
&(3)\ \widehat{\bar{f}}(m) = \overline{\widehat{f}(-m)},\\
&(4)\ \widehat{\tilde{f}}(m) = \widehat{f}(-m),\\
&(5)\ \widehat{\tau^y(f)}(m) = \widehat{f}(m) e^{-2\pi i m\cdot y},\\
&(6)\ \widehat{e^{2\pi i k(\cdot y)} f}(m) = \widehat{f}(m-k),\\
&(7)\ \widehat{f}(0) = \int_{\mathbf{T}^n} f(x)\,\mathrm{d}x,\\
&(8)\ \sup_{m\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(m)| \le \|f\|_{L^1(\mathbf{T}^n)},\\
&(9)\ \widehat{f*g}(m) = \widehat{f}(m)\widehat{g}(m),\\
&(10)\ \widehat{\partial^\alpha f}(m) = (2\pi i m)^\alpha \widehat{f}(m)
\end{aligned}
$$

证明. 我们简短地陈述这些简单命题的证明. 首先 (1) 和 (2) 来源于积分的线性性, 而 (3),(4),(5),(6) 基于积分的换元公式. (7) 是定义简单地特例, 而 (8) 是 $|e^{-2\pi i m\cdot x}| \le 1$ 的直接推论. (9) 是积分的绝对收敛和 Fubini 定理的推论:

$$\widehat{f*g}(m) = \int_{\mathbf{T}^n}\int_{\mathbf{T}^n} f(x-y)g(y)e^{-2\pi i m\cdot(x-y)}e^{-2\pi i m\cdot y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \widehat{f}(m)\widehat{g}(m).$$

至于 (10), 反复利用(3.1.1)即可证明. □

为了研究 Fourier 级数的部分和, 我们首先将其用较为简洁的形式表达, 这需要卷积和三角多项式的概念.

定义 3.1.3. $\mathbf{T}^n$ 上的三角多项式是形如

$$P(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} a_m e^{2\pi i m\cdot x}$$

的函数, 其中 $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ 在 $\mathbb{Z}^n$ 中是有限支撑的. P 的次数定义为最大的 $|q_1| + \cdots + |q_n|(q = (q_1, ..., q_n)$ 使得 a_q 非零). 由指数族的单位正交性知, 对所有 $m \in \mathbb{Z}^n$ 都有 $\widehat{P}(m) = a_m$.

令

$$P(x) = \sum_{|m|\le N} a_m e^{2\pi i m\cdot x} = \sum_{|m|\le N} \widehat{P}(m) e^{2\pi i m\cdot x}$$

为 $\mathbf{T}^n$ 上三角多项式, 若 f 是 $\mathbf{T}^n$ 上的一个可积函数, 则

$$(P*f) = \int_{\mathbf{T}^n} f(y) \sum_{|m|\le N} \widehat{P}(m) e^{2\pi i m\cdot(x-y)}\,\mathrm{d}y = \sum_{|m|\le N} \widehat{P}(m)\widehat{f}(m) e^{2\pi i m\cdot x}.$$

这意味着(3.1.2)中 f 的 Fourier 级数的部分和

$$\sum_{|m|\le N} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m\cdot x}$$

可以通过将 f 与函数

$$D_N(x) = \sum_{|m|\le N} e^{2\pi i m\cdot x}. \tag{3.1.3}$$

作卷积得到. 这个函数被称为 Dirichlet 核.

3.1.2 Dirichlet 核与 Fejér 核

定义 3.1.4. 设 $0 \le R < \infty$, 我们称 $\mathbf{T}^n$ 上的方体型 *Dirichlet* 核为函数

$$D_R^n(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n, |m_j| \le R} e^{2\pi i m \cdot x}.$$

在一维情况下, 我们将其记为 $D_R(x)$, 它在 $N \le R < N+1$ 和 $N \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ 时与(3.1.3)是一致的.

方体型 Dirichlet 核是三角多项式, 它等于一些一维 Dirichlet 核的乘积, 也即

$$D_R^n(x_1, ..., x_n) = D_R(x_1) \cdots D_R(x_n).$$

简单的计算给出了下面两种 Dirichlet 核的等价写法:

$$D_N(x) = \sum_{|m| \le N} e^{2\pi i m \cdot x} = \frac{\sin(2N+1)\pi x}{\sin(\pi x)}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

从而对任意 $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, 有

$$D_R(x) = \frac{\sin(\pi x(2[R]+1))}{\sin(\pi x)}. \tag{3.1.4}$$

自然地, 我们关心函数族 $\{D_R\}_{R>0}$ 在 $R \to \infty$ 时是否构成一族单位逼近. 利用(3.1.4)我们知道 D_R 在 $[-1/2, 1/2]$ 上可积, 积分值为 1. 我们很容易证明, $\|D_R\|_{L^1} \approx \log R$ $(R \to \infty)$, 因此在定义2.2.7中的条件 (1) 不被满足. 故 $\{D_R\}_{R>0}$ 并不是 $\mathbf{T}^1$ 上的一族单位逼近, 这显著增加了研究 Fourier 级数的复杂性. 由此可得 $\|D_R^n\|_{L^1} \approx (\log R)^n$, 故函数族 $\{D_R^n\}_{R>0}$ 也不是 $\mathbf{T}^n$ 上的单位逼近.

分析学中的一个经典现象是, 序列的平均比原序列收敛性更好, 这个事实促使 Fejér 与 Cesàro 独立地考虑了一维 Dirichlet 核的算术平均, 也即:

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1}[D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_N(x)]. \tag{3.1.5}$$

我们有下面关于核 F_N 的恒等式:

$$F_N(x) = \sum_{j=-N}^{N} \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e^{2\pi i j x} = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)}\right)^2, \quad \forall x \in \mathbf{T}^1.$$

因此我们有 $\widehat{F_N}(m) = 1 - \frac{|m|}{N+1}$ 对 $|m| \le N$ 成立. 对其他 $m \in \mathbb{Z}$, 有 $\widehat{F_N}(m) = 0$.

简单地计算即可证明上面的结果, 我们不加赘述.

定义 3.1.5. 设 N 为非负整数, 我们称由(3.1.5)给出的 $\mathbf{T}^1$ 上的函数 F_N 为 *Fejér* 核.

$\mathbf{T}^n$ 上的 Fejér 核被定义为一维 Fejér 核的乘积, 或是 Dirichlet 核的乘积平均. 准确的公式为 $F_N^1 = F_N(x)$, 且

$$F_N^n(x_1, ..., x_n) = \prod_{j=1}^n F_N(x_j) = \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N D_k(x_j)\right) = \frac{1}{(N+1)^n} \sum_{0 \le k_i \le N} D_{k_1}(x_1) \cdots D_{k_n}(x_n).$$

注意 F_N^n 是一个 nN 次的三角多项式.

由前面证明的关于 F_N 的恒等式, 对任意 $N \ge 0$ 有:

$$F_N^n(x_1, ..., x_n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n, |m_j| \le N} \left(1 - \frac{|m_1|}{N+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|m_n|}{N+1}\right) e^{2\pi i m \cdot x} \tag{3.1.6}$$

$$= \frac{1}{(N+1)^n} \prod_{j=1}^n \left(\frac{\sin(\pi(N+1)x_j)}{\sin(\pi x_j)}\right)^2, \tag{3.1.7}$$

因此 $F_N^n \ge 0$. 注意 $F_0^n(x) = 1$ 对所有 $x \in \mathbf{T}^n$ 成立, 且 $F_N^n(0) = (N+1)^n$.

命题 3.1.6. *Fejér 核构成的函数族 $\{F_N^n\}_{N\geq 0}$ 是 $\mathbf{T}^n$ 上的单位逼近.*

证明. 因为 $F_N^n \geq 0$, 由(3.1.6)有

$$\|F_N^n\|_{L^1} = \int_{\mathbf{T}^n} F_N^n \,\mathrm{d}x = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbf{T}} F_N(x_j)\,\mathrm{d}x_j = 1.$$

因此单位逼近的条件 (1) 和 (2) 成立 (见定义2.2.7). 我们利用(3.1.7)来证明条件 (3). 注意到 $|t| \leq \frac{\pi}{2}$ 时 $1 \leq \frac{|t|}{\sin|t|} \leq \frac{\pi}{2}$, 有

$$F_N(x) \leq \frac{1}{N+1}\left(\frac{1}{|\sin(\pi x)|}\right)^2 \leq \frac{1}{N+1}\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{|\pi x|}\right)^2 = \frac{1}{4(N+1)|x|^2},\ \forall |x| \leq \frac{1}{2}.$$

这蕴含着对 $\delta > 0$, 我们有:

$$\int_{\delta\leq|x|\leq\frac{1}{2}} F_N(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{4(N+1)}\int_{\delta\leq|x|\leq\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{4(N+1)\delta^2} \to 0\ (N\to\infty)$$

对高维情况, 给定 $x = (x_1, ..., x_n) \in [-1/2, 1/2]^n$ 且 $|x| \geq \delta$, 则存在 $j \in \{1, ..., n\}$ 使得 $|x_j| \geq \delta/\sqrt{n}$, 于是下面的估计证明了我们的断言:

$$\int_{x\in\mathbf{T}^n,|x|\geq\delta} F_N^n(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{j=1}^n \int_{|x_j|\geq\frac{\delta}{\sqrt{n}}} F_N(x_j)\,\mathrm{d}x_j \prod_{k\neq j}\int_{\mathbf{T}^1} F_N(x_k)\,\mathrm{d}x_k \leq \frac{n}{4(\delta/\sqrt{n})^2}\frac{1}{N+1} \to 0.$$

□

3.2 用 Fourier 级数表示函数

在这一节中, 我们开始初步考虑如何用 Fourier 级数表示原函数的问题.

由 Fejer 核, 我们能得到下面的结果:

命题 3.2.1. *三角多项式集在 $L^p(\mathbf{T}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$ 中稠密.*

证明. 给定 $f \in L^p(\mathbf{T}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$, 考虑 $f * F_N^n$, 则它是三角多项式. 定理2.2.9的 (1) 指出 $f * F_N^n$ 在 L^p 中收敛到 f. □

推论 3.2.2 (三角多项式版本的 Weierstrass 逼近定理)**.** *每个环面上的连续函数都是某些三角多项式的一致极限.*

证明. 因为 $\mathbf{T}^n$ 是紧集且 f 在上面连续, 由定理2.2.9的第二部分知 $f * F_N^n$ 一致收敛到 f. 同样的, 有 $f * F_N^n$ 是三角多项式, 因此得到结论. □

3.2.1 部分和与 Fourier 反演

Fourier 级数的收敛性问题相当重要, 我们在这一章中会给出一些结果.

定义 3.2.3. *设 $R \geq 0$ 及 $N \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. 我们称*

$$(f * D_R^n)(x) = \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n \\ |m_j|\leq R}} \widehat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot x}$$

为 f 的 Fourier 级数的方体型部分和.

$$(f * F_N^n)(x) = \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n \\ |m_j|\leq N}} \left(1 - \frac{|m_1|}{N+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{|m_n|}{N+1}\right)\widehat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot x}$$

被称为 f 的方体型 Cesàro 平均 (或 Fejér 平均).

我们现在先考虑 Fourier 系数是否唯一决定函数. 答案是肯定的

命题 3.2.4. *若 $f, g \in L^1(\mathbf{T}^n)$ 满足 $\widehat{f}(m) = \widehat{g}(m)$ $(m \in \mathbb{Z}^n)$, 则 $f = g$ a.e.*

证明. 由线性性, 不妨假设 $g = 0$, 若 $\widehat{f}(m) = 0$ 对所有 $m \in \mathbb{Z}^n$ 成立, 则定义3.2.3表明 $F_N^n * f = 0$ $(N \in \mathbb{Z}^+)$. 性质3.1.6表明 $\{F_N^n\}_{N \in \mathbb{Z}^+}$ 在 $N \to +\infty$ 时是单位逼近, 因此

$$\|f - F_N^n * f\|_{L^1} \to 0 \ (N \to \infty)$$

于是 $\|f\|_{L^1} = 0$, 于是 $f = 0$ (a.e.) □

一个有用的推论如下:

命题 3.2.5 (Fourier 反演). *设 $f \in L^1(\mathbf{T}^n)$ 且*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(m)| < \infty.$$

则

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x}, \ \text{a.e.} \tag{3.2.1}$$

也即 f 几乎处处等于一个连续函数.

证明. 容易验证(3.2.1)两边的函数都是良定义的且有相同的 Fourier 系数, 于是性质3.2.4表明它们几乎处处相等. 此外(3.2.1)右边的函数是处处连续的. □

关于此命题, 可以进一步参见3.3.3的内容.

3.2.2 平方可和函数的 Fourier 级数

令 H 是配备复内积 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ 的 Hilbert 空间. 一个子集 E 被称为标准正交集当且仅当 $\langle f | g \rangle = 0$ $(f \neq g)$ 且 $\langle f | f \rangle = 1$ $(f \in E)$. 一个完备标准正交系是一个 H 的子集, 额外满足条件: 每个和其中所有元素都正交的向量是零向量. 我们将正交系的基本性质总结在下面的性质中:

命题 3.2.6. *令 H 是可分的 Hilbert 空间且 $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是一族正交系, 则下面的事实等价:*

1. *$\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是完备正交系.*
2. *对任意 $f \in H$, 我们有*
$$\|f\|_H^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\langle f | \varphi_k \rangle|^2.$$
3. *对任意 $f \in H$, 我们有*
$$f = \lim_{N \to \infty} \sum_{|k| \leq N} \langle f | \varphi_k \rangle \varphi_k,$$
其中右边的级数在 H 中收敛.

现在我们考虑 Hilbert 空间 $L^2(\mathbf{T}^n)$, 配备内积

$$\langle f | g \rangle = \int_{\mathbf{T}^n} f(t) \overline{g(t)} \, dt.$$

令 φ_m 为以 $m \in \mathbb{Z}^n$ 为指标的函数: $\xi \mapsto e^{2\pi i m\cdot\xi}$. 下面的等式给出了 $\{\varphi_m\}$ 的标准正交性:

$$\int_{[0,1]^n} e^{2\pi i m\cdot x}\overline{e^{2\pi i k\cdot x}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1 & m = k \\ 0 & m \neq k. \end{cases}$$

$\{\varphi_m\}$ 的完备性也是显然的, 因为 $\langle f|\varphi_m\rangle = \widehat{f}(m)$, 故性质3.2.4保证了 $\langle f|\varphi_m\rangle = 0$ $(m \in \mathbb{Z}^n)$ 蕴含 $f = 0$ a.e.

下面的结果是性质3.2.6的推论:

命题 3.2.7. *下面的等式对 $f, g \in L^2(\mathbf{T}^n)$ 成立:*

1. *Plancherel 恒等式:*
$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(m)|^2.$$

2. *函数 f 几乎处处等于下面序列的 $L^2(\mathbf{T}^n)$ 极限:*
$$\lim_{M\to\infty} \sum_{|m|\le M} \widehat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot t}.$$

3. *Parseval 关系:*
$$\int_{\mathbf{T}^n} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(m)\overline{\widehat{g}(m)}.$$

4. *映射 $f \mapsto \{\widehat{f}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ 是一个 $L^2(\mathbf{T}^n)$ 到 ℓ^2 的等距同构.*

5. *对所有 $k \in \mathbb{Z}^n$ 有*
$$\widehat{fg}(k) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(m)\widehat{g}(k-m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}(k-m)\widehat{g}(m).$$

证明. (1) 和 (2) 是性质3.2.6中对应叙述的直接推论. 注意由 Cauchy-Schwarz 不等式 (3) 的两边都是收敛的. Parseval 关系 (3) 从 Plancherel 恒等式和极化恒等式立得.

下面我们来证明 (4). 我们已经知道映射 $f \mapsto \{\widehat{f}(m)\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ 是单等距. 现在只用证明它是满的. 对任意平方可和的序列 $\{a_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$, 我们定义:

$$f_N(t) = \sum_{|m|\le N} a_m e^{2\pi i m\cdot t}.$$

注意 f_N 是 $L^2(\mathbf{T}^n)$Cauchy 列, 因此它收敛到某个 $f \in L^2(\mathbf{T}^n)$. 我们有 $\widehat{f}(m) = a_m$ $(m \in \mathbb{Z}^n)$. 最后 (5) 是这里的 (3) 和性质3.1.2的 (6) 与 (3) 的推论. □

3.3 Fourier 系数的衰减

这一节我们来研究函数的光滑性与其 Fourier 系数衰减之间的关系.

3.3.1 可积函数 Fourier 系数的衰减

我们从经典的结果开始: 任意可积函数的 Fourier 系数在无穷处趋于 0.

命题 3.3.1 (Riemann-Lebesgue 引理)**.** *给定 $L^1(\mathbf{T}^n)$ 中的函数 f, 我们有 $|\widehat{f}(m)| \to 0$ $(|m| \to \infty)$.*

证明. 给定 $f \in L^1(\mathbf{T}^n)$ 及 $\varepsilon > 0$, 而 P 为三角多项式, 使得 $\|f-\|_{L^1} < \varepsilon$. 若 $|m| > \deg P$, 则 $\widehat{P}(m) = 0$, 且:

$$|\widehat{f}(m)| = |\widehat{f}(m) - \widehat{P}(m)| \leq \|f - P\|_{L^1} < \varepsilon.$$

这表明 $|\widehat{f}(m)| \to 0$ $(|m| \to \infty)$. □

自然地有几个问题出现: 一个 L^1 函数的 Fourier 系数可以以多快的速度趋于 0? 对函数的额外光滑性条件是否蕴含 Fourier 系数的更快衰减? 这样的衰减可以用函数的光滑性定量表达吗?

