意象理论的历史

陈潇扬

Qiuzhen College, Tsinghua University

2024 Spring

目录

第一章　经典层论

最早的层论一般认为由 Leray 在其 1945 年关于微分方程的工作中产生 [Ler45]，但是由于当时的范畴论尚未成熟，再加上当时 Leray 采用的层的定义是给拓扑空间的每个闭集上赋予一个模，导致其定义与今天的看起来大不相同。在 50 年代初，今天为人们所熟知的层的概念正式被 Cartan 提出 [Car53]。然而，Cartan 提出的不是层，而是平展空间（虽然之后我们会证明两者是等价的）。从直观上讲，平展空间是纤维丛的推广，其在每个纤维（此处一般被称作茎）上引入了阿贝尔群结构。平展空间的概念无疑比层要直观许多，而且在复几何，解析几何等领域中，平展空间的概念已经完全能够满足研究的各种需求。于是在几年后，在代数几何的逐渐发展中，Grothendieck 才建立了真正的层理论。我们按照历史发展顺序，先从平展空间讲起。

1.1 平展空间

定义 1.1.1. 考虑一个拓扑空间 X（此处的拓扑空间应具有若干良好的性质）。X 上的一个平展空间是满足以下几点性质的一个拓扑空间 E 和 $p: E \to X$ 形成的二元组（当 p 的意义明确时我们省略 p）:

1. p 是满射，而且是一个局部同胚。
2. E 关于 p 的每个纤维构成一个阿贝尔群，并且 $+: E+E \to E$ 和 $inv: E \to E$ 是连续的。此处 $E+E$ 是 $E \times E$ 中两分量属于同一纤维的子空间，加法和取逆由每个纤维上的阿贝尔群结构给出。

我们将 X 中某点 x 处的茎（即纤维）记作 E_x。

定义 1.1.2. 对于 X 上的两个平展空间 $\mathcal{S} = (E, p)$ 和 $\mathcal{S}' = (E', p')$，我们定义 $f: E \to E'$ 是一个平展空间映射如果 $p'f = p$，并且 $f_x: E_x \to E'_x$ 是群同态。我们将其记作 $f: \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$。同时，我们将 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 间所有的平展空间映射记作 $\mathrm{Hom}_{et}(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$。
显然，依照如上定义，所有的平展空间和平展空间间的平展空间映射构成一个范畴，我们将其记作 $\mathbf{Sh}_{et}(X)$。

定义 1.1.3. 对于 X 上的平展空间 (E, p)，我们定义 (E', p') 为其平展子空间，如果 (E', p') 本身为平展空间，而且存在嵌入映射 $i: E' \hookrightarrow E$，同时使得 i 是平展空间映射。

引理 1.1.4. *平展空间映射 $f: \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ 是一个局部同胚。*

证明: 考虑 $s \in E_x$，则 $f(s) \in E'_x$。由 p 和 p' 的局部同胚性，s 和 $f(s)$ 分别有一个邻域 U_s 和 $U'_{f(s)}$ 与 x 的邻域 U 和 U' 被 p 和 p' 诱导同胚。于是我们考虑 U_s 和 $U'_{f(s)}$ 中 $U \cap U' = V$ 在 p 下的原像 V_s 和 $V_{f(s)}$。$f: V_s \to V_{f(s)}$ 显然是同胚。 □

推论 1.1.5. *对于一个平展空间和其平展子空间 $\mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{S}$，我们有 $\mathcal{S}'$ 和其像的同胚。*

证明: 局部同胚一定是开映射。于是局部同胚和双射能够推出同胚。 □

定义 1.1.6. 令 $U \subseteq X$ 为 X 中的开集。我们定义某个平展空间 E 在 U 上的截面的集合为

$$\Gamma(U, E) = \{\sigma : U \to E | p\sigma = \mathrm{id}_U\}$$

命题 1.1.7. *$\Gamma(U, E)$ 具有阿贝尔群结构。*

证明: 令 σ, σ' 为 U 上的截面。则注意到 $\sigma(x), \sigma'(x) \in E_x$，故我们定义 $\Gamma(U, E)$ 上的加法为逐点加法，即

$$(\sigma + \sigma')(e) := \sigma(e) + \sigma'(e)$$

该映射的连续性由加法映射的连续性保证。
我们定义 σ 的逆为 $(-\sigma)(e) = -\sigma(e)$，其连续性由取逆的连续性保证。
我们任取 $\sigma \in \Gamma(U, E)$，则 $0 := (\sigma + (-\sigma)) \in \Gamma(U, E)$ 为连续映射。经逐点验证我们发现 $0(x) = 0_x \in E_x$，故其显然为 $\Gamma(U, E)$ 中的单位元。加法的交换律和结合律由逐点的交换律和结

合律给出。
最后，我们证明 $\Gamma(U,E)$ 非空。对于 $x \in U$，由于 p 是局部同胚，存在 $x \in U_x \subseteq U$，$p: V_x \to U_x$ 是同胚。从而，在 U_x 上截面存在，故零截面存在。考虑 U_x 上的零截面 σ_{U_x}，这些截面显然在交上依然为零截面，于是在交上相容。从而，由粘贴引理，我们知 U 上存在一个截面。综上，$\Gamma(U,E)$ 具有阿贝尔群结构。 $\square$

推论 1.1.8. 全局截面存在。

命题 1.1.9. $\mathbf{Sh}_{et}(X)$ 是加性范畴。

证明: 我们首先证明 $\mathrm{Hom}_{et}(\mathcal{S},\mathcal{S}')$ 非空。这是由于 $\mathcal{S} \xrightarrow{p} X \xrightarrow{0} \mathcal{S}'$ 是 $\mathcal{S}$ 到 $\mathcal{S}'$ 的平展映射。
我们再证明 $\mathrm{Hom}_{et}(\mathcal{S},\mathcal{S}')$ 具有阿贝尔群结构。这与前一证明完全同理，我们同样定义加法为逐点加法，取逆为逐点取逆，单位元为 $0: e \mapsto 0 \in E'_{p(e)}$。
加法与复合的结合律由定义显然。
$\mathbf{Sh}_{et}$ 中的零对象是零平展空间：$\mathrm{id}: X \to X$，每个纤维赋予平凡群结构。因为平凡群是阿贝尔群范畴中的零对象，而零截面是连续的，所以其为 $\mathbf{Sh}_{et}$ 中的零对象。
$\mathbf{Sh}_{et}$ 中的积和余积均由纤维逐点的直和给出，即对于两个 X 上的平展空间 $\mathcal{S} = (E,p)$ 和 $\mathcal{S}' = (E',p')$，我们定义

$$F = \coprod_{x \in X} E_x \oplus E'_x$$

其中 F 的拓扑由拓扑基

$$\mathscr{U} = \{(\sigma,\sigma')U | U \subseteq X, \sigma \in \Gamma(U,\mathcal{S}), \sigma' \in \Gamma(U,\mathcal{S}')\}$$

给出。同时，我们令 $q: F \to X$ 为 $E_x \oplus E'_x \mapsto x$。该映射显然连续。于是我们定义 $\mathcal{T} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{S}' = (F,q)$。最后 $i: E \to F$，$e \mapsto (e,0')$ 和 $p: F \to E$，$(e,e') \mapsto e$ 显然为平展空间映射，故由 F 逐点的泛性质，$\mathcal{T}$ 为 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{S}'$ 的双积。
综上，$\mathbf{Sh}_{et}(X)$ 是加性范畴。 $\square$

注记. 实际上，$\mathbf{Sh}_{et}(X)$ 是一个阿贝尔范畴。但是由于核与余核的构造相对难以给出，我们暂时不直接证明这一点，而是在接下来的几章中用其他的方法证明这一事实。

1.2 预层，层条件和层

定义 1.2.1. 对于一个拓扑空间 X，我们如下定义其开集范畴 $\mathrm{Open}(X)$：

1. $\mathrm{Open}(X)$ 的对象是 X 中全部开集。
2. 对于开集 U 和 V，我们定义

$$\mathrm{Hom}(U,V)=\begin{cases} * & \text{如果} U\subseteq V \\ \phi & \text{如果} U\not\subseteq V \end{cases}$$

定义 1.2.2. 对于一个拓扑空间 X，我们定义其上的一个预层为 $\mathrm{Open}(X)^{\mathrm{op}}$ 到 $\mathbf{Ab}$ 的反变函子。我们将这一函子范畴记作 $\mathbf{pSh}(X)$。对于一个预层 $\mathcal{P}$，对于某个开集 U，我们称 $\mathcal{P}(U)$ 中的一个元素为 U 上的截面。若 $V\subseteq U$，则由反变函子的性质，存在 $\mathcal{P}(U)\to\mathcal{P}(V)$ 的群同态，我们称之为限制映射。我们称一个自然变换 $\mathcal{P}\to\mathcal{Q}$ 为预层映射。

命题 1.2.3. *预层间的单（满）态射等价于逐点的单（满）态射，而且其极限和余极限是逐点的。*

证明: 注意到我们有 $ev_U:\mathbf{pSh}(X)\to\mathbf{Ab}$ 的函子：$\mathcal{P}\mapsto\mathcal{P}(U)$。我们将构造这个函子的左伴随和右伴随，则以上性质自明。我们在以下将右伴随记作 U_*，将左伴随记作 $U_!$。
对于一个阿贝尔群 A，我们定义 $U_*(A)$ 为如下的预层：

$$U_*(A)(V)=\begin{cases} A & \text{如果} U\subseteq V \\ 0 & \text{如果} U\not\subseteq V \end{cases}$$

显然，给出了某个预层映射 $\mathcal{P}\to U_*(A)$ 一定会给出某个 $\mathcal{P}(U)\to A$ 的同态。反之，如果给定了 $\mathcal{P}(U)\to A$ 的同态，可以自然的定义 $\mathcal{P}(W)\to 0$ 和 $\mathcal{P}(V)\to A$ 为 $\mathcal{P}(V)\to\mathcal{P}(U)\to A$ 的复合。二者显然互逆，故 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}}(\mathcal{P},U_*(A))\simeq\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathcal{P}(U),A)$。该双射显然自然。相似的，我们定义 $U_!(A)$ 为如下的预层：

$$U_*(A)(V)=\begin{cases} A & \text{如果} V\subseteq U \\ 0 & \text{如果} V\not\subseteq U \end{cases}$$

伴随性质的验证与上述过程同理。 □

推论 1.2.4. *预层范畴完备且余完备。*

证明: 由 $\mathbf{Ab}$ 完备且余完备显然。 □

定义 1.2.5. 我们定义 $\mathcal{Q}$ 为 $\mathcal{P}$ 的子预层，如果存在单态射 $\mathcal{Q}\hookrightarrow\mathcal{P}$。由命题 1.2.3，这等价于存在一个预层映射 $\mathcal{Q}\to\mathcal{P}$ 使得其在每个开集上都是单射。我们定义，对于预层 $\mathcal{P}$ 和其子预层 $\mathcal{Q}$，其商预层 $\mathcal{P}/\mathcal{Q}$ 为如下预层：

1. $\mathcal{P}/\mathcal{Q}(U)=\mathcal{P}(U)/\mathcal{Q}(U)$
2. 对于一个嵌入 $V\hookrightarrow U$，我们定义 $\mathcal{P}/\mathcal{Q}(U)\to\mathcal{P}/\mathcal{Q}(V)$ 的限制映射为 $[\sigma]|_V:=[\sigma|_V]$，其中 $[\sigma]$ 表示其在 $\mathcal{P}(U)/\mathcal{Q}(U)$ 中的等价类。

该限制映射良定义，因为若 $[\sigma]=[\sigma']$，则存在 $\tau\in\mathcal{Q}(U)$，$\sigma=\sigma'+\tau$。于是我们有 $\sigma|_V=\sigma'|_V+\tau|_V$，故 $[\sigma]|_V=[\sigma']|_V$。

定义 1.2.6. 层条件是指如下的等化子性质：对于任意一个开集 U 和其的一族开覆盖 U_i，我们有如下的图表

$$\mathcal{P}(U)\to\prod_i\mathcal{P}(U_i)\rightrightarrows\prod_{(i,j)}\mathcal{P}(U_i\cap U_j)$$

是等化子。其中第一个箭头是限制映射，第二组箭头中上面的是 $\mathcal{P}(U_i)$ 到 $\mathcal{P}(U_i\cap U_j)$ 的限制，下面的是 $\mathcal{P}(U_j)$ 到 $\mathcal{P}(U_i\cap U_j)$ 的限制。

注记. 层条件可被如下等价的叙述：对于任意一个开集 U 和其的一族开覆盖 U_i，若给定 U_i 上的一族截面 σ_i，使得 σ_i 和 σ_j 在 $U_i\cap U_j$ 上的限制相同，则存在唯一一个 U 上的截面 σ 使得 σ 限制到 U_i 上是 σ_i。

定义 1.2.7. 我们定义满足层条件的预层为层。同时，我们定义 X 上的层范畴为 $\mathbf{pSh}(X)$ 包含所有层的全子范畴，记作 $\mathbf{Sh}(X)$。

命题 1.2.8. *对于一个平展空间 $\mathcal{S}=(E,p)$，其截面 $\Gamma(-,\mathcal{S}):\mathrm{Open}(X)\to\mathbf{Ab}$ 构成一个层。*

证明: 这显然是一个预层。我们只需验证层条件。考虑一个开集 U 和其的一个开覆盖 U_i，另给定 $\Gamma(U_i,\mathcal{S})$ 中的元素 σ_i，使得 $\sigma_i(x)=\sigma_j(x)$ 对于 $x\in U_i\cap U_j$ 成立。此时，由粘贴引理知对 $x\in U_i$，令 $\sigma(x)=\sigma_i(x)$ 唯一给出一个良定义的 U 上的截面。 □

注记. 借此构造，我们大致可以对本章开头提到的平展空间和层范畴的等价有一个初步的印象。在下一节中，我们将说明每个层都以某种方式对应一个平展空间。同时，我们也能看出截面和限制映射这些名称就来自于平展空间和层范畴的等价。

命题 1.2.9. *预层范畴是阿贝尔范畴。*

证明: 我们先证明预层范畴是加性范畴。
首先，对于两个预层 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{Q}$，我们赋予 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(X)}(\mathcal{P},\mathcal{Q})$ 一个阿贝尔群结构：我们定义 $(f+g)_U=f_U+g_U$。对于 $i:V\hookrightarrow U$，由于限制映射是群同态，显然 $(f+g)_U|_V=(f_U+g_U)|_V=f_U|_V+g_U|_V$，故 $(f+g)$ 的确为一个良定义的预层映射。同理，我们定义 $-f$ 为 $(-f)_U=-f_U$，由上述论证亦可证明 $-f$ 是一个良定义的预层映射。零映射由 $0_U=0$ 给出，良定义性显然。加法的交换律和结合律由逐点的交换律和结合律给出。
加法关于结合的分配律由逐点验证显然。
零对象为零预层，即 $0(U)=0$。该性质由推论 1.2.4 对空范畴取极限和余极限得出。
二元积和余积的存在性同理由推论 1.2.4 得出。
我们再验证预层范畴是阿贝尔范畴。
核和余核的存在性依然由推论 1.2.4 得出（（余）核是与零映射的（余）等化子）。
对于一个单态射 $\mathcal{Q}\hookrightarrow\mathcal{P}$，其是自然投影 $\mathcal{P}\twoheadrightarrow\mathcal{P}/\mathcal{Q}$ 的核，因为由命题 1.2.3，其为逐点的核。对于一个满态射 $\mathcal{P}\twoheadrightarrow\mathcal{R}$，考虑其核 $\mathcal{Q}\hookrightarrow\mathcal{P}$，则 $\mathcal{R}$ 同构于 $\mathcal{P}/\mathcal{Q}$：由商（余核）泛性质，我们有映射 $\mathcal{P}/\mathcal{Q}\to\mathcal{R}$；同时，由核和商的构造，该映射显然为逐点的同构，故由命题 1.2.3 该映射是同构。于是所有单态射都是核，所有满态射都是余核。
综上，$\mathbf{pSh}$ 是阿贝尔范畴。 □

1.3 层化

本节的主要目的是证明如下的定理：

定理 1.3.1. 存在一个函子 $\mathbf{pSh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$，$\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}^+$ 和单位到这个函子的自然变换 $\theta_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^+$，满足如下的泛性质：对于任意的层 $\mathcal{F}$ 和预层映射 $\mathcal{P} \to \mathcal{F}$，都存在唯一层映射 $\tilde{f} : \mathcal{P}^+ \to \mathcal{F}$ 使如下图表交换：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta_{\mathcal{P}}"'] & \mathcal{F} \\ \mathcal{P}^+ \arrow[ur, dashed, "\exists! \tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

换言之，$\mathbf{Sh}(X)$ 是 $\mathbf{pSh}(X)$ 的反射子范畴。
该函子被称作层化函子，是层论中最重要的构造之一。

定义 1.3.2. 对于 $x \in X$ 和一个 X 上的预层 $\mathcal{P}$，我们定义 $\mathcal{P}$ 在 x 处的茎 $\mathcal{P}_x$ 为如下的阿贝尔群：

$$\mathcal{P}_x := \varinjlim_{U \in \mathrm{nbd}(x)} \mathcal{P}(U)$$

由余极限的定义，我们对于 $x \in U$ 有如下映射：$\mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}_x$。我们将一个截面 σ 的像记作 σ_x。

推论 1.3.3. 对于一个截面 σ，和一个开集 V，满足 $x \in V \subseteq U$，则我们有 $\sigma_x = (\sigma|_V)_x$。对于两个截面 σ 和 σ'，$\sigma_x = \sigma'_x$ 当且仅当存在一个开集 V 使得 $x \in V \subseteq U$，$\sigma|_V = \sigma'|_V$。对于一个预层映射 $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$，我们有 $f_x : \mathcal{P}_x \to \mathcal{Q}_x$。

证明：由余极限构造显然。 □

引理 1.3.4. 函子 $\Gamma(-, \mathcal{S})$ 保持茎。

证明：由于某个点的邻域 $\mathrm{nbd}(X)$ 以反向包含为偏序是定向集，其余极限可由所有等价类 $[\sigma]$ 表示。
我们注意到我们有从 $\Gamma(-, \mathcal{S})$ 在 x 处的茎打到 E_x 的同态，由 $[\sigma] \mapsto \sigma(x)$ 给出。该同态满，由于对于任意 E_x 中的元素 s，由 p 的局部同胚性质，我们有 $U \ni x$，$U_s \ni s$，$U \mapsto U_s$ 是同胚，于是 $[U_s] \mapsto s$。然后，我们验证该同态单。我们考虑该映射的核：若 $[\sigma] \mapsto 0_x$，则由 p 在 0_x 处的局部同胚性我们知道 σ 必在某个邻域上是零截面。于是 $[\sigma] = [0]$。 □

例子. 考虑一个流形 X 和其上的光滑函数层：若 U 为 X 中的开集，则定义 $C^\infty(U) := \{f : U \to \mathbb{R} | f 光滑\}$（我们暂时只考虑其群结构）。则 C^∞ 在某点 $x \in X$ 处的茎为该点处的光滑函数芽。显然，这构成一个阿贝尔群。

注记. 我们不难看出，茎反映了一个层在某点 x 处的局部性质。后面，我们将会发现茎能很大程度上决定层（以及层映射）的性质，而对预层则不能。我们先用一个简单的引理举一个例子。

引理 1.3.5. 对于一个预层到层的映射 $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$，如果 $\varphi_x = 0_x$ 对于任意 $x \in X$ 成立，则 $\varphi = 0$。

证明: 我们考虑 $\sigma \in \mathcal{P}(U)$。依定义，$\varphi_x(\sigma_x) = 0$ 对于任意 $x \in U$ 成立。于是 $\varphi(\sigma)$ 在某个 x 的邻域 U_x 上等于 0。零截面的交依然是零截面，而 U_x 构成一组 U 的开覆盖。于是根据 $\mathcal{F}$ 的层条件，我们立刻有 $\varphi(\sigma) = 0$。 □

推论 1.3.6. 对于两个预层到层的映射 φ 和 ψ，如果 $\varphi_x = \psi_x$ 对于任意 $x \in X$ 成立，则 $\varphi = \psi$。

证明: 回忆 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(X)}(\mathcal{P}, \mathcal{F})$ 构成阿贝尔群。于是 $\varphi = \psi$ 等价于 $\varphi - \psi = 0$，而 $\varphi_x = \psi_x$ 等价于 $(\varphi - \psi)_x = 0$。 □

构造 1.3.7. 我们定义一个函子：$\mathbf{pSh}(X) \to \mathbf{Sh}_{et}(X)$，$\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}^{et}$，具体构造如下：
我们令 $\mathcal{P}^{et} = (E, p)$，其中 $E_x = p^{-1}(x) = \mathcal{P}_x$，同时考虑拓扑基

$$\mathscr{B} := \{\{\sigma_x | x \in U\} | \sigma \in \mathcal{P}(U)\}$$

我们将形如 $\{\sigma_x | x \in U\}$ 的开集同样记作 (σ, U)。注意到这的确定义了一个 E 上的拓扑基：对于 (σ, U) 和 (σ', U')，若其交非空，则设 $x \in U' \cap V'$，$\sigma_x = \sigma'_x$。由余极限的构造，我们知存在一个开集 $x \in V \subseteq U \cap U'$，$\sigma|_V = \sigma'|_V$，我们将其记作 ρ。于是 $\sigma_x \in (\rho, V) \subseteq (\sigma, U) \cap (\sigma', U')$。
我们现在验证 $\mathcal{P}^{et}$ 的确是一个平展空间：由于 E_x 非空，所以 p 一定为满射。考虑 X 中的开集 U，$x \in U$，我们取出一个 E_x 中的元素 s。由余极限的定义，s 一定来源于某个等价类 ρ_x，$\rho \in \mathcal{P}(V)$。于是考虑开集 $(\rho|_{U \cap V}, U \cap V) = W$，依定义 $p(W) \subset U$，于是 p 连续。最后，p 将开集 (σ, U) 同胚的映射至 U，故 p 是局部同胚。
E_x 上的阿贝尔群结构由余极限的阿贝尔群结构给出。我们现在证明加法和取逆是连续的。显然，取逆是 E 上的自同胚，将开集 (σ, U) 打到 $(-\sigma, U)$。我们现在考虑加法。令 (σ, U) 为 E 中的开集，设 $\rho_x + \rho'_x = \sigma_x$。不妨令 $(\rho + \rho')|_V = \sigma|_V$，则我们有 $+ : (\rho, V) + (\rho', V) \to (\sigma|_V, V) \subseteq (\sigma, U)$，故加法将开集拉回至开集，故加法连续。
同时，我们将态射 $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ 打到 $f^{et} : \mathcal{P}^{et} \to \mathcal{Q}^{et}$，其定义为 $f^{et}(\sigma_x) = f_x(\sigma_x)$，即 f^{et} 由每个茎上诱导的映射给出。该映射连续：我们考虑 $f(\sigma_x) \in (\sigma', U')$，则 $f(\sigma_x) = f(\sigma)_x = \sigma'_x$，故存在某个 V，$x \in V \subseteq U'$，$f(\sigma)|_V = \sigma'|_V$。故 $f^{et}(\sigma_x) \in f^{et}((\sigma, V)) \subseteq (\sigma', U')$。我们显然有 $p'f = p$，故 f^{et} 的确为平展空间映射。
我们定义函子 $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}^+$ 为复合 $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}^{et} \mapsto \Gamma(-, \mathcal{P}^{et})$。
我们如下构造一个从单位到该函子的自然变换 $\theta_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^+$：我们将 $\mathcal{P}(U)$ 中的某个截面 σ 映射到 $\Gamma(U, \mathcal{P}^{et})$ 中由开集 (σ, U) 诱导的的截面（之后将记作 σ^+）。这显然诱导了一个预层映射。