第一个答案的问题如下: 一个 L^1 函数的 Fourier 级数可以任意慢地趋于 0, 也即, 慢于任意给定的速率.

定理 3.3.2. *令 $(d_m)_{m\in\mathbb{Z}^n}$ 为正实数的序列, 满足 $d_m \to 0$ $(|m| \to \infty)$. 则存在函数 $f \in L^1(\mathbf{T}^n)$ 使得 $\widehat{f}(m) \geq d_m$ 对任意 $m \in \mathbb{Z}^n$ 成立. 也即, 给定任意的衰减率, 都存在环面上的可积函数, 其 Fourier 系数的衰减更慢.*

3.3.2 光滑函数 Fourier 系数的衰减

我们接下来研究具有一定光滑性的函数的 Fourier 系数的衰减. 这一小节中我们会知道 Fourier 系数的衰减以相当精确的量化方式反映了函数的光滑性. 反过来, 我们可以从 Fourier 系数的衰减来推断函数的光滑性.

定义 3.3.3. *给定 $0 < \gamma < 1$ 和 $\mathbf{T}^n$ 上的函数 f, 定义 f 的 γ 阶齐次 Lipschitz 半范数为:*

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\gamma} = \sup_{\substack{x,h\in\mathbf{T}^n \\ h\neq 0}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|^\gamma}.$$

并定义 γ 阶齐次 Lipschitz 空间为:

$$\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbf{T}^n) = \{f : \mathbf{T}^n \to \mathbb{C} |\ \|f\|_{\dot{\Lambda}_\gamma} < \infty\}.$$

在 $\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbf{T}^n)$ 中的函数称为 γ 阶齐次 Lipschitz 函数.

对非齐次范数有类似的定义:

定义 3.3.4. *给定 $0 < \gamma < 1$ 和 $\mathbf{T}^n$ 上的函数 f, 定义 f 的 γ 阶非齐次 Lipschitz 范数为:*

$$\|f\|_{\Lambda_\gamma} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{\substack{x,h\in\mathbf{T}^n \\ h\neq 0}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|^\gamma} = \|f\|_{L^\infty} + \|f\|_{\dot{\Lambda}_\gamma}.$$

同样定义 γ 阶非齐次 Lipschitz 空间为:

$$\Lambda_\gamma(\mathbf{T}^n) = \{f : \mathbf{T}^n \to \mathbb{C} |\ \|f\|_{\Lambda_\gamma} < \infty\}.$$

在 $\Lambda_\gamma(\mathbf{T}^n)$ 中的函数称为 γ 阶非齐次 Lipschitz 函数.

下面的定理表明了函数的光滑性是如何反映在 Fourier 系数的衰减上的.

定理 3.3.5. *令 $s \in \mathbb{Z}$ 且 $s \geq 0$.*

1. *假设 $\partial^\alpha f$ 对任意 $|\alpha| \leq s$ 存在且可积, 则:*

$$|\widehat{f}(m)| \leq \left(\frac{\sqrt{n}}{2\pi}\right)^s \frac{\max_{|\alpha|=s} |\widehat{\partial^\alpha f}(m)|}{|m|^s}, \qquad m \neq 0,$$

因此:

$$|\widehat{f}(m)|(1+|m|^s)\to 0\ (|m|\to\infty).$$

特别地, 这对 $\mathscr{C}^s(\mathbf{T}^n)$ 中的函数成立.

2. 假设 $\partial^\alpha f$ 对任意 $|\alpha|\le s$ 存在, 且对 $|\alpha|=s$ 有 $\partial^\alpha f\in\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbf{T}^n)$ $(0<\gamma<1)$, 则:

$$|\widehat{f}(m)|\le\frac{(\sqrt{n})^{s+\gamma}}{(2\pi)^s2^{\gamma+1}}\frac{\max\limits_{|\alpha|=s}\|\partial^\alpha f\|_{\dot{\Lambda}_\gamma}}{|m|^{s+\gamma}},\qquad m\neq 0.$$

证明. 证明的关键是利用环面上三角函数的周期性, 将定义 Fourier 系数的积分改写, 创造出差的形式, 再利用 Lipschitz 空间的性质进行估计. □

立刻有下面的推论:

推论 3.3.6. 令 $s\in\mathbb{Z}$ 且 $s\ge 0$.

1. 假设 $\partial^\alpha f$ 对任意 $|\alpha|\le s$ 存在且可积, 则存在常数 $c_{n,s}$ 使得:

$$|\widehat{f}(m)|\le c_{n,s}\frac{\max(\|f\|_{L^1},\max_{|\alpha|=s}\|\partial^\alpha\|_{L^1})}{(1+|m|)^s}$$

2. 假设 $\partial^\alpha f$ 对任意 $|\alpha|\le s$ 存在, 且对 $|\alpha|=s$ 有 $\partial^\alpha f\in\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbf{T}^n)$ $(0<\gamma<1)$, 则存在常数 $c'_{n,s}$ 使得:

$$|\widehat{f}(m)|\le c'_{n,s}\frac{\max(\|f\|_{L^1},\max_{|\alpha|=s}\|\partial^\alpha\|_{\dot{\Lambda}_\gamma})}{(1+|m|)^{s+\gamma}}.$$

实际上, 定理3.3.5和推论3.3.6的结论对 $\gamma=1$ 也成立, 此时空间 $\dot{\Lambda}_\gamma$ 应替换为空间 Lip1, 配备半范数

$$\|f\|_{\mathrm{Lip1}}=\sup_{x,h\in\mathbf{T}^n h\neq 0}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|}.$$

这里我们的记号一定程度上缺少了一致性, 因为在 Lipschitz 空间的理论中, 记号 $\dot{\Lambda}_1$ 一般用于表示配备下面半范数的空间:

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\gamma}=\sup_{x,h\in\mathbf{T}^n h\neq 0}\frac{|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)|}{|h|}.$$

下面的命题是定理3.3.5的某种逆命题. 它说明, Fourier 级数衰减的速度也可以反过来推知函数的光滑性.

命题 3.3.7. 令 $s>0$ 而 f 为环上的可积函数, 满足:

$$|\widehat{f}(m)|\le C(1+|m|)^{-s-n},\ \forall m\in\mathbb{Z}^n. \tag{3.3.1}$$

则 f 有全体 $|\alpha|\le[[s]]$ 阶的导数, 且对 $0<\gamma<s-[[s]]$, 和任意满足 $|\alpha|=[[s]]$ 的多重指标, 有 $\partial^\alpha f\in\dot{\Lambda}_\gamma$.

对于有界变差函数, 其 Fourier 系数也有很好的估计:

定义 3.3.8. 若一个 $\mathbf{T}^1$ 上的可测函数 f 处处有定义, 且

$$\mathrm{Var}(f)=\sup\left\{\sum_{j=1}^M|f(x_j)-f(x_{j-1})|:0=x_0<x_1<\cdots<x_M=1\right\}<\infty,$$

(其中上确界关于区间 $[0,1]$ 的全体分划取) 就称其为有界变差函数. 表达式 $\mathrm{Var}(f)$ 称为 f 的全变差. $\mathbf{T}^1$ 上全体有界变差函数的类记为 $BV(\mathbf{T}^1)$.

每个有界变差函数可以表示为两个 (不一定严格) 单增函数的差, 因此几乎处处存在导数. 此外, 对有界变差函数 f, 关于 $\mathrm{d}f$ 的 Lebesgue-Stieltjes 积分是良定义的.

命题 3.3.9. *若 $f \in BV(\mathbf{T}^1)$, 则:*

$$|\widehat{f}(m)| \leq \frac{\mathrm{Vra}(f)}{2\pi|m|}, \quad m \neq 0.$$

下面的表格 (表3.1) 总结了 Fourier 系数关于空间函数光滑性的衰减. 在表格中, 我们用 $\mathscr{C}^{s,\gamma}$ 表示 $\mathbf{T}^n$ 上满足全体 s 阶导数都在 $\Lambda_\gamma(\mathbf{T}^n)$ $(0 < \gamma < 1)$ 中的 $\mathscr{C}^s$ 函数.

表 3.1: 函数的光滑性和 Fourier 级数衰减之间的关系 (其中 $0 < \gamma < 1, 1 < p < 2, k \in \mathbb{Z}$.)

空间	Fourier 系数的序列
$L^1(\mathbf{T}^n)$	$o(1)$
$L^p(\mathbf{T}^n)$	$\ell^{p'}(\mathbb{Z}^n)$
$L^2(\mathbf{T}^n)$	$\ell^2(\mathbb{Z}^n)$
$\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbf{T}^n)$	$O(\|m\|^{-\gamma})$
$BV(\mathbf{T}^1)$	$O(\|m\|^{-1})$
$\mathscr{C}^k(\mathbf{T}^n)$	$o(\|m\|^{-k})$
$\mathscr{C}^{k,\gamma}(\mathbf{T}^n)$	$O(\|m\|^{-k-\gamma})$
$\mathscr{C}^\infty(\mathbf{T}^n)$	$o(\|m\|^{-N}),\ \forall N > 0$

3.3.3 具有绝对可和 Fourier 系数的函数

定义 3.3.10. *我们称环面上的可积函数 f 有绝对收敛的 Fourier 级数, 若:*

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(m)| < \infty.$$

我们用 $\mathbb{A}(\mathbf{T}^n)$ 表示环面 $\mathbf{T}^n$ 上全体 Fourier 级数绝对收敛的可积函数构成的空间, 并在 $\mathbb{A}(\mathbf{T}^n)$ 上引入范数

$$\|f\|_{\mathbb{A}(\mathbf{T}^n)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\hat{f}(m)|.$$

下面的定理可以方便地判断函数是否在 $\mathbb{A}(\mathbf{T}^n)$ 中.

定理 3.3.11. *假设 f 是 $\mathscr{C}^{[n/2]}(\mathbf{T}^n)$ 中的函数, 并且其全体 $[\frac{n}{2}]$ 阶的导数都在 $\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbf{T}^n)$ $(\{\frac{n}{2}\} < \gamma < 1)$ 中, 则 f 在 $\mathbb{A}(\mathbf{T}^n)$ 中, 且*

$$\|f\|_{\mathbb{A}(\mathbf{T}^n)} \leq |\widehat{f}(0)| + C(n,\gamma) \sup_{|\alpha|=[\frac{n}{2}]} \|\partial^\alpha f\|_{\dot{\Lambda}_\gamma(\mathbf{T}^n)},$$

其中 $C(n,\gamma)$ 是依赖于 n, γ 的常数.

最初 Bernstein 在 [3] 中得到了此定理 $n = 1$ 的情况, 即满足 α $(\frac{1}{2} < \alpha \leq 1)$ 阶 Hölder 条件, 则其也在 $\mathbb{A}(\mathbf{T}^n)$ 中. 这里的 $\frac{1}{2}$ 是最佳的, 我们可以通过多种方式构造出相应的反例. 例如, 著名的 Hardy-Littlewood 函数, 以及 Rudin-Shapiro 多项式.

实际上我们还有如下结论: 若 f 满足 β $(0 < \beta \leq 1)$ 阶 Hölder 条件, 并且是有界变差函数, 则它也在 $\mathbb{A}(\mathbf{T}^1)$ 中.

对 $f,g\in\mathbb{A}(\mathbf{T}^n)$, 利用定理3.2.5的表示, 可以知道下面的式子几乎处处成立:

$$f(x)g(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}\widehat{f}(k)e^{2\pi ik\cdot x}\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}\widehat{g}e^{2\pi il\cdot x}=\sum_{k,l\in\mathbb{Z}^n}\widehat{f}(k)\widehat{g}(l)e^{2\pi(k+l)\cdot x}=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\left(\sum_{k+l=m}\widehat{f}(k)\widehat{g}(l)\right)e^{2\pi m\cdot x}.$$

因此有:

$$\|fg\|_{\mathbb{A}(\mathbf{T}^n)}=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\left|\sum_{k+l=m}\widehat{f}(k)\widehat{g}(l)\right|\le\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}|\widehat{f}(k)|\sum_{l\in\mathbb{Z}^n}|\widehat{g}(l)|=\|f\|_{\mathbb{A}(\mathbf{T}^n)}\|g\|_{\mathbb{A}(\mathbf{T}^n)}<\infty.$$

于是 $fg\in\mathbb{A}(\mathbf{T}^n)$. 可以证明 $\varphi:\mathbb{A}(\mathbf{T}^n)\to\ell^1(\mathbb{Z}^n)$ $f\mapsto\{\widehat{f}(n)\}$ 是一个同构, 因此 $\mathbb{A}(\mathbf{T}^n)$ 在点态乘法下构成一个 Banach 代数 (一般称为 Wiener 代数). 关于 $\mathbb{A}(\mathbf{T}^1)$, 我们还有下面的定理:

定理 3.3.12 (Wiener-Lévy). *若 $f\in\mathbb{A}(\mathbf{T}^1)$ 且 F 在 f 的值域内解析, 则 $F\circ f\in\mathbb{A}(\mathbf{T})$.*

最初 Wiener 在 [58] 中证明了若 $f\neq 0$ 且 $f\in\mathbb{A}(\mathbf{T}^1)$, 则 $1/f\in\mathbb{A}(\mathbf{T}^n)$. Lévy 在 [32] 中将其推广到了上面的形式. 利用 Banach 代数的理论, Gelfand 证明了:

定理 3.3.13 (Gelfand). *$\mathbb{A}(\mathbf{T})$ 的极大理想必然形如 $M_x=\{f\in\mathbb{A}(\mathbf{T})|\ f(x)=0\}$.*

实际上这个定理和 Wiener 最初的定理等价.

3.4 Fourier 级数的收敛

这一节我们来研究环面上函数的方体型部分和与 Fejér 平均的点态收敛行为.

3.4.1 Fejér 平均下的点态收敛

我们在2.1节中已经知道 Fejér 核是单位逼近, 这表明 $\mathbf{T}^n$ 上 L^p $(1\le p<\infty)$ 函数的 Fejér(或 Cesàro) 平均在 L^p 中收敛于自身. 此外, 若 f 在 x_0 处连续, 则定理2.2.9的 (2) 表明平均 $(F_N^n*f)(x_0)$ 在 $N\to\infty$ 时收敛到 $f(x_0)$. 尽管这是一个令人满意的结果, 我们自然要问更一般的函数有何结论. 利用 Fejér 核的性质, 我们可以得到下面关于 Fejér 平均收敛性的一维结果:

定理 3.4.1 (Fejér). *若函数 $f\in L^1(\mathbf{T}^1)$ 在点 x_0 处存在左右极限, 分别记为 $f(x_0-)$ 与 $f(x_0+)$, 则*

$$(F_N*f)(x_0)\to\frac{1}{2}\big(f(x_0-)+f(x_0+)\big)\ (N\to\infty).\tag{3.4.1}$$

特别地, 对有界变差函数此式成立.

证明. 定理的证明是对积分进行分段放缩的标准手法, 我们略去.

有界变差函数是两个单增函数的差, 而单增函数处处存在左右极限, 因此(3.4.1)对它们成立. □

我们接下来讨论上面结果的一个基本但有用的应用.

命题 3.4.2. *令 $x_0\in\mathbf{T}^1$ 而 f 为 $\mathbf{T}^1$ 上的复值函数. 假设 f 在 $x\to x_0$ 时有左右极限, 并且部分和 (Dirichlet 平均)$(D_N*f)(x_0)$ 收敛, 则:*

$$(D_N*f)(x_0)\to\frac{1}{2}\big(f(x_0+)+f(x_0-)\big)\ (N\to\infty).$$

证明. 若 $(D_N * f)(x_0) \to L(x_0)$ $(N \to \infty)$, 则:

$$(F_N * f)(x_0) = \frac{(D_0 * f)(x_0) + (D_1 * f)(x_0) + \cdots + (D_N * f)(x_0)}{N+1} \to L(x_0)\ (N \to \infty).$$

但定理3.4.1表明 $(F_N * f)(x_0) \to \frac{1}{2}\big(f(x_0-) + f(x_0+)\big)$ $(N \to \infty)$, 于是

$$L(x_0) = \frac{1}{2}\big(f(x_0-) + f(x_0+)\big),$$

即 $(D_N * f)(x_0) \to \frac{1}{2}\big(f(x_0-) + f(x_0+)\big)$ $(N \to \infty)$. □

此命题在知道 Fourier 级数收敛时尤其有用.

3.4.2 Fejér 平均下的几乎处处收敛

我们已经知道一个性质相对较好的函数 (例如有界变差函数) 的 Fejér 平均处处收敛. 对一个一般的可积函数, 其 Fejér 平均如何表现呢? 因为 Fejér 核是单位逼近, 且满足很好的估计, 下面的结果并不意外:

定理 3.4.3. *(1) 若 $f \in L^1(\mathbf{T}^n)$, 令*

$$\mathscr{H}(f) = \sup_{N \in \mathbb{Z}_+} |f * F_N^n|.$$

则 $\mathscr{H}$ 将 $L^1(\mathbf{T}^n)$ 映到 $L^{1,\infty}(\mathbf{T}^n)$, 且将 $L^p(\mathbf{T}^n)$ $(1 < p \le \infty)$ 映到自身.