推论 1.3.8. 自然变换 $\theta_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^+$ 诱导每个茎上的同构。

证明: 由引理 1.3.4 和层化函子的构造知 $\mathcal{P}_x$ 和 $\mathcal{P}^+_x$ 的典范同构的确由 $\theta_{\mathcal{P}}$ 诱导。 □

命题 1.3.9. $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{et}$ 和 $\mathcal{S} \mapsto \Gamma(-, \mathcal{S})$ 给出了 $\mathbf{Sh}(X)$ 与 $\mathbf{Sh}_{et}(X)$ 的范畴等价。

证明: 我们验证 $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}^+$，$\mathcal{S} \simeq \Gamma(-, \mathcal{S})^{et}$。
对于前者，由于我们有 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{F}^+$ 的映射，我们只需验证 $\theta_{\mathcal{F}}$ 在每个开集上是双射。
对于单射，如果 $\theta_{\mathcal{F}}(U)(\sigma) = \sigma^+ = 0^+$，则对于任意 $x \in U$，我们有 $\sigma^+_x = 0^+_x$，故存在一个邻域 U_x 使得 $\sigma|_{U_x} = 0|_{U_x}$。这一族邻域显然构成 U 的开覆盖，所以有 $\sigma = 0$。

对于满射，如果 $\rho \in \mathcal{F}^+(U)$ 是一个截面，那么在每点处的 ρ_x 一定是某个 $\mathcal{F}(U_x)$ 的截面 σ^x 在 x 处的茎。这一族截面显然满足粘贴条件，故由 $\mathcal{F}$ 的层条件知存在 $\sigma \in \mathcal{F}(U)$，使得 $\sigma_x = \sigma^x_x$。特别的，$\sigma^+ = \rho$。
对于后者，我们先构造一个 $\mathcal{S} \to \Gamma(-, \mathcal{S})^{et}$ 的平展空间映射：对于每个 $s \in E_x$，由于 p 是局部同胚，我们有一个开集 $s \in U_s$，使得 $p : U_s \to U$ 是同胚。于是这诱导了截面 $\sigma^s : U \to U_s$。我们将 s 打到 σ^s_x。这显然是一个良定义的连续平展空间映射。我们接下来证明该映射是双射，故由推论 1.1.5，该映射为两个平展空间之间的同构。
对于单射，如果 $s \in E_x$ 被映射到 $0'_x$，则 σ^s 在 x 处的茎为 0。由余极限的构造，存在 x 的小邻域 U_x 使得 σ^s 在 U_x 上的限制是 0。特别的，$s = \sigma^s(x) = 0$。
对于满射，由于 $\Gamma(-, \mathcal{S})^{et}$ 中的所有元素都来源于某个 σ 在某 x 处的茎，直接取 $\sigma(x)$，其自然被映射到 σ_x。
综上所述，$\mathbf{Sh}_{et}(X)$ 和 $\mathbf{Sh}(X)$ 范畴等价。 □

命题 1.3.10. *$\theta_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^+$ 具有如下泛性质：对于任意层 $\mathcal{F}$ 和预层映射 $f : \mathcal{P} \to \mathcal{F}$，都存在唯一层映射 $\tilde{f} : \mathcal{P}^+ \to \mathcal{F}$，使得如下图表交换：*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta_{\mathcal{P}}"'] & \mathcal{F} \\
\mathcal{P}^+ \arrow[ur, dashed, "\exists! \tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

证明: 对于存在性，我们考虑由自然变换 θ 诱导的如下交换图表：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta_{\mathcal{P}}"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "\theta_{\mathcal{F}}"] \\
\mathcal{P}^+ \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f^+"'] & \mathcal{F}^+
\end{tikzcd}$$

由于 $\mathcal{F}$ 是层，由前一命题 $\theta_{\mathcal{F}}$ 是同构，所以我们令 $\tilde{f} = \theta_{\mathcal{F}}^{-1} \circ f^+$ 即可。
对于唯一性，我们考虑推论 1.3.6。由于 $\mathcal{P}^+_x = \mathcal{P}_x = \varinjlim \mathcal{P}(U)$，显然，由余极限的构造，存在唯一的茎映射使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{P}(U) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
\mathcal{P}(V) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathcal{P}^+_x \arrow[dd] \\
& \mathcal{F}(U) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathcal{F}(V) \arrow[rr] & & \mathcal{F}_x
\end{tikzcd}$$

于是 $\tilde{f}$ 也是唯一的。 □

至此，我们已经完成了对层化函子的构造。我们接下来计算一个简单的例子以直观的展示层化函子的作用。

例子. 对一个阿贝尔群 A，我们定义 X 在 A 处的常值预层为 $A:\mathrm{Open}(X)\to\mathbf{Ab}$，$A(U)=A$，并且限制映射取恒等映射。
我们考虑 A^{et}。注意到每点 x 处，A 的茎都是 A，于是 $E_x=A$。然后，我们注意到 $\mathscr{B}$ 中的开集正好是所有的 $U\times\{a\}$，对于某个 $a\in A$。于是，E 在拓扑上等同于 $X\times A$（此处 A 赋离散拓扑），茎上的阿贝尔群结构恰好是 A。
然后，A^{et} 的截面则是所有的局部常值映射。所以，我们定义 X 在 A 处的常值层为常值预层的层化，也就是 $A^+:U\mapsto U$出发的局部常值截面。

注记. 实际上，以上的大部分论证是为了给予层一个与丛类似的直观。我们可以将以上的过程以很简单的形式叙述出来。

命题 1.3.11. 对于一个预层 $\mathcal{P}$，我们令 $\mathscr{U}$ 为 U 的所有开覆盖关于包含形成的偏序集，则定义

$$\mathcal{P}^+(U):=\varinjlim_{\mathscr{U}}\{(s_i)\in\prod_i\mathcal{P}(U_i)|s_i|_{U_i\cap U_j}=s_j|_{U_i\cap U_j}\}$$

此时，存在自然变换 $\mathcal{P}\to\mathcal{P}^{++}$ 使得该函子是层化函子。我们暂时不在此做出证明，到 *2.2* 节中再做讨论。

本节的最后，我们证明第一节中提到的命题，即平展空间是阿贝尔范畴。

引理 1.3.12. 层范畴 $\mathbf{Sh}(X)$ 完备。

证明: 由于遗忘函子 $\mathbf{Sh}(X)\hookrightarrow\mathbf{pSh}(X)$ 是层化函子的右伴随，而右伴随函子保持极限，于是 $\mathbf{Sh}(X)$ 中的极限等同于 $\mathbf{pSh}(X)$ 中的极限，由 $\mathbf{pSh}(X)$ 完备性立刻得出 $\mathbf{Sh}(X)$ 完备。 □

推论 1.3.13. 对于一个层映射 $f:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$，$\ker f\hookrightarrow\mathcal{F}$ 给出 $\mathcal{F}$ 的子层。

证明: 核是 f 与零映射的等化子，由 $\mathbf{Sh}(X)$ 完备立刻得出 $\ker f$ 是子层。 □

不幸的是，遗忘函子不保持余极限。

例子. 考虑预层范畴中的正合列

$$0\longrightarrow\mathbb{Z}\longrightarrow\mathcal{O}\longrightarrow\mathcal{O}^\times\longrightarrow 0$$

其中 $\mathcal{O}$ 定义为 $X=\mathbb{C}-\{0\}$ 上的全纯函数层，$\mathcal{O}^\times$ 为 X 上处处非零的全纯函数层（该层的截面中阿贝尔群结构由函数的乘法给出），$\mathcal{O}\to\mathcal{O}^\times$ 为指数映射，于是 $\mathbb{Z}$ 为该映射的核（即 $2n\pi\sqrt{-1}$ 取值的常值层）。我们证明指数映射的像不是层：令 U_i 为 X 的单连通覆盖。令 $f_i\in\mathcal{O}^\times(U_i)$ 为 $f_i(z)=z$ 给出的函数。显然，这一族开覆盖决定了全局截面 $f(z)=z$。由于 $\log$ 在任何单连通区域上有定义，f_i 在指数映射的像中。然而，由于不存在全局的单值对数函数，所以全局截面 $f(z)=z$ 不在指数映射的像中。
由于像不一定是层，由第一同构定理商预层也不一定是层。于是遗忘函子的确不保持余极限。

引理 1.3.14. 层范畴中的商由 $(\mathcal{F}/\mathcal{F}')^+$ 给出。

证明: 由商预层和层化函子的泛性质显然。 □

定理 1.3.15. *层范畴 $\mathbf{Sh}(X)$ 是阿贝尔范畴。*

证明: 由于 $\mathbf{Sh}(X)$ 是 $\mathbf{pSh}(X)$ 的全子范畴，而且显然零预层是层，两个层的直和也是层，所以 $\mathbf{Sh}(X)$ 是加性范畴。
由以上的讨论知映射的核和余核存在，同时考虑层范畴中的长正合列

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \longrightarrow \operatorname{coker} f \longrightarrow 0$$

若 f 单，则 $\ker f = 0$。于是有短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \operatorname{coker} f \longrightarrow 0$$

在每点 x 处取茎给出短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \operatorname{coker} f_x \longrightarrow 0$$

则由推论 1.3.6 知 $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 是 $\mathcal{G}$ 到 $\operatorname{coker} f$ 的自然投影的核。同样可以用对偶的方法证明满态射都是余核。 $\square$

推论 1.3.16. *平展空间范畴 $\mathbf{Sh}_{et}(X)$ 是阿贝尔范畴。*

证明: 其与 $\mathbf{Sh}(X)$ 范畴等价。 $\square$

1.4 推前和拉回

我们注意到以上的一切讨论都先固定了某个拓扑空间 X，再讨论其上的层。本节中，我们希望在两个拓扑空间的层范畴之间给出一对函子。

定义 1.4.1. 对于两个拓扑空间 X 和 Y 以及一个 X 到 Y 的映射 $f: X \to Y$，我们定义关于 f 的推前函子：$f_*: \mathbf{pSh}(X) \to \mathbf{pSh}(Y)$，将 X 上的某个预层 $\mathcal{P}$ 打到如下的预层：$f_*(\mathcal{P})(V) = \mathcal{P}(f^{-1}(V))$。限制映射和在预层映射上的作用是显然的。
我们同时定义关于 f 的拉回函子：$f^*: \mathbf{pSh}(Y) \to \mathbf{pSh}(X)$，把 Y 上的某个预层 $\mathcal{P}$ 打到如下的预层：

$$f^*(\mathcal{P})(U) = \varinjlim_{f^{-1}(V) \supseteq U} \mathcal{P}(V)$$

命题 1.4.2. *对于 Y 上的预层 $\mathcal{P}$，$f^*(\mathcal{P})$ 是 X 上的层。*

证明： 由平展空间的构造，我们注意到对 $\mathcal{P}$ 的拉回等同于如下操作：我们先取 $\mathcal{P}$ 对应的平展空间，再对 $f: X \to Y$ 进行如下拉回

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & E_{\mathcal{P}et} \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

最后我们取 $f^{-1}(\mathcal{P}) = \Gamma(-, E')$。这显然与以上定义等价，于是给出一个层。 $\square$

命题 1.4.3. *对于 X 上的层 $\mathcal{F}$，$f_*(\mathcal{F})$ 为 Y 上的层。*

证明： 考虑 V 的一族开覆盖 V_i 和上面一族相容的截面 ρ_i。由定义，令 $f^{-1}(V) = U$，$\rho_i = \sigma_i \in \mathcal{F}(U_i)$，显然 σ_i 在交上兼容，于是由层条件，存在唯一 $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ 使得 $\sigma|_{U_i} = \sigma_i$。于是存在唯一 $\rho \in f_*(\mathcal{F})(V)$ 使得 $\rho|_{V_i} = \rho_i$。 $\square$

定理 1.4.4. *对于 $f: X \to Y$，$f^*: \mathbf{pSh}(Y) \leftrightarrows \mathbf{pSh}(X): f_*$ 是一个伴随对。*

证明： 令 $\mathcal{P}$ 为 X 上的预层，$\mathcal{Q}$ 为 Y 上的预层。考虑一个 $\mathcal{Q}$ 到 $f_*(\mathcal{P})$ 的预层映射。这等价于对每个 Y 上的开集 V，我们给出一个和限制映射相容的 $\mathcal{Q}(V) \to \mathcal{P}(f^{-1}(V))$。于是对于所有 $f^{-1}(V) \supseteq U$，$\mathcal{Q}(V) \to \mathcal{P}(f^{-1}(V)) \to \mathcal{P}(U)$ 给出了一族相容的映射，于是由余极限的泛性质，这等价于给出 $\varinjlim_{f^{-1}(V) \supseteq U} \mathcal{Q}(V) \to \mathcal{P}(U)$ 的映射。这一族映射显然相容，于是给出了 $f^*(\mathcal{Q}) \to \mathcal{P}$ 的预层映射。 $\square$

推论 1.4.5. *$f^*: \mathbf{Sh}(Y) \leftrightarrows \mathbf{Sh}(X): f_*$ 是一个伴随对。*

证明： 由于 $\mathbf{Sh}(X)$ 是 $\mathbf{pSh}(X)$ 的全子范畴显然。 $\square$

例子. 由拉回的构造，层化函子也可以视为由伴随单位给出的 $\mathcal{P} \to f_* f^*(\mathcal{P})$，其中 $f: X \to X$ 是单位映射。

例子. 显然我们有 $\mathbf{Sh}(*) \simeq \mathbf{Ab}$。由推前的构造，全局截面函子可以视为沿 $X \to *$ 的推前。更进一步，如果我们令 S 是具有两个点，三个开集的空间，则沿 $f_U: X \to S$ 的推前给出了全局截面到 U 上截面的限制。于是我们可以看出推前和拉回蕴含了丰富的信息（见后文注记）。

注记. 在代数几何中，我们把如下的六个对层的导出范畴的操作并称为六函子：

1. $-\otimes^{\mathbf{L}}-$（导出张量积）
2. $\mathbf{R}\mathrm{Hom}(-,-)$（导出同态）
3. f^*（拉回）
4. f_*（推前）
5. $f_!$（紧支推前）
6. $f^!$（反常拉回）

这六种操作在代数几何中尤为重要，甚至在后续发展中，对这六种操作做出了进一步的抽象，被称作六函子形式主义（six functor formalism）。这是对代数几何中一系列现象的总结（包括各种（上）同调理论，对偶性质等等）。这不是本文的重点，我们在此点到为止。

第二章 Grothendieck 意象理论

Weil 猜想于 1949 年提出，是对某个有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的射影代数簇 X 的 ζ-函数：

$$\zeta_X(s) = \exp(\sum_{n\geq 1} \frac{\#X(\mathbb{F}_q^n)}{n} q^{-ns})$$

的诸多良好性质做出的猜想。Weil 猜想分为好几个部分，其中第一部分，即证明 ζ-函数的有理性在先前就已经被证明（见 [Dwo60]）。之后，人们发现 Weil 猜想与 Weil 上同调（即一个满足一些公理的上同调理论）密切相关，于是问题便转向了构造一个 Weil 上同调理论。Grothendieck 与 Artin 合作，于 1962 年首次使用 Grothendieck 意象构造了概形上的平展拓扑，得出了第一个 Weil 上同调理论：ℓ-进上同调理论，并之后于 1964 年末解决了 Weil 猜想的第二部分 [Gro64] 和第四部分。第三部分被德利涅继续使用 ℓ-进上同调理论于 1974 年解决 [Del74]。可以看出，Grothendieck 意象理论在 Weil 猜想的证明中起到了重要的作用，我们在接下来的一章中将会详细介绍 Grothendieck 意象，并在最后一节中简要的介绍 ℓ-进上同调和 Weil 猜想。

2.1 Grothendieck 拓扑和景

注记. 首先应当明确的是，一般范畴取代了开集范畴的概念。我们有一个重要的观察，即某个拓扑空间 X 中的某个开集 U 等价于一个拓扑空间 U' 到 X 以 U 为像的开嵌入。于是我们大致可以看出要推广拓扑的概念，我们不一定要拘泥于子集，还可以选取一类特殊的 $X' \to X$ 的映射。这些映射就可以被视为某个一般范畴中的态射。除了开集以外，拓扑空间的另一个重要概念是开集的开覆盖。这一概念与层条件息息相关，然而在一般的范畴中不存在并的概念，于是开覆盖不天然的存在。所以在此处，我们需要引入景来描述一般范畴上的层条件。

我们先从最一般的构造说起。

定义 2.1.1. 对于一个范畴 $\mathcal{C}$ 和一个对象 U，U 上的一个筛被定义为一族打到 U 的态射 $S = \{f : V \to U\}$，满足对于任意态射 g 和任意 S 中的态射 f，只要 $\mathrm{cod}g = \mathrm{dom}f$，就有 $fg \in S$。如果 $S \subset S'$，则称 S 比 S' 更细。

例子. 显然，打到 U 的所有态射是 U 上的筛。这个筛被称为极大筛。
对于一族打到 U 的态射 R，我们称 R 生成的筛是 $S_R = \{W \to V \to U | V \to U \in R\}$，即包含 R 的最细的筛。

定义 2.1.2. 一个范畴 $\mathcal{C}$ 上的一个覆盖 T 是对每个对象 U 赋予一族到 U 的态射族 $T(U)$（称为覆盖态射族），满足：对于 $h : V \to U$，对于 U 的任意一个覆盖态射族 $S = \{f_i : U_i \to U\}$，存在 V 的一个覆盖态射族 $S' = \{g_i : V_i \to V\}$，使得任意 g_i，其与 h 的复合均穿过某个 f_i，即

$$\begin{tikzcd} V_j \arrow[r, dashed] \arrow[d, "g_j"'] & U_i \arrow[d, "f_i"] \\ V \arrow[r, "h"'] & U \end{tikzcd}$$

我们时常会要求 $\mathcal{C}$ 对拉回封闭。此时，我们要求对于态射 $h : V \to U$ 和 U 的一个覆盖态射族 $S = \{f_i : U_i \to U\}$，其拉回：$h^*S = \{g_i : U_i \times_U V \to V\}$ 是 V 的一个覆盖态射族，即：

$$\begin{tikzcd} V_j \arrow[r] \arrow[d, "g_j"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & U_i \arrow[d, "f_i"] \\ V \arrow[r, "h"'] & U \end{tikzcd}$$

此时我们称 T 是一个拉回覆盖。

注记. 之后我们总假定 $\mathcal{C}$ 具有所有有限极限，并且覆盖默认指拉回覆盖。

定义 2.1.3. 我们定义一个 Grothendieck 拓扑基 K（或 Grothendieck 预拓扑）是对于每个对象 U 赋予一个集合 $K(U)$，其元素为态射族 $\{f_i : U_i \to U\}$，满足如下的三个条件：

1. （恒等）对于每个 U，$\{\mathrm{id}_U\} \in K(U)$。
2. （拉回）若 $\{f_i : U_i \to U\} \in K(U)$，以及一个 $h : V \to U$，则 $\{h^* f_i : h^* U_i \to V\} \in K(V)$。
3. （传递）若 $\{f_i : U_i \to U\} \in K(U)$，而且 $\{g_{ij} : V_{ij} \to U_i\} \in K(U_i)$，则 $\{f_i g_{ij} : V_{ij} \to U_i \to U\} \in K(U)$。

我们进一步定义 Grothendieck 拓扑 J 是对于每个对象赋予一个集合 $J(U)$，其元素为 U 上的筛，满足以下的三个条件：

1. （极大）对于每个 U，U 上的极大筛在 $J(U)$ 中。
2. （拉回）若 $\{f_i : U_i \to U\} \in J(U)$，以及一个 $h : V \to U$，则 $\{h^* f_i : h^* U_i \to V\} \in J(V)$。
3. （传递）若 $R \in J(U)$，S 是 U 上的一个筛，若对于任意 $f : V \to U$ 都有 $f^* S \in J(V)$，那么 $S \in J(U)$。

定义 2.1.4. 一个景是指一个范畴 $\mathcal{C}$ 配备其上的一个覆盖 T，记作 $(\mathcal{C}, T)$。

构造 2.1.5. *Grothendieck 拓扑基可以生成一个 Grothendieck 拓扑。我们定义一个 Grothendieck 拓扑基 K 生成的 Grothendieck 拓扑 J 为如下的 Grothendieck 拓扑：*

$$J(U) = \{U\text{上的筛}S | \exists R \in K(U), R \subset S\}$$

同理，覆盖也能生成一个 Grothendieck 拓扑。这个构造比较复杂，我们先用覆盖生成一个 Grothendieck 拓扑基，再生成 Grothendieck 拓扑。
考虑一个覆盖 T，我们令 T' 为如下的覆盖：

$$T'(U) = \bigcup_{\{f_i : U_i \to U\}_{i \in I} = S \in T(U)} \{\{f_i f_{ij} : U_{ij} \to U_i \to U\} | \{f_{ij} : U_{ij} \to U_i\} \in T(U_i)\}$$

我们证明 T' 的确是覆盖：令 $h : V \to U$ 为一个态射，$S = \{f_i f_{ij} : U_{ij} \to U_i \to U\} \in T'(U)$，则我们考虑如下交换图：

$$\begin{tikzcd}
V_{ij} \arrow[r] \arrow[d, "g_{ij}"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & U_{ij} \arrow[d, "f_{ij}"] \\
V_i \arrow[r, "f_i^* h"] \arrow[d, "g_i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & U_i \arrow[d, "f_i"] \\
V \arrow[r, "h"'] & U
\end{tikzcd}$$