(2) 对任意 $f \in L^1(\mathbf{T}^n)$, 我们有 $N \to \infty$ 时

$$(F_N^n * f) \to f\ a.e.$$

证明. 令 $\Phi(x_1, ..., x_n) = (1 + |x_1|^2)^{-1} \cdots (1 + |x_n|^2)^{-1}$, 且对 $\varepsilon > 0$ 有 $\Phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\Phi(\varepsilon^{-1}x)$, 我们可以从 $F_N(t)$ 的定义式证明 (首先证明一维情况, 高维情况可以直接推得):

$$|F_N^n(y)| \le \left(\frac{\pi^2}{2}\right)^n \Phi_\varepsilon(y)\ (\varepsilon = (N+1)^{-1}),\ \forall y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^n.$$

令 f 为 $\mathbf{T}^n$ 上周期函数, 其在 $\mathbb{R}^n$ 上的周期延拓为 f_0, 于是:

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(f)(x) &= \sup_{N>0} \left| \int_{\mathbf{T}^n} F_N^n(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y \right| \\ &\le (\frac{\pi^2}{2})^n \sup_{\varepsilon>0} \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n} |\Phi_\varepsilon(y)||f_0(x-y)|\,\mathrm{d}y \\ &\le 5^n \sup_{\varepsilon>0} \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi_\varepsilon(y)||(f_0\chi_Q)(x-y)|\,\mathrm{d}y = 5^n \mathscr{G}(f_0\chi_Q)(x)\end{aligned} \tag{3.4.2}$$

其中 $Q = [-1, 1]^n$ 且 $\mathscr{G}$ 是定义如下的极大算子:

$$\mathscr{G}(h) = \sup_{\varepsilon>0} |h| * \Phi_\varepsilon,\ \forall h \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

由引理知道 $\mathscr{G}$ 将 L^1 映到 $L^{1,\infty}$, 于是(3.4.2)表明:

$$\|\mathscr{H}(f)\|_{L^{1,\infty}(\mathbf{T})} \le 5^n \|\mathscr{G}(f_0\chi_Q)\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)} \le 5^n C \|f_0\chi_Q\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = C' \|f\|_{L^1(\mathbf{T}^n)}.$$

于是 $\mathscr{H}$ 是弱 (1,1) 型的, 而 L^∞ 的不等式是平凡的, 引用 Marcinkiewicz 插值定理2.3.1就完成了证明.

现在注意到对 $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{T}^n)$, 定理2.2.9以及命题3.1.6表明 $F_N^n * f$ 在 $\mathbf{T}^n$ 上一致收敛到 f. 又因为 $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{T}^n)$ 在 $L^1(\mathbf{T}^n)$ 中稠密, 利用定理2.4.7即得几乎处处收敛. □

引理 3.4.4. 令 $\Phi(x_1,...,x_n)=(1+|x_1|^2)^{-1}\cdots(1+|x_n|^2)^{-1}$, 且对 $\varepsilon>0$ 有 $\Phi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\Phi(\varepsilon^{-1}x)$, 则极大算子

$$\mathscr{G}(f)=\sup_{\varepsilon>0}|f|*\Phi_\varepsilon$$

将 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 映到 $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$.

证明. 这里函数的形式较为简单, 我们可以利用二进方体分段进行估计. 但过程繁琐, 我们略去. □

历史上, 定理3.4.3的 (2) 中 $n=1$ 的情形由 Lebesgue 证明, $n=2$ 的情形由于 Marcinkiewicz 和 Zygmund 在 [36] 中证明. 他们的证明同样可以拓展到高维. 这里证明利用的引理3.4.4由 Stein 在 [47] 中证明. Tao 也给出了该引理的证明.

3.4.3 Dirichlet 意义下的点态收敛

下面是一些 Fourier 级数点态收敛的判别法.

定理 3.4.5. 1. *(Dini)* 令 f 为 $\mathbf{T}^1$ 上的可积函数, 而 t_0 为 $\mathbf{T}^1$ 的点, 使得 $f(t_0)$ 良定义, 且

$$\int_{|t|\le\frac{1}{2}}\frac{|f(t+t_0)-f(t_0)|}{|t|}\,\mathrm{d}t<\infty$$

则 $(D_N*f)(t_0)\to f(t_0)\ (N\to\infty)$.

2. *(Tonelli)* 若 f 为 $\mathbf{T}^n$ 上的可积函数, 而 $a=(a_1,...,a_n)\in\mathbf{T}^n$, 使 f 在 a 处良定义, 且

$$\int_{|x_1|\le\frac{1}{2}}\cdots\int_{|x_n|\le\frac{1}{2}}\frac{|f(x+a)-f(x)|}{|x_1|\cdots|x_n|}\,\mathrm{d}x_n\cdots\mathrm{d}x_1<\infty.$$

则 $(D_N^n*f)(a)\to f(a)\ (N\to\infty)$.

证明. 证明的关键是利用条件拆分积分, 再使用 Riemann-Lebesgue 引理. □

由此定理我们可以得到 Riemann 的局部化原理 (以及其高维推广):

推论 3.4.6. 1. 令 f 为 $\mathbf{T}^1$ 上的可积函数, 在开区间 I 上为 0, 则 D_N*f 在 I 上收敛于 0.

2. 令 $a=(a_1,...,a_n)\in\mathbf{T}^n$ 且 f 为 $\mathbf{T}^n$ 上的可积函数, 满足在

$$\{x=(x_1,...,x_n)\in\mathbf{T}^n:\exists j,\ \text{s.t.}\ |x_j-a_j|<\delta_j\}\ (0<\delta_j<1/2)$$

上为 0, 则 $(D_N^n*f)(a)\to f(a)\ (N\to\infty)$.

这个结果初看令人惊讶, 因为我们知道一个函数的 Fourier 系数从定义上看是由函数的全局性质所决定的. 但这个定理却表明, 实际上 Fourier 级数的收敛只是一个局部性质.

利用这个判别法, 我们还能得到下面更简单的判别准则:

推论 3.4.7. 令 $a\in\mathbf{T}^n$, 而 $f\in L^1(\mathbf{T}^n)$ 对某些 $C,\varepsilon_j>0$ 满足

$$|f(x)-f(a)|\le C|x_1-a_1|^{\varepsilon_1}\cdots|x_n-a_n|^{\varepsilon_n},\ \forall x\in\mathbf{T}^n,$$

则方体型部分和 $(D_N^n*f)(a)$ 收敛于 $f(a)$.

推论 3.4.8 (Dirichlet). 若 f 为 $\mathbf{T}^1$ 上函数, 在 $a\in\mathbf{T}^1$ 处可微, 则 $(D_N*f)(a)\to f(a)$.

由上面给出的这些判别法可知 $\mathcal{C}_\alpha(\mathbf{T})$ 中函数 Fourier 级数一致收敛, $BV(\mathbf{T})$ 中函数 Fourier 级数处处收敛.

3.4.4 Tauber 型定理

我们已经知道通常意义下的级数收敛蕴含其平均序列收敛, Fejér 和 Cesàro 意识到了这一点并将其用于 Fourier 级数收敛的研究中. Abel 证明了若级数在通常意义下收敛, 则其对应的幂级数在 $x \to 1^-$ 时收敛到相同的极限. 实际上 Cesàro 意义下的收敛也蕴含 Abel 意义下的收敛. Fourier 级数的 Abel 平均对应了 Poisson 核, 我们知道它也是好核. 一般来说, 这些定理的逆都不成立, 但在对数列加以限制之后有较好的结果. 例如, Tauber 在 [52] 中证明了 $a_k = o(k^{-1})$ 的条件和 Abel 意义下的收敛蕴含原级数收敛. Hardy 在 [15] 中证明了 $a_k = \mathcal{O}(k^{-1})$ 和 Cesàro 平均的情况 (我们用 s_k 表示级数的前 k 项和, 而 σ_N 表示前 n 项 s_k 的平均):

定理 3.4.9. *(1) 设复序列 $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ 满足 $\sigma_N \to L$ $(N \to \infty)$, 且 $|ka_k| \le M < \infty$, 则 $s_k \to L$.*

(2) 令 X 为非空集, 而 X 上有复函数列 $\{a_k(x)\}$, $\sigma_N(x)$ 一致收敛到 $L(x)$, 且 $\sup_{k\ge 0, x\in X} |ka_k| \le M < \infty$, 则 $s_k(x)$ 一致收敛于 $L(x)$.

其中 (1) 中的条件还可以减弱为 $ka_k \ge -C$, 这是是 Landau 得到的结果. 实际上, 我们有下面关于 Abel 和的更强结论:

定理 3.4.10. *若 $\{c_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 满足 $nc_n \ge -M$ $(M > 0)$, 且其 Abel 和为 s, 则其通常意义下的和也是 s.*

这就是 Hardy-Littlewood 在 1914 年证明的定理. 利用 Tauber 型定理, 我们可以将关于 Fourier 级数对 Abel 求和与 Cesàro 和的结果在较弱的限制条件下推到常义的和上.

3.4.5 Dirichlet 意义下的点态发散

前面的小节中我们证明了 Fourier 级数收敛的结果, 而这一节我们给出一些发散的例子.

我们已经提到过, Du Bois-Reymond 构造了一个连续函数, 其 Fourier 级数在一点处不收敛. 实际上对高维情况, 类似的断言也成立.

命题 3.4.11. *1. 存在 $\mathbf{T}^1$ 上的连续函数 f, 其 Fourier 级数的部分和在 $x_0 \in \mathbf{T}^1$ 处发散, 即:*

$$\limsup_{N\to\infty} \left| \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ |m_j|\le N}} \widehat{f}(m) e^{2\pi i x_0 m} \right| = \infty.$$

2. 存在 $\mathbf{T}^n$ 上的连续函数 F 和 $x_0 \in \mathbf{T}^1$, 使得对任意 $x_2, ..., x_n \in \mathbf{T}^1$, 有

$$\limsup_{N\to\infty} \left| \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ |m_j|\le N}} \widehat{F}(m) e^{2\pi i (x_0 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n)} \right| = \infty.$$

鉴于构造的过程较为复杂, 我们不在这里复现.

利用 Banach 空间的理论我们可以避开构造的方式, 直接证明这样连续函数的存在性.

定理 3.4.12. *1. 存在 $E \subset \mathscr{C}(\mathbf{T})$ 为稠密 G_δ 集, 满足如下性质: 对任意 $f \in E$,*

$$Q_f = \{x | s^*(x) := \sup_{N\in\mathbb{Z}} |f * D_N(x)| = \infty\}$$

是 $\mathbb{R}^1$ 中的稠密 G_δ 集合. 并且, E 和 Q_f 都是不可数的.

2. 存在 $E \subset \mathscr{C}(\mathbf{T}^n)$ 为稠密 G_δ 集, 满足如下性质: 对任意 $f \in E$,

$$Q_f = \{x | S^*(f)(x) := \sup_{N \in \mathbb{Z}^n} |f * D_N^n(x)| = \infty\}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的稠密 G_δ 集合. 并且, E 和 Q_f 都是不可数的.

证明. 首先我们取 $x = 0$ 并将部分和视作一个算子, 其范数为 $\|D_N^n\|_{L^1} \approx (\log N)^n \to \infty (N \to \infty)$, 现在一致有界性原理2.5.2表明存在一个 $\mathscr{C}(\mathbf{T}^n)$ 中的 G_δ 集, 其中的每个函数都满足 $S^*(f)(x) = +\infty$. 现取可数多个点 x_i, 使其在 $\mathbf{T}^n$ 中稠密, 取这些 E_{x_i} 的交为 E. 由 Baire 纲定理2.5.1, 它也是稠密 G_δ 集合, 这就完成了证明. □

实际上我们还有下面更强的定理, 最初由 Kolmogorov 在 [27] 中证明.

定理 3.4.13. *存在 $\mathbf{T}^1$ 上的可积函数 f, 其 Fourier 级数几乎处处发散.*

之后 Kolmogorov 又在 [28] 中给出了一个处处发散的例子.

3.5 范数下收敛和共轭函数

我们知道对 $f \in L^P(\mathbf{T}^n)$, 其 Fourier 级数的 Fejer 平均在范数下收敛到 f, 这一节中, 我们研究研究 Dirichlet 平均对应的结果, 即: f 的 Fourier 级数是否在范数下收敛?

我们从一个抽象的充分必要条件开始. 在一维的情况, 我们可以把问题化简为研究圆周上的共轭函数 (与 Hilbert 变换相关). 在高维的情况, 问题更加复杂, 但我们仍能给出在方体型求和时的肯定结果.

3.5.1 范数下收敛的等价公式

现在的问题是, 对哪些指标 p $(1 \le p < \infty)$, 我们有:

$$\|D_N^n * f - f\|_{L^p(\mathbf{T}^n)} \to 0 \ (N \to \infty)$$

利用一致有界原理, 我们可以

定理 3.5.1. *对 $R > 0$ 和 $m \in \mathbb{Z}^n$, 令 $a(m, R)$ 为复数使得:*

(1) 对每个 $R > 0$, 存在 q_R 使得 $a(m, R) = 0$ 对任意 $|m| > q_R$ 成立.

(2) 存在 $M_0 < \infty$ 使得 $|a(m, R)| \le M_0$ 对所有 $m \in \mathbb{Z}^n$ 和 $R > 0$ 成立.

(3) 对每个 $m \in \mathbb{Z}^n$, 极限 $a(m, R)$ 在 $R \to \infty$ 时存在, 且 $\lim_{R \to \infty} a(m, R) = a_m$.

现在设 $1 \le p < \infty$ 并对 $f \in L^p(\mathbf{T}^n)$ 和 $x \in \mathbf{T}^n$ 定义:

$$S_R(f)(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a(m, R) \widehat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x}.$$

注意到由 (1), 这个求和是良定义的. 对 $h \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{T}^n)$ 我们定义:

$$A(h)(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m \widehat{h}(m) e^{2\pi i m \cdot x}.$$

则对任意 $f \in L^p(\mathbf{T}^n)$, 序列 $S_R(f)$ 在 L^p 中收敛到 f $(R \to \infty)$ 当且仅当存在常数 $K < \infty$ 使得:

$$\sup_{R > 0} \|S_R\|_{L^p \to L^p} \le K. \tag{3.5.1}$$

进一步, 若(3.5.1)成立, 则对同样的常数 K, 我们有:

$$\sup_{h\in\mathscr{C}^\infty, h\neq 0}\frac{\|A(h)\|_{L^p}}{\|h\|_{L^p}}\leq K, \tag{3.5.2}$$

因此 A 延拓成一个 $L^p(\mathbf{T}^n)$ 到自身的有界算子 $\tilde{A}$. 此外, 对任意的 $f\in L^p(\mathbf{T}^n)$, 我们有 $S_R(f)$ 在 L^p 中收敛到 $\tilde{A}(f)$.

证明. 若 $S_R(f)$ 在 L^p 中收敛, 则 $\|S_R(f)\|_{L^p}\leq C_f$ 对某个常数 C_f 成立 (依赖与 $f\in L^p(\mathbf{T}^n)$). 每个 S_R 是一个从 $L^p(\mathbf{T}^n)$ 到自身的有界算子, 范数至多为 $\#\{m\in\mathbb{Z}^n:|m|\leq q_R\}M_0$, 因此 $\{S_R\}_{R>0}$ 是一族 L^p 有界线性算子, 满足 $\sup_{R>0}\|S_R(f)\|_{L^p}\leq C_f$ 对每个 $f\in L^p(\mathbf{T}^n)$ 成立. 一致有界性原理表明 S_R 的算子范数是一致有界的, 这就证明了(3.5.1).

反过来, 假设(3.5.1)成立, 对于 $h\in\mathscr{C}^\infty(\mathbf{T}^n)$, 从性质 (2), Lebesgue 控制收敛定理和由 h 的光滑性得出的 $\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}|\widehat{h}(m)|<\infty$ 知道:

$$\lim_{R\to\infty}\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}a(m,R)\widehat{h}(m)e^{2\pi i m\cdot x}=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}a_m\widehat{h}(m)e^{2\pi i m\cdot x}.$$

现在利用 Fatou 引理,

$$\|A(h)\|_{L^p}=\left\|\lim_{R\to\infty}S_R(f)\right\|_{L^p}\leq\liminf_{R\to\infty}\|S_R(h)\|_{L^p}\leq K\|h\|_{L^p};$$

因此(3.5.2)成立, 而 A 由稠密性延拓到成了 $L^p(\mathbf{T}^n)$ 上的算子 $\tilde{A}$.