于是我们还有 $\{g_{ij} : V_{ij} \to V_i\} \in T(V_i)$。由于两个拉回图表的复合仍然是拉回，所以 $g_i g_{ij}$ 是 $f_i f_{ij}$ 沿 h 的拉回，这说明 T' 的确是一个覆盖。
*最后，对于一个覆盖 T，我们定义 $T_0(U) = T(U) \vee \{id_U : U \to U\}$。之后，对后继序数 $\alpha = \beta + 1$，我们定义 $T_\alpha = T'_\beta$，对极限序数 γ，我们定义 $T_\gamma = \bigcup_{\alpha < \gamma} T_\alpha$（注意到覆盖的任意并还是覆盖）。由于 $T_0(U) \supseteq \{\mathrm{id}_U : U \to U\}$，$\alpha < \beta$ 推出 $T_\alpha \subseteq T_\beta$。此时注意到一定存在一个序数 α，使得任意 $\beta > \alpha$ 有 $T_\beta = T_\alpha$：我们只需证明存在一个 α 使得 $T_{\alpha+1} = T_\alpha$。若不存在，则存在从 **ord** 到覆盖态射族的单射，然而由于 $\mathcal{C}$ 是小范畴，全部覆盖态射族构成集合，矛盾。我们接下来证明这个 T_α 是一个 Grothendieck 拓扑基。由假设，单位在 T_0 从而在 T_α 中。由于 T_α 是覆盖，其对拉回封闭。由于 $T_\alpha = T_{\alpha+1} = T'_\alpha$，传递性成立。*
最后，我们定义 T 生成的 Grothendieck 拓扑为 T_α 生成的 Grothendieck 拓扑。

定义 2.1.6. 对于两个景 $(\mathcal{C}, J)$ 和 $(\mathcal{D}, K)$，我们定义函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是景之间的态射，如果

1. F 保持所有的覆盖，即对于 $\mathcal{C}$ 中 U 上的一个覆盖筛 S，$F(S)$ 生成的筛是 $\mathcal{D}$ 的覆盖筛。

2. F 保持所有有限极限。

注记. 在较为现代的定义中，我们将 F 保持所有有限极限替换为平坦，即对任何一个 $\mathcal{C}$ 中的有限图表 I，令 C 为 FI 上以 U 为顶点的锥，则如下的筛

$$S = \{f : V \to U | Tf\text{作为}V\text{上的锥穿过某个}\mathcal{C}\text{中的锥在}F\text{下的像}\}$$

是 $\mathcal{D}$ 的覆盖筛。
特别的，如果 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 具有所有有限极限，则 F 保持余极限推出 F 平坦。

接下来，我们详细讨论一类非常重要的景。

2.1.1 位象

注记. 我们首先指出，位象是对拓扑空间最直接的推广。
我们回顾经典的情形：对于两个拓扑空间 X 和 Y，给出 X 和 Y 之间的一个映射 $f : X \to Y$ 可以给出一个格同态（此处我们将开集范畴先简单的视为格）$f^* : \mathrm{Open}(Y) \to \mathrm{Open}(X)$，更进一步的，这个格同态还保持任意并和有限交。虽然在一般情况下开集格之间的同态并不能诱导拓扑空间之间的映射（任何赋予平凡拓扑的空间的开集格都是 $0 \longrightarrow 1$，但是作为集合的势不同的拓扑空间显然不同胚），但是在良好的情况下，我们的确能够给出一个反向的关系。也就是说，我们有一个范畴等价 $\mathrm{Open} : \mathbf{Top}_{nice}^{op} \simeq \mathbf{Lat}_{nice}$（我们之后再给出这些具备良好性质的拓扑空间和格的具体定义）。但是在一般情况下，Open 函子只能给出一个左伴随。同时，Open 函子也不是本质满的。本小节的目的即是详细讨论开集格正确的推广，以此对景产生一个初步的印象。

定义 2.1.7. 我们定义一个格 L 是位格，如果其具有二元交 $\wedge$（即有限交）和任意并 $\bigvee$（其中交是格作为范畴的积，并是余积），同时有结合律

$$a \wedge \bigvee_{i \in I} b_i = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i)$$

其中 I 是任意指标集，a 和 b_i 是任意元素。
我们定义位格间的同态为保持有限交和任意并的格同态。在这种意义下，所有的位格构成一个范畴，我们记作 $\mathbf{Frm}$。

例子. 显然，任意一个拓扑空间 X 的开集格是位格。

定义 2.1.8. 我们定义位格范畴的对偶为位象：$\mathbf{Loc} := \mathbf{Frm}^{op}$。这是对 $\mathbf{Top}_{nice}^{op} \simeq \mathbf{Lat}_{nice}$ 这一事实的抽象。我们定义 $\mathrm{Open} : \mathbf{Loc}^{op} \to \mathbf{Frm}$ 给出范畴间的同构。于是我们有函子：$\mathbf{Top} \to \mathbf{Frm}^{op} \to \mathbf{Loc}$，我们将这一函子记作 $\mathscr{L}$

例子. 环的素谱可以用位格和位象的理论叙述。对于一个环 A，对 $f \in A$，我们令 U_f 形式的生成一个位格，并有如下的等价关系：

$$O = \langle U_f | U_0 = 0, U_1 = 1, U_{f+g} \le U_f \vee U_g, U_{fg} = U_f \wedge U_g \rangle$$

此时这一位格是经典的 $\mathrm{Spec}(A)$ 的开集格。也就是说，该位格对应的位象即是经典的 $\mathrm{Spec}(A)$（见 2.4 节）。

定义 2.1.9. 考虑格 $\{0 \le 1\}$。这个格是一个位格，而且是 **Frm** 的始对象。于是它对应的位象是 **Loc** 的终对象，我们用 1 来代替。

定义 2.1.10. 我们定义一个位象 X 的点为 $1 \to X$ 的所有映射。我们将 X 的所有点构成的集合记作 $\mathrm{Pt}(X)$。
等价的，我们定义一个完全素滤子 P 是一个满足如下条件的滤子（滤子是一个向上封闭和对交封闭的子集）：对于任意 $\bigwedge a_i \in P$，存在某个 $a_i \in P$。
显然我们有点和完全素滤子的一一对应：$p : 1 \to X$ 对应于 $p^* : \mathrm{Open}(X) \to \mathrm{Open}(1)$ 对应于 $(p^*)^{-1}(1)$。

构造 2.1.11. $\mathrm{Pt}(X)$ 可以被赋予一个拓扑空间结构。我们定义 $\mathrm{Pt}(X)$ 中的开集形如 $O_U = \{p : 1 \to X | p^*(U) = 1\}$。显然，完全素滤子的拉回依然是完全素滤子。于是我们有函子 $\mathrm{Pt} : \mathbf{Loc} \to \mathbf{Top}$（在某些文献中该函子被称作 Spec 以展示其代数-几何对偶的性质），其中 $\mathrm{Pt}(f)$ 被定义为完全素滤子的拉回。更进一步的，我们对任意一个位象 X 有一个 $\mathrm{Open}(X) \to \mathrm{Open}(\mathrm{Pt}(X))$ 的态射，由 $U \mapsto O_U$ 给出。

例子. 对于一个拓扑空间 X，其中的任何一个点 x 对应一个 $\mathrm{Open}(X)$ 中的完全素滤子，即包含该点的所有开集。显然这些开集构成滤子：$1 = X \ni x$；对于 $x \in U$，则 $U \subseteq V \implies x \in V$；最后如果 x 同时被 U 和 V 包含，显然 x 被 $U \cap V$ 包含。该滤子是完全素的：如果 $x \in \bigcup U_i$，则显然有某个 $x \in U_i$。我们定义 x 对应的完全素滤子为 $P(x)$。

定义 2.1.12. 我们定义一个拓扑空间 X 是清醒的（sober），如果其所有不可约闭集恰好是点的闭包。或者等价的，任何交不可约的开集（即 U 满足 $U = U_1 \cap U_2 \implies U = U_1$ 或 $U = U_2$）都具有形式 $X - \overline{\{x\}}$。我们定义由清醒空间构成的拓扑空间范畴的全子范畴为 $\mathbf{Top}_{sob}$。

这个定义看起来十分具体，但是清醒空间有一个更加抽象但是方便的刻画：

引理 2.1.13. X 是清醒空间当且仅当其开集位格 $\mathrm{Open}(X)$ 的所有完全素滤子都来源于某个点。

证明: $\implies$：如果 X 是清醒的，则令 P 为某个 $\mathrm{Open}(X)$ 的完全素滤子，则令 $V = \bigcup_{U \notin P} U$。我们证明 V 是交不可约的。由于 P 是完全素的，$V \notin P$。如果 $V \supseteq U_1 \cap U_2$，则显然我们不能有 U_1 和 U_2 都属于 P。于是不妨 $U_1 \notin P$，所以 $U_1 \subseteq V$。所以 V 交不可约，$V = X - \overline{\{x\}}$。从而 $U \notin P$ 当且仅当 $U \subseteq V = X - \overline{\{x\}}$ 当且仅当 $x \notin U$。
$\impliedby$：如果 X 不清醒，则有某个交不可约的 V 不形如 $X - \overline{\{x\}}$。令 $P = \{U \not\subseteq V\}$，则 P 显然是完全素滤子：若 U_1 和 U_2 都在 P 中，则由交不可约性有 $U_1 \cap U_2 \not\subseteq V$，从而在 P 中；$U_2 \supseteq U_1 \in P$ 显然推出 $U_2 \in P$；最后如果 $\bigcup U_i \in P$，我们显然有某个 $U_i \not\subseteq V$，故某个 $U_i \in P$。但是 P 不来源于某个点，否则 $U \not\subseteq V$ 等价于 $x \in U$ 等价于 $U \not\subseteq X - \overline{\{x\}}$，于是 $V = X - \overline{\{x\}}$。 □

推论 2.1.14. Pt 的像是 $\mathbf{Top}_{Sob}$。并且 $\mathrm{Pt} \circ \mathscr{L}$ 在 $\mathbf{Top}_{Sob}$ 上的限制是 id。

证明: 由上述引理和 Pt 函子的构造显然。 □

命题 2.1.15. 对于一个拓扑空间 X 和一个清醒的拓扑空间 Y，我们有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Frm}}(\mathrm{Open}(Y), \mathrm{Open}(X))$$

证明: 我们只需对 $g:\mathrm{Open}(Y)\to\mathrm{Open}(X)$ 给出一个 $f:X\to Y$ 使得 $g=f^*$。X 中的一个点给出 $\mathrm{Open}(X)$ 中的完全素滤子，于是在 g 上拉回给出一个 $\mathrm{Open}(Y)$ 的完全素滤子。但是由于 Y 是清醒的，由引理 2.1.12 知这个完全素滤子对应某个 Y 的点 y。我们定义 $f(x)=y$。这个映射是连续的：考虑 Y 中的开集 V，则 $y\in V$ 当且仅当 $V\in P(y)$，但是由 f 的定义，如果有 $f(x)=y$，则 $g^{-1}P(x)=P(y)$，于是 $f(x)\in V$ 当且仅当 $V\in g^{-1}P(x)$。这表明 $x\in f^{-1}(V)$ 当且仅当 $g(V)\in P(x)$。所以 $g(V)=f^{-1}(V)$，故 f 连续。 □

命题 2.1.16. 我们有一个伴随：$\mathscr{L}:\mathbf{Top}\leftrightarrows\mathbf{Loc}:\mathrm{Pt}$。

证明: 依定义，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Loc}}(\mathscr{L}(X),Y)=\mathrm{Hom}_{\mathbf{Frm}}(\mathrm{Open}(Y),\mathrm{Open}(X))$。由于 Pt 的像是 $\mathbf{Top}_{Sob}$，由命题 2.1.14，我们有 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X,\mathrm{Pt}(Y))=\mathrm{Hom}_{\mathbf{Frm}}(\mathrm{Open}(\mathrm{Pt}(Y)),\mathrm{Open}(X))$ 我们证明其与 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Frm}}(\mathrm{Open}(Y),\mathrm{Open}(X))$ 相等。注意到存在一个清醒的拓扑空间 X' 使得
$\mathrm{Open}(X)=\mathrm{Open}(X')$，故我们假设 X 是清醒的。当 X 清醒时，我们有 $\mathrm{Open}(\mathscr{L}(X))\to\mathrm{Open}(\mathrm{Pt}\circ\mathscr{L}(X))$ 是同构，所以考虑交换图

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Open}(Y) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Open}(X) \arrow[r, equal] & \mathrm{Open}(\mathscr{L}(X)) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Open}(\mathrm{Pt}(Y)) \arrow[rr] & & \mathrm{Open}(\mathrm{Pt}\circ\mathscr{L}(X))
\end{tikzcd}
$$

如果给出一个 $\mathrm{Open}(\mathrm{Pt}(Y))\to\mathrm{Open}(X)$ 的映射，可通过复合给出 $\mathrm{Open}(Y)\to\mathrm{Open}(X)$ 的映射，而反之，给出了 $\mathrm{Open}(Y)\to\mathrm{Open}(X)$ 的映射，即是给出了 $\mathrm{Open}(Y)\to\mathrm{Open}(\mathscr{L}(X))$ 的映射，由于 $\mathrm{Open}:\mathbf{Loc}\to\mathbf{Frm}$ 是范畴同构，所以这给出了 $\mathrm{Open}(\mathrm{Pt}(Y))\to\mathrm{Open}(\mathrm{Pt}(\mathscr{L}(X)))$ 的映射。但是由于 X 是清醒的，$\mathrm{Pt}(\mathscr{L}(X))=X$，所以这给出了 $\mathrm{Open}(\mathrm{Pt}(Y))\to\mathrm{Open}(X)$。这两个对应方式显然是互逆的。 □

定义 2.1.17. 我们定义 $\mathrm{Open}:\mathbf{Top}\to\mathbf{Frm}$ 的像为空间的位格（spacial）。我们将这一全子范畴记作 $\mathbf{Frm}_{Spc}$，并将其在 **Loc** 下的对应记作 $\mathbf{Loc}_{Spc}$。

推论 2.1.18. 上述论证给出了 **Top** 的反射子范畴 $\mathbf{Top}_{Sob}$ 和 **Loc** 的余反射子范畴 $\mathbf{Loc}_{spc}$。我们有如下的交换图

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Top}_{Sob} \arrow[d, hook] & & \mathbf{Loc} \arrow[ll, "\mathrm{Pt}"'] \arrow[dl, equal] \\
\mathbf{Top} \arrow[dr, "\mathscr{L}"'] & \mathbf{Frm}^{op} & \mathbf{Loc}_{Spc} \arrow[u] \\
& \mathbf{Frm}^{op}_{Spc} \arrow[u] \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}
$$

最后，我们给出一个位格上景的结构。

定义 2.1.19. 我们把偏序集视为范畴。我们定义一族 U_i 是 U 上的覆盖当且仅当 $\bigvee U_i=U$。这显然对拉回稳定，故给出了一个景的结构。同时，位格间的态射正好是景之间的态射。

2.2 Grothendieck 意象

定义 2.2.1. 对于一个范畴 $\mathcal{C}$，我们定义其上的预层范畴为函子范畴：$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$，记作 $\mathbf{pSh}(\mathcal{C})$。我们称该范畴中的一个对象为 $\mathcal{C}$ 上的预层，其中的一个态射为预层态射。对于一个预层 $\mathcal{P}$ 和 $U \in \mathcal{C}$，我们依然称 $\mathcal{P}(U)$ 中的一个元素为 U 上的截面。

例子. 对于 $\mathcal{C}$ 中任意一个对象 U，函子 $\mathrm{Hom}(-, U) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ 是一个 $\mathcal{C}$ 上的预层。由米田引理，我们有一个 $\mathcal{C}$ 到 $\mathbf{pSh}(\mathcal{C})$ 的全忠实嵌入，称之为米田嵌入，其具体构造是 $U \mapsto \mathrm{Hom}(-, U)$。我们将这一函子记作 h。

定义 2.2.2. 对于一个景 $(\mathcal{C}, T)$，我们定义其上的预层范畴为 $\mathcal{C}$ 上的预层范畴。同时，我们称 T 决定的层条件为：
对于一个预层 $\mathcal{P}$ 和 $T(U)$ 的所有覆盖态射族 $\{f_i : U_i \to U\}$，我们都有如下图表是等化子：

$$\mathcal{P}(U) \longrightarrow \prod \mathcal{P}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{P}(U_i \times_U U_j)$$

其中左侧的态射由 $\mathcal{P}(U)$ 到 $\mathcal{P}(U_i)$ 的限制映射决定，右侧的上方态射由 $\mathcal{P}(U_i)$ 到 $\mathcal{P}(U_i \times_U U_j)$ 的限制映射决定，下方态射由 $\mathcal{P}(U_j)$ 到 $\mathcal{P}(U_i \times_U U_j)$ 的限制映射决定。我们注意到此处的拉回具有交的直观。
我们称一个满足层条件的预层为层，将所有层生成的全子范畴成为层范畴，记作 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, T)$。一个等价于某个 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, T)$ 的范畴被称作 Grothendieck 意象。

注记. 我们注意到由于饱和性条件的缺失，不同的覆盖可能对应同一种层条件。例如，U 上的一个覆盖态射族和 U 上这一族态射生成的筛所决定的层条件是一样的：我们记覆盖态射族为 $\{f_i : U_i \to U\}_{i\in I}$，并记其生成的筛为 $\{f_j : U_j \to U\}_{j\in J}$，并配备一个嵌入映射 $I \hookrightarrow J$。
假如一个预层 $\mathcal{P}$ 满足 $f_i : U_i \to U$ 的层条件，那么对于 U_j 上一族相容的截面 σ_j，显然 σ_i 在交上相容。于是 σ_i 唯一决定了一个 U 上的截面 σ。由于 $\{f_j : U_j \to U\}$ 被 $\{f_i : U_i \to U\}$ 生成，我们有任意 $f_j : U_j \to U$ 都穿过某个 U_i。于是 σ 在 U_j 上的限制的确是 σ_j。
反之，如果一个预层满足 $f_j : U_j \to U$ 的层条件，那么对于一族 U_i 上的截面 σ_i，由 $f_j : U_j \to U$ 穿过某个 U_i，我们定义 σ_j 为这个 σ_i 到 U_j 的限制。这显然给出了一族相容的截面，于是唯一确定一个 U 上的截面 σ。

引理 2.2.3. *构造 2.1.5 中 Grothendieck 拓扑基和其生成的 Grothendieck 拓扑所决定的层条件是相同的。*

证明: 首先注意到如果 U 上的筛 S 包含 U 上的某个态射族 R，那么 S 包含 R 生成的筛。于是我们只需验证对于筛 $S \subset S'$，那么 S 和 S' 对应的层条件与 S 对应的层条件相同。我们只需要验证 S 的层条件可以推出 S' 的层条件。
对于一族相容的 σ_j，由于其包含了一族相容的 σ_i，这些截面决定了 U 上的一个全局截面 σ。由于 $f_j : U_j \to U$ 有一个态射，我们把 S 沿 f_j 拉回得到 U_j 上的覆盖筛 $f_j^* S$。把 σ_i 拉回到 $f_j^* \sigma_i$ 后发现这一族截面在交上兼容，由于层条件的唯一性，我们先前的 σ_j 就是 $f_j^* \sigma_i$ 确定的截面。这说明 σ_j 是 σ 沿 f_j 的限制。于是 σ 的确是全部 σ_j 确定的截面。 □

引理 2.2.4. *构造 2.1.5 中覆盖和其生成的 Grothendieck 拓扑所决定的层条件是相同的。*

证明: 首先，由极大筛或含 id 的一族态射决定的层条件是平凡的。于是 T 与 T_0 所决定的层条件相同。
然后，若 $f_i : U_i \to U$ 和 $f_{ij} : U_{ij} \to U_i$ 都是覆盖态射族，我们证明这些层条件可以推出 $U_{ij} \to U_i \to U$ 的层条件。对于一族 U_{ij} 上的截面 σ_{ij}，由 $U_{ij} \to U_i$ 的层条件知他们唯一确定 U_i 上的截面 σ_i，再由 $U_i \to U$ 的层条件知他们唯一确定 U 上的截面。于是 T_α 与 $T_{\alpha+1}$ 确定的层条件相同。
最后，对一族确定相同覆盖取并不改变层条件，于是 T_γ 的层条件与 T_α（$\alpha < \gamma$）相同。
所以 T 与其生成的 Grothendieck 拓扑基确定相同的层条件，于是由上一个引理，T 与其生成的 Grothendieck 拓扑确定相同的层条件。 □

推论 2.2.5. *任何层条件都被某个 Grothendieck 拓扑决定。*

证明: 用覆盖生成的 Grothendieck 拓扑即可。 □

注记. 从某种意义上来说，饱和性条件即是可以从其它的层条件自然成立的层条件，所以加入饱和性条件不影响层条件。Grothendieck 拓扑是一个层条件确定的最饱和的覆盖结构。实际上，层条件和 Grothendieck 拓扑是一一对应的。之后，我们便默认一个景配备的覆盖是一个 Grothendieck 拓扑。

和拓扑空间上的层类似，我们可以对任意一个景 $(\mathcal{C}, J)$ 上的预层做层化。不过，如命题 1.3.11 所说，该过程比拓扑空间上的层化要复杂很多。

命题 2.2.6. *存在一个层化函子*: $\mathbf{pSh}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J), \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}^+$, *使得它是遗忘函子* $U : \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) \to \mathbf{pSh}(\mathcal{C})$ *的左伴随。换言之，层范畴是预层范畴的反射子范畴。*

此处我们采用自反局部化的观点。

定义 2.2.7. 对于一族 $\mathcal{C}$ 中的态射 S，我们定义 $\mathcal{C}$ 中的一个对象 U 是 S-局部的，如果 $\mathrm{Hom}(-, U) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ 将所有的 S 中的态射打到同构。换言之，如果 $s : V \to W$ 是 S 中的态射，那么 $s^* : \mathrm{Hom}(W, U) \to \mathrm{Hom}(V, U)$ 是同构。
对于一个 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f : U \to V$，我们定义 f 是 S-局部的，如果对任意 S-局部对象 W，我们都有 $f^* : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(U, W)$ 是双射。

定义 2.2.8. 回忆命题 1.2.3；经过简单的推广，我们发现对于 $\mathbf{pSh}(\mathcal{C})$ 上的两个预层 $i : X \hookrightarrow Y$ 是单射当且仅当 $i(U) : X(U) \to Y(U)$ 是逐点的单射。此时，我们定义 X 是 Y 的子函子。

引理 2.2.9. *$\mathcal{C}$ 中对象 U 上的筛一一对应于 $h(U)$ 的子函子。*

证明: 设 S 是 U 上的筛，则 $\mathcal{P}_S : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$，$\mathcal{P}_S(V) := \{f : V \to U | f \in S\} \subseteq \mathrm{Hom}(V, U) = h(U)(V)$，由于筛的构造，对于 $g : W \to V$，$\mathcal{P}_S(g) : \mathcal{P}_S(V) \to \mathcal{P}_S(W)$ 由 $f \mapsto fg$ 给出。
反之，设 $\mathcal{Q}$ 为 $h(U)$ 的子函子，那么令 $S_{\mathcal{Q}} := \{f : V \to U | f \in \mathcal{Q}(V)\}$。同理，这的确给出了一个筛。
显然，这两个对应方法是互逆的。我们以后将筛和 $h(U)$ 的子函子做等同。 □

构造 2.2.10. 回忆 *2.1* 节的例子。这里我们给出一族覆盖 $f_i : U_i \to U$ 生成的筛的等价刻画。我们令 S 为如下图表的余等化子：

$$\coprod h(U_i \times_U U_j) = \coprod h(U_i) \times_{h(U)} h(U_j) \rightrightarrows \coprod h(U_i) \to S$$

考虑另一个对象 V。由余极限的逐点性，我们有集合范畴的余等化子

$$\coprod \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, U_i \times_U U_j) \rightrightarrows \coprod \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, U_i) \to S(V)$$

于是 $S(V)$ 可以视为所有 $V \to U_i$ 的态射构成的集合商掉 $V \to U_i \to U = V \to U_j \to U$ 的等价关系，这一关系便由余等化子的两个态射给出。

命题 2.2.11. 对于一个景 $(\mathcal{C}, J)$，我们令 W 为如下的 $\mathbf{pSh}(\mathcal{C})$ 中的态射族：

$$W := \bigcup_{U \in \mathcal{C}} \{J(U) \hookrightarrow h(U)\}$$

$(\mathcal{C}, J)$ 上的层可以被如下等价的刻画：一个预层 $\mathcal{P}$ 是层当且仅当它是 W-局部对象。

证明: 依定义，一个预层 $\mathcal{P}$ 是 W-局部对象等价于对于任何 J 中 U 上的筛 S，我们有 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(h(U), \mathcal{P}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(S, \mathcal{P})$ 是同构。根据上述构造，我们有 S 是余等化子，而由于 $\mathrm{Hom}(-, X)$ 在任何范畴中将余极限转化为极限，我们有如下的等化子图表

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(S, \mathcal{P}) \to \prod \mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(h(U_i), \mathcal{P}) \rightrightarrows \prod \mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(h(U_i \times_U U_j), \mathcal{P})$$

由米田引理和之前的同构，我们有等化子

$$\mathcal{P}(U) \to \prod \mathcal{P}(U_i) \rightrightarrows \prod \mathcal{P}(U_i \times_U U_j)$$

这与层条件吻合。 $\square$

注记. 若 $\mathcal{P}$ 不是层，那么上述等化子图表显然对某个筛不成立。我们此时称 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(S, \mathcal{P})$ 表达了 $\mathcal{P}$ 关于覆盖 $U_i \to U$ 的下降信息。

定义 2.2.12. 对于一个范畴 $\mathcal{C}$ 和其中的一族态射 W，我们定义 $\mathcal{C}[W^{-1}]$ 为满足如下泛性质的范畴，配备一个函子 $L : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[W^{-1}]$，称之为 $\mathcal{C}$ 的局部化和局部化映射：

1. 对任意 $w \in W$，$L(w)$ 可逆。
2. 对任意范畴 $\mathcal{E}$ 和函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$，如果 F 将 W 的元素打到可逆态射，那么在自然同构意义下，存在唯一 F 穿过 L 的分解 $F = \tilde{F} \circ L : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \to \mathcal{E}$。

由于泛性质，$L : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[W^{-1}]$ 在自然同构意义下唯一。

我们在此处做出一个关键的观察：

命题 2.2.13. 对于反射子范畴 $L : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : i$（此处 i 是子范畴的嵌入，L 是其左伴随），记 $W = \{f \text{为} \mathcal{C} \text{中的态射} | L(f) \text{在} \mathcal{D} \text{中可逆}\}$，则函子 $L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 给出局部化 $\mathcal{C}[W^{-1}]$。
更进一步的，子范畴的嵌入 $i : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 等价于 W-局部对象的全子范畴 $\mathcal{C}_W \hookrightarrow \mathcal{C}$ 的嵌入。

证明: 我们验证泛性质。若 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$ 把 W 中的态射变成同构，那么考虑伴随的单位给出的自然变换：

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] \arrow[dr, "L"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \mathcal{E} \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "i"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$F\eta:F\to FiL$。

对 $\mathcal{C}$ 的每个对象 c，由单位和余单位的性质，$\eta_c:c\to iL(c)$ 被 L 变为同构：$L(c)\to LiL(c)\to L(c)=\mathrm{id}_{L(c)}$，于是 η 也被 F 变为自然同构。于是 $F\eta:F\to FiL$ 是自然同构。于是我们给出了穿过 L 的分解

我们接下来证明分解的唯一性。对于任意一个 F 穿过 L 的分解 $F=\tilde{F}L$，考虑伴随的余单位 ε 给出的自然变换：

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & {} \arrow[d, phantom, "\|"] & \mathcal{E} \\
\mathcal{D} \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"'] & {} & \mathcal{D} \arrow[ur, "\tilde{F}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\tilde{F}\varepsilon:Fi\to\tilde{F}$。

由反射子范畴的性质，ε 是自然同构，于是 $\tilde{F}\varepsilon$ 也是自然同构。于是我们有 $\tilde{F}$ 一定自然同构于 Fi，唯一性得证。

考虑 $\mathcal{D}$ 中的对象 d，由于伴随诱导的自然同构 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,i(d))\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(L(-),X)$，我们有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,i(d))$ 把 W 中的元素打到同构，于是 $i(d)$ 是 W-局部对象。

反之，对于一个 W-局部对象 l，我们证明 $\eta_l:l\to iL(l)$ 是同构，于是 l 在 i 的本质像中。首先，η_l 一定为 W 中的元素，由 l 是 W-局部对象知有同构：$\eta_l^*:\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(iL(l),l)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(l,l)$。考虑单位映射在左侧的原像，知 η_l 有左逆。但由上半部分，$iL(l)$ 也是 W-局部对象，故上述构造得到的左逆又有左逆。这推出该左逆是同构，于是 η_l 也是同构。 □

我们不加证明的引用如下结论：

定理 2.2.14. *对于一个可表现范畴 $\mathcal{C}$ 中的小态射族 W，$C_W\hookrightarrow C$ 为反射子范畴。*

证明: 见。 □

推论 2.2.15. *层范畴是预层范畴的自反子范畴。*

证明: 预层范畴是可表现的，而先前构造的 W 显然是小集合，于是我们由上述定理直接得到结论。 □

于是我们发现，要给出层化函子，只需给出预层范畴关于 W 的局部化。值得注意的是，局部化在一般情况下的构造十分复杂，于是我们接下来用一些操作来简化其构造。

引理 2.2.16. *令 $\bar{W}$ 为 W 在 $\mathbf{pSh}(\mathcal{C})$ 的箭头范畴中的余完备化（即在 W 中加入所有箭头存在的余极限）。*
一个对象 U 是 W-局部的当且仅当其是 $\bar{W}$-局部的。

证明: 显然，我们有 $\bar{W}$-局部对象都是 W-局部对象。
反之，由于 $\mathrm{Hom}(-,U)$ 把余极限转化为极限，其把一系列同构的余极限转化为同构，于是 U 是 W-局部对象可以推出其是 $\bar{W}$-局部对象。 □

定义 2.2.17. 对于一族 $\mathcal{C}$ 中的态射 W，我们称其满足右分式演算条件，如果以下的三个条件被满足：

1. W 包含所有的同构，而且对复合封闭。
2. 对于一个 W 中的态射 $v: x \to z$，对任意 $f: y \to z$，存在一个 $u: w \to y$ 在 W 中，而且存在 $g: w \to x$ 使得如下图表交换。

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & x \arrow[d, "v"] \\ y \arrow[r, "f"'] & z \end{tikzcd}$$

3. 对于一个交换图 $x \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} y \xrightarrow{u} z$，$u \in W$，存在一个 $v: w \to x$ 使得 $gv = fv$。

构造 2.2.18. 我们构造 $\mathcal{C}$ 对满足右分式演算条件的 W 的局部化 $\mathcal{C}[W^{-1}]$。
我们定义 $\mathcal{C}[W^{-1}]$ 为如下的范畴：其与 $\mathcal{C}$ 具有相同的对象，而对于 $\mathcal{C}$ 中的两个对象 a 和 b，我们定义 $\mathrm{Hom}(a,b)$ 为所有的 $a \leftarrow a' \to b$（其中态射 $a' \to a$ 在 W 中）商掉如下的等价关系：$a \leftarrow a' \to b$ 等价于 $a \leftarrow a'' \to b$ 当且仅当存在 $\bar{a}$ 和如下的交换图（这是形式的通分）：

$$\begin{tikzcd} & a'' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a & \bar{a} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & b \\ & a' \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

其中 $\bar{a} \to a$ 的态射在 W 中。两个态射的复合由条件二和如下的交换图给出：

$$\begin{tikzcd} a'' \arrow[r] \arrow[d] & b' \arrow[r] \arrow[d] & c \\ a' \arrow[r] \arrow[d] & b & \\ a & & \end{tikzcd}$$

显然，由条件三这一构造独立于等价类的选择。这一范畴满足局部化的泛性质是三角范畴中的经典结果，此处证明略。最后，我们注意到如上的态射集等价于如下余极限：$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[W^{-1}]}(x,y) \simeq \varinjlim_{x' \to x \in W} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x',y)$。

我们再次陈述一个事实。

引理 2.2.19. $\bar{W}$ 满足右分式演算条件。

证明: 见 [nLa24b]。 □

推论 2.2.20. 层化函子可以由如上的局部化操作构造。即对于一个预层 X，和一个层 A，我们有如下的集合间的双射：

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)}(L(X),A) \simeq \varinjlim_{X'\to X\in\bar{W}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(X',A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(X,A)$$

证明: 前一个双射由前面的构造给出，后一个双射由 A 是 $\bar{W}$ 局部对象给出。 □

定理 2.2.21. 层化可以被如下的构造：

$$L(X) = U \mapsto \varinjlim_{U'\to h(U)\in\bar{W}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}_{\mathcal{C}}}(U',X)$$

证明: 由前面的引理和米田引理显然。 □

我们注意到，虽然我们已经有了对层化非常好的描述，但是这个构造还是过于抽象。我们有一个具体的构造，一般被称作 Grothendieck 加法构造。
我们首先注意到，在如上的层化函子的构造中，在余极限的指标上出现了另一个余极限（由 W 和 $\bar{W}$ 的定义），所以我们可能会期望连续计算两次的某种极限可以给出层化函子的具体构造。

定义 2.2.22. 我们定义 $\mathcal{P}$ 是可分预层，如果对于任意一个 U 和其上的筛 S，我们都有

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(h(U),\mathcal{P}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(S,\mathcal{P})$$

是单射（回忆 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(S,\mathcal{P})$ 代表了 $\mathcal{P}$ 在 S 对应的筛上的下降信息，并且回忆如果 $\mathcal{P}$ 是层，$\mathcal{P}$ 是局部对象，以上态射是同构）。

定理 2.2.23. 对于预层 $\mathcal{P}$，我们定义 $\mathcal{P}^+$ 为如下的预层：

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(h(U),\mathcal{P}^+) = \mathcal{P}^+(U) := \varinjlim_{S\to h(U)\in J(U)} \mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(S,\mathcal{P})$$

$\mathcal{P}^+$ 的确是一个良定义的预层，而且我们有一个自然变换：$\eta_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}^+$。对于预层 $\mathcal{P}$，$\mathcal{P}^+$ 可分；对于可分预层 $\mathcal{P}$，$\mathcal{P}^+$ 是层，于是 $\mathcal{P}^{++}$ 给出一个层。

证明: $\mathcal{P}^+$ 良定义：我们注意到 J 在拉回下封闭，于是要对于 $f : V \to U$ 给出 $f^* : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(V)$，我们只需对余极限的指标做拉回。由余极限的泛性质，我们构造出了上述态射。
$\eta_{\mathcal{P}}$ 的构造：$\mathcal{P}(U)$ 中的元素等价于 $h(U) \to \mathcal{P}$ 的态射，于是我们将 $h(U) \to \mathcal{P}$ 这一截面打到 $h(U) \to h(U) \to \mathcal{P}$（前者对应极大筛）。
$\mathcal{P}^+$ 可分：令 $f_1 : S_1 \to \mathcal{P}$，$f_2 : S_2 \to \mathcal{P}$，其中 S_1 和 S_2 都是 U 上的覆盖筛，于是 f_1 和 f_2 对应了 $\mathcal{P}^+(U)$ 的某两个元素。我们验证假如 f_1 和 f_2 在某个筛 $S \in J(U)$ 上相等，那么 f_1 和 f_2 对应了 $\mathcal{P}^+(U)$ 的同一个元素。f_1 和 f_2 在 S 上相等，即对于 S 中任意一个态射 $g : V \to U$（由米田嵌入，即 $g : h(V) \to h(U)$，所以我们可以拉回），$g^*S_1 \to S_1 \to \mathcal{P}$ 和 $g^*S_2 \to S_2 \to \mathcal{P}$ 代表了 $\mathcal{P}^+(V)$ 上的同一个元素。于是由余极限的泛性质，存在一个 $S_g \in J(V)$ 使得 $S_g \to g^*S_1 \to S_1 \to \mathcal{P}$ 和 $S_g \to g^*S_2 \to S_2 \to \mathcal{P}$ 相等。由 Grothendieck 拓扑的传递性，所有 S_g 在沿 g 推前后的并构成了 U 的覆盖筛 T，于是我们有 $T \to S_1 \to \mathcal{P}$ 和 $T \to S_2 \to \mathcal{P}$ 相等，于是再由余极限的构造，f_1 和 f_2 在 $\mathcal{P}^+(U)$ 中相同。

$\mathcal{P}$ 可分 $\implies \mathcal{P}^+$ 是层：由于 $\mathcal{P}^+$ 是可分的，我们只需证明 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(h(U),\mathcal{P}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(S,\mathcal{P})$ 是满射。我们首先注意到对于两个覆盖筛 S_1 和 S_2，$S_1 \cap S_2$ 同样是覆盖筛，由于 $S_1 \cap S_2$ 等于 S_2 对 S_1 中的每个元素拉回，复合后再取并，而其是覆盖筛由传递性保证。其次，我们注意到如果 $f_1 : S_1 \to \mathcal{P}$ 和 $f_2 : S_2 \to \mathcal{P}$，（$S_1$ 和 S_2 在 $J(U)$ 中）代表了 $\mathcal{P}^+(U)$ 的同一个元素，由于 $\mathcal{P}$ 可分，则 f_1 和 f_2 在 $S_1 \cap S_2$ 上相等。于是对于 $\mathcal{P}^+(U)$ 的一个元素，我们可以取一个极大的代表元，因为由以上论证，我们可以把代表元取并。然后，对于 $S \to \mathcal{P}^+$ 为任意态射，则对每个 $f : V \to U \in S$ 我们都有 $\mathcal{P}^+(V)$ 中的一个元素 $S_f \to \mathcal{P}^+$，我们不妨设其是我们先前构造的极大代表元。所有 S_f 与 f 复合后构成 U 的覆盖筛，于是我们有 F 在 U 上的一个相容族。由 $\mathcal{P}^+$ 的构造，这给出了 $\mathcal{P}^+(U)$ 粘合 $S \to \mathcal{P}^+$ 的一个元素。 □

推论 2.2.24. *层化保持有限极限。*

证明： 注意到 $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}^+$ 的过程中在对偏序集（于是是滤过范畴）取余极限，于是这一操作与有限极限交换。 □

注记. 在第四章中我们会再次看到这一构造。我们会发现，在具有了一些高阶的观点之后，如上的证明是不本质的。单态射在某种意义上对应了 -1-截断的态射，而等价则对应了 -2-截断的态射。

与拓扑空间上的层类似，景间的态射给出了层范畴之间的推前和拉回。

构造 2.2.25. *对于一个景之间的态射 $f : (\mathcal{C}, J) \to (\mathcal{D}, K)$，我们定义 $f_* : \mathbf{pSh}(\mathcal{D}) \to \mathbf{pSh}(\mathcal{C})$ 为如下的函子：$\mathcal{P} : \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Set} \mapsto \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{Set}$。由于 f 保持覆盖，f_* 在 $\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, K)$ 上的限制给出了到 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 上的函子。对于 $\mathcal{C}$ 中 $J(U)$ 的一个覆盖筛 S：*

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(S, f_*F(-))\\
\simeq&\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(\varinjlim(\coprod h(U_i \times_U U_j) \rightrightarrows \coprod h(U_i)), F(f(-)))\\
\simeq&\varprojlim(\prod \mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(h(U_i), F(f(-))) \rightrightarrows \prod \mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(h(U_i \times_U U_j), F(f(-))))\\
\simeq&\varprojlim(\prod F(f(U_i)) \rightrightarrows \prod F(f(U_i \times_U U_j)))\\
\simeq&\varprojlim(\prod F(f(U_i)) \rightrightarrows \prod F(f(U_i) \times_{f(U)} f(U_j)))\\
\simeq&\varprojlim(\prod \mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{D})}(h(f(U_i)), F(-)) \rightrightarrows \prod \mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{D})}(h(f(U_i) \times_{f(U)} f(U_j)), F(-)))\\
\simeq&\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{D})}(\varinjlim(\coprod h(f(U_i)) \times_{h(f(U))} h(f(U_j)) \rightrightarrows \coprod h(f(U_i))), F(-))\\
\simeq&\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{D})}(f(S), F(-))\\
\simeq&\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{D})}(h(f(U)), F(-))\\
\simeq&\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(h(U), F(f(-)))
\end{aligned}
$$

由特殊伴随函子定理（special adjoint functor theorem），$\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, K)$ 完备，局部小，良幂（well-powered），有小余生成集（这一条性质和上一条性质由层范畴中的子对象分类子给出，定义见 3.1 节），$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ 局部小，故只需证明 f_* 保持所有极限，即可给出 f_* 的左伴随 f^*。而 f_* 保持极限是由于层的极限等同于作为预层的极限，而预层的极限是逐点的。
注意到我们可以把 f_* 看成复合：$\mathbf{Sh}(\mathcal{D}, K) \hookrightarrow \mathbf{pSh}(\mathcal{D}) \to \mathbf{pSh}(\mathcal{C})$，其中第一个函子是子范畴的

嵌入，第二个函子是与 f^{op} 的复合。而这两个函子的左伴随都是显示的：第一个函子的左伴随是 $\mathcal{D}$ 上的层化函子，而第二个函子的左伴随则是沿 f 的如下 Kan 扩张：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "\mathcal{P}"] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{Set} \arrow[dl, phantom, "\Downarrow"] \\
\mathcal{D} \arrow[ur, "Lan_f \mathcal{P}"'] &
\end{tikzcd}$$

于是 f^* 由如下方式给出：$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) \hookrightarrow \mathbf{pSh}(\mathcal{C}) \xrightarrow{Lan_f} \mathbf{pSh}(\mathcal{D}) \xrightarrow{L} \mathbf{Sh}(\mathcal{D}, K)$。层化的构造见如上加法构造，而对于 Kan 扩张的计算，我们可以使用逐点余极限的方式和余端公式（*coend formula*）给出。至此，我们已经完成了对于 f^* 的构造。

2.3 应用：ℓ-进上同调

本节中我们将略去大部分定理的证明，以展示 Grothendieck 意象在几何中的应用。我们先介绍一些代数几何中基本的概念。

定义 2.3.1. 对于一个环 A，我们定义如下空间 $\mathrm{Spec}(A)$，称作 A 的素谱。$\mathrm{Spec}(A)$ 在集合上由 A 的全体素理想构成。对于 A 的任意一个理想 I，我们定义 $V(I) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) | I \subseteq \mathfrak{p}\}$。我们再定义 $D(I) = \mathrm{Spec}(A) - V(I)$，显然这构成 $\mathrm{Spec}(A)$ 上的拓扑。我们定义 A 对应的仿射概形为 $\mathrm{Spec}(A)$ 配备一个截面构成的环层。我们定义 $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(A)}(D(I))$ 为 $\{\sigma : D(I) \to \coprod_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(A)} A_{\mathfrak{p}}\}$ 的如下子环：

1. 对于每个 $\mathfrak{p} \in D(I)$，$\sigma(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$。
2. 对于每个 $\mathfrak{p} \in D(I)$，存在某个 $\mathfrak{p}$ 的开邻域 $\mathfrak{p} \in U_{\mathfrak{p}} \subseteq D(I)$，以及 A 中的两个元素 f 和 g，使得对于任意 $\mathfrak{q} \in U_{\mathfrak{p}}$ 都有 $g \notin \mathfrak{q}$，$\sigma(\mathfrak{q}) = f/g \in A_{\mathfrak{q}}$。

此处我们注意到该环层在 $\mathfrak{p}$ 处的茎是局部环 $A_{\mathfrak{p}}$。我们定义一个概形是一个拓扑空间 X 配上其的一个环层 $\mathcal{O}_X$（称为结构层）使得每点 $x \in X$ 处 $\mathcal{O}_X$ 的茎 $\mathcal{O}_{X,x}$ 都是局部环，并且存在一个开邻域 $x \in U \subseteq X$，使得 $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ 同构于某个仿射概形。我们将其记作 $(X, \mathcal{O}_X)$（有时简记为 X）。我们称结构层每点处茎的剩余域为该点处的剩余域。
我们定义两个概形之间的态射为如下的对 $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$，其中 $f : X \to Y$ 是连续映射，而 $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ 是层映射。显然，我们有茎之间的态射

$$f_*\mathcal{O}_{X,f(x)} = \varinjlim_{V\ni f(x)} \mathcal{O}_X(V) = \varinjlim_{f^{-1}(V)\ni x} \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \to \varinjlim_{U\ni x} \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{X,x}$$