现在我们需要证明对任意 $f\in L^p(\mathbf{T}^n)$, 都有 $S_R(f)\to\tilde{A}(f)$ $(R\to\infty)$ 在 L^p 中成立. 给定 $f\in L^p(\mathbf{T}^n)$ 并取给定的 $\varepsilon>0$. 选取三角多项式 P, 使得 $\|f-P\|_{L^p}\leq\varepsilon$, 并记 P 的次数为 d, 因为 $a(m,R)\to a_m$ 对所有满足 $|m_1|+\cdots+|m_n|\leq d$ 的 m(有限个) 成立, 故存在 $R_0>0$ 使得对任意 $R>R_0$, 都有:

$$\sum_{|m_1|+\cdots+|m_n|\leq d}|a(m,R)-a_m||\widehat{P}(m)|\leq\varepsilon.$$

于是:

$$\|S_R(p)-A(P)\|_{L^p}\leq\|S_R(P)-A(P)\|_{L^\infty}\leq\sum_{|m_1|+\cdots+|m_n|\leq d}|a(m,R)-a_m||\widehat{P}(m)|\leq\varepsilon,\ \forall R>R_0.$$

最后:

$$\begin{aligned}\left\|S_R(f)-\tilde{A}(f)\right\|_{L^p}&\leq\|S_R(f)-S_R(P)\|_{L^p}+\left\|S_R(P)-\tilde{A}(P)\right\|_{L^p}+\left\|\tilde{A}(P)-\tilde{(A)}(f)\right\|_{L^p}\\&\leq K\varepsilon+\varepsilon+K\varepsilon=(2K+1)\varepsilon,\ \forall R>R_0.\end{aligned}$$

也就是说在 L^p 中, 当 $R\to\infty$ 时有 $S_R(f)$ 收敛到 $\tilde{A}(f)$. □

当 $a(m,R)\to a_m=1$ 时,A 和 $\tilde{A}$ 都是单位算子, 于是我们期望 $S_R(f)$ 收敛到 f. 特别地, 我们研究方体型部分和对应的序列:

- 序列 $a(m,R)=1$ $(|m_j|\leq R, j\in\{1,2,...,n\})$ 而在其他处为 0, 这时定理3.5.1中的算子 S_R 可以简单表示为:
$$S_R(f)=f*D_R^n; \tag{3.5.3}$$

推论 3.5.2. 设 $1\leq p<\infty$ 且 $\alpha\geq 0$, 令 S_R 和定义如(3.5.3).

$$\lim_{R\to\infty}\|D_R^n*f-f\|_{L^p}=0,\ \forall f\in L^p(\mathbf{T}^n)\Longleftrightarrow\sup_{R\geq 0}\|S_R\|_{L^p\to L^p}<\infty.$$

例子 3.5.3. *我们现在来详细研究一维情形. 取 $n=1$, 定义 $a(m,N)=1$ $(-N\le m\le N)$, 在其它处为 0, 则 $S_N(f)=\mathring{S}_N(f)=D_N*f$, 其中 D_N 为 Dirichlet 核. 由 Young 不等式, $\|S_N\|_{L^p\to L^p}$ 被 $\|D_N\|_{L^1}$ 控制, 但这个估计不够精细. 我们之后会看到, 在 $1<p<\infty$ 时 $\|S_N\|_{L^p\to L^p}$ 的确是一致有界的.*

然而, 我们可以由此推出, 存在一些 $g\in L^1(\mathbf{T}^1)$ 使得 $S_N(g)$ 在 L^1 中不收敛到 g: 注意到 Fejér 核的 L_1 范数为 1, 于是

$$\|S_N\|_{L^1\to L^1}\ge\lim_{M\to\infty}\|D_N*F_M\|_{L^1}=\|D_N\|_{L^1}.$$

因此 $\|S_N\|_{L^1\to L^1}$ 关于 N 不是一致有界的, 因此推论3.5.2给出, 存在 $f_0\in L^1(\mathbf{T}^1)$ 使得 $S_N(f_0)$ 在 L^1 中不收敛到 f_0.

尽管在 $L^1(\mathbf{T}^n)$ 中 Fourier 级数的部分和不在 $L^1(\mathbf{T}^n)$ 中收敛, 从 Plancherel 定理可以知道它在 $L^2(\mathbf{T}^n)$ 中收敛. 更准确地说, 对 $f\in L^2(\mathbf{T}^n)$, 有:

$$\|D_N^n*f-f\|_{L^2}^2=\sum_{\exists j,\ \text{s.t. } m_j>N}\left|\widehat{f}(m)\right|^2\to 0\ (N\to\infty).$$

以前面 $p=2$ 情况的讨论为动机, 自然的, 我们提出下面的问题: 指数 2 可以被替换为任意的 $p\neq 2$ 吗? 这个问题对一维情况的 D_N 有肯定的回答. 对高维情形, 方体型部分和 D_N^n*f 仍在 L^p 中收敛到 f.

我们从一维情形开始:

定义 3.5.4. *对 $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbf{T}^1)$, 我们定义其共轭函数为:*

$$\tilde{f}(x)=-i\sum_{m\in\mathbb{Z}^1}\operatorname{sgn}(m)\widehat{f}(m)e^{2\pi imx},$$

其中 $\operatorname{sgn}(m)$ 对 $m>0$ 为 1, 对 $m<0$ 为 0, 对 $m=0$ 为 0. 我们定义 Riesz 投影 P_+ 和 P_-:

$$P_+(f)(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\widehat{f}(m)e^{2\pi imx},$$

$$P_-(f)(x)=\sum_{m=-\infty}^{-1}\widehat{f}(m)e^{2\pi imx}.$$

注意到 $f=P_+(f)+P_-(f)+\widehat{f}(0)$, 且 $\tilde{f}=-iP_+(f)+iP_-(f)$, 其中 $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbf{T}^1)$. 因此, 我们有

$$P_+(f)=\frac{1}{2}(f+i\tilde{f})-\frac{1}{2}\widehat{f}(0)$$

因此 $f\mapsto\tilde{f}$ 的 L^p 有界性等价于 $f\mapsto P_+(f)$ 的有界性, 因为 $f\mapsto\widehat{f}(0)$ 显然是 L^p 有界的. 相同的论断对于 Riesz 投影 $f\mapsto P_-(f)$ 也成立. 下面的是定理3.5.1的推论:

命题 3.5.5. *设 $1\le p<\infty$, 则 $S_N(f)=D_N*f$ 在 $L^p(\mathbf{T}^1)$ 中收敛到 f 当且仅当存在常常数 $C>0$ 使得对所有 $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbf{T}^n)$, 都有 $\left\|\tilde{f}\right\|_{L^p(\mathbf{T}^1)}\le C_p\|f\|_{L^p(\mathbf{T}^1)}$.*

证明. 由推论3.5.2, 论断 $S_N(f)=D_N*f$ 在 $L^p(\mathbf{T}^1)$ 中收敛到 f 等价于 S_N 的 L^p 一致有界性.

注意到恒等式:

$$e^{-2\pi iNx}=\sum_{m=0}^{2N}(f(\cdot)e^{2\pi iN(\cdot)})^\wedge(m)e^{2\pi imx}=\sum_{m=-N}^{N}\widehat{f}(m)e^{2\pi imx}.$$

因为乘指数 e^{it} 并不改变函数的 L^p 范数, 我们知道算子 $S_N : L^p \to L^p\ f \mapsto D_N * f$ 的范数等于算子

$$S'_N : L^p \to L^p \quad g \to S'_N(g)(x) = \sum_{m=0}^{2N} \widehat{g}(m) e^{2\pi i m x}$$

的范数, 因此我们有:

$$\sup_{N\geq 0} \|S_N\|_{L^p\to L^p} < \infty \Longleftarrow \sup_{N\geq 0} \|S'_N\|_{L^p\to L^p} < \infty$$

两边都等价于, 对任意 $f \in L^p(\mathbf{T}^1)$, 有 $S_N(f) \to f$ 在 L^p 中成立.

我们已经注意到共轭函数的有界性等价于 P_+ 的有界性, 因此只用证明 S'_N 的一致有界性等价于 P_+ 的有界性.

先假设 $\sup\limits_{N\geq 0} \|S'_N\|_{L^p\to L^p} < \infty$, 则定理3.5.1对 $a(m,R) = 1\ (0 \leq m \leq R)$, 在其他点消失应用可得: $A(f) = P_+(f) + \widehat{f}(0)$ 是有界的, 因此 P_+ 也有界.

反过来, 假设 P_+ 有界, 它延拓到了 $L^p(\mathbf{T}^1)$ 到自身的有界算子. 对任意 $h \in \infty^{\mathbf{T}^n}$ 我们有:

$$\begin{aligned}
S'_N(h)(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \widehat{h}(m) e^{2\pi i m x} - \sum_{m=2N+1}^{\infty} \widehat{h}(m) e^{2\pi i m x} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{h}(m) e^{2\pi i m x} + \widehat{h}(0) - e^{2\pi i (2N) x} \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{h}(m+2N) e^{2\pi i m x} \\
&= P_+(h)(x) - e^{2\pi i (2N) x} P_+(e^{-2\pi i (2N)(\cdot)} h) + \widehat{h}(0).
\end{aligned}$$

上面的恒等式表明:

$$\sup_{N\geq 0} \|S'_N(f)\|_{L^p} \leq (2\|P_+\|_{L^p\to L^p} + 1)\|f\|_{L^p}, \ \forall f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{T}^n).$$

由稠密性, 上面的式子对所有 $f \in L^p(\mathbf{T}^n)$ 成立, 因此利用 S'_N 在 $L^p(\mathbf{T}^1)$ 上良定义可知, 它在 $L^p(\mathbf{T}^1)$ 上一致有界.

最后, 我们总结如下: 算子 S_N 的一致有界性等价于 S'_N 的一致有界性, 等价于 P_+ 的 L^p 有界性, 等价于共轭函数的 L^p 有界性. □

3.5.2 共轭函数的 L^p 有界性

我们已经知道 Fourier 级数在 L^p 中的收敛等价于共轭函数 (或任一 Riesz 投影) 的 L^p 有界性. 自然地, 我们来研究它们是否有界. 这里给出的证明源于 Bochner.

定理 3.5.6. *假设 $1 < p < \infty$, 则存在常数 A_p 使得对任意 $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{T}^1)$, 都有:*

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p}. \tag{3.5.4}$$

因此算子 $f \mapsto \tilde{f}$ 有一个在 $L^p(\mathbf{T}^1)$ 上的延拓, 且同样满足(3.5.4).

证明. 为了证明不等式(3.5.4), 我们先对 f 做如下化简:

1. 假设 f 是三角多项式.

2. 假设 $\widehat{f}(0) = 0$.

3. 假设 f 是实值函数.

因为 f 是实值的, 我们有 $\widehat{f}(-m)=\overline{\widehat{f}(m)}$ $(\forall m\in\mathbb{Z})$. 而 $\widehat{f}(0)=0$, 于是:

$$\tilde{f}(t)=-i\sum_{m=1}^{\infty}\widehat{f}(m)e^{2\pi imt}+i\sum_{m=1}^{\infty}\widehat{f}(-m)e^{-2\pi imt}=2\Re\left[-i\sum_{m=1}^{\infty}\widehat{f}(m)e^{2\pi imt}\right].$$

这表明 $\tilde{f}$ 同样是实值的. 因此三角多项式 $f+i\tilde{f}$ 只包含正的频率, 于是对任意 $k\in\mathbb{Z}_+$ 都有 (展开每项指数都为正频率):

$$\int_{\mathbf{T}^1}(f(t)+i\tilde{f}(t))^{2k}\,\mathrm{d}t=0$$

将其作展开并取实部, 得到

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{2k}{2j}\int_{\mathbf{T}^1}\tilde{f}(t)^{2k-2j}f(t)^{2j}\,\mathrm{d}t=0.$$

其中我们用到了 f 是实值的条件. 因此:

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{L^{2k}}^{2k}\leq\sum_{j=1}^{k}\binom{2k}{2j}\int_{\mathbf{T}^1}\tilde{f}(t)^{2k-2j}f(t)^{2j}\,\mathrm{d}t\leq\sum_{j=1}^{k}\binom{2k}{2j}\left\|\tilde{f}\right\|_{L^{2k}}^{2k-2j}\|f\|_{L^{2k}}^{2j}.$$

其中我们对第 j 项使用了指标为 $2k/(2k-2j)$ 和 $2k/(2j)$ 的 Hölder 不等式. 现在在式子两边同时除以 $\|f\|_{L^{2k}}^{2k}$, 记 $R=\left\|\tilde{f}\right\|_{L^{2k}}/\|f\|_{L^{2k}}$, 得到:

$$R^{2k}\leq\sum_{j=1}^{k}\binom{2k}{2j}R^{2k-2j}.$$

令 $g(t)=t^{2k}-\sum_{j=1}^{k}\binom{2k}{2t}t^{2k-2j}$, 则 $g(0)=-1<0$ 且 $g(t)\to\infty$ $(t\to\infty)$, 因此至少有一个实根. 取其中最大者为 C_{2k}, 则 $R\leq C_{2k}$. 现在对满足 (1),(2),(3) 的 f 和任意 $k\in\mathbb{Z}_+$ 有:

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{L^{2k}}\leq C_{2k}\|f\|_{L^{2k}}. \tag{3.5.5}$$

现在我们来去除条件 (1),(2),(3). 首先消去条件 (3): 考虑一个复值三角多项式 f, 满足 $\widehat{f}(0)=0$, 则:

$$f(t)=\sum_{j=-N}^{N}c_je^{2\pi ijt}=\left[\sum_{j=-N}^{N}\frac{c_j+c_{-j}}{2}e^{2\pi ijt}\right]+i\left[\sum_{j=-N}^{N}\frac{c_j-c_{-j}}{2i}e^{2\pi ijt}\right]$$

其中我 $c_0=0$. 容易发现方括号中的函数都是实值的, 因此我们可以将 f 写成 $P+iQ$, 其中 P,Q 都是实值三角多项式, 因此(3.5.5)给出:

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{L^{2k}}\leq 2C_{2k}\|f\|_{L^{2k}} \tag{3.5.6}$$

其中 f 是满足 $\widehat{f}(0)=0$ 的三角多项式.

接下来消去条件 (2). 我们将 f 写成 $(f-\widehat{f}(0))+\widehat{f}(0)$. 注意一个常数的共轭函数是 0, 我们有(3.5.6)得到:

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{L^{2k}}\leq 2C_{2k}\left\|f-\widehat{f}(0)\right\|_{L^{2k}}\leq 2C_{2k}\left[\|f\|_{L^{2k}}+\|f\|_{L^1}\right]\leq 4C_{2k}\|f\|_{L^{2k}}.$$

因为三角多项式在 L^p 中稠密, 我们知道算子 $f\mapsto\tilde{f}$ 在 L^{2k} 上有满足(3.5.4)的有界扩张. 特别地对所有 $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbf{T}^1)$ 成立.

每个实数 $p\geq 2$ 都位于某 $[2k,2k+2]$ $(k\in\mathbb{Z}_+)$ 内, 因此 Riesz-Thorin 插值定理2.3.2表明, 对任意 $2\leq p<\infty$, 存在常数 A_p 使得:

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{L^p}\leq A_p\|f\|_{L^p}. \tag{3.5.7}$$

其中 f 是简单函数. 由此共轭函数有在 L^p 上的有界扩张, 同样满足(3.5.7)(对 $p \geq 2$).

为了将结果拓展到 $p<2$, 我们利用对偶. 注意到算子 $f \mapsto \tilde{f}$ 的伴随是 $f \mapsto -\tilde{f}$. 事实上对 $f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{T}^1)$, 有:

$$\langle \tilde{f}, g\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}} -i\operatorname{sgn}(m)\widehat{f}(m)\overline{\widehat{g}(m)} = -\sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m)\overline{-i\operatorname{sgn}(m)\widehat{g}(m)} = -\langle f, \tilde{g}\rangle.$$

对偶性指出估计(3.5.7)对常数 $A_{p'} = A_p$ 同样成立. □

实际上, 前面的结果也推广到高维, 我们有:

定理 3.5.7. *设 $1<p<\infty$ 且 $f\in L^p(\mathbf{T}^n)$, 则 $D_N^n * f$ 随 $N\to\infty$ 在 L^p 中收敛到 f.*

证明较为繁琐, 这里略去.

历史上, M.Riesz 在 [41] 中断言了共轭函数的 L^p 有界性 (也即一维 Fourier 级数的 L^p 收敛性), 但在随后的 [42] 中才给出证明 (就是在该文章中他证明了上面用到的插值定理).

关于这个结果的发现还有一段有趣的故事, 我们从共轭函数的定义说起, 其意义在于:

$$\frac{1}{2}(f(\theta)+i\tilde{f}(\theta)+a_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} = F(e^{i\theta}),$$

其中 $F(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ 为在单位圆盘 $|z|<1$ 上的解析函数, 通过 f 的 Cauchy 积分给出, 即:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(\theta)}{e^{i\theta}-z} i e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

此外, 若 f 是实值的 (即 $a_n=\overline{a_{-n}}$), 则 $\tilde{f}$ 也是, 于是 $f+a_0$ 和 $\tilde{f}$ 分别表示 $2F$ 在单位圆盘边界处值的实部和虚部.

建立 $f, \tilde{f}$ 之间联系的关键 L^2 恒等式是 Parseval 关系的简单推论:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\tilde{f}(\theta)|^2\,\mathrm{d}\theta + |a_0|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2\,\mathrm{d}\theta. \tag{3.5.8}$$

共轭函数这个主题的早期目标是将此理论推广到 L^p 上, 这也被 M.Riesz 实现.

他是在给一个相当平庸的学生准备执业考试时发现这个结果的. 考试的一个问题就是证明(3.5.8). 引用 Riesz 的话: "... 然而显然我的候选人并不知道 Parseval 定理. 因此, 在给他这个问题之前, 我必须考虑是否有其他方法可以得出所需结论. 我立刻意识到 Cauchy 定理是这个结果的来源, 而这个观察引导我解决了一个长期困扰着我的一般问题."