于是与 $f^\sharp_{f(x)}$ 复合我们得到了 $f^\sharp_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ 的环同态。我们在定义中要求该同态是一个局部环同态。
显然，全部概形构成一个范畴 **Sch**。对于某个固定的概形 S，我们定义俯范畴 $\mathbf{Sch}/S$ 中的对象 $X \to S$ 为 S 上的概形，态射称为结构态射。如果 $S = \mathrm{Spec}(A)$，则我们记 S 上的概形为 A 上的概形。

我们陈述一个简单的事实。

定理 2.3.2. *概形范畴具有拉回。*

定义 2.3.3. 我们称 A 是一个正则局部环，如果其是诺特局部的，并且其维数与 $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ 作为 $k = A/\mathfrak{m}$ 的线性空间的维数相同。
我们称一个 k 上的概形 X 是光滑的，如果 $X \times_{\mathrm{Spec}(k)} \mathrm{Spec}(\bar{k})$ 的结构层在每点处的茎都是正则局部环。

定义 2.3.4. 对于一个概形态射 $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$，我们定义其是平坦的，如果其在每一点 $x \in X$，都有 $f^\sharp_x$ 是平坦的环同态。
对于一个概形态射 $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$，我们定义其在点 $x \in X$ 处是局部有限展示的，如果存在一个包含 x 的仿射开集 U 和包含 $f(x)$ 的仿射开集 V，使得 $f(U) \subseteq V$，并且 $\mathcal{O}_X(U)$ 是 $\mathcal{O}_Y(V)$ 的有限展示代数（注意到我们有 $\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \to \mathcal{O}_X(U)$ 的两个环同态，

前者由 $f^\sharp$ 给出，后者由限制映射给出），并且我们定义 $(f, f^\sharp)$ 是有限展示的，如果对于任意 $x \in X$ 其都是局部有限展示的。
对于一个概形态射 $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$，我们定义其是光滑的，如果其是平坦的，有限展示的，而且对于 Y 中的每一点 y，都有 $f^{-1}(y) \subseteq X$ 作为 y 处剩余域上的的概形是光滑的。

定义 2.3.5. 对于一个概形 X，我们定义其维数为其中不可约闭集的最大升链长度。
对于一个概形态射 $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$，我们定义其在点 $y \in Y$ 处的相对维数为 $f^{-1}(y)$ 的维数。如果在每点 y 处 f 的相对维数均为 n，则定义 f 的相对维数也为 n。

我们接下来给出一个核心的定义：

定义 2.3.6. 我们称一个概形态射是平展的，如果其是光滑的，而且其具有相对维数 0。

注记. 平展的概形态射有许多种等价的定义，但是这个概念的精神是模仿某种局部的光滑同胚性，见 [nLa24a]。

命题 2.3.7. *平展映射在拉回下封闭，而且对于 $f_1 : X \to Y$ 和 $f_2 : Y \to Z$，f_2 平展则 f_1 平展等价于 $f_2 \circ f_1$ 平展。*

定义 2.3.8. 对于一族平展态射 $f_i : U_i \to X$，我们称其是一族平展覆盖，如果 $X = \bigcup f_i(U_i)$ 在集合论意义下成立。
对于一个概形 X，我们定义其平展景 X_{et} 为 $\mathbf{Sch}/X$ 中由 $U \to X$ 平展的对象生成的全子范畴（由上述命题，其中的态射 $(U \to X) \to (V \to X)$ 视为 $U \to V$ 的态射也平展），其中的覆盖为所有的平展覆盖。由上述命题，这一族覆盖的确构成一族 Grothendieck 拓扑基。
最后，我们定义一个概形 X 关于系数 A（A 是一个阿贝尔群）的平展上同调 $H^n_{et}(X, A)$ 为景 X_{et} 上 A 系数常值层的上同调，即全局截面函子的右导出。

我们接下来开始讨论 Weil 猜想。

猜想 2.3.9. *对某个有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的射影代数簇 X 我们定义其 ζ-函数：*

$$\zeta_X(s) = \exp(\sum_{n\geq 1} \frac{\#X(\mathbb{F}_q^n)}{n}(q^{-s})^n)$$

其具有如下的三条性质：

1. *（有理性）$\zeta_X(s)$ 是关于 $T = q^{-s}$ 的有理函数。更进一步的，其具有如下的形式*

$$\zeta_X(s) = \frac{P_1(T)\cdots P_{2n-1}(T)}{P_0(T)\cdots P_{2n}(T)}$$

   其中 $P_i(T)$ 是整多项式。我们还有 $P_0 = 1 - T$，$P_{2n} = 1 - q^n T$，$P_i(T) = \prod_j (1 - \alpha_{ij} T)$（$\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$）。

2. *（函数方程与庞加莱对偶）ζ-函数满足以下的函数方程：*

$$\zeta_X(n - s) = \pm q^{nE/2 - Es} \zeta_X(s)$$

或者等价的，用 T 来描述的方程：

$$\zeta_X(q^{-n}T^{-1}) = \pm q^{nE/2}T^E\zeta(X,T)$$

其中 E 是 X 的欧拉示形数。于是我们有 $\{\alpha_{2n-i,j}\}$ 与 $\{q^n/\alpha_{i,j}\}$ 对于 $1 \le i \le 2n-1$ 相等。

3. （黎曼猜想）$|\alpha_{i,j}| = q^{i/2}$ 对于所有 $1 \le i \le 2n-1$ 和 j 成立。这推出所有 $P_k(T)$ 的零点处于具有实部 $k/2$ 的直线上。

4. （贝蒂数）若 X 是某个在 $\mathbb{C}$ 中的某个数域上的非奇异射影簇 Y 一个好的模 p 约化，那么 P_i 的次数和 Y 的复点形成的空间的贝蒂数相同。

Weil 相信，以上的猜想中的信息可以从一个 Weil 上同调理论中完全获得。

定义 2.3.10. 对于一个域 $\mathbb{F}$ 和一个特征零的系数域 k，我们定义一个 Weil 上同调理论是一个如下的反变函子：

$$H^*: \{\mathbb{F}\text{上的光滑射影代数簇}\} \to \{k\text{上的分次代数}\}$$

对于 n 维的代数簇 X，满足以下的八条公理：

1. （有限维）对于任意整数 i，$H^i(X)$ 是一个有限维 K-线性空间。
2. （维数）对于 $i<0$ 或 $i>2n$，$H^i(X)=0$。
3. （定向）$H^{2n}(X)=k$。
4. （庞加莱对偶）存在非退化配对 $H^i(X)\otimes H^{2n-i}(X)\to H^{2n}(X)=k$。
5. （Kunneth 公式）我们有典范的 Kunneth 同构 $H^*(X)\otimes H^*(Y)\to H^*(X\times Y)$。
6. （代数闭链映射）对于任意的整数 i，记 $Z^i(X)$ 为 X 上余 r 维的代数的闭连构成的阿贝尔群，则存在一个典范的自然变换 $\gamma_X: Z^i(X)\to H^{2i}(X)$，且与 Kunneth 同构相容。更进一步的，如果 X 退化为点，那么该映射由 $\mathbb{Z}$ 到 k 的典范嵌入给出（回忆 k 特征零）。
7. （弱 lefschetz 公理）对于任意的超平面截面 $j: W\hookrightarrow X$（即 W 为 X 和某个背景射影空间中的超平面的交），$j^*: H^i(X)\to H^i(W)$ 在 $i\le n-2$ 时给出同构，在 $i=n-1$ 时给出单射。
8. （强 lefschetz 公理）对于 W 为 X 的超平面截面（这显然余一维），令 $w=\gamma_X(W)\in H^2(X)$，$L: H^i(X)\to H^{i+2}(X)$，$x\mapsto x\cdot w$，则 $L^i: H^{n-i}(X)\to H^{n+i}(X)$ 对 $1\le i\le n$ 是同构。

幸运的是，Grothendieck 和 Artin 于 1962 年用平展上同调构造出了一个好用的 Weil 上同调。

定理 2.3.11. *我们令* $H^i(X,\mathbb{Z}_\ell) = \varprojlim_k H^i(X,\mathbb{Z}/\ell^k\mathbb{Z})$，*并令* $H^i(X,\mathbb{Q}_\ell) = H^i(X,\mathbb{Z}_\ell)\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$。$H^i(X,\mathbb{Q}_\ell)$ *对* $\mathbb{F}_p$（$p\neq\ell$）*上的射影代数簇给出了一个 Weil 上同调理论。*

回忆代数拓扑中我们有经典的结论：Lefschetz 不动点定理。Grothendieck 证明，对于 ℓ-进上同调和 Frobenius 自同态，我们也有类似的结论。

定理 2.3.12. 对于一个 $\mathbb{F}_q$ 上的光滑射影代数簇 X 和 $f: X \to X$ 为 X 的自同态，则 f 的不动点的个数为

$$\sigma_{n\geq 0}(-1)^n \mathrm{Tr}(f; H^n(X))$$

再结合如下的定理：

定理 2.3.13. 对于一个 $\mathbb{F}_{p^n}$ 上的光滑射影代数簇 X，我们令 $\bar{X}$ 为 X 换基到 $\bar{\mathbb{F}}_{p^n}$ 上。令 F 为 $\bar{X}$ 的 *Frobenius* 自同态，则 $\bar{X}$ 的 $\mathbb{F}_{p^n}$ 闭点恰好是 F^n 的不动点集。

我们便能看出有关 ζ-函数的许多信息了。实际上，由以上的两个定理，我们有

推论 2.3.14. 令 $P_i = \det(I - TF_q)$（$I - TF_q$ 视为 H^i 上的自同态给出的矩阵），则我们由线性代数中的结论立刻有

$$\zeta_X(T) = \frac{P_1(T)\cdots P_{2n-1}(T)}{P_0(T)\cdots P_{2n}(T)}$$

于是，函数方程和庞加莱对偶可以直接由上同调的庞加莱对偶公理得出。同时，贝蒂数猜想可以由复代数簇上 ℓ-进上同调和常规的上同调的比较定理得出。

黎曼猜想的证明过于复杂，我们不在此叙述。

第三章　意象理论

在二十世纪上半叶，范畴论被创立之初，就有人提出范畴论也可以替代集合论作为数学的根基。Lawvere 在五十年代到六十年代初研究了许多经典概念的范畴化后，于 1964 年（[Law64]）首次独立于集合论提出了集合范畴 **Set** 的纯公理化叙述方法，使用八条公理刻画了等价意义下唯一的一个范畴（我们将在第三节中提到这一结论）。在这篇文章的八条公理中，有很大一部分与现在意象的定义重合，已经有了意象的雏形。Grothendieck 在研究 Grothendieck 意象的过程中，发现其与逻辑存在着密切的关联。之后，Lawvere 在研究 Grothendieck 意象之后发现其中蕴含了一种简单的无穷小概念，并以此为根基发展了综合微分几何。在与 Tierney 合作后，他们于 1972 年使用意象证明了连续统假设与 ZFC 独立，并于 1973 年推广 Grothendieck 意象，发现了意象的公理化叙述 [Tie73]。我们将在第四节中详细介绍这一工作。总而言之，在 Lawvere 和 Tierney 的工作后，意象被应用于数理逻辑领域，甚至可以和类型论一起作为数学的根基出现。

3.1 意象的基本范畴论性质

我们现在给出意象的一般定义。

定义 3.1.1. 我们记一个范畴中的始对象为 0，终对象为 1。
对于一个范畴 $\mathcal{E}$ 中的某个对象 c，我们定义 $\mathrm{Sub}(c)$ 为 c 的所有子对象构成的集合。称 Ω 是子对象分类子，如果对于 $\mathcal{E}$ 中的任意一个对象 c，都有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c, \Omega)$ 在集合意义上自然同构于 $\mathrm{Sub}(c)$。或者等价的，存在一个终对象 $1 \to \Omega$ 的态射 $\top$，使得对于任意 $u \hookrightarrow c$ 是单态射，都存在 $\varphi : c \to \Omega$ 使得如下图表是拉回：

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ c \arrow[r, "\varphi"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

我们记作 $\varphi = \mathrm{Char}(i)$。对于一个范畴 $\mathcal{E}$ 中的某个对象 c，我们定义其幂对象 Pc 配备一个态射 $\in_c : c \times Pc \to \Omega$ 为具有如下泛性质的对象：对于任意 $f : c \times d \to \Omega$ 的态射，存在唯一态射 $g : d \to Pc$ 使得如下图表交换：

$$\begin{tikzcd} c \times d \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_c \times g"'] & \Omega \arrow[d, equal] \\ c \times Pc \arrow[r, "\in_c"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

推论 3.1.2. $P : \mathcal{E}^{op} \to \mathcal{E}$ 是一个良定义的函子。

证明. 我们只需对 $f : c \to d$ 给出一个 $Pf : Pd \to Pc$。而这由 P 和 $\in$ 的泛性质给出：

$$\begin{tikzcd} c \times Pd \arrow[r, "(f, 1_{Pd})"] \arrow[d, dashed, "(1_c, g)"'] \arrow[dr] & d \times Pd \arrow[d, "\in_d"] \\ c \times Pc \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

由泛性质，存在唯一 $g : Pd \to Pc$ 使得上图交换。我们定义 $Pf = g$，并且这显然保持态射的复合。 □

定义 3.1.3. 一个意象是存在有限极限，具有子对象分类子，且具有幂对象的范畴。

注记. 实际上，意象有许多不同的等价叙述。我们之所以采用这种，是因为这种定义不涉及对态射集的操作，使得意象理论可以从某种意义上独立于集合论成为数理逻辑中的基础之一。

例子. 显然，**Set** 是意象，其中的子对象分类子为二元集合，幂对象为幂集，$\in : S \times PS \to \Omega$ 为将 (s, T) 使得 $s \in T$ 打到 1，其余元素打到 0 的态射。
由于我们只要求有限的极限存在，所以所有有限集合 **FinSet** 也是意象。

推论 3.1.4. 我们有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c \times d, \Omega) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(d, Pc)$，于是 $\Omega = P1$。同时，我们有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c, \Omega) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, Pc)$。我们记第二种对应下 φ 的像为 $[\varphi]$。

证明. 由于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c, \Omega) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1 \times c, \Omega) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c, P1)$，由米田引理 $\Omega = P1$。如果我们把 $1 \times c$ 反过来，就有第二条性质：$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c, \Omega) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c \times 1, \Omega) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1, Pc)$。 □

注记. 在直观上来说，$c \to \Omega$ 的一个态射是一个 c 上的谓词。考虑 $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$，则 $\varphi : c \to \Omega$ 对应一个在 $\varphi^{-1}(1)$ 上为真，在 $\varphi^{-1}(0)$ 上为假的谓词。

构造 3.1.5. 考虑对角态射：$\Delta_c : c \to c \times c$，由于 $\pi_1 \Delta_c : c \to c \times c \to c$ 是恒等态射，我们显然有 Δ_c 可裂单，于是单。所以这对应了 $\delta_c := \mathrm{Char}(\Delta_c) : c \times c \to \Omega$，使用 P 转置得到一个态射 $c \to Pc$。我们记这个态射为 $\{\}_c$。其在 $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$ 时对应将 $s \in S$ 打到单元集 $\{s\} \in PS$。
我们有 $\{\}_c : c \to Pc$ 是单态射：假设 $f, g : x \to c$，$\{\}_c f = \{\}_c g$，由对 P 的转置我们得到 $\delta_c(1, f) = \delta_c(1, g) : c \times x \to c \times c \to \Omega$。我们现在考虑两个拉回方块：

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{(f,1)}"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & c \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_c"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ c \times x \arrow[r, "{(1,f)}"'] & c \times c \arrow[r, "\delta_c"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

于是整个长方形是一个拉回图表。这说明 $(f, 1)$ 与 $(g, 1)$ 是同一个态射 $\delta_c(1, f)$ 的拉回，于是代表了 $c \times x$ 的同一个子对象。于是我们有 x 的一个自同态 h 使得 $h(f, 1) = (g, 1)$。所以 $h \circ 1 = 1$，$h = 1$，于是 $hf = f = g$。

引理 3.1.6. 如果 $\mathcal{E}$ 是意象，那么任何的单态射都是等化子。

证明: 由子对象分类子的定义，一个单态射 $i : u \to c$ 是 $\mathrm{Char}(i)$ 与 $\top_u = u \to 1 \xrightarrow{\top} \Omega$ 的等化子。 □

推论 3.1.7. 如果 $f : c \to d$ 又单又满，那么 f 是同构。

证明: 由 f 单，f 是某 $g, h : d \to e$ 的等化子。由 f 满，$g = h$，于是 f 是 g 和 g 的等化子。这说明 f 只能是同构。 □

定义 3.1.8. 对于一个对象 $c \in \mathcal{E}$，我们显然有函子：$c \times (-) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$。我们定义其右伴随（如果存在）为 $(-)^c$。我们称之为指数对象。指数对象的构造具有函子性：对于 $c \to d$，我们有函子的自然变换：$(-)^d \to (-)^c$。

例子. $Pc = \Omega^c$，同时 $\in_c$: $c \times Pc \to \Omega$ 经过指数转置后得到 $\mathrm{id} : Pc \to Pc$。

定理 3.1.9. 意象具有所有指数对象。

证明: 我们定义指数对象 d^c 为如下的拉回：

$$\begin{tikzcd} d^c \arrow[r] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & 1 \arrow[d, "{[\top_c]}"] \\ P(d \times c) \arrow[r, "v"'] & Pc \end{tikzcd}$$

注意到 i 是一个单态射的拉回，于是也是单的。
其中 v 是如下态射的 P 转置：$c \times P(d \times c) \xrightarrow{u} Pd \xrightarrow{\mathrm{Char}(\{\}_d)} \Omega$，同时 u 为 $\in_{d \times c}$: $d \times c \times P(d \times c) \to \Omega$ 的转置。

其配备的赋值态射 $ev : c \times d^c \to d$ 由如下图表给出：

$$\begin{tikzcd}
c \times d^c \arrow[r, "{(1,i)}"] \arrow[d] \arrow[rrr, dashed, bend left, "ev"] & c \times P(d \times c) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "{(1,v)}"] & Pd \arrow[d, "\mathrm{Char}(\{\}_d)"] & d \arrow[l, "\{\}_d"'] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\lrcorner"] \\
c \times 1 \arrow[r, "{(\mathrm{id}_c, [\top_c])}"'] \arrow[rrr, bend right] & c \times Pc \arrow[r, "\in_c"'] & \Omega & 1 \arrow[l, "\top"']
\end{tikzcd}$$

其中 ev 由右侧方块的拉回泛性质得到。我们验证该指数对象的泛性质：我们验证对每个 $f : c \times e \to d$，都存在唯一 $g : e \to d^c$ 使得 $f = ev(1, g)$。
我们考虑 $\delta_d(1, f) : d \times c \times e \to d \times d \to \Omega$ 的 P 转置 $h : e \to P(d \times c)$。由转置，我们有等式 $\delta_d(1, f) = \in_{d\times c} (1, 1, h) : d \times c \times e \to d \times c \times P(d \times c) \to \Omega$。我们再次转置得到 $c \times e \to Pd$，而这个态射由 $\{\}_d f = u(1, h) : c \times e \to c \times P(d \times c) \to Pd$ 给出。我们将其与 $[\{\}_d]$ 复合得到 $\top_d \circ f = [\{\}_d]u(1, h) : c \times e \to \Omega$。在左侧，我们显然有 $\top_d \circ f = \top_{c\times e} = \top_c \circ p$，其中 p 是投影 $c \times e \to c$。在右侧，我们有 v 是 $[\{\}_d]u$ 的转置，于是在两侧同时转置，我们有

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[dr, dashed, "g"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& d^c \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 1 \arrow[d, "{[\top_c]}"] \\
& P(d \times c) \arrow[r, "v"'] & Pc
\end{tikzcd}$$

其中右下角是定义 d^c 的拉回图表。由于以上的两个态射相等，其转置后依然相等，于是由拉回的泛性质我们态射 g 使得整个图表交换。
我们接下来证明唯一性。因为 $f = ev(1, g)$，由 ev 的定义，我们有

$$\{\}_d f = \{\}_d \circ ev(1, g) = v(1, i)(1, g) = v(1, ig) : c \times e \to Pd$$

对这个态射进行转置，我们有 $\delta_d(1, f) = \in_{d\times c} (1, 1, ig) : d \times c \times e \to \Omega$。于是 $ig = h$ 被 f 唯一确定。由于 i 是单的，g 被 f 唯一确定。 □

注记. 由于 i 单，d^c 是 $P(c \times d)$ 的子对象。直观上来说，这同理于一个态射 $c \to d$ 决定了 $c \times d$ 中的一个图像。

构造 3.1.10. 对于一个单态射 $k : c \to c'$，显然 c 的子对象在和 k 复合后给出 c' 的子对象，于是这给出了 $Pc \to Pc'$ 的态射，记作 $\exists_k$，称之为直像。其具体构造如下：

$$\begin{tikzcd}
u_c \arrow[r] \arrow[d, "i_c"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
c \times Pc \arrow[r, "\in_c"] \arrow[d, "{(k,1)}"'] & \Omega \arrow[d, equal] \\
c' \times Pc \arrow[r, "e_k"] & \Omega \\
Pc \arrow[r, "\exists_k"'] & Pc'
\end{tikzcd}$$

命题 3.1.11. 如果 m 是单态射 k 的拉回：

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m"'] & c \arrow[d, "k"] \\
d' \arrow[r, "g"'] & c'
\end{tikzcd}
$$

那么我们有交换图表

$$
\begin{tikzcd}
Pc \arrow[r, "Pf"] \arrow[d, "\exists_k"'] & Pd \arrow[d, "\exists_m"] \\
Pc' \arrow[r, "Pg"'] & Pd'
\end{tikzcd}
$$

证明: 我们考虑转置后的两个态射

$$
\begin{tikzcd}
d' \times Pc \arrow[r, "{(1,Pf)}"] \arrow[d, "{(g,1)}"'] & d' \times Pd \arrow[d, "e_m"] \\
c' \times Pc \arrow[r, "e_k"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

我们只需证明这个方块交换。
我们考虑如下的两张图表：

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & u_c \arrow[r] \arrow[d, "i_c"] & 1 \arrow[d] \\
d \times Pc \arrow[r] \arrow[d] & c \times Pc \arrow[r, "\in_c"] \arrow[d, "{(k,1)}"] & \Omega \arrow[d] \\
d' \times Pc \arrow[r, "{(g,1)}"'] & c' \times Pc \arrow[r, "e_k"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & u_d \arrow[r] \arrow[d, "i_d"] & 1 \arrow[d] \\
d \times Pc \arrow[r] \arrow[d] & d \times Pd \arrow[r, "\in_d"] \arrow[d, "{(m,1)}"] & \Omega \arrow[d] \\
d' \times Pc \arrow[r, "{(1,Pf)}"'] & d' \times Pd \arrow[r, "e_m"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

其中所有的方块都是拉回。我们只需证明两个图表中，左上角作为左下角对象的子对象是等价的。而这是由于图表

$$
\begin{tikzcd}
d \times Pc \arrow[r, "{(1,Pf)}"] \arrow[d, "{(f,1)}"'] & d \times Pd \arrow[d, "\in_d"] \\
c \times Pc \arrow[r, "\in_c"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

的交换性，于是两图中上面的长方形是相同的拉回。 □

定理 3.1.12. 意象具有所有的有限余极限。

在证明前，我们先陈述几个基本的范畴论事实。

定义 3.1.13. 对于一个范畴 $\mathcal{C}$，我们定义其上的一个单子是由 (T, μ, η) 组成的三元组，其中 $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是一个自函子，$\mu : T^2 \to T$ 和 $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to T$ 是自然变换，使得如下的两个图表交换：

$$
\begin{tikzcd}
T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\
T^2 \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "T\eta"] \arrow[dr, equal] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "\eta T"'] \arrow[dl, equal] \\
& T &
\end{tikzcd}
$$

从直观上，这是一个结合幺半群（第一个方块给出结合律，第二个图表给出单位元），但其不交换。

我们称一个 $\mathcal{C}$ 中的对象 A 是一个 T-代数，如果我们有态射 $h : TA \to A$，使得如下两个图表交换：

$$\begin{tikzcd} T^2A \arrow[r, "Th"] \arrow[d, "\mu_A"'] & TA \arrow[d, "h"] \\ TA \arrow[r, "h"'] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, equal] & TA \arrow[d, "h"] \\ & A \end{tikzcd}$$

直观上，这是一个结合幺半群在集合上的作用。

我们定义两个 T-代数 (A, h) 和 (A', h') 之间的态射为 $f : A \to A'$ 使得如下方块交换：

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "h"] \arrow[d, "Tf"'] & A \arrow[d, "f"] \\ TA' \arrow[r, "h'"'] & A' \end{tikzcd}$$

我们令 $\mathcal{C}^T$ 为所有 T-代数和 T-代数态射生成的子范畴。

构造 3.1.14. 对于一对伴随 $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$，这给出了一个 $\mathcal{C}$ 上的单子：令 $T = GF$，$\mu = G\varepsilon F : GFGF \to GF$，$\eta = \eta : \mathrm{id} \to GF$。

同时，我们有遗忘函子 $U : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$，$(A, h) \mapsto A$。这个函子有一个自由代数左伴随：$F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^T$，$C \mapsto (TC, \eta_C : TC \to T^2C)$。注意到由这个伴随产生的 $\mathcal{C}$ 上的单子恰好是 (T, μ, η)。

定义 3.1.15. 我们称 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 是单子性的，如果 G 同构于 $U : \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$，其中 T 是某个单子。或者等价的，$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 有左伴随 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 使得 $K : \mathcal{D} \to \mathcal{C}^T$（此处 T 是由伴随诱导的单子），$D \mapsto (GD, G\varepsilon_D : GFGD \to GD)$ 是范畴等价。

我们陈述两个关于单子的基本事实。

定理 3.1.16. 单子性的函子保持并反射所有极限（即一个图标在该函子的像下是极限锥可以推出其本身是极限锥）。

定义 3.1.17. 我们称 a 到 b 的一对态射 $s, t : a \rightrightarrows b$ 为一个反射对，如果存在一个 $i : b \to a$ 使得 $si = ti = 1_b$。

定理 3.1.18. 如果 $\mathcal{D}$ 具有所有反射对的余等化子，$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ 有左伴随，反射同构，而且保持所有反射对的余等化子，那么 G 是单子性的。

命题 3.1.19. 幂对象函子 $P : \mathcal{E}^{op} \to \mathcal{E}$ 是单子性的。

证明: 我们首先注意到 P 具有左伴随 $P^{op} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{op}$。这是因为 $\mathrm{Hom}(c, Pd) = \mathrm{Hom}(c \times d, \Omega) = \mathrm{Hom}(d, Pc)$。我们注意到这个伴随对的单位 $\mathrm{id} \to PP^{op}$ 的转置满足如下的性质：$\in_{Pc} (1, \eta_c) = \in_c \gamma : Pc \times c \to \Omega$，其中 γ 为交换积中两个对象位置的函子。于是余单位由单位的反函子给出。

我们先证明 P 是忠实函子。对于一个态射 $h : c \to d$，显然 $(1, h) : c \to c \times d$ 是单的，于是我们

考虑 $\mathrm{Char}(1,h) : c\times d \to \Omega$ 以及其转置：

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "h"] \arrow[d, "{(1,h)}"'] & d \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_d"] & 1 \arrow[d] \\
c\times d \arrow[r, "{(h,1)}"'] \arrow[dr, Rightarrow] & d\times d \arrow[r, "\delta_d"'] & \Omega \arrow[dl, Rightarrow] \\
d \arrow[r, "\{\}_d"'] & Pd \arrow[r, "Ph"'] & Pc
\end{tikzcd}$$

于是如果 $Ph = Pk$，那么 $Ph\circ\{\}_d = Pk\circ\{\}_d$，所以 $(1,h),(1,k) : B \to B\times A$ 是同一个子对象，于是 $h=k$。

然后我们验证上一个定理中的条件。首先注意到，$\mathcal{E}^{op}$ 中具有反射对的余等化子，因为 $\mathcal{E}^{op}$ 具有所有有限余极限，所以有所有余等化子。然后，由于 P 忠实，其反射单态射和满态射。但是由于在意象中，单态射和满态射可以推出同构，所以其反射所有同构。最后，我们考虑一个 $\mathcal{E}^{op}$ 中反射对的余等化子。依定义，这是一个 $\mathcal{E}$ 中的等化子

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "g"] & c \arrow[r, shift left=2, "h"] \arrow[r, shift right=2, "k"'] & d \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

和一个态射 $f : d\to c$ 使得 $fh = fk = 1_c$。我们需要证明

$$\begin{tikzcd}
Pd \arrow[r, shift left, "Ph"] \arrow[r, shift right, "Pk"'] & Pc \arrow[r, "Pg"] & Pe
\end{tikzcd}$$

是 $\mathcal{E}$ 中的余等化子。然后由泛性质，我们注意到该图表是一个拉回。

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & c \arrow[d, "h"] \\
c \arrow[r, "k"'] & d
\end{tikzcd}$$

同时，由于 h 和 k 可裂单，g 是 h 的拉回，g 也是单的。于是，由命题 3.1.11 和一个简单的推论，以下三个图表交换：

$$\begin{tikzcd}
Pc \arrow[r, "\Sigma_h"] \arrow[d, "Pg"'] & Pd \arrow[d, "Pk"] \\
Pe \arrow[r, "\Sigma_g"'] & Pc
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Pe \arrow[r, "\Sigma_g"] \arrow[dr, equal] & Pc \arrow[d, "Pg"] \\
& Pe
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Pc \arrow[r, "\Sigma_h"] \arrow[dr, equal] & Pd \arrow[d, "Ph"] \\
& Pc
\end{tikzcd}$$

于是他们合并成一个图表

$$\begin{tikzcd}
Pc \arrow[r, "\Sigma_h"] \arrow[d, "Pg"'] & Pd \arrow[r, "Ph"] \arrow[d, "Pk"] & Pc \arrow[d, "Pg"] \\
Pe \arrow[r, "\Sigma_g"'] & Pc \arrow[r, "Pg"'] & Pe
\end{tikzcd}$$

其中一行的复合是单位。于是待证图表是可裂余等化子（split fork），所以是余等化子。 $\square$

证明： 我们现在证明定理 3.1.12。由于 $P : \mathcal{E}^{op}\to\mathcal{E}$ 的单子性，令 $T = PP^{op}$，则 $\mathcal{E}^T \simeq \mathcal{E}^{op}$。回忆遗忘函子 $\mathcal{E}^T \to \mathcal{E}$ 保持并反射所有极限，于是令 I 是一个有限的图表，依定义 $\mathcal{E}$ 具有所有的 I^{op}-极限，于是 $\mathcal{E}^T$ 也具有所有 I^{op}-极限。所以 $\mathcal{E}^{op}$ 也具有所有 I^{op}-极限，即 $\mathcal{E}$ 具有所有 I-极限。 $\square$

命题 3.1.20. 意象中具有满单分解。这个满单分解 $f=ip$ 具有如下的泛性质：若 $f=jq$，其中 j 是单态射，则存在 k 使得 $i=jk$。我们定义 $f=ip:c\to f(c)\to d$

证明: 令 $f:c\to d$。令 $x,y:d\to d\amalg_c d$ 为推出的结构映射，再令 $i:e\to d$ 为 x,y 的等化子。特别的，i 是单态射。则由于我们有 $xf=yf$，$f:c\to d$ 穿过 e，记作 $f=ip:c\to e\to d$。
然后，设 $f=jq$ 为另一组分解，且 j 是单态射。由引理 3.1.6，j 是某两个态射的等化子，设为 $s,t:d\to d'$。于是 $sj=tj$，从而 $sf=tf$。再由推出的泛性质，存在 $u:d\amalg_c d\to d'$ 使得 $s=ux$ 且 $t=uy$。所以 $sm=uxm=uym=tm$，由 j 等化子的性质，$i=jk$。
最后，我们只需要证明 p 是满射。如果 i 是同构，则 x,y 显然相等，于是 $f\simeq p$ 具有两个相同的推出结构映射 $x,y=x$，于是 f 满，p 也满。对于一般情况，我们再次分解 $p=i'p'$，所以 $f=ii'p'$。由于 ii' 是单态射，我们应用 $f=ip$ 的泛性质知存在 k 使得 $i=ii'k$。由于 i 单，$i'k=1_{f(c)}$。于是 i' 可裂满，于是既单又满，由推论 3.1.7 知其为同构。所以 p' 为满态射，$p=i'p'$ 也是满态射。 □

我们先对子对象做出一些初步的讨论。

定义 3.1.21. 对于两个子对象 $u,v\hookrightarrow c$，我们定义其交为如下的拉回：

$$\begin{tikzcd} u\wedge v \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & u \arrow[d] \\ v \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$

由于单态射的拉回还是单态射，这的确给出了一个 c 的子对象。
同时，我们定义两个子对象的并为 $u\amalg v\to c$ 的像。如果 $u\to c$ 穿过 $u\to v\to c$，则定义 $u\le v$。显然，$\mathrm{Sub}(c)$ 在这种意义下构成一个格。
最后，我们注意到子对象的并有如下的等价刻画：$u\vee v=u\amalg_{u\wedge v}v$。

构造 3.1.22. 由于 $\mathrm{Sub}(c)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c,\Omega)$，我们有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c,\Omega)$ 上自然诱导的的格结构。进一步的，我们讨论 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(d,Pc)$ 上从 $\mathrm{Sub}(c\times d)$ 诱导的格结构。我们有 $\wedge:\mathrm{Sub}(c\times d)\times\mathrm{Sub}(c\times d)\to\mathrm{Sub}(c\times d)$，于是有

$$\wedge_{*d}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(d,Pc\times Pc)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(d,Pc)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(d,Pc)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(d,Pc)$$

由米田引理，自然变换 $\wedge_*:\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,Pc\times Pc)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,Pc)$ 来自于某个 $\wedge:Pc\times Pc\to Pc$。然后，我们考虑下图的等化子：

$$\begin{tikzcd} \le \arrow[r] & Pc\times Pc \arrow[r, shift left, "\wedge"] \arrow[r, shift right, "\pi_1"'] & Pc \end{tikzcd}$$

于是内蕴偏序是 $Pc\times Pc$ 的子对象。
我们再对 $\vee$ 按 $\wedge$ 步骤操作，便诱导了 Pc 的内蕴格结构（*internal lattice structure*）。特别的，$\Omega=P1$ 具有内蕴格结构。
由于 $u\le v\iff u\wedge v=u$，Pc 的内蕴格结构的序关系也可以如此给出。

定理 3.1.23. 对于一个意象 $\mathcal{E}$ 中的任意一个对象 c，$\mathcal{E}/c$ 是意象。

证明: 显然，$\mathcal{E}/c$ 中的等化子由 $\mathcal{E}$ 中的给出，有限余积由 $\mathcal{E}$ 中的有限纤维积给出。于是 $\mathcal{E}/c$ 具有所有有限极限。

我们证明 $\mathcal{E}/c$ 中的子对象分类子由 $\pi_2 : \Omega \times c \to c$ 给出。由于 $x \to c$ 的子对象等同于 x 的子对象配备自然的态射，我们只需证明 $x \to \Omega$ 与 $(x \to c) \to (\Omega \times c \to c)$ 一一对应。显然这是积的泛性质。

最后，我们只需证明 $\mathcal{E}/c$ 具有所有幂对象。对于 $f : d \to c$，$g : e \to c$，注意到 $d \times_c e$ 是 $d \times e$ 的子对象，由一个等化子给出。我们首先对幂对象进行刻画：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_c(d \times_c e, \Omega \times c) \\
\simeq &\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(d \times_c e, \Omega) \\
\simeq &\mathrm{Sub}(d \times_c e) \\
\simeq &\{u | u \in \mathrm{Sub}(d \times e), u \leq d \times_c e\}
\end{aligned}$$

我们现在想要知道这个子对象 $\varphi : d \times_c e \to d \times e$ 所对应的态射 $\mathrm{Char}(\varphi) : d \times e \to \Omega$，以及进一步的，$[\mathrm{Char}(\varphi)] : e \to Pd$。对于前者，我们有两个拉回图表复合形成的图表

$$\begin{tikzcd}
d \times_c e \arrow[r] \arrow[d, hook, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & c \arrow[r] \arrow[d, hook, "\Delta_c"] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & 1 \arrow[d] \\
d \times e \arrow[r, "{(f,g)}"'] & c \times c \arrow[r, "\delta_c"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

于是 $\psi := \mathrm{Char}(\varphi) = \delta_c \circ (f, g)$。要计算其给出的转置，首先我们回忆转置给出的恒等式 $\psi = \in_d (1, [\psi]) d \times e \to d \times Pd \to \Omega$，于是我们希望有 $d \times e \to \Omega$ 的分解，使得其中的每个对象都形如 $d \times -$，态射都形如 $(1, -)$。最终，我们注意到有如下的图表：

$$\begin{tikzcd}
d \times e \arrow[rr, "{(f,g)}"] \arrow[rrrr, bend left, "\psi"] \arrow[d, equal] & & c \times c \arrow[rr, "\delta_c"] \arrow[d, equal] & & \Omega \arrow[d, equal] \\
d \times e \arrow[r, "{(1,g)}"] & d \times c \arrow[r, "{(f,1)}"] \arrow[d, equal] & c \times c \arrow[r, "{(1,\{\}_c)}"] & c \times Pc \arrow[r, "\in_c"] & \Omega \\
& d \times c \arrow[rr, "{(1,\{\}_c)}"] & & d \times Pc \arrow[u, "{(f,1)}"] \arrow[r, "{(1,Pf)}"] & d \times Pd \arrow[u, "\in_d"']
\end{tikzcd}$$

所以 $[\psi] = Pf \circ \{\}_c \circ g$。我们再对上述的幂对象刻画进行修改：

$$\{u | u \in \mathrm{Sub}(d \times e), u \leq d \times_c e\} \simeq \{i | i \in \mathrm{Hom}(d \times e, \Omega), i \wedge \psi = i\}$$

再用 $\mathrm{Hom}(d \times e, \Omega) \simeq \mathrm{Hom}(e, Pd)$ 得到

$$\simeq \{k | k \in \mathrm{Hom}(e, Pd), k \wedge [\psi] = k\}$$

此处的 $\wedge$ 由 Pd 的内蕴格结构得到。我们再使用 $[\psi] = Pf \circ \{\}_c \circ g$ 知 $k \wedge [\psi] = \wedge(k, [\psi]) = \wedge(k, Pf \circ \{\}_c \circ g) = \wedge(1, Pf \circ \{\}_c)(k, g) : e \to Pd \times c \to Pd$。再注意到 $k = \pi_1(k, g) : e \to Pd \times c \to Pd$。于是所求的幂对象自然是 $Pd \times c \to Pd$ 关于 π_1 和 $\wedge(1, Pf \circ \{\}_c)$ 形成的等化

子，如图：

$$\begin{tikzcd}
P_c f \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & c & \\
e \arrow[u, dashed] \arrow[r, "{(k,g)}"'] & Pd \times c \arrow[u] \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "{\wedge(1, Pf\circ\{\}_c)}"'] & Pd
\end{tikzcd}$$

这也证明了 $\{k|k \in \mathrm{Hom}(e, Pd), k \wedge [\psi] = k\} \simeq \mathrm{Hom}_c(e, P_c f)$，从而 $\mathrm{Hom}_c(e, P_c f)$ $\simeq \mathrm{Hom}_c(d \times_c e, \Omega)$。 □

定理 3.1.24. 对于一个意象 $\mathcal{E}$ 和一个态射 $f : c \to d$，我们有如下的三元伴随对：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}/c \arrow[r, shift left=6, "\Sigma_f"] \arrow[r, shift right=6, "\Pi_f"'] & \mathcal{E}/d \arrow[l, "f^*" description]
\end{tikzcd}$$

其中 f^* 是拉回。

证明: 由于 $\mathcal{E}/c \simeq (\mathcal{E}/d)/f$，我们只需考虑 $d = 1$ 的情形。

首先考虑左伴随 Σ。我们证明 $\Sigma : (x \to c) \mapsto x$ 的确是拉回（此处退化为乘积）的左伴随。如图，这由拉回的泛性质保证：

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, color=blue] \arrow[drr, bend left, color=green] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& c \times y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & y \arrow[d] \\
& c \arrow[r, "f"'] & 1
\end{tikzcd}$$

其中蓝色态射（$\mathrm{Hom}_c((x \to c), c \times y)$）与绿色态射（$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\Sigma(x \to c), y)$）显然一一对应。

我们再考虑右伴随 Π。注意到我们需要证明的双射 $\mathrm{Hom}_c(y \times c, (u : x \to c)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(y, \Pi(u : x \to c))$ 中，左侧的 $y \times c$ 具有积的形式，于是我们可以猜测 Πx 是 x^c 的子对象。事实也的确如此：我们定义 Πx 为如下的拉回：

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& \Pi x \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & x^c \arrow[d, "u_*"] \\
& 1 \arrow[r, "1_c"'] & c^c
\end{tikzcd}$$

其中 1_c 是由指数转置单位态射得到的内蕴单位态射。我们证明这的确满足伴随性（我们令 $y \to 1$ 的唯一态射为 $y_!$）：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(y, \Pi(x \to c)) \\
=&\{h : y \to x^c | u_* \circ h = 1_c \circ y_!\} \\
=&\{h : c \times y \to x | u \circ h = \pi_1 : c \times y \to c\} \\
=&\mathrm{Hom}_c(y \times c, (x \to c))
\end{aligned}$$

□

注记. 我们考虑 $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$ 和绝对情况。则 $u : x \to c$ 诱导了 c 上的集合族。这个集合族可以被视为一个丛，而 Σ 给出丛的全空间，Π 给出丛的截面空间。这是类型论中相当重要的一类类型。

推论 3.1.25. *拉回保持余极限。*

证明: 首先注意到俯范畴 $\mathcal{E}/c$ 中的余极限等同于 $\mathcal{E}$ 中的余极限。然后，从 $\mathcal{E}$ 拉回到 $\mathcal{E}/c$ 有右伴随 Π，于是保持所有余极限。 □

命题 3.1.26. *对于 $f : c \to d$，拉回：$f^* : \mathcal{E}/d \to \mathcal{E}/c$ 是逻辑态射（即其保持有限极限，子对象分类子，和指数对象）。*

证明: 由于其是 Σ_f 的右伴随，其显然保持有限极限。由子对象分类子的构造，其保持子对象分类子。于是我们只需要证明其保持指数对象，即证明 $f^*((u : x \to d)^{(v:y\to d)}) \simeq (u' : f^*(x \to d)^{v':f^*(y\to d)})$。考虑四对伴随诱导的方块：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}/d \arrow[r, shift right, "(-)^v"'] \arrow[d, shift left, "f^*"] & \mathcal{E}/d \arrow[l, shift right, "y\times_d -"'] \arrow[d, shift right, "f^*"'] \\
\mathcal{E}/c \arrow[u, shift left, "\Sigma_f"] \arrow[r, shift left, "(-)^{v'}"] & \mathcal{E}/c \arrow[l, shift left, "y'\times_c -"] \arrow[u, shift right, "\Sigma_f"']
\end{tikzcd}$$

由伴随的唯一性，我们只需证明外侧方块交换。这也就是说，对于一个对象 $u : x \to c$，

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}/d \arrow[r, shift right, "(-)^v"'] \arrow[d, shift left, "f^*"] & \mathcal{E}/d \arrow[l, shift right, "y\times_d -"'] \arrow[d, shift right, "f^*"'] \\
\mathcal{E}/c \arrow[u, shift left, "\Sigma_f"] \arrow[r, shift left, "(-)^{v'}"] & \mathcal{E}/c \arrow[l, shift left, "y'\times_c -"] \arrow[u, shift right, "\Sigma_f"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
y\times_d c\times_c x \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & x \arrow[r, equal] \arrow[d, "u"] & x \arrow[d] \\
y\times_d c \arrow[r] & c \arrow[r] & d
\end{tikzcd}$$

如下的大方块是拉回。这是由于我们有如下的对应：

$$\begin{tikzcd}
y\times_d c\times_c z \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "y'\times_c u"] & z \arrow[d, "u"] & \\
y\times_d c \arrow[r] & c \arrow[r] & d
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
y\times_d z \arrow[r] \arrow[d] & z \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\Sigma_f u"'] & c \arrow[dl] \\
y \arrow[r] & d &
\end{tikzcd}$$

其中绿色态射是右下角范畴的对象，左图的青色态射是沿顺时针方向作用，右图的青色态射是沿逆时针方向作用，蓝色态射为两个方向复合的作用。而两个蓝色态射的等价由典范的等价 $y \times_d c \times_c z \simeq y \times_d z$ 给出。 □