Riesz 所想的是下面的论证: 若我们假设 $a_0=0$, 则在 (技术性的) 假设解析函数 F 在单位圆盘的闭包内连续时, 对 F^2 用平均值性质 (作为 Cauchy 定理的简单推论) 知道

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (F(e^{i\theta}))^2\,\mathrm{d}\theta = 0. \tag{3.5.9}$$

若我们假设 f 是实值的, 考虑 $4F(e^{i\theta})^2$ 的实部, 即 $(f(\theta))^2-(\tilde{f}(\theta))^2$, 立刻得到了(3.5.8). Riesz 观察到的事实是, 若我们将上面的 F^2 变为 F^{2k}(其中 k 为正整数), 并考虑其实部, 立刻可以得到 $f\to\tilde{f}$ 在 L^p $(p=2k)$ 中的有界性. 加上额外的工作 (即 Riesz-Thorin 插值定理2.3.2) 可以说明对 $1<p<\infty$ 都成立.

3.6 应用

Fourier 级数的应用众多, 我们在这里简单地罗列如下:

3.6.1 等周不等式

等周不等式的结果可以简单地概括为:

由给定长度的简单闭曲线所围成的图形中, 圆的面积最大.

据传, 这是 Carthage 的开国女皇 Dido 提出的问题. 古希腊数学家对这个命题的证明尝试是不严格的, 因为曲线的概念在微积分出现后才明晰起来. 十八世纪 Euler 和 Lagrange 在发展变分法时, 也讨论过这个问题. 到目前为止, 这个不等式至少有几十个不同的证明 (参见 [39]). Steiner 在 [50] 中利用对称性方法证明了此问题的解若存在, 则必是圆周, 但存在性的说明被忽略了. 一般认为 Weierstrass 在 [57] 中利用变分法第一个给出了等周不等式的严格证明.

为了理解这个问题, 我们需要下面的概念: 假设我们在 $\mathbb{R}^2$ 给定了一个长 L 为的 $\mathscr{C}^1$ 闭定向不自交曲线, 其围成区域 R 面积为 A. 等周不等式可以表示为 $L^2 \geq 4\pi A$, 取等当且仅当曲线为圆.

设 $x = x(t), y = y(t)$ $(t \in [0,1])$ 参数化了这条曲线, 则 x, y 可以视为圆周上的 1-周期曲线. 于是我们可以将其长度为 L 表示为:

$$L = \int_0^1 \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2}\,\mathrm{d}t.$$

而利用 Green 公式, 面积可以表示为:

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\,\mathrm{d}t.$$

现在令 $f(t) = x(t) + iy(t)$, 利用命题3.2.7将原不等式转化为关于 f 的 Fourier 系数的不等式, 而它是容易证明的. 我们略去具体的计算过程, 将等周不等式的结论总结如下:

定理 3.6.1. *给定一条闭, 定向, 不自交的正则 $\mathscr{C}^1$ 曲线, 其长为 L, 围成区域面积为 A, 则:*

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

等号成立当且仅当曲线是圆.

3.6.2 Weyl 判则

我们在这里讨论 Weyl 关于等分布序列的定理.

定义 3.6.2. *一个 $\mathbf{T}^n$ 上的序列 $\{a_k\}_{k=0}^{+\infty}$, 若对任意矩体 Q 满足:*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{k : 0 \leq k \leq N-1, a_k \in Q\}}{N} = |Q|, \tag{3.6.1}$$

就称该序列为等分布的.

Weyl 准则给出了判断一个序列是否等分布的等价公式:

定理 3.6.3. *下面的事实等价:*

(1) 序列 $\{a_k\}_{k=0}^{+\infty}$ 等分布.

(2) 对 $\mathbf{T}^n$ 上的全体光滑函数, 我们有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(a_k) = \int_{\mathbf{T}^n} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3.6.2}$$

(3) 对任意 $m \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$, 我们有:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i m\cdot a_k} = 0. \tag{3.6.3}$$

证明. 注意到等分布的条件(3.6.1)等价于: (3.6.2)对任意矩体 Q 的特征函数 χ_Q 成立, 而(3.6.3)等价于(3.6.2)对任函数族 $e^{2\pi i m\cdot x}$ 成立. 而(3.6.2)关于 f 是线性的, 因此 (1) 蕴含(3.6.2)对全体阶梯函数成立, 而它们可以逼近光滑函数. 类似地, 也可以用光滑函数逼近特征函数, 因此 (2) 蕴含 (1). (2) 蕴含 (3) 是显然的. 假设 (3) 成立, 根据推论3.2.2知道三角多项式可以一致逼近连续函数, 特别对光滑函数也成立. □

3.6.3 ζ 函数值的计算

我们在这一节中探讨 Bernoulli 多项式和 ζ 函数在正偶数处的值.

ζ 函数在数论中有重要的作用, 其定义为:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \ \forall s > 1.$$

实际上上面的式子对于 $\Re(s) > 1$ 的复数 s 也良定义, 且 ζ 函数可以解析延拓成复平面上的亚纯函数, 在除 $s = 1$ 外解析, 在 $s = 1$ 处有留数为 1 的单极点. 其在偶数处的值是可以计算的. 实际上在 $s = -2k$ $(k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ 时候 $\zeta(s) = 0$, 它们是 ζ 的平凡零点. 对于正偶数的情形, 其值与 Bernoulli 数有关:

我们通过下面的性质归纳地定义 Bernoulli 多项式 $\{B_k\}_{k=0}^{+\infty}$:

$$B_0(x) = 1 \qquad B_k'(x) = kB_{k-1}(x) \qquad \int_0^1 B_k(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

则 $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, 可以计算出其 Fourier 展开为 (利用推论3.4.8证明其收敛性):

$$B_1(x) = \sum_{m\neq 0} -\frac{1}{2\pi i m} e^{2\pi i m x}, \ \forall x \in (0, 1)$$

根据先前证明的判别法推论3.4.8可以知道上面的级数收敛. 利用递推式可以得出, 对任意 $k \geq 2$:

$$B_k(x) = -k! \sum_{m\neq 0} \frac{1}{(2\pi i m)^k} e^{2\pi i m x}, \ \forall x \in [0, 1].$$

上面的级数在 $[0, 1]$ 上绝对一致收敛. 当 k 为正偶数时 (自然有 $k \geq 2$), 我们可以将上面的表达式改写为:

$$B_k(x) = 2(-1)^{1+\frac{k}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n x)}{(2\pi n)^k}.$$

假设 $k = 2m$ $(m \in \mathbb{Z}_+)$ 取 $x = 0$ 并整理即可得到:

$$\zeta(2m) = \frac{B_{2m}(0)(2\pi)^{2m}}{2(-1)^{1+m}(2m)!}.$$

其中 $B_{2m}(0)$ 就是常见的第 $2m$ 个 Bernoulli 数, 它显然是有理数. 因此 $\zeta(2m)$ 是 $(2\pi)^{2m}$ 的有理数倍, 为超越数.

Fourier 分析在数论方面还有更多丰富的应用, 例如在解析数论中的筛法, 代数数论中在一般的数域上建立调和分析的理论等. 限于篇幅, 不再这里详加介绍了.

4 Fourier 变换的基本理论

我们在这一章介绍 Fourier 变换, 它是调和分析的重要工具和研究对象.

历史上, Fourier 在其专著 [22] 中就引入了 Fourier 变换, 并给出了 Fourier 反演公式, 但许久之后才得到严格证明. 从现代的观点看, Fourier 变换通常作为 L^1 上的一个算子引入. 但这时, Fourier 逆变换公式要求 $\widehat{f}$ 同样在 L^1 内才成立. 为了发展 Lebesgue 空间中 Fourier 变换的理论, 我们首先在更小的类-Schwartz 函数类上定义 Fourier 变换并导出其基本性质. 之后, 我们把定义延拓到其他空间上.

我们首先介绍一些分布理论的基础.

4.1 Schwartz 类和 Fourier 变换

4.1.1 Schwartz 函数类

现在我们引入 $\mathbb{R}^n$ 上的 Schwartz 函数类. 粗略地说, 一个函数是 Schwartz 的意味着它是光滑的, 并且它的各阶导数在无穷远处比任意多项式的倒数衰减得更快. 精确地说, 我们有如下定义:

定义 4.1.1. *一个 $\mathbb{R}^n$ 上地 $\mathscr{C}^\infty$ 复值函数 f 被称为 Schwartz 函数当且仅当对每对多重指标 α, β, 都存在常数 $C_{\alpha,\beta}$ 使得*

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| = C_{\alpha,\beta} < \infty.$$

我们将 $\rho_{\alpha,\beta}$ 称为 f 的 Schwartz 半范数. 所有 $\mathbb{R}^n$ 上 Schwartz 函数构成的空间记为 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

我们有等价的定义

$$f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha(x^\beta f(x))| < \infty \ (\text{对任意多重指标}\alpha, \beta)$$

从定义可以看出: 若 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 且 $P(x)$ 是一个 n 变量的多项式, 则 $P(x)f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. 如果 α 是一个多重指标且 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 则 $\partial^\alpha f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

显然紧支连续函数空间 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 包含于 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

例子 4.1.2. *$e^{-|x|^2}$ 是 Schwartz 函数, 但 $e^{-|x|}$ 不是 (它在原点不可微).*

下面是一 Schwartz 条件的等价性质, 在对 Schwartz 函数进行估计时相当有用. 一个 $\mathscr{C}^\infty$ 函数属于 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 当且仅当对任意 $N \in \mathbb{Z}_+$ 和多重指标 α, 都存在正常数 $C_{\alpha,N}$ 使

$$|\partial^\alpha f(x)| \le C_{\alpha,N}(1+|x|)^{-N}.$$

我们略去这些简单的证明.

现在来讨论 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的收敛. 设 $f_k, f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$. 若对任意多重指标 α, β 都有

$$\rho_{\alpha,\beta}(f_k - f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha(\partial^\beta(f_k - f)(x))| \to 0, \ k \to +\infty,$$

我们称序列 f_k 在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 收敛到 f.

例如, 对固定的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 我们有在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 中 $f(x+x_0/k) \to f(x)$ $(k \to +\infty)$, 其中 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

这个收敛性的定义和 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的一个拓扑相容, 这个拓扑还满足 $(f,g) \mapsto f+g, (a,f) \mapsto af, f \mapsto \partial^\alpha f$ 对任意 $a \in \mathbb{C}$ 和多重指标 α 都连续 $(f,g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n))$. 所有包含 0 的开集有一组次基:

$$\{f \in \mathscr{S}:\ \rho_{\alpha,\beta} < r\},$$

其中 α, β 是多重指标而 $r \in \mathbb{Q}_+$. 注意到, 只要 $\rho_{\alpha,\beta}(f) = 0$, 就有 $f = 0$. 这意味着 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 配备了一族可分点半范数族, 因此是局部凸的拓扑向量空间. 又因为 $(S)(\mathbb{R}^n)$ 有可数局部基, 它可度量化事实上半范给出了 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的一个度量:

$$d(f,g) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-f} \frac{\rho_j(f-g)}{1+\rho_j(f-g)},$$

其中 ρ_j 是 $\rho_{\alpha,\beta}$ 的一个置换 (α, β 是多重指标). 我们可以验证 $\mathscr{S}$ 关于此度量是完备的. 事实上, 给定 $\mathscr{S}$ 中的 Cauchy 列 $\{h_j\}_j$, 它们在 L^∞ 中也是 Cauchy 的, 因此一致收敛到某个函数 h. 同理 $\{\partial^\beta h_j\}_j$ 和 $\{x^\alpha h_j(x)\}_j$ 也一致收敛, 并且可以证明极限恰为 $\partial^\beta h_j$ 和 $x^\alpha h(x)$. 因此可以得到 h_j 在 $\mathscr{S}$ 中收敛到 h. 从而, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 是一个 Fréchet 空间 (有完备不变度量的局部凸空间). 注意, 在 $\mathscr{S}$ 中的收敛比所有 L^p 中的都强, 也就是有:

命题 4.1.3. *设 $f, f_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$. 假设 f_k 在 $\mathscr{S}$ 中收敛到 f, 则对所有 $0 < p \le \infty$, 有 f_k 在 L^p 中收敛到 f, 并且存在常数 $C_{p,n} > 0$ 使得*

$$\|\partial^\alpha f\|_{L^p} \le C_{p,n} \sum_{|\alpha| \le \left[\frac{n+1}{p}\right]+1} \rho_{\alpha,\beta}(f).$$

(上式对所有使右边有限的 f 成立).

Schwartz 空间在一些算子的作用下是封闭的.

命题 4.1.4. *设 $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. 则 $fg, f*g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 此外对任意多重指数 α 有*

$$\partial^\alpha(f*g) = (\partial^\alpha f)*g = f*(\partial g).$$

4.1.2 Schwartz 函数的 Fourier 变换

Schwartz 函数在无穷远处的速降保证了在发展 Fourier 变换基本理论时不会遇到收敛性的问题. Fourier 变换是 Schwartz 函数类的一个同胚, 并且 Fourier 逆变换公式总成立. 由于这些原因, 这类函数是定义 Fourier 变换自然的环境.

对 $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, 我们使用记号 $\cdot$ 表示内积:

$$x \cdot t = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

定义 4.1.5. *给定 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 我们定义*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

我们称 $\widehat{f}$ 为 f 的 Fourier 变换.

例子 4.1.6. 若在 $\mathbb{R}^n$ 上定义 $f(x)=e^{-\pi|x|^2}$, 则 $\widehat{f}(\xi)=f(\xi)$. 为证明此事实, 注意到定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数

$$s\longmapsto\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi(t+is)^2}\,\mathrm{d}t,\ \forall s\in\mathbb{R}$$

是常数, 因为其导数为

$$\int_{\mathbb{R}}-2\pi i(t+is)e^{-\pi(t+is)^2}\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}}i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-\pi(t+is)^2}\,\mathrm{d}t=0.$$

因此该函数等于 $s=0$ 处的值, 恰为 1(这是 *Euler* 积分), 故我们有

$$\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi t^2}e^{-2\pi it\tau}\,\mathrm{d}t=\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi(t+i\tau)^2}e^{\pi(i\tau)^2}\,\mathrm{d}t=\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t\right)e^{-\pi\tau^2}=e^{-\pi\tau^2},\ \forall\tau\in\mathbb{R}.$$

由 Fourier 变换的定义, 我们知道对 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 和 $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$, 则

$$\widehat{f(x_1,...,x_n)g(x_{n+1},...x_{n+m})}=\widehat{f}(\xi_1,...,\xi_n)\widehat{g}(\xi_{n+1},...,\xi_{n+m}),$$

其中左边的^表示 $\mathbb{R}^{n+m}$ 上的 Fourier 变换. 换句话讲,Fourier 变换保持变量的分离. 将这个观察和例子4.1.6中的结果结合到一起, 我们知道在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 $f(x)=e^{-\pi|x|^2}$ 等于其 Fourier 变换.

我们之前已经定义过下面的记号: 对于 $f\in\mathbb{R}^n$ 和 $x\in\mathbb{R}^n$ 和 $a>0$, 定义 f 的平移, 伸缩和反射:

$$(\tau^y f)(x)=f(x-y)\quad(\delta^a f)(x)=f(ax)\quad\tilde{f}(x)=f(-x).$$

在例子2.2.8中, 我们已经知道记号 $f_a=a^{-n}\delta^{1/a}(f)$.

命题 4.1.7. 给定 $f,g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 和 $y\in\mathbb{R}^n$ 和 $b\in\mathbb{C}$ 以及多重指标 α 及 $t>0$, 则

(1) $\left\|\widehat{f}\right\|_{L^\infty}\le\|f\|_{L^1}$

(2) $\widehat{f+g}=\widehat{f}+\widehat{g}$

(3) $\widehat{bf}=b\widehat{f}$

(4) $\widehat{\tilde{f}}=\tilde{\widehat{f}}$

(5) $\widehat{\widehat{f}}=\tilde{f}$

(6) $\widehat{\tau^y f}(\xi)=e^{-2\pi iy\xi}\widehat{f}(\xi)$

(7) $(e^{2\pi ix\cdot y}f(x))^\wedge(\xi)=\tau^y(\widehat{f})(\xi)$

(8) $\widehat{\delta^t f}=t^{-n}\delta^{t^{-1}}\widehat{f}=(\widehat{f})_t$

(9) $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi)=(2\pi i\xi)^\alpha\widehat{f}(\xi)$

(10) $(\partial^\alpha\widehat{f})(\xi)=((-2\pi ix)^\alpha f(x))^\wedge(\xi)$

(11) $\widehat{f}\in\mathscr{S}$

(12) $\widehat{f*g}=\widehat{f}\widehat{g}$

(13) $\widehat{f\circ A}(\xi)=\widehat{f}(A\xi)$, 其中 A 是正交矩阵, 并且 ξ 是列向量.

证明. 这里的证明和命题3.1.2类似, 我们简述如下: (1) 是定义的直接推论, 而 (2) 到 (5) 是积分的基本性质. (6) 到 (8) 是换元公式的直接结果. 对于 (9), 我们需要使用分部积分公式. 至于 (10), 只需要证明 $\alpha=e_j$ 的情况, 再利用归纳法即可. 对 α 为一阶多重指标, 利用 Lebesgue 控制收敛定理即可. 现在结合 (1),(9),(10) 即可控制 $\widehat{f}$ 的半范数, 故有 $\widehat{f}\in\mathscr{S}$. (12) 是 Fubini 定理的推论, 而 (13) 也是换元公式的结果. □

4.1.3 Fourier 逆变换和 Fourier 反演公式

我们现在定义 Fourier 逆变换.