推论 3.1.27. *对于一个对象 $c \in \mathcal{E}$，其子对象格具有 Heyting 代数结构（回忆 Heyting 代数是具有指数对象的格）。同时，这个结构被拉回保持。*

证明: 我们证明 1 的子对象格具有 Heyting 代数结构。首先注意到 1 的子对象可以如下的刻画：$i : u \to 1$ 是单态射当且仅当对任意 $c \in \mathcal{E}$，$f, g : c \to u$ 满足 $f = g \iff if = ig$ 当且仅当对于任意 $c \in \mathcal{E}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c, u)$ 至多有一个元素。然后，对于两个 1 的子对象 $u \to 1$ 和 $v \to 1$，其指数对象 v^u 也是 1 的子对象：$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c, v^u) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(u \times c, v)$。于是 1 的子对象格有 Heyting 代数结构。
然后，注意到 $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(c) \simeq \mathrm{Sub}_{\mathcal{E}/c}(\mathrm{id}_c)$，于是这个等价给出了 c 的子对象格的 Heyting 代数结构。

最后，首先显然拉回保持子对象格中的 0 和 1，其次由于拉回同时具有左伴随和右伴随，所以其保持所有极限和余极限，于是保持子对象的交和并。最后，由于拉回是逻辑态射，其保持指数对象。 □

注记. 这同时也赋予了 Pc 一个内蕴 Heyting 代数结构，操作与赋予内蕴格结构过程中的 $\wedge$ 部分相同。

定义 3.1.28. 对于两个内蕴偏序集，P 和 P' 和两个态射

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, shift left, "\varphi"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & P' \arrow[l, shift left, "\psi"] \end{tikzcd}$$

我们称其是内蕴伴随的（如图所示），如果 $(1_P, \psi\varphi) : P \to P \times P$ 穿过 $\leq \to P \times P$，并且 $(\varphi\psi, 1_{P'})$ 穿过 $\leq' \to P' \times P'$。这与寻常的伴随中的单位和余单位构造相似。注意到这即是说对于任何对象 x，由内蕴偏序集结构诱导的偏序集 $\mathrm{Hom}(x, P)$ 和 $\mathrm{Hom}(x, P')$ 在由内蕴伴随诱导的态射 $\varphi_x : \mathrm{Hom}(x, P) \leftrightarrows \mathrm{Hom}(x, P') : \psi_x$ 是偏序集之间的伴随。

我们现在综合以上几条性质，证明以下的定理：

定理 3.1.29. *对于任意态射 $f : c \to d$，$Pf : Pd \to Pc$ 具有一个内蕴的左伴随 $\exists_f : Pc \to Pd$ 和一个内蕴的右伴随 $\forall_f : Pc \to Pd$。*

证明: 我们首先给出外在的构造。回忆对于 $f : c \to d$，我们有三元伴随对 $\Sigma_f : \mathcal{E}/c \leftrightarrows \mathcal{E}/d : f^*$，$f^* : \mathcal{E}/d \leftrightarrows \mathcal{E}/c : \Pi_f$。我们模仿这个构造，先给出三元伴随对：$\exists_f : \mathrm{Sub}(c) \leftrightarrows \mathrm{Sub}(d) : f^{-1}$ 和 $f^{-1} : \mathrm{Sub}(d) \leftrightarrows \mathrm{Sub}(c) : \forall_f$。$f^{-1}$ 的构造是明确的：对于子对象 $j : v \to d$，我们令 $f^{-1}(j) = (\pi_2 : v \times_d c \to c)$。同时，对于子对象 $i : u \to c$，我们定义 $\exists_f(i) = \iota : fi(u) \to d$（回忆 $fi(u)$ 指代 $f \circ i : u \to c \to d$ 的像，此处 ι 是像作为 d 的子对象的嵌入）。我们证明这的确给出了伴随：若 $i \leq f^{-1}(j)$，则考虑如下交换图：

$$\begin{tikzcd} u \arrow[rr, two heads] \arrow[d] \arrow[drr] \arrow[dd, bend right=40, "i"'] & & fi(u) \arrow[d, dashed] \arrow[dd, bend left=40] \\ f^{-1}(v) \arrow[rr] \arrow[d, "f^{-1}(j)"] \arrow[drr, phantom, "\ulcorner", very near start] & & v \arrow[d, "j"'] \\ c \arrow[rr, "f"'] & & d \end{tikzcd}$$

其中虚线箭头为考虑 $u \to v$ 的满单分解得到，而由 $u \to d$ 满单分解的泛性质知 $u \to d$ 的满单分解中单态射穿过 v，于是 $\exists_f(i) \leq j$。对于 $\forall_f$，我们证明对于 $i : u \to c$ 是子对象，$\Pi_f(i)$ 总给出 d 的子对象。由于 $\mathrm{Sub}_{\mathcal{E}}(c) \simeq \mathrm{Sub}_{\mathcal{E}/d}(f : c \to d)$，我们仍然只需要考虑 $d = 1$ 的情况。于是由于 $(-)^c$ 保持单态射，由定理 3.1.24 中定义 Π 的图表知对于单态射 $i : u \to c$，我们得到的 $\forall(i)$ 是 i^c 的拉回，于是是单态射。于是 $\forall_f$ 显然为 f^{-1} 的右伴随。
我们最后证明内蕴伴随存在。注意到命题 3.1.11 对 k 不一定是单态射的情况下在 $\exists$ 的这种定义下依然成立，于是对于 $g : x \to y$，将其应用于拉回方块

$$\begin{tikzcd} c \times x \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & d \times x \arrow[d] \\ c \times y \arrow[r] & d \times y \end{tikzcd}$$

我们得到方块

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sub}(c\times y) \arrow[r, "\exists_{(f,1_y)}"] & \mathrm{Sub}(d\times y) \\ \mathrm{Sub}(c\times x) \arrow[u, "(1_c,g)^{-1}"] \arrow[r, "\exists_{(f,1_x)}"'] & \mathrm{Sub}(d\times x) \arrow[u, "(1_d,g)^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

交换。于是我们发现 $\mathrm{Sub}(-\times -)$ 关于前一个分量取直像和后一个分量取原像是双自然的，于是由上方两态射是自然的，我们有下方的两个态射是自然的：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sub}(c\times x) \arrow[r, shift left, "\exists_{(f,1_x)}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Sub}(d\times x) \arrow[l, shift left, "(f,1_x)^{-1}"] \arrow[d, equal] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(x,Pc) \arrow[r, shift left, "(\exists_f)_x"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(x,Pd) \arrow[l, shift left, "(Pf)_x"] \end{tikzcd}$$

最后由米田引理，我们有 $\exists_f$ 来源于某个 $Pc\to Pd$ 的态射，于是 $\exists_f$ 是 f^{-1} 的左伴随。$\forall_f$ 是内蕴右伴随同理。 □

最后，我们考虑一个意象中的内射对象，为下一节中的定理做一定的铺垫。

定义 3.1.30. 我们称一个对象 e 是内射的，如果对于任意单射 $i:u\to c$ 和任意态射 $f:u\to e$，存在一个态射 $\tilde{f}:c\to e$ 使得 $f=\tilde{f}\circ i$。

命题 3.1.31. *子对象分类子 Ω 是内射的。*

证明：考虑一个单射 $i:u\to c$ 和一个态射 $f:u\to\Omega$。于是我们考虑如下的图表：

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, equal] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & v \arrow[r] \arrow[d, "ij"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & 1 \arrow[d] \\ u \arrow[r, "i"'] & c \arrow[r, "\mathrm{Char}(ij)"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

其中右侧图表依定义是拉回，左侧图表考虑子对象的交知是拉回。于是整个方块是拉回，于是 $\mathrm{Char}(ij)\circ i=\mathrm{Char}(j)$。于是依定义，$\mathrm{Char}(ij)$ 延拓 $\mathrm{Char}(j)$。 □

命题 3.1.32. *对于任意对象 c，其幂对象 Pc 内射。*

证明：对于单射 $i:v\to d$，考虑图表

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(d,Pc) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(v,Pc) \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c\times d,\Omega) \arrow[r, "(1,i)^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c\times v,\Omega) \end{tikzcd}$$

由于两个纵向的箭头是双射，下侧箭头是满射，上侧箭头也是满射。于是 Pc 内射。 □

3.2 Lawvere-Tierney 拓扑

本节中，我们将进一步推广格罗滕迪克拓扑的概念。

命题 3.2.1. 对于任意范畴 $\mathcal{C}$，其上的预层范畴 $\mathbf{pSh}(\mathcal{C})$ 是意象。

证明: 由于预层范畴完备，我们只需要证明其积闭并且存在子对象分类子。
对于积闭性，设 $\mathcal{P},\mathcal{Q}$ 为 $\mathcal{C}$ 上的预层，则我们定义

$$\mathcal{Q}^{\mathcal{P}}(U)=\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(\mathcal{P}\times h(U),\mathcal{Q})$$

对于 $f:U\to V$ 定义 $\mathcal{Q}^{\mathcal{P}}(f)$ 为 $h(f):h(U)\to h(V)$ 诱导的态射。则对于预层 $\mathcal{R}$，回忆由余米田引理，$\mathcal{R}=\varinjlim_{\mathcal{C}/\mathcal{R}}h(\pi_1((U,x)))$ (此处 $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ 为广义俯范畴，其中的元素形如 $(U,x\in\mathcal{R}(U))$，态射为 $f:(U,x)\to(V,y)$ 当且仅当 $f:U\to V$，且 $f^*(d)=c$)。于是我们展开定义，有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(\mathcal{R},\mathcal{Q}^{\mathcal{P}})\\
\simeq&\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(\varinjlim_{\mathcal{C}/\mathcal{R}}h(\pi_1(U,x)),\mathcal{Q}^{\mathcal{P}})\\
\simeq&\varprojlim_{\mathcal{C}/\mathcal{R}}\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(h(\pi_1(U,x)),\mathcal{Q}^{\mathcal{P}})\\
\simeq&\varprojlim_{\mathcal{C}/\mathcal{R}}\mathcal{Q}^{\mathcal{P}}(\pi_1(U,x))\\
\simeq&\varprojlim_{\mathcal{C}/\mathcal{R}}\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(\mathcal{P}\times h(\pi_1(U,x)),\mathcal{Q})\\
\simeq&\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(\mathcal{P}\times\varinjlim_{\mathcal{C}/\mathcal{R}}h(\pi_1(U,x)),\mathcal{Q})\\
\simeq&\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(\mathcal{P}\times\mathcal{R},\mathcal{Q})
\end{aligned}$$

最后我们构造子对象分类子。我们定义 $\Omega(U)=\{U\text{上所有的筛}\}$，对于 $f:U\to V$，定义 $\Omega(f):\Omega(V)\to\Omega(U)$，$S\mapsto f^*S$。最后令 $\top:1\to\Omega$ 由 $*\mapsto c$上的极大筛。这显然是一个预层，而对于 $i:\mathcal{Q}\hookrightarrow\mathcal{P}$ 为子对象，令 $\mathrm{Char}(i)$ 为如下的态射：

$$\mathrm{Char}(i)(U)(x)=\{f:V\to U|\mathcal{P}(f)(x)\in\mathcal{Q}(V)\}$$

直接验证知对 $\top:1\to\Omega$ 对该态射的拉回对应了 $\mathcal{Q}\hookrightarrow\mathcal{P}$。
或者，我们首先注意到对所有可表预层，$\mathrm{Hom}(h(U),\Omega)$ 给出了 $h(U)$ 的所有子函子，即所有筛，于是 Ω 是可表预层的子对象分类子。然后，由于任意预层和其子对象都可以拆解成可表预层和其子预层的余极限，Ω 便是所有预层的子对象分类子。 □

定理 3.2.2. 对于任意景 $(\mathcal{C},J)$，格罗滕迪克意象 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$ 是一个意象。

证明: 首先，$\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$ 具有有限极限，由于层的极限等同于作为预层的极限。
对于一个格罗滕迪克拓扑 J，我们定义 c 上的 J-闭筛是如下的筛 S，使得对于任意 $f:V\to U$，$f^*S\in J(V)$。显然，闭筛在拉回下封闭。我们证明 $\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$ 中的子对象分类子是 $\Omega_J(U)=\{U\text{上的闭筛}\}$。首先注意到这的确是层：假设对于一个 U 上的覆盖筛 T，我们有一族相容的覆

盖筛 S_d（或 S_f，如果 $f: V \to U \in T$）。我们令 $S = \{fg : f \in T, g \in S_f\}$。我们证明其闭包 $\bar{S} = \{f : V \to U | f^*S \in J(V)\}$ 是这族截面唯一确定的截面。

我们首先证明 $f^*S = S_f$。对于 $g \in S_f$ 显然 $f^*(fg) = g$，于是 $g \in f^*S$。反之，若 $h \in f^*S$，考虑定义这个态射的拉回，则存在 $f' \in T$，$g \in S_{f'}$ 使得 $fh = f'g$。于是 $h^*S_f = g^*S_{f'}$ 为极大筛，所以 $h \in S_f$。然后，$f^*\bar{S} = \bar{f^*S} = \bar{(S_f)} = S_f$，由 S_f 闭。

我们最后只需证明该闭筛是唯一的。若 S，R 为两个闭筛，满足对任意 $f : V \to U \in S$ 都有 $f^*S = f^*R$，那么我们有 $T \cap S = T \cap R$。由于 T 是覆盖筛，T 覆盖 S 的每个态射。同时，由于 S 闭，S 也覆盖 S 的每个态射。于是 $T \cap S$ 覆盖 S 的每个态射。于是 S 恰好是 $T \cap S$ 覆盖的所有态射，R 同理。所以 $S = R$。

最后，我们证明层中的指数对象等同于预层中的指数对象。实际上，我们证明只要 $\mathcal{G}$ 是层，那么 $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ 是层。考虑两个预层 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{H}$，以及一个层 $\mathcal{G}$。回忆层化保持有限极限，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(\mathcal{H}, \mathcal{G}^{\mathcal{F}}) \\
\simeq &\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(\mathcal{F} \times \mathcal{H}, \mathcal{G}) \\
\simeq &\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(L(\mathcal{F} \times \mathcal{H}), \mathcal{G}) \\
\simeq &\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(L(\mathcal{F} \times L(\mathcal{H})), \mathcal{G}) \\
\simeq &\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(\mathcal{F} \times L(\mathcal{H}), \mathcal{G}) \\
\simeq &\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathcal{C})}(L(\mathcal{H}), \mathcal{G}^{\mathcal{F}})
\end{aligned}
$$

于是任何到达 $\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ 的态射唯一的穿过层化，于是由米田引理，$\mathcal{G}^{\mathcal{F}}$ 与 $L(\mathcal{G}^{\mathcal{F}})$ 自然同构。于是其是层。 □

由于格罗滕迪克意象的确是意象，我们不妨猜测格罗滕迪克拓扑的概念可以自然的延伸到任何意象上。

定义 3.2.3. 对于一个意象 $\mathcal{E}$，我们定义其上的 Lawvere-Tierney 拓扑是一个态射 $j : \Omega \to \Omega$，满足以下的三个条件：

1. $j \circ \top = \top : 1 \to \Omega$。
2. $j \circ j = j$。
3. 回忆 $\Omega = P1$ 具有内蕴 Heyting 代数结构。$j \circ \wedge = \wedge \circ (j, j) : \Omega \times \Omega \to \Omega$。

注意到 $j \circ j = j$ 赋予了 Lawvere-Tierney 拓扑闭包的直观。对于某个 $c \in \mathcal{E}$ 和其的一个子对象 $i : u \hookrightarrow c$，我们定义其闭包 $\bar{i} : \bar{u} \hookrightarrow c$ 为 $\mathrm{Char}\bar{i} = j \circ \mathrm{Char}i$。我们定义一个子对象是闭的，如果其与其闭包相同。

同样的，Lawvere-Tierney 拓扑也能够确定某种层条件。

定义 3.2.4. 如果某个子对象 $u \hookrightarrow c$ 满足 $\bar{u} = c$，则我们称这是一个稠密子对象。对于一个意象 $\mathcal{E}$ 和其上的 Lawvere-Tierney 拓扑 j，我们定义 j-层为如下的 D-局部对象：我们定义 $D = \{u \hookrightarrow c | \bar{u} = c\}$，称之为稠密单射集。或者展开定义，一个对象 F 是 j-层，当且仅当对于任意稠密子对象 $u \hookrightarrow c$，都有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c, F) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(u, F)$ 是等价。我们同时定义 F 是 j-可分

对象当且仅当以上态射都是单态射。我们定义 $\mathcal{E}$ 中关于 j 的层生成的全子范畴为 $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$，同时定义 j-可分对象生成的全子范畴为 $\mathbf{Sep}_j(\mathcal{E})$。

定理 3.2.5. $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$ 是一个意象。

我们先证明几个引理。

引理 3.2.6. $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$ 在有限极限和指数下封闭。

证明: 首先，终对象 1 显然是层。然后，对于两个层间的一对态射 $f, g : F \rightrightarrows G$，我们证明其等化子也是层。实际上，对于一个稠密子对象 $i : u \to c$，考虑如下的交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c,E) \arrow[r, "e_*"] \arrow[d, "i^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c,F) \arrow[r, shift left, "f_*"] \arrow[r, shift right, "g_*"'] \arrow[d, "i^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c,G) \arrow[d, "i^*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(u,E) \arrow[r, "e_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(u,F) \arrow[r, shift left, "f_*"] \arrow[r, shift right, "g_*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(u,G)
\end{tikzcd}$$

由于 E 是 $f, g : F \rightrightarrows G$ 的等化子，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,E)$ 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,F) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(-,G)$ 在 $\mathbf{pSh}(\mathcal{E})$ 中的等化子，从而该图表中上下两行都是 $\mathbf{Set}$ 中的等化子图表。同时，右侧两态射 i^* 都是同构。我们只需证明左侧的 i^* 是同构，而由泛性质这是显然的。类似的，我们有 $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$ 中有二元余积。于是 $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$ 在有限极限下封闭。对于一个层 G 和任意对象 F，我们证明其指数对象 G^F 是层。这由图表

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c,G^F) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(u,G^F) \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c \times F,G) \arrow[r, "(1,i)^*"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(u \times F,G)
\end{tikzcd}$$

得出，因为稠密态射的乘积依然是稠密的，所以下侧态射是同构。 □

构造 3.2.7. 我们定义 Ω_j 为下图中的等化子

$$\begin{tikzcd}
\Omega_j \arrow[r, "m"] & \Omega \arrow[r, shift left, "1_\Omega"] \arrow[r, shift right, "j"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

注意到 $j \circ j = j$ 和等化子的泛性质诱导了 $r : \Omega \to \Omega_j$ 使得 $j = m \circ r$。所以 $mrm = jm = m$，由 m 单知 $rm = 1$，所以 Ω_j 是 Ω 的收缩。同时，上述分解恰好是 j 的满单分解，于是 Ω_j 是 j 的像。所以我们定义 $\top_j := j \circ \top : 1 \to \Omega \to \Omega_j$。
最后，我们注意到 $i : u \to c$ 是闭子对象当且仅当 $\mathrm{Char}(i) = j \circ \mathrm{Char}(i)$，于是 $\mathrm{Char}(i) = m \circ r \circ \mathrm{Char}(i) : c \to \Omega \to \Omega_j \to \Omega$，即 $\mathrm{Char}(i)$ 穿过 Ω_j。所以 $\overline{\mathrm{Sub}}_{\mathcal{E}}(c) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c, \Omega_j)$，其中 $\overline{\mathrm{Sub}}$ 表示闭子对象格。注意到 Ω_j 由闭子对象格诱导的内蕴格结构和作为 Ω 的子对象的内蕴格结构相容。

我们希望证明 Ω_j 是 j-层中的子对象分类子。但在此之前，我们需要先证明其的确是 j-层。

引理 3.2.8. 对于一个稠密子对象的嵌入 $i : u \to c$，原像映射（即拉回，此处为取交）$i^* : \overline{\mathrm{Sub}}(c) \to \overline{\mathrm{Sub}}(u)$ 是同构。

证明： 我们直接构造其逆映射：我们令 $j:\overline{\mathrm{Sub}}(u)\to\overline{\mathrm{Sub}}(c)$ 为 $j(w)=\overline{\Sigma_i(w)}$。则对于 c 的闭子对象 v，$ji^*(v)=j(v\wedge u)=\overline{v\wedge u}$。但是我们有 $\overline{v\wedge u}=\bar v\wedge\bar u=\bar v=v$，由于 u 稠密，v 闭。同时，对于 u 的闭子对象 w，$i^*j(w)=u\wedge\bar w=w$，由命题 3.1.11。 □

引理 3.2.9. *对于一个子对象的嵌入 $i:u\to c$，若 c 是 j-层，则 u 是闭子对象当且仅当其也是 j-层。*

证明： 若 u 是 j-层，则考虑如下的图表：

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, equal] \arrow[d, "k"'] & u \arrow[d, "i"] \\ \bar u \arrow[r, "\bar i"'] \arrow[ur, dashed, "r"] & c \end{tikzcd}$$

由于 $k:u\to\bar u$ 是稠密单态射，我们有 $k^*:\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar u,u)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(u,u)$ 是双射，而 r 由单位态射的原像得到。于是我们有 $r\circ k=1_u$。由于 c 是层，$k^*:\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar u,c)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(u,c)$ 是双射，于是 $irk=i=\bar ik$ 以及前述的双射推出 $ir=\bar i$。由单态射的性质，i 和 $\bar i$ 是单态射推出 r 是单态射，于是是 k 的逆。所以 u 是闭的。

反之，若 u 是闭的，我们需要证明 u 关于任何的稠密单态射 $k:v\to d$ 有 $k^*:\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(d,u)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(v,u)$ 是双射。考虑图表：

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] & u \arrow[d, "i"] \\ d \arrow[r, dashed, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & c \end{tikzcd}$$

其中 g 由 if 在 c 的层条件的对应下产生，使得整个图表交换。注意到 i 和 k 都是单态射，于是我们有 $k:v\to d$ 穿过 u 的拉回 g^*u，而且由单态射的性质，$v\to g^*u$ 一定单。于是 $d=\bar v\le\overline{g^*u}$，回忆闭包与拉回交换，故 $\overline{g^*u}=g^*\bar u=g^*u$，于是我们有 $d\to g^*u$ 的单态射，于是 g 如下穿过 u：$g:d\to g^*u\to u\to c$。则复合 $h:d\to g^*u\to u$ 是 f 在 d 上的延拓。 □