定义 4.1.8. *给定 Schwartz 函数 f, 定义 $f^\vee(x)=\widehat{f}(-x)$ $(\forall x\in\mathbb{R}^n)$. 算子 $f\mapsto f^\vee$ 被称作 Fourier 逆变换.*

显然 Fourier 逆变换具有一些和 Fourier 变换类似的性质. 命题4.1.7对于 Fourier 逆变换也有对应的版本, 我们不在这里重复.

现在给出 Fourier 变换和 Fourier 逆变换的关系. 在下面的定理中, 我们会证明它们互为逆算子, 这个性质被称为 Fourier 反演.

定理 4.1.9. *给定 $f,g,h\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 我们有*

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)g(x)\,\mathrm{d}x,\\
&(2)\ (\textit{Fourier 反演})\ (\widehat{f})^\vee=f=(f^\vee)^\wedge\\
&(3)\ (\textit{Parseval 关系})\ \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{h}(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{h}(\xi)}\,d\xi\\
&(4)\ (\textit{Plancherel 恒等式})\ \|f\|_{L^2}=\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2}=\|f^\vee\|_{L^2}\\
&(5)\ \int_{\mathbb{R}^n} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)h^\vee(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

证明. (1) 源自于 Fourier 变换的定义和 Fubini 定理. 为了证明 (2), 我们注意到

$$
g(\xi)=e^{2\pi i\xi\cdot t}e^{-\pi|\varepsilon\xi^2|}\qquad \widehat{g}(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}e^{-\pi|(x-t)/\varepsilon|^2}.
$$

利用 (1) 的结论, 我们得出:

$$
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varepsilon^{-n}e^{-\pi\varepsilon^{-2}|x-t|^2}\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot t}e^{-\pi|\varepsilon\xi|^2}\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.1.1}
$$

令 $\varepsilon\to 0$, 则(4.1.1)左边根据定理2.2.7在紧集上一致收敛于 $f(t)$, 右边根据 Lebesgue 控制收敛定理收敛到 $(\widehat{f})^\vee(t)$, 于是 $(\widehat{f})^\vee=f$. 代入 $\tilde{f}$ 即得另一等号. 现在令 $g=\overline{\widehat{h}}$, 则命题4.1.7的 (5) 说明 $\widehat{g}=\overline{h}$, 代入 (1) 中即证. (4) 是在 (3) 中取 $h=f$ 的直接推论, 而 (5) 源自于 (1) 中令 $\widehat{g}=h$, 并利用 (2). □

作为定理4.1.9的推论, 我们有:

推论 4.1.10. *Fourier 变换是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的同胚.*

证明. 可以利用收敛性的定义直接证明, 若 $f_k,f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 且在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 中有 $f_k\to f$, 则在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 中 $\widehat{f_k}\to\widehat{f}, f_k^\vee\to f$. 这表明 Fourier 变换及逆变换都是连续的, 而 Fourier 反演表明此映射是双射, 因此为同胚. □

4.2 Lebesgue 空间和 Fourier 变换

利用 Schwartz 函数类的稠密性, 我们可以发展 Lebesgue 空间中的 Fourier 变换理论.

4.2.1 L^1+L^2 上的 Fourier 变换

我们已经在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上定义了 Fourier 变换, 现在我们把定义延拓到 $L^1(\mathbb{R}^n)+L^2(\mathbb{R}^n)$ 上.

首先观察我们在定义4.1.5中给出的 Fourier 变换:

$$\widehat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x.$$

右式对于 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 是收敛的, 因此有意义, 这允许我们 Fourier 变换的定义延拓到 L^1 上. 此外, 这个算子同样满足命题4.1.7中的 (1)-(8) 和 (12),(13)(只要假设 f,g 是可积的). 我们同样定义 L^1 上的 Fourier 逆变换 $f^\vee(x)=\widehat{f}(-x)$, 其中 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. 相似的性质对它也成立. 这种情况下我们面对一个问题, 即 f 仅仅可积时, 不一定有 $(\widehat{f})^\vee=f$ a.e. 成立. 这个式子在 $\widehat{f}$ 也可积时是成立的.

定义 Fourier 变换的积分在 $f\in L^2(\mathbb{R}^2)$ 时不一定绝对收敛; 然而,Fourier 变换可以通过一个优雅的理论在这个空间上定义. 可以证明 Fourier 变换是 $L^1\cap L^2$(这是 L^2 的稠密子空间) 上的 L^2 等距同构, 于是由稠密性, 存在唯一的到 L^2 上的有界扩张. 我们将此扩张记为 $\mathscr{F}$, 则 $\mathscr{F}$ 是 L^2 上的等距同构, 即

$$\|\mathscr{F}(f)\|_{L^2}=\|f\|_{L^2},\ \forall f\in L^2(\mathbb{R}^n).$$

并且对于任意 $L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的收敛到 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 的函数列 f_N, 有

$$\left\|\widehat{f_N}-\mathscr{F}(f)\right\|_{L^2}\to 0\ (N\to+\infty).$$

特别地, 我们选取函数列 $f_N(x)=f(x)\chi_{|x|\le N}$ 得到

$$\widehat{f_N}(\xi)=\int_{|x|\le N} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x$$

在 L^2 中收敛到 $\mathscr{F}(f)(\xi)$ $(N\to+\infty)$. 如果 f 是可积且平方可积的, 则 $\widehat{f_N}(\xi)$ 是点态收敛到 $\widehat{f}(\xi)$ 的. 另外, 由 L^2 收敛和实分析的常识, 存在 $\widehat{f_N}$ 的子列几乎处处收敛到 $\mathscr{F}(f)$. 因此, 对 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$, 我们知道 $\widehat{f}$ 和 $\mathscr{F}(f)$ 几乎处处相等. 由此原因, 我们可以使用 $\widehat{f}$ 来表示 $f\in L^2$ 的 Fourier 变换.

类似地, 用 $\mathscr{F}'$ 表示 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的等距同构 (作为 $L^1\cap L^2$ 上等距同构 $f\mapsto f^\vee$ 的扩张); 因为 $\varphi^\vee(x)=\widehat{\varphi}(-x)$, 其中 φ 属于 Schwartz 类 (它在 L^2 中稠密), 我们有 $\mathscr{F}'(f)(x)=\mathscr{F}(f)(-x)$ a.e. 对任意 $f\in L^2$ 成立. 因此 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}'$ 是 L^2 等距同构, 且满足在 $\mathscr{S}$ 上有 $\mathscr{F}'\circ\mathscr{F}=\mathscr{F}\circ\mathscr{F}'=\mathrm{Id}$. 由稠密性知道, 该式对 L^2 函数也成立, 于是 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}'$ 是 L^2 到自身的单射和满射. 故而, $\mathscr{F}'$ 是 $\mathscr{F}:L^2\mapsto L^2$ 的逆算子 $\mathscr{F}^{-1}$, 于是 Fourier 反演

$$f=\mathscr{F}^{-1}\circ\mathscr{F}(f)=\mathscr{F}\circ\mathscr{F}^{-1}(f)\ \text{a.e.}$$

在 L^2 上也成立.

在给定了 Fourier 变换在 L^1 和 L^2 上的作用的性质后, 我们把它的定义拓展到 L^p $(1<p<2)$ 上. 给定函数 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 定义 $\widehat{f}=\widehat{f_1}+\widehat{f_2}$, 其中 $f_1\in L^1(\mathbb{R}^n), f_2\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 且 $f=f_1+f_2$; 例如, 我们可以取 $f_1=f\chi_{|f|>1}$ 和 $f_2=f\chi_{|f|\le 1}$. 该定义不依赖于 f_1 和 f_2 的选取, 若对 $f_1,h_1\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $f_2,h_2\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 满足 $f_1+f_2=h_1+h_2$, 则 $f_1-h_1=h_2-f_2\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$. 因为这两个函数在 $L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ 中且相等, 它们的 Fourier 变换也相同, 因此 $\widehat{f_1}-\widehat{h_1}=\widehat{f_2}-\widehat{h_2}$, 于是 $\widehat{f_1+f_2}=\widehat{h_1+h_2}$. 因此 Fourier 变换的定义延拓到了 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\le p\le 2)$ 上.

但对于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(p>2)$ 中的 f, 我们不能如法炮制定义其 Fourier 变换, 而是需要分布的概念, 将在4.3节中进行介绍.

我们有下面的关于 L^p 上 Fourier 变换的结果.

命题 4.2.1 (Hausdorff-Young 不等式). *对 $1 \le p \le 2$ 和任意 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 我们有估计*

$$\left\|\widehat{f}\right\|_{L^{p'}} \le \|f\|_{L^p}.$$

证明. 注意到 $\mathscr{F}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上为等距同构, 其算子范数为 1, 而 $\mathscr{F}$ 作为 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 的算子, 其范数不超过 1. 利用 Riesz-Thorin 插值定理2.3.2即可. □

事实上, Beckner 在 [2] 中证明了更强的结果, 即:

定理 4.2.2. *对 $1 < p \le 2$ 及其共轭指标 q, Fourier 变换 $\mathscr{F}: L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ 的算子范数为:*

$$\|\mathscr{F}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n)} = \left(\frac{p^{\frac{1}{p}}}{q^{\frac{1}{q}}}\right)^{\frac{n}{2}}$$

历史上, Babenko 在 Beckner 之前已经对 q 为正偶数的情况证明了上面的定理, 而 Beckner 将其推广到了一般的 $2 \le q < \infty$.

接下来我们考察 Fourier 变换在无穷远处的性质. 和定理3.3.1类似, 我们有:

命题 4.2.3 (Riemann-Lebesgue 引理). *若 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 则当 $|\xi| \to \infty$ 时, 有 $|\widehat{f}(\xi)| \to 0$.*

证明. 先证明对 Schwartz 函数成立, 再利用稠密性. □

4.3 分布和 Fourier 变换

利用对偶空间的性质, 我们可以发展分布意义下的 Fourier 变换理论.

首先我们介绍一些分布理论的基本知识. 其基本思想是, 一般来说考虑作用在一些性质较好的函数空间上的线性泛函比直接处理性质较差的函数简单. 这里我们考虑的性质较好的函数集关于一些基本算子封闭, 并且这些算子可以通过对偶延拓到分布上. 分布的语言已经成为了许多分析学问题的不可或缺的工具.

4.3.1 测试函数空间

函数空间 $\mathscr{C}_0^\infty$ 由全体紧支光滑函数构成, 而 $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上所有光滑函数. 我们主要关心三个嵌套的" 好" 函数组成的空间:

$$\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

其中 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 是 Schwartz 空间 (见 2.2 节).

定义 4.3.1. *我们在这些空间上定义序列的收敛, 下面 α, β 是任意的多重指标, 而 B 是某个紧集*

$$f_k \to f(\text{在}\mathscr{C}^\infty\text{中}) \iff f_k, f \in \mathscr{C}^\infty\text{且} \lim_{k\to\infty} \sup_{|x|\le N} |\partial^\alpha(f_k - f)(x)| = 0,\ \forall N \in \mathbb{Z}_+$$

$$f_k \to f(\text{在}\mathscr{S}\text{中}) \iff f_k, f \in \mathscr{S}\text{且} \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta(f_k - f)(x)| = 0$$

$$f_k \to f(\text{在}\mathscr{C}_0^\infty) \iff f_k, f \in \mathscr{C}_0^\infty\text{且} \lim_{k\to\infty} \|\partial^\alpha(f_k - f)\|_{L^\infty} = 0\text{且support}(f_k) \subset B,\ \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

显然, 在 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的收敛蕴含 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的收敛, 进而蕴含在 $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的收敛.

空间 $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 配备了一族半范

$$\tilde{\rho_{\alpha,N}}(f) = \sup_{|x|\le N} |\partial^\alpha(f)(x)|,$$

其中 α 取遍所有多重指标, N 取遍 $\mathbb{Z}_+$. 我们可以证明 $\mathscr{C}^\infty$ 关于这族可数半范数是完备的.

4.3.2 测试函数上泛函的空间

将对偶空间 (所有连续线性泛函构成的空间) 记为

$$(\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n))' = \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) \quad (\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))' = \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \quad (\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n))' = \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n).$$

取对偶空间的典范拓扑, 我们有

$$T_k \to T(\text{在}\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)\ ) \iff T_k, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)\text{且}T_k(f) \to T(f),\ \forall f \in \mathscr{C}_0^\infty$$
$$T_k \to T(\text{在}\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)\ ) \iff T_k, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)\text{且}T_k(f) \to T(f),\ \forall f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$$
$$T_k \to T(\text{在}\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)\ ) \iff T_k, T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)\text{且}T_k(f) \to T(f),\ \forall f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$$

对偶空间也是嵌套的:

$$\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n).$$

定义 4.3.2. *$\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中的元素称为分布. $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的元素称为缓增分布. $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ 中的元素称为紧支分布.*

下面是一些重要的分布:

- 位于原点处的 Dirac 质量 δ_0 定义为 $\langle \delta_0, \varphi \rangle = \varphi(0)$, 其中 $\varphi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. 我们声明 $\delta_0 \in \mathscr{E}'$. 这是因为若在 $\mathscr{C}^\infty$ 中 $\varphi_k \to \varphi$, 则 $\langle \delta_0, \varphi_k \rangle = \varphi_k(0) \to \varphi(0) = \langle \delta_0 \varphi \rangle$.. 类似地, 对位于 $a \in \mathbb{R}^n$ 处的 Dirac 质量 δ_a 定义为 $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$.
- 一个函数 g 可以被视作一个分布 L_g, 其中 L_g 是泛函
$$L_g(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) g(x)\, \mathrm{d}x.$$
常值函数 1 属于 $\mathscr{S}'$ 但不属于 $\mathscr{E}'$. 紧支可积函数属于 $\mathscr{E}'$. 函数 $e^{|x|^2}$ 属于 $\mathscr{D}'$ 但不属于 $\mathscr{S}'$.
- 一个局部可积函数 $g \in L^1_{\text{loc}}$ 可被视作分布 L_g, 其中 $L_g(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) g(x)\, \mathrm{d}x$ 对所有 $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$ 是良定义的, 并且对所有支撑于紧集 K 上的光滑函数 φ 有估计
$$|L_g(\varphi)| \leq \left(\int_K |g(x)|\, \mathrm{d}x \right) \|\varphi\|_{L^\infty}.$$
- 对 $1 \leq p \leq \infty$, 一个 L^p 内的函数是缓增分布, 但一般不在 $\mathscr{E}'$ 中 (除非它紧支).
- 一个满足 $|g(x)| \leq C(1+|x|^k)(k \in \mathbb{R})$ 的函数可以被视作缓增分布 (这解释了其名称的由来).
$$|L_g(\varphi)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|)^m |\varphi(x)| \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{k-m}\, \mathrm{d}x,$$
其中 $m > n+k$, 而 $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^m)|\varphi(x)|$ 被有限个 Schwartz 半范数 $\rho_{\alpha,\beta}(\varphi)$ 的和控制.

4.3.3 缓增分布空间

给出分布的基本定义后, 我们现在关注缓增分布的空间. 所有的从 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 的平移不变有界算子都可以被与缓增分布的卷积给出, 因此它们在调和分析中有格外重要的作用.

假设 f 和 g 是 Schwartz 函数且 α 为一个多重指标, 由分部积分知道

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\partial^\alpha f)(x) g(x)\, \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\partial^\alpha g)(x)\, \mathrm{d}x.$$

若我们想对缓增分布定义导数, 我们希望给它能和上式相容 (此时取 $f \in \mathscr{S}$ 和 $g \in \mathscr{S}'$, 式子两边都是分布在函数上的作用). 我们就使用这个式子来类似定义分布的导数.

定义 4.3.3. 对 $u\in\mathscr{S}$ 和多重指标 α, 定义

$$\langle\partial^\alpha u,f\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle u,\partial^\alpha f\rangle.$$

若 u 是一个函数, 则其分布意义下的导数被称为分布导数.

由命题4.1.7, 我们自然地给出下面的定义:

定义 4.3.4. 设 $u\in\mathscr{S}'$, 我们定义其 *Fourier* 变换 $\widehat{u}$ 和逆变换 $u^\vee$ 为

$$\langle\widehat{u},f\rangle=\langle u,\widehat{f}\rangle \text{ 和} \langle u^\vee,f\rangle=\langle u,f^\vee\rangle,\ \forall\in\mathscr{S}.$$

我们注意到对 Dirac 质量 δ_0 有 $\widehat{\delta_0}=1$. 更一般地, 对任意多重指标 α 有 $(\partial^\alpha\delta_0)^\wedge=(2\pi ix)^\alpha$. 这源于直接的计算:

$$\begin{aligned}\langle(\partial^\alpha\delta)^\wedge,f\rangle=\langle\partial^\alpha\delta_0,\widehat{f}\rangle&=(-1)^{|\alpha|}\langle\delta_0,\partial^\alpha\widehat{f}\rangle=(-1)^{|\alpha|}\langle\delta_0,((-2\pi ix)^\alpha f(x))^\wedge\rangle\\&=(-1)^{|\alpha|}((-2\pi ix)^\alpha f(x))^\wedge(0)=(-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n}(-2\pi ix)^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}(2\pi ix)^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

考虑在 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 处的 Dirac 质量, 我们有 $\delta_{x_0}(f)=\langle\delta_{x_0},f\rangle=f(x_0)$, 于是

$$\langle\widehat{\delta_{x_0}},h\rangle=\langle\delta_{x_0},\widehat{h}\rangle=\widehat{h}(x_0)=\int_{\mathbb{R}^n}h(x)e^{-2\pi ix\cdot x_0}\,\mathrm{d}x,\ \forall h\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

也即 $\widehat{\delta_{x_0}}$ 可以和函数 $x\mapsto e^{-2\pi x\cdot x_0}$ 作为分布等同. 特别的, $\widehat{\delta_0}=1$.

函数 $e^{|x|^2}$ 不属于 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, 因此其 Fourier 变换不能被定义成分布. 任意在无穷远处有多项式增长的局部可积函数的 Fourier 变换可以被定义成缓增分布.

现在注意到对任意 $f,g\in\mathscr{S}$, 有下面的不变性:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}g(x)f(x-t)\,\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^n}g(x+t)f(x)\,\mathrm{d}x\\\int_{\mathbb{R}^n}g(ax)f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^n}g(x)a^{-n}f(a^{-1}x)\,\mathrm{d}x\\\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{g}(x)f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_{\mathbb{R}^n}g(x)\tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

其中 $t\in\mathbb{R}^n$ 且 $a>0$, 我们先前已经给出了 $\tau^t,\delta^a,\tilde{}$ 关于函数的定义, 上面的式子启发我们给出对分布的定义.

定义 4.3.5. 对于一个缓增分布 u, 我们定义其平移 τ^t, 伸缩 $\delta^a u$ 和反射 $\tilde{u}$:

$$\langle\tau^t u,f\rangle=\langle u,\tau^{-t}f\rangle\quad\langle\delta^a u,f\rangle=\langle u,a^{-n}\delta^{1/a}f\rangle\quad\langle\tilde{u},f\rangle=\langle u,\tilde{f}\rangle.$$

其中 $t\in\mathbb{R}^n$ 且 $a>0$. 对于一个可逆矩阵 A, 定义 u 和 A 的复合为:

$$\langle u^A,\varphi\rangle=|\det A|^{-1}\langle u,\varphi^{A^{-1}}\rangle.$$

其中 $\varphi^{A^{-1}}(x)=\varphi(A^{-1}x)$.

容易知道, 平移, 伸缩, 反射和微分这些算子都是缓增分布上的连续函数.

位于原点的 Dirac 质量 δ_0 与它的反射相同, 而且 $\delta^a\delta_0=a^{-n}\delta_0$, 以及 $\tau^x\delta_0=\delta_x$.

又注意到,

$$\int_{\mathbb{R}^n}(h*g)(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}g(x)(\tilde{h}*f)(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此可以给出函数和缓增分布卷积的定义.

定义 4.3.6. 设 $u \in \mathscr{S}'$ 且 $h \in \mathscr{S}$, 定义卷积 $h * u$:

$$\langle h * u, f\rangle = \langle u, \tilde{h} * f\rangle,\ \ f \in \mathscr{S}.$$

设 $u = \delta_{x_0}$ 且 $f \in \mathscr{S}$, 则 $f * \delta_{x_0}$ 可以与函数 $x \mapsto f(x - x_0)$ 等同, 这是因为对任意 $h \in \mathscr{S}$:

$$\langle f * \delta_{x_0}, h\rangle = \langle \delta_{x_0}, \tilde{f} * h\rangle = (\tilde{f} * h)(x_0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - x_0)h(x)\,\mathrm{d}x.$$

因此和 δ_0 作卷积事实上是单位算子.

现在我们来定义函数和分布的乘法.

定义 4.3.7. 设 $u \in \mathscr{S}'$ 且 $h \in \mathscr{C}^\infty$, 且在无穷远处其各阶导数有最快多项式增长. 这意味着对任意多重指标 α, 存在常数 $C_\alpha, k_\alpha > 0$ 使得 $|(\partial^\alpha h)(x)| \le C_\alpha(1 + |x|)^{k_\alpha}$. 我们定义乘积 hu:

$$\langle hu, f\rangle = \langle u, hf\rangle,\ \ f \in \mathscr{S}.$$

上式是良定义的, 但对任意 $\mathscr{C}^\infty$ 函数, 其和缓增分布的乘积没有定义.

我们观察到, 若 g 支撑于 K 内, 则对任意 $f \in \mathscr{C}_0^\infty(K^c)$, 我们都有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

此外,g 的支集就是全体满足上式的闭集 K 的交. 这启发我们定义:

定义 4.3.8. 设 $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, 我们定义其支撑 $\mathrm{supp}u$ 为所有满足下面性质的闭集 K 的交:

$$\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), \mathrm{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^n \backslash K \implies \langle u, \varphi\rangle = 0.$$

支撑为紧集的分布恰好就是紧支分布, 位于 x_0 的 Dirac 质量的支撑为 $\{x_0\}$. 沿着同样的思路, 我们给出下面的定义:

定义 4.3.9. 我们称 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 内的分布 u 和开集 Ω 上的函数 h 一致, 若

$$\langle u, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)h(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall f \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega).$$

我们也称 u 和 h 在 Ω^c 外相容.

这个定义表明 $u - h$ 的支撑包含于 Ω^c. 下面是卷积和 Fourier 变换的性质.

定理 4.3.10. 若 $u \in \mathscr{S}'$ 且 $\varphi \in \mathscr{S}$, 则 $\varphi * u$ 是一个 $\mathscr{C}^\infty$ 函数, 且

$$(\varphi * u)(x) = \langle u, \tau^x \tilde{\varphi}\rangle,\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

此外, 存在常数 m, 使任意多重指标 α, 存在 $C_\alpha > 0$, 让

$$|\partial^\alpha(\varphi * u)(x)| \le C_\alpha(1 + |x|)^m.$$

若 u 是紧支的, 则 $\varphi * u$ 是 *Schwartz* 函数.

我们有下面关于紧支分布的重要结论:

定理 4.3.11 (Paley-Wiener)**.** 若 $u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$, 则 $\widehat{u}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的实解析函数. 特别地, $\widehat{u}$ 是 $\mathscr{C}^\infty$ 的. 此外 $\widehat{u}$ 及其各阶导数在无穷远处是多项式增长的, 且 $\widehat{u}$ 有在 $\mathbb{C}^n$ 上的全纯延拓.

这个定理立刻说明, 一个函数及其 Fourier 变换不能同时是紧支撑的. 对于更强的结论, 可见4.5.4中对 Heisenberg 不确定性原理的讨论.

之前命题4.1.7中 Fourier 变换的性质都可以推广到缓增分布上.

命题 4.3.12. *给定 $u, v \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 和 $f_j, f \in \mathscr{S}, y \in \mathbb{R}^n$, 而 $b \in \mathbb{C}$, α 是多重指标且 $a > 0$.*

1. $\widehat{u+v} = \widehat{u} + \widehat{v}$.
2. $\widehat{bu} = b\widehat{u}$.
3. 若在 $\mathscr{S}$ 中 $f_j \to j$, 则在 $\mathscr{S}$ 中 $\widehat{f_j} \to \widehat{f}$. 若在 $\mathscr{S}'$ 中 $u_j \to u$, 则在 $\mathscr{S}'$ 中 $\widehat{u_j} \to \widehat{u}$.
4. $(\tilde{u})^\wedge = \tilde{\widehat{u}}$.
5. $(\tau^y u)^\wedge = e^{-2\pi i y \cdot \xi} \widehat{u}$
6. $(e^{2\pi i x \cdot y} u)^\wedge = \tau^y \widehat{u}$
7. $(\delta^a u)^\wedge = (\widehat{u})_a = a^{-n} \delta^{a^{-1}} \widehat{u}$.
8. $(\partial^\alpha u)^\wedge = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{u}$
9. $\partial^\alpha \widehat{u} = ((-2\pi i x)^\alpha u)^\wedge$.
10. $(\widehat{u})^\vee = u$.
11. $\widehat{f * u} = \widehat{f}\widehat{u}$.
12. $\widehat{fu} = \widehat{f} * \widehat{u}$.
13. Leibniz 律: $\partial_j^\alpha (fu) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (\partial_j^k f)(\partial_j^{m-k} u)$, $\forall m \in \mathbb{Z}_+$.
14. Leibniz 律: $\partial^\alpha (fu) = \sum_{\gamma_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\gamma_n=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_1}{\gamma_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\gamma_n} (\partial^\gamma f)(\partial^{\alpha-\gamma} u)$.
15. 若 $u_k, u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$ 且在 L^p 中 $u_k \to u$, 则在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中 $u_k \to u$. 因此 $\mathscr{S}$ 中的收敛蕴含在 L^p 中的收敛, 进而蕴含在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的收敛.

证明. 所有这些命题都可以用 Schwartz 函数的相应性质导出. □

分布的 Fourier 变换在求解偏微分方程时有相当大的作用. 例如我们可以利用其解决一类二阶椭圆方程的问题. 限于篇幅, 我们就在叙述完分布 Fourier 变换的基本性质之后结束.

4.4 Fourier 变换和 Fourier 级数间的联系

4.4.1 Poisson 求和公式

我们以一个联系 $\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 分析和环面上的 Fourier 分析的重要结果开始. 假设 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上可积, 而 $\widehat{f}$ 为其 Fourier 变换. 我们将 $\widehat{f}$ 限制到 $\mathbb{Z}^n$ 上形成 Fourier 级数 (假设它收敛):

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x}.$$

这个级数代表什么? 因为它关于每个变量都是 1-周期的, 它不能是 f. 实际上, 它等于 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上的周期化, 这并不奇怪. 换句话讲, 一个函数在 $\mathbb{R}^n$ 上的 Fourier 展开重新产生了其周期化.

定理 4.4.1 (Poisson 求和公式). *设 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数, 满足 (适当下降): 对某两个 $C, \delta > 0$,*

$$|f(x)| \le C(1+|x|)^{-n-\delta}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n$$

并且其 Fourier 变换 $\widehat{f}$ 限制到 $\mathbb{Z}^n$ 上满足:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |\widehat{f}(m)| < \infty. \tag{4.4.1}$$

则对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 我们有:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m \cdot x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x+k), \tag{4.4.2}$$

特别地, 有

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(k).$$

证明. 在 $\mathbf{T}^n$ 上定义一个 1-周期函数:

$$F(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x+k).$$

则我们可以直接验证 $\|F\|_{L^1([0,1]^n)} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, 于是 $F \in L^1(\mathbf{T}^n)$. 现在我们证明 F 的 Fourier 级数序列和 f 的 Fourier 变换在 $\mathbb{Z}^n$ 上的限制相同:

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(m) &= \int_{\mathbf{T}^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x+k) e^{-2\pi i m \cdot x} \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbf{T}^n} f(x+k) e^{-2\pi i m \cdot x} \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^n - k} f(x) e^{-2\pi i m \cdot x} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i m \cdot x} \, \mathrm{d}x = \widehat{f}(m),
\end{aligned}$$

其中求和与积分的交换由 Weierstrass 关于一致收敛级数的 M-判别法保证:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{1}{(1+|k+x|)^{n+\delta}} \le \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{(1+\sqrt{n})^{n+\delta}}{(1+\sqrt{n}+|k+x|)^{n+\delta}} \le \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \frac{C_{n,\delta}}{(1+|k|)^{n+\delta}} < \infty,$$

其中我们用到了 $|k+x| \ge |k| - |x| \ge |k| - \sqrt{n}$. 这个计算同样表明 F 是 $[0,1]^n$ 上一致收敛连续函数级数的和, 因此在 $[0,1]^n$ 上连续, 故处处连续. 于是(4.4.1)中将 $|\widehat{f}(m)|$ 换为 $|\widehat{F}(m)|$ 也成立, 故性质3.2.5以及 F 连续的事实表明(4.4.2)对所有 $x \in \mathbf{T}^n$ 成立. 由周期性, 对所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 成立. □

4.4.2 收敛性问题的联系

Fourier 级数和 Fourier 变换在收敛性问题上也有重要的联系. 我定义 Carleson 算子为:

$$\mathscr{C}_{**}(f)(x) = \sup_{R>0} \left| \int_{|\xi| \le R} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} \, \mathrm{d}\xi \right|.$$

利用 Fourier 乘子在 $\mathbf{T}^n$ 和 $\mathbb{R}^n$ 上的转移方法, 我们可以得到下面两个结果等价:

定理 4.4.2. *对 $1 < p < \infty$, 存在有限的常数 C_p 使得:*

$$\left\| \sup_{N \in \mathbb{Z}_+} |F * D_N| \right\|_{L^p} \le C_p \|F\|_{L^p}, \ \forall f \in L^p(\mathbf{T}^1).$$

定理 4.4.3. *对 $1<p<\infty$, 存在有限的常数 C_p 使得:*

$$\|\mathscr{C}_{**}(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \ \forall f \in L^p(\mathbb{R}).$$

实际上, 我们可以只对 $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{T}^1)$ 证明定理4.4.2, 只对 $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ 证明定理4.4.3. 这是因为 $F \mapsto \sup_{N>0}|F * D_N|$ 和 $f \mapsto \mathscr{C}_{**}(f)$ 两个算子都是次线性且非负的, 而 $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{T}^1)$ 和 $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ 分别在 $L^p(\mathbf{T}^1)$ 和 $L^p(\mathbb{R})$ 中稠密, 于是稠密性论证给出了这些算子的延拓.

从这两个定理出发, 利用定理2.4.7, 我们得到经典的 Carleson-Hunt 定理:

定理 4.4.4 (Carleson-Hunt)**.** *假设 $f \in L^p(\mathbf{T}^1)$ $(1<p\infty)$, 则其 Fourier 级数几乎处处收敛于本身, 即*

$$S_N(f)(x) \to f(x) \ a.e. \ x \in \mathbb{R}$$

若 $f \in L^p(1<p\le 2)$, 则 Fourier 积分也收敛到自身:

$$\lim_{R\to\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}\,\mathrm{d}\xi = f(x).$$

这个定理首先由于 Carleson 的 [8] 得到了 $p=2$ 的情况, 而 Hunt 在 [19] 中其推广到了 $1<p<\infty$. Sjölin 在 [43] 中又将 L^p 中的 f 推广到了 $\mathbf{T}^1$ 上满足 $|f|(\log^+|f|)(\log+\log^+\log^+|f|)$ 可积的 f. 对于这类推广, Konyagin 在 [29] 中给出的反例表明在 $\mathbf{T}^1$ 上满足 $|f|(\log^+|f|)^{\frac{1}{2}}(\log^+\log^+|f|)^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ 可积的函数 f, 其 Fourier 级数可能发散. Katznelson 的 [26] 及 Kahane 和 Katznelson 的 [23] 证明了: 存在连续函数, 其 Fourier 级数恰好在给定的零测集上发散.

定理4.4.2还可以推广到高维:

定理 4.4.5. *对 $1<p<\infty$, 存在有限的常数 $C_{p,n}$ 使得:*

$$\left\|\sup_{N>0}|D_N^n * f|\right\|_{L^p(\mathbf{T}^n)} \le C_{p,n}\|f\|_{L^p(\mathbf{T}^n)}, \ \forall f \in L^p(\mathbf{T}^n). \tag{4.4.3}$$

作为推论,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}^n \\ |m_j|\le N}} \widehat{f}(m)e^{2\pi i m\cdot x} = f(x) \ a.e. \ x \in \mathbf{T}^n, \ \forall f \in L^p(\mathbf{T}^n).$$

此定理是一维情形的直接推论, 由 Fefferman 的 [10], Sjölin 的 [55] 和 Tevzadze 的 [55] 独立得到. Antonov 在 [1] 中证明了对于满足 $|f|(\log^+|f|)^n(\log^+\log^+\log^+|f|)$ 在 $\mathbf{T}^n$ 上可积的 f 而言, 其方体型部分和仍然几乎处处收敛.

高维情况下 Fourier 级数的部分和还有更多的考虑, 例如球型部分和, Riesz-Bochner 平均. 关于这些部分和, 它们的收敛性需要另外的研究. 对于球型部分和, 若 $n\ge 2$, 则存在 $L^p(\mathbf{T}^n)$ $(p\ne 2)$ 中的函数, 其球型部分和在 L^p 中不收敛. 存在 $L^p(\mathbf{T}^n)$ $(1\le p<2)$ 中函数, 其球型部分和并不几乎处处收敛. 至于 Riesz-Bochner 平均的相关结果则更加复杂, 略去.

4.5 应用

Fourier 变换的应用众多, 我们这里简单介绍几个:

4.5.1 波方程

我们在这里利用 Fourier 变换给出带初始条件波方程的一般解 (称之为 Cauchy 问题). 考虑 n 维波方程, 即 $u: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 并给出边界条件 $u(x,0)=f(x)$ 和 $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=f(x)$(其中

$f,g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$). 波方程的形式如下:

$$\Delta u=\sum_{i=1}^{b}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{4.5.1}$$

对(4.5.1)取 Fourier 变换, 由性质4.1.7知道:

$$-4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\xi,t)=\frac{\partial^2\hat{u}^2}{\partial t^2}(\xi,t).$$

现在固定 $\xi\in\mathbb{R}^n$, 上面的方程可以视作常微分方程, 其解为:

$$\hat{u}(\xi,t)=A(\xi)\cos(2\pi|\xi|t)+B(\xi)\sin(2\pi|\xi|t).$$

对初始条件取 Fourier 变换又可以得到:

$$\hat{u}(\xi,0)=\hat{f}(\xi)\text{ and }\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}(\xi,0)=\hat{g}(\xi)\implies A(\xi)=\hat{f}(\xi)\text{ and }2\pi|\xi|B(\xi)=\hat{g}(\xi).$$

因此有:

$$\hat{u}(\xi,t)=\hat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t)+\hat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|},$$

因此原本的解必然是上面函数的 Fourier 反演. 利用 Fourier 变换的性质4.1.7, 可以直接验证其确为解. 我们将上面的推导总结成下面的定理:

定理 4.5.1. *给定初值条件 $f,g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 后, 方程(4.5.1)的解为:*

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}\left[\hat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t)+\hat{g}(\xi)\frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi\xi}e^{2\pi ix\cdot\xi}\right]\mathrm{d}\xi.$$

关于唯一性的问题, 利用能量方法, 我们有如下定理:

定理 4.5.2. *假设 $u(x,t)$ 为闭上半平面 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上满足波方程的 $\mathscr{C}^2$ 函数, 且 $u(x,0)=\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$ 对任意 $x\in B(x_0,r_0)$ 成立, 则 $u(x,t)=0$ 对任意 $(x,t)\in\mathcal{L}_{B(x_0,r_0)}$ 成立, 其中*

$$\mathcal{L}_{B(x_0,r_0)}=\{(x,t)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}:\ |x-x_0|\leq r_0-t,\ 0\leq t\leq r_0\}.$$

实际上, 波方程的解更多地是利用函数关于球的平均表达的. 我们提到过, d'Alembert 给出了一维波方程解的公式:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+t)+f(x-t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(y)\,\mathrm{d}y.$$

实际上这个结果也可以推广到高维, 我们将其陈述如下:

定理 4.5.3. *沿用先前记号, 则:*

- *若 $d>1$ 为奇数. 对 $h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 定义其关于中心为 x, 半径为 r 的球面平均为:*

  $$M_r(h)(x)=Mh(x,r)=\frac{1}{A_n}\int_{S^{n-1}}h(x-r\gamma)\,\mathrm{d}\sigma(\gamma),$$

  其中 A_n 表示 $\mathbb{R}^n$ 中单位球 S^{n-1} 的面积. 则 Cauchy 问题的解为:

  $$u(x,t)=\frac{1}{(n-2)!!}\left[\partial_t(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}(t^{n-2}M_t(f)(x))+(t^{-1}\partial_t)^{\frac{d-3}{2}}(t^{d-2}M_tg(x))\right].$$

- *若 d 为偶数, 对 $h\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 定义其关于中心为 x, 半径为 r 的修正球面平均为:*

  $$\tilde{M}_rh(x)=\frac{2}{A_{n+1}}\int_{B^n}\frac{f(x+ry)}{\sqrt{1-|y|^2}}\,\mathrm{d}y.$$

  则 Cauchy 问题的解为:

  $$u(x,t)=\frac{1}{(n-2)!!}\left[\partial_t(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}(t^{n-2}\tilde{M}_t(f)(x))+(t^{-1}\partial_t)^{\frac{n-3}{2}}(t^{n-2}\tilde{M}_tg(x))\right]$$

4.5.2 周期边值条件的热方程

我们考虑 $F(t,x):[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为 $\mathscr{C}^\infty$, 它满足热方程和边值条件:

$$\frac{\partial}{\partial t}F(t,x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}F(t,x)\qquad F(0,x)=f(x). \tag{4.5.2}$$

并且 F 在 $(0,\infty)\times\mathbb{R}^n$ 上 $\mathscr{C}^\infty$, 且每个分量都以 1 为周期. 我们可以将这个问题视作解环面 $\mathbf{T}^n$ 上的热方程. 设 $c_m(t)$ 是 $F(x,t)$ 关于 x 的第 m 个 Fourier 系数, 根据 Fourier 系数的性质3.1.2和(4.5.2)的条件知道:

$$c_m'(t)=\int_{\mathbf{T}^n}\frac{\partial}{\partial t}F(t,x)e^{-2\pi i m\cdot x}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{T}^n}\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x,t)e^{-2\pi i m\cdot x}=-4\pi^2|m|^2c_m(t).$$

而且我们有初值 $c_m(0)=\widehat{f}(m)$, 于是上面的常微分方程给出解:

$$c_m(t)=\widehat{f}(m)e^{-4\pi^2|m|^2t}.$$

由此我们可以得出 F 的解应该为:

$$F(x,t)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}\widehat{f}(m)e^{-4\pi^2|m|^2t}e^{2\pi i m\cdot x}. \tag{4.5.3}$$

实际上, 我们可以引入热核:

$$H_t(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}e^{-4\pi|m|^2t}e^{2\pi i m\cdot x}$$

根据我们在3.1节进行的讨论, 可以将(4.5.3)表示为 $f*H_t(x)$.

实际上热核也是一族单位逼近 (可用 Poisson 求和公式4.4.1证明), 加上一些努力, 可以得到如下结果:

定理 4.5.4. *设 $f\in\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且各分量都以 1 为周期, 则方程(4.5.2)有解 $F(t,x)=(f*H_t)(x)$, 并且是满足在 $[0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ 上连续, 在 $(0,+\infty)\times\mathbb{R}^n$ 上 $\mathscr{C}^\infty$ 的唯一解.*

4.5.3 球内的格点数

$\mathbb{Z}^n$ 内的点称为格点. 在这一小节中, 我们介绍 $\mathbb{R}^n$ 中一个中心位于原点, 半径为 $\mathbb{R}$ 的球内格点个数的估计. 事实上, 命题的关键是对球面测度以及球特征函数的 Fourier 变换作估计. 证明的篇幅较长, 我们略去. 总之, 我们能得到以下结果:

定理 4.5.5. *设 $n\geq 2$, 而 $N(R)$ 为 $\overline{B}(0,R)$ 中格点的个数, 则:*

$$N(R)=v_nR^n+\mathcal{O}(R^{n-2+\frac{2}{n-1}})\ (R\to\infty).$$

历史上, Gauss 最先研究了 $n=2$ 的情形, 因此被称之为 Gauss 圆问题. 用 $N(r)$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中圆 $\overline{D}(0,r)$ 内整点的个数, 而 $E(r)=N(r)-\pi r^2$. Gauss 证明了 $|E(r)|\leq 2\sqrt{2}\pi r$, 而 Hardy 在 [16] 中证明了:

$$|E(r)|\neq o(r^{1/2}(\log r)^{1/4}).$$

事实上 Landau 也独立地发现了上面的结果. 现在人们猜想 (见 [14]), 误差应该满足:

$$|E(r)|=\mathcal{O}(r^{1/2+\varepsilon}),\ \forall\varepsilon>0.$$

假若 $t>0$ 使得 $E(r)=\mathcal{O}(r^t)$, 则 t 满足:

$$\frac{1}{2}<t\leq\frac{131}{208},$$

其中下界由 Hardy 和 Landau 在 1915 年得到, 而上界由 Martin Huxley 于 2000 年在 [20] 中证明.

4.5.4 Heisenberg 不确定性原则

Heisenberg 不确定性原理是量子力学中的基本概念. 其物理意义是:

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2},$$

其中 σ_x 和 σ_p 分别表示微观粒子位置和动量的标准差, 而 $\hbar$ 是约化 Planck 常数. 上面的式子定量地表达了一个粒子的位置和速度不能同时精确测定. 在调和分析中, 此原理可以被翻译如下: 对任意满足 $\|f\|_{L^2} = 1$ 的 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi^2| |\widehat{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi\right) \geq \frac{n^2}{16\pi^2}.$$

若我们引入 (对概率分布函数 $p(x)$) 的微分熵的概念:

$$H(p) = -\int_{\mathbb{R}} p(x) \log p(x) \, \mathrm{d}x,$$

则还有下面更强的 Hirschman 不确定性关系:

$$H(|f|^2) + H(|\widehat{f}|^2) \geq \log \frac{e}{2}.$$

实际上 Hirschman 在 1957 年仅证明了上面的式子 ≥ 0, 而其证明需要用到 Fourier 变换算子的范数 (即定理4.2.2), 也是由 Beckner 在 1975 年证明.

我们在定理4.3.11处已经提到过, 一个非零函数及其 Fourier 变换不能同时紧支撑, 而调和分析的理论可以证明:

定理 4.5.6 (Amrein-Berthier). *若 $E, F \subset \mathbb{R}^n$ 测度有限, 则存在常数 $C(E, F, n)$ 使得对任意 $f \in L^2(\mathbb{R})$,*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(E^c)} + \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2(F^c)}\right).$$

特别地, 一个 L^2 函数及其 Fourier 变换不能同时支撑在有限测度的集合上. 一般地说, 调和分析的这类不确定性原理是在定量表达下面粗糙的想法: 一个函数 f 及其 Fourier 变换 $\widehat{f}$ 不可能都局部化到小的集合上.

最后我们在此总结 Fourier 变换的性质: Fourier 变换将一个函数从空间域变到频域, 逆转了函数的局部性质 (这就是不确定性原理). 若作用两次, 得到函数本身的反射 (定理4.1.9性质 (2)). 它将卷积变为点态乘法, 平移变为 (频率) 调制, 扩张变为伸缩.(分别可见定理4.1.7的 (12),(7),(8) 和定理4.3.12的 (12),(5),(7).) 其在无穷远处的收敛速度蕴含了原来函数的光滑性信息.

参考文献

[1] Antonov, N. Yu., *The behavior of partial sums of trigonometric Fourier series* [Russian], Ph.D. Thesis, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 1998.

[2] Beckner, W., *Inequalities in Fourier analysis*, Ann. of Math. (2nd Ser.) 102 (1975), no. 1, 159-182.

[3] Bernstein, S., *Sur la convergence absolue des séries trigonométriques*, Comptes Rendus des Séances de l' Académie des Sciences, Paris, 158 (1914), 1661-1663.

[4] Bochner, S., *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1955.

[5] Bochner, S., *Lectures on Fourier Integrals, (with an author's supplement on monotonic functions, Stieltjes integrals, and harmonic analysis)*, Translated by Morris Tenenbaum and Harry Pollard. Annals of Mathematics Studies, No. 42, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1959.

[6] Calderón, A. P., Zygmund, A., *A note on interpolation of sublinear operators*, Amer. J. Math. 78 (1956), 282-288.

[7] Calderón, A. P., *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. 24(1964), 113-190.

[8] Carleson, L., *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. 116 (1966), no. 1, 135-157.

[9] Dirichlet, P. G., *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, J. Reine und Angew. Math. 4 (1829), 157-169.

[10] Fefferman, C., *On the convergence of multiple Fourier series*, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 744-745.

[11] Grafakos, L., Montgomery-Smith, S., *Best constants for uncentred maximal functions*, Bull. London Math. Soc. 29 (1997), no. 1, 60-64.

[12] Grafakos, L., *Classical Fourier Analysis*, Springer.

[13] Grafakos, L., *Modern Fourier Analysis*, Springer.

[14] Guy, Richard K. (2004). *F1: Gauß's lattice point problem*, Unsolved Problems in Number Theory. Problem Books in Mathematics. Vol. 1 (3rd ed.). New York: Springer-Verlag. pp. 365-367.

[15] Hardy, G. H., *Theorems relating to the summability and convergence of slowly oscillating series*, Proc. London Math. Soc. (2) 8 (1910), no. 1, 301-320.

[16] Hardy, G. H. (1915). *On the expression of a number as the sum of two squares*, Quarterly Journal of Mathematics. 46: 263-283.

[17] Hirschman, I. I. Jr., *A convexity theorem for certain groups of transformations*, J. Analyse Math. 2 (1953), 209-218

[18] Hunt, R., *An extension of the Marcinkiewicz interpolation theorem to Lorentz spaces*, Bull.Amer. Math. Soc. 70 (1964), 803-807.

[19] Hunt, R., *On the convergence of Fourier series, Orthogonal Expansions and Their Continuous Analogues* (Proc. Conf., Edwardsville, IL, 1967), pp. 235-255, Southern Illinois Univ. Press, Carbondale IL, 1968.

[20] Huxley, M. N. (2002). *Integer points, exponential sums and the Riemann zeta function*, In Bennett, M. A.; Berndt, B. C.; Boston, N.; Diamond, H. G.; Hildebrand, A. J.; Philipp, W. (eds.). Number theory for the millennium, II: Papers from the conference held at the University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana, IL, May 21-26, 2000. Natick, Massachusetts: A K Peters. pp. 275-290.

[21] Joseph Fourier, *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides*, Présenté le 21 décembre 1807 à l'Institut national - Nouveau Bulletin des sciences par la Société philomatique de Paris, t. I, p. 112-116.

[22] Joseph Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris: Firmin Didot Père et Fils. 1822.

[23] Kahane, J.-P., Katznelson, Y., *Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques*, Studia Math. 26 (1966), 305-306.

[24] Kalton, N. J., *Plurisubharmonic functions on quasi-Banach spaces*, Studia Math. 84 (1986), no. 3, 297323.

[25] Kalton, N. J., *Analytic functions in non-locally convex spaces and applications*, Studia Math. 83 (1986), no. 3, 275-303.

[26] Katznelson, Y., *Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques*, Studia Math. 26 (1966), 301-304.

[27] Kolmogorov, A. N., *Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout*, Fund. Math. 4 (1923), 324-328.

[28] Kolmogorov, A. N., *Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout*, C. R. Acad. Sci. Paris 183 (1926), 1327-1328.

[29] Konyagin, S. V., *On the divergence everywhere of trigonometric Fourier series*, Sb. Math. 191 (2000), no. 1-2, 97-120.

[30] Lebesgue, H., *Intégrale, Longueur, Aire*, Annali Mat. Pura Appl. 7 (1902), 231-359.

[31] Lebesgue, H., *Oeuvres Scientifiques* (en cinq volumes), Vol. I, (French) Sous la rédaction de F. Châtelet et G. Choquet, Institut de Mathématiques de l' Université de Genève, Geneva, 1972.

[32] Lévy, P. (1935). *Sur la convergence absolue des séries de Fourier*, Compositio Mathematica. 1: 1-14.

[33] Luzin, N., (1912), *On the convergence of trigonometric series*, Moskau Math. Samml. (in Russian), 28: 461-472.

[34] Luzin, N., *Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier*, C. R. Acad. Sci. Paris 156 (1913), 1655-1658.

[35] Luzin, N., *Intégral et série trigonométrique*, Mat. Sb., 30:1 (1916), 1-242.

[36] Marcinkiewicz, J., Zygmund, A., *On the summability of double Fourier series*, Fund. Math. 32 (1939), 122-132.

[37] Marcinkiewicz, J., *Sur l'interpolation d'operations*, C. R. Acad. Sci. Paris 208 (1939), 1272-1273.

[38] Melas, A., *The best constant for the centered Hardy-Littlewood maximal inequality*, Ann. of Math. (2nd Ser.) 157 (2003), no. 2, 647-688.

[39] Osserman, R. *The isoperimetric inequality*, Bull. AMS., 84(1978), 1182-1238.

[40] Riesz, F., *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen*, Math. Ann. 69 (1910), no. 4, 449-497.

[41] Riesz, M., *Les fonctions conjuguées et les séries de Fourier* , C. R. Acad. Sci. Paris 178 (1924), 1464-1467.

[42] Riesz, M., *Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires*, ActaMath. 49 (1927), no. 3-4, 465-497.

[43] Sjölin, P., *Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series*, Ark. Math. 9 (1971), 65-90.

[44] Stein, E. M., *Interpolation of linear operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), 482-492.

[45] Stein, E. M., *Some results in harmonic analysis in Rn, for* $n \to \infty$, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 9 (1983), no. 1, 71-73.

[46] Stein, E. M., Strömberg, J.-O., *Behavior of maximal functions in* $\mathbb{R}^n$ *for large* n, Ark. Math. 21 (1983), no. 2, 259-269.

[47] Stein, E. M., *Boundary behavior of harmonic functions on symmetric spaces: Maximal estimates for Poisson integrals*, Invent. Math. 74 (1983), no. 1, 63-83.

[48] Stein E. M. and Rami Shakarchi, *Fourier Analysis: an Introduction*, Princeton University Press.

[49] Stein E. M. and Rami Shakarchi, *Functional Analysis: An Introduction to Further Topics in Analysis*, Princeton University Press.

[50] Steiner, J. *Einfacher Beweis der isoperimetrischen Hauptsätze*, J. reine angew Math., 18 (1838), 281-296; and Gesammelte Werke Vol. 2, pp.77-91, Reimer, Berlin, 1882.

[51] Tamarkin, J. D., Zygmund, A., *Proof of a theorem of Thorin*, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), 279-282.

[52] Tauber, A., *Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen Monatsh.* Math. Phys. 8 (1897), no. 1, 273-277.

[53] Thorin, G. O., *An extension of a convexity theorem due to M. Riesz*, Fys. Saellsk. F ¨ orh. ¨ 8 (1938), No. 14.

[54] Thorin, G. O., *Convexity theorems generalizing those of M. Riesz and Hadamard with some applications*, Comm. Sem. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.] 9 (1948), 1-58.

[55] Tevzadze, N. R., *The convergence of the double Fourier series of quadratic at a square summable function*, Sakharth. SSR Mecn. Akad. Moambe 58 (1970), 277-279.

[56] Vitali, G., *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*, Atti Accad. Sci. Torino 43 (1908), 229-246.

[57] Weierstrass, K. Vorl. *ueber Variationsrechnung*, Mathematische Werke, Vol. 7, Mayer and Müller, Leipzig, 1927

[58] Wiener, N. (1932). *Tauberian Theorems*, Annals of Mathematics. 33 (1): 1-100.

[59] Zygmund, A., *On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operators*, J. Math. Pures Appl. (9) 35 (1956), 223-248.