证明： 我们现在证明定理 3.2.5。由引理 3.2.6，$\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$ 具有所有有限极限和指数，由构造 3.2.7 和引理 3.2.8，Ω_j 是 j-层，而由命题 3.2.9，其分类 $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})$ 中的子对象。 □

命题 3.2.10. *对于预层意象 $\mathbf{pSh}(\mathcal{C})$，其上的 Lawvere-Tierney 拓扑与 $\mathcal{C}$ 上的 Grothendieck 拓扑一一对应，在对应下满足 $\mathbf{Sh}_j(\mathbf{pSh}(\mathcal{C}))\simeq\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$。*

证明： 对于一个 Grothendieck 拓扑 J，我们定义其对应的 Lawvere-Tierney 拓扑为

$$j:\Omega\to\Omega, j_c:S\mapsto\{f:V\to U|f*S\in J(V)\}(\text{ 即其闭包 })$$

这显然满足 Lawvere-Tierney 拓扑的三个条件：首先，$j\circ\top$ 仍然是 $\top$，因为极大筛的闭包显然是极大筛。第二，$j\circ j=j$，由于被 S 覆盖的态射一定被 $\bar S$ 覆盖。最后，$j\circ\wedge=\wedge\circ(j,j)$，因为一个态射被 $S\cap T$ 覆盖当且仅当其同时被 S 和 T 覆盖（覆盖筛的交仍然是覆盖筛）。

然后我们验证 j 的确给出了和 J 相同的层条件。首先注意到 $h(c)$ 的稠密子对象等价于 c 上的覆盖筛：如果对于任意 $f:V\to U$ 都有 $f^*S\in J(V)$，则由格罗滕迪克拓扑的传递性知 $S\in J(U)$；反之，$S\in J(U)$，则由拉回封闭性知任意 $f^*S\in J(V)$。于是 j 的层条件蕴含 J 的层条件，即 $\mathbf{Sh}_j(\mathbf{pSh}(\mathcal{C}))\subseteq\mathbf{Sh}(\mathcal{C},J)$。另一方面，设预层 $\mathcal{R}$ 满足 J 的层条件，我们要证明 P 是任何稠密子

对象嵌入的局部对象。对于一个稠密子对象的嵌入 $\mathcal{Q} \hookrightarrow \mathcal{P}$，我们只需证明对于任意 $f : \mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ 存在唯一 $\tilde{f} : \mathcal{P} \to \mathcal{R}$ 延拓 f。对于 $\mathcal{P}(U)$ 中的某个元素 x，我们将其对应到态射 $x : h(U) \to \mathcal{P}$，然后考虑以下的图表：

$$\begin{tikzcd} x^*Q \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \mathcal{Q} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R} \\ h(U) \arrow[r, "x"'] \arrow[urr, dashed] & \mathcal{P} & \end{tikzcd}$$

由于闭包被拉回保持，$x^*Q \to h(U)$ 是稠密子对象的嵌入。由于 $h(U)$ 的稠密子对象等价于其上的覆盖筛，$x^*\mathcal{Q} \to \mathcal{R}$ 可被唯一延拓到 $\tilde{f}(x) : h(U) \to \mathcal{R}$。我们定义 $\tilde{f}(U)(x)$ 为 $\tilde{f}(x) : h(U) \to \mathcal{R}$ 对应的元素。于是我们定义了 f 的延拓 $\tilde{f}$。唯一性是显然的。
反之，给定了 $j : \Omega \to \Omega$，我们定义 U 上的覆盖筛为 $h(U)$ 的所有稠密子对象。这决定了一个格罗滕迪克拓扑。两个拓扑确定相同的层条件，如上所示。 □

对于 Lawvere-Tierney 拓扑，我们同样能给出层化函子。但在此处，我们先考虑 $\mathbf{Sep}_j(\mathcal{E})$。

引理 3.2.11. 对于一个 j-可分对象 c，其子对象 $i : u \to c$ 依然 j-可分。

证明: 对于一个稠密单态射 $k : v \to d$ 和态射 $f : v \to u$，若有 $h, h' : d \to u$ 同时延拓 f，则有 $ih, ih' : d \to c$ 同时延拓 $if : v \to c$，于是 $ih = ih'$。由于 i 是单态射，$h = h'$。

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & u \arrow[d, "i"] \\ d \arrow[ur, shift left, "h"] \arrow[ur, shift right, "h'"'] & c \end{tikzcd}$$

□

定义 3.2.12. 对于态射 $f : c \to d$，我们定义 f 的图像为 $c \times d$ 中单态射 $(1, f) : c \to c \times d$ 对应的子对象，记作 $G(f)$。

回忆 $\{\}_c : c \to Pc = \Omega^c$ 是 $\delta_c = \mathrm{Char}(\Delta_c) : c \times c \to \Omega$ 的 P 转置。

引理 3.2.13. 对于对象 c，以下五个条件等价：

1. c 可分。

2. $\Delta_c : c \to c \times c$ 是闭子对象。

3. $j^c \circ \{\}_c = \{\}_c$，如图所示：

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\{\}_c"] \arrow[dr, "\{\}_c"'] & \Omega^c \arrow[d, "j^c"] \\ & \Omega^c \end{tikzcd}$$

4. 对于任意 $f : d \to c$，$G(f)$ 是 $d \times c$ 中的闭子对象。

证明: (1) $\implies$ (2)：假设 c 可分。考虑 $\Delta_c : c \to c \times c$ 的闭包 $\bar{\Delta}_c : \bar{c} \to c \times c$，以及稠密单态射 $i : c \to \bar{c}$。考虑态射 $\pi_1, \pi_2 : c \times c \to c$。显然我们有 $\pi_1 \Delta_c = \pi_2 \Delta_c : c \to c \times c \to c$，于是由 c 可分，我们有 $\pi_1 \bar{\Delta}_c = \pi_2 \bar{\Delta}_c : \bar{c} \to c \times c \to c$。但是注意到 $\Delta_c : c \to c \times c$ 为 π_1 和 π_2 的等化子，

于是我们有 $\bar{c} \to c$ 的态射，所以 $\bar{c} \le c$，从而 $c = \bar{c}$。

(2) $\iff$ (3)：$\Delta_c : c \to c \times c$ 是闭的当且仅当 $j \circ \delta_c = \delta_c : c \times c \to \Omega$。我们取这两个态射的转置：$j^c \circ \{\}_c = \{\}_c : c \to \Omega^c$。

(2) $\iff$ (4)：注意到我们可以用拉回图表定义 $G(f)$：

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r] \arrow[d, "G(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & c \arrow[d, "\Delta_c"'] \\ d \times c \arrow[r, "{(f,1)}"'] & c \times c \end{tikzcd}$$

由于 $\Delta : c \to c \times c$ 闭，其拉回 $G(f) : d \to d \times c$ 也闭。

(4) $\implies$ (1)：令 $k : v \to d$ 为稠密单态射，并且令 $f, g : d \to c$ 使得 $fk = gk$，我们只需证明 $f = g$，即延拓 $fk = gk$ 的态射唯一。我们首先注意到稠密单态射的拉回单，于是 $(k, 1) : v \times c \to d \times c$ 稠密。我们接下来考虑如下图表：

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "k"] \arrow[d, "G(fk)"'] & d \arrow[r, "f"] \arrow[d, "G(f)"] & c \arrow[d, "\Delta"] \\ v \times c \arrow[r, "{(k,1)}"'] & d \times c \arrow[r, "{(f,1)}"'] & c \times c \end{tikzcd}$$

该图表中两个方块都是拉回，而且注意到如果将 $(k, 1) \circ G(fk) : v \to v \times c \to d \times c$ 视为子对象，那么由拉回保持闭包知 $G(fk)$ 在 $G(f)$ 中稠密，而 $G(f)$ 闭，于是 $G(\overline{fk}) = G(f)$。于是 $fk = gk$ 推出 $G(f) = G(g)$，但是 $f = \pi_1 \circ G(f)$，于是 $f = g$。 □

构造 3.2.14. 回忆我们有 $r : \Omega \to \Omega_j$ 是收缩。对于任意一个对象 c，我们考虑如下的图表

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\{\}_c"] \arrow[d, two heads, "\theta_c"'] & \Omega^c \arrow[d, two heads, "r^c"] \\ Sep(c) \arrow[r, hook] & \Omega_j^c \end{tikzcd}$$

其中左侧和下侧的态射是右侧和上侧两态射复合的满单分解。注意到 Ω_j 是内射的层，所以 Ω_j^c 也是内射的层。所以 $Sep(c)$ 是可分对象的子对象，故也是可分的。然后，如果 c 可分，则由上述引理知 $j^c \circ \{\}_c = \{\}_c$，所以是单态射，于是 $r^c \circ \{\}_c$ 也是单态射。由满单分解的泛性质，$\theta_c : c \to Sep(c)$ 必为同构。于是我们构造了一个可分对象化函子 $Sep : \mathcal{E} \to \mathbf{Sep}_j(\mathcal{E})$ 和一个满自然变换 $\theta_c : c \to Sep(c)$ 在 $\mathbf{Sep}_j(\mathcal{E})$ 上是同构。同时，由如上构造，我们有如下的推论。

推论 3.2.15. 一个对象 c 是可分的当且仅当其可以被嵌入一个内射层。

证明*:* 必要性是显然的。对于充分性，我们有 $c \simeq Sep(c) \hookrightarrow \Omega_j^c$。 □

命题 3.2.16. 回忆一个态射 $f : c \to d$ 的核偶是下图中的 i

$$\begin{tikzcd} e \arrow[rr] \arrow[dr, "i"] \arrow[dd] & & c \arrow[dd, "f"] \\ & c \times c \arrow[ur, "p_1"'] \arrow[dl, "p_2"] \arrow[dr, shift left, "fp_1"] \arrow[dr, shift right, "fp_2"'] & \\ c \arrow[rr, "f"'] & & d \end{tikzcd}$$

其中外框是拉回图表，对角线是等化子。或者等价的，核偶也可以由如下的拉回给出：

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & d \arrow[d, "\Delta_d"] \\
c \times c \arrow[r, "{(f,f)}"'] & d \times d
\end{tikzcd}$$

对于 $\mathcal{E}$ 的任意一个对象 c，$\theta_c : c \to Sep(c)$ 的核偶是 $\Delta_c : c \to c \times c$ 的闭包。

证明: 由于 $Sep(c)$ 是像，所以 θ_c 的核偶等于 $r^c \circ \{\}_c$ 的核偶。我们首先证明这个核偶被 $\bar{\Delta}_c$ 包含。我们考虑核偶中的两个态射 $f, g : e \to c \times c \to c$（其中 f, g 分别是往两个分量上的投影复合核偶态射）使得 $r^c \circ \{\}_c \circ f = r^c \circ \{\}_c \circ g : e \to c \to \Omega^c \to \Omega^c_j$。我们把这两个态射进行转置，得到如下图表：

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau \circ G(f)"'] & c \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_c"] & 1 \arrow[d] & \Omega_j \arrow[d, "m"] \\
c \times e \arrow[r, "{(1,f)}"'] & c \times c \arrow[r, "\delta_c"'] & \Omega \arrow[r, "j"'] \arrow[ur, "r"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

其中 $\tau : e \times c \to c \times e$ 是交换两个分量的态射。注意到底部全部态射的复合是 $\overline{\tau G(f)}$，所以由 f 和 g 的定义，$\overline{\tau G(f)} = \overline{\tau G(g)}$。由于 $(1, g) : e \to e \times c$ 穿过 $\overline{G(g)}$，其一定穿过 $\overline{G(f)}$，如图所示：

$$\begin{tikzcd}
\overline{G(g)} \arrow[r, equal] \arrow[dr] & \overline{G(f)} \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d, "\Delta_c"] \\
e \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r, "{(1,g)}"'] \arrow[rr, bend right, "{(f,g)}"'] & e \times c \arrow[r, "{(f,1)}"'] & c \times c
\end{tikzcd}$$

于是我们有 $(f, g) : e \to c \times c$ 穿过 $\bar{\Delta}_c : c \to c \times c$。于是 $i \leq \bar{\Delta}$。
反之，由核偶的泛性质，我们只需要说明如下的图表交换：

$$\begin{tikzcd}
\bar{c} \arrow[r, "\bar{\Delta}"] \arrow[rr, bend left, "\tilde{\pi}_1"] \arrow[rr, bend right, "\tilde{\pi}_2"'] & c \times c \arrow[r, shift left, "\pi_1"] \arrow[r, shift right, "\pi_2"'] & c \arrow[r, "\{\}_c"] & \Omega^c \arrow[r, "r^c"] & \Omega^c_j
\end{tikzcd}$$

显然，$r^c \circ \{\}_c \circ \tilde{\pi}_1 \circ k = r^c \circ \{\}_c \circ \tilde{\pi}_2 \circ k$，其中 k 是 $c \to \bar{c}$ 诱导的稠密单态射，于是由于 Ω^c_j 是层，$r^c \circ \{\}_c \circ \tilde{\pi}_1 = r^c \circ \{\}_c \circ \tilde{\pi}_2$。 □

推论 3.2.17. 我们有 $\theta_c : c \to Sep(c)$ 是 $\pi_1 \circ \bar{\Delta}, \pi_2 \circ \bar{\Delta} : \bar{c} \to c \times c$ 的余等化子。

证明: 我们证明在意象中一个满射是其核偶的余等化子。
首先，我们证明 $\pi_1, \pi_2 : c \times c \to c$ 的余等化子 e 是终对象的子对象。显然，由复合，满态射的乘积是满态射。于是考虑如下图表

$$\begin{tikzcd}
c \times c \arrow[r, "{(p,p)}"] \arrow[d, "\pi_i"'] & e \times e \arrow[d, "\pi'_i"] \\
c \arrow[r, "p"'] & e
\end{tikzcd}$$

显然 $\pi_1'(p,p)=\pi_2'(p,p)$。由于 (p,p) 满，$\pi_1'=\pi_2'$。于是如果 $f,g:d\to e$ 为两个态射，则 $f=\pi_1'(f,g)=\pi_2'(f,g)=g$，于是 e 是子终对象。更进一步的，若 $c\to 1$ 是满态射，则显然有 $e=1$。

现在令 $f:c\to d$ 为任意的满态射。我们将上述论证应用于 $(f:c\to d)\in\mathcal{E}/d$。由于 f 是满态射，$(c\to d)\to(d\to d)$ 是满态射。所以 $(c\to d)\times(c\to d)\rightrightarrows(c\to d)\to(d\to d)$ 是余等化子。所以 $c\times_d c\rightrightarrows c\to d$ 是余等化子。前面的两个箭头显然是核偶。 □

推论 3.2.18. *$Sep:\mathcal{E}\to\mathbf{Sep}_j(\mathcal{E})$ 是嵌入 $\mathbf{Sep}_j(\mathcal{E})\to\mathcal{E}$ 的左伴随。*

证明: 令 $f:d\to c$ 是从任意对象 d 到可分对象 c 的态射，则 $f\circ\pi_1\circ\Delta,f\circ\pi_2\circ\Delta:d\to d\times d\to d\to c$ 相同。于是他们被唯一的延伸到 $f\circ\pi_1\circ\bar{\Delta}=f\circ\pi_2\circ\bar{\Delta}:\bar{d}\to d\times d\to d\to c$。由上述的余等化子，我们有态射 $Sep(d)\to c$ □

命题 3.2.19. *嵌入函子 $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})\to\mathbf{Sep}_j(\mathcal{E})$ 有左伴随 Sh^{Sep} 和一个单自然变换 $\tau_c:c\to Sh(c)$。*

证明: 令 $c\in\mathcal{E}$ 可分。于是由推论 3.2.15，我们有一个单态射 $i:c\to d$，其中 d 是内射的层。令 $\bar{c}$ 为其在 d 中的闭包，则由引理 3.2.9，这是一个层，而且 $k:c\to\bar{c}$ 是稠密单态射，于是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(\bar{c},e)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c,e)$ 是双射。所以这给出了嵌入的左伴随，以上的稠密单态射给出了单自然变换。 □

定理 3.2.20. *嵌入函子 $\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})\to\mathcal{E}$ 有左伴随，以及一个单位到左伴随的自然变换。更进一步的，这个左伴随保持单态射，而且是左正合的（即保持所有有限极限）。*

证明: 我们已经构造出了左伴随 $Sh^{Sep}(Sep(-))$ 和自然变换 $\eta_c=\tau_{Sep(c)}\theta_c:c\to Sep(c)\to Sh^{Sep}(Sep(c))$。我们详细的阐释这个构造：对于一个对象 c，我们先找到一个到可分对象的满射 $\theta_c:c\to Sep(c)$，然后再将其嵌入一个内射层 I_c 中。于是复合 $c\to Sep(c)\to I_c$ 具有极小的核偶 $\bar{\Delta}:\bar{c}\to c\times c$：由于 $i_c:c\to I_c$ 中核偶的商，即 $i_c(c)$，是可分的，由引理 3.2.13 知其对角线是闭的，于是其拉回，即核偶，也是闭的。反之，考虑一个到内射层的具有极小核偶的态射 $i_c:c\to I_c$，考虑其像 $i_c(c)$，由于 $i_c(c)\to I_c$ 是嵌入，$i_c(c)$ 是可分的。于是 $c\to i_c(c)$ 是满射，即 $i_c(c)$ 是核偶的商。由于 $i_c(c)$ 是可分的，核偶是闭的，所以极小核偶是 $\bar{\Delta}$。所以 $i_c:c\to I_c$ 的满单分解说明其一定具有 $i\circ\theta_c$ 的形式。总之，层化可以由如下的过程叙述：找到一个态射 $i_c:c\to I_c$ 使得 I_c 是内射层，并且 i_c 具有极小核偶。我们取 $i_c(c)$ 的闭包，即为 c 的层化。

我们接下来证明这个左伴随保持单态射。对于一个单态射 $k:u\to c$，考虑如下的图表：

$$
\begin{tikzcd}
\bar{u} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\Delta}"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \bar{c} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\Delta}"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & i_c(c) \arrow[d, "\Delta"] \\
u\times u \arrow[r, "(k,k)"'] & c\times c \arrow[r] & i_c(c)\times i_c(c)
\end{tikzcd}
$$

于是 $i_c\circ k:u\to I_c$ 具有极小的核偶，因此满足要求。于是 u 的闭包显然被 c 的闭包包含，所以层化保持单态射。

我们接下来证明层化保持所有有限极限。显然，其保持终对象，由于其已经是层了。对于乘积，

设 c, d 为 $\mathcal{E}$ 中的对象，考虑由两个拉回图表做乘积得到的拉回图表：

$$\begin{tikzcd}
c\times d \arrow[r] \arrow[d, "(\bar\Delta_c,\bar\Delta_d)"] & I_c\times I_d \arrow[d] \\
(c\times d)\times(c\times d) \arrow[r] & (I_c\times I_d)\times(I_c\times I_d)
\end{tikzcd}$$

由于闭包与乘积交换，$(\bar\Delta_c,\bar\Delta_d)=\overline{(\Delta_c,\Delta_d)}$。于是不妨 $I_{c\times d}=I_c\times I_d$，再由于闭包与乘积交换，$Sh(c\times d)=\overline{(i_c,i_d)(c\times d)}=(\overline{i_c(c)}\times\overline{i_d(d)})$。
最后我们考虑等化子。考虑等化子图表

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "k"] & c \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & d
\end{tikzcd}$$

不妨设 c 和 d 的层化由内射层 I_c 和 I_d 计算。然后注意到 f，g 可以被延拓到 $f', g' : I_c \to I_d$：首先 f，g 可以被延拓到 $\overline{i_c(c)} \to I_d$，由 I_d 层的性质；然后被延拓到 $I_c \to I_d$，由 I_d 内射的性质，如下图所示：

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r, "k"] \arrow[d] & c \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "\eta_c"'] & d \arrow[d, "\eta_d"] \\
\overline{i_ck(e)} \arrow[r] \arrow[dr] & \overline{i_c(c)} \arrow[r, shift left, "\bar f"] \arrow[r, shift right, "\bar g"'] \arrow[d] & \overline{i_d(d)} \arrow[d] \\
 & I_c \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & I_d
\end{tikzcd}$$

令 $l : x \to \overline{i_c(c)}$ 为 $\bar f$ 和 $\bar g$ 的等化子，于是我们只需要说明 $l(x) \le \overline{i_ck(e)}$（作为 I_c 的子对象）。我们考虑以下的两张图表：

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "q"] \arrow[d, "a"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & c \arrow[d] \\
y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & i_c(c) \arrow[d] \\
x \arrow[r, "l"'] & \overline{i_c(c)}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
z \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\
 & \bar e \arrow[r] \arrow[d, "\bar k"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & \bar d \arrow[d, "\bar\Delta"] \\
 & c \arrow[r, "(f,g)"'] & d\times d
\end{tikzcd}$$

其中左侧的图表由两次拉回得到。对于右侧的图表，右下的方块是拉回，因为在取闭包之前 e 作为等化子是对角的拉回，于是等化子的闭包是对角的闭包的拉回。注意到 $c \to i_c(c) \to \overline{i_c(c)}$ 是 η_c，而 $\eta_c q$ 穿过 l，于是按照 l 等化子的定义，我们有 $\bar f\eta_c q = \bar g\eta_c q$。但是注意到由之前的图表，$\bar f\eta_c = \eta_d f$，$\bar g\eta_c = \eta_d g$，于是 $\eta_d f q = \eta_d g q$，所以 $i_d f q = i_d g q$。于是 $(fq, gq) : z \to d\times d$ 穿过 $i_d : d \to I_d$ 的核偶，即 $\bar\Delta_d : \bar d \to d\times d$。所以我们有右侧拉回图表中到拉回的态射。于是我们有 $z \le \bar e$（作为 c 的子对象）。所以 $\eta_c q(z) \le \eta_c\bar k(\bar e) \le \overline{\eta_c k(e)} = \overline{i_c k(e)}$（作为 I_c 的子对象）。同时注意到 z 沿 $\eta_c q$ 的像同时也是 y 在 lb 下的像 $lb(y)$。于是 $lb(y) \le \overline{i_c k(e)}$。但是由于 y 在 x 中稠密，$\overline{i_c k(e)}$ 是层，我们有 $l(x) \le \overline{i_c k(e)}$，即为所求。 □

推论 3.2.21. 对于一个对象 c，$\overline{\mathrm{Sub}}_{\mathcal{E}}(c) \simeq \mathrm{Sub}_{\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})}(Sh(c))$。

证明: $\mathrm{Sub}_{\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})}(Sh(c)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}_j(\mathcal{E})}(Sh(c), \Omega_j) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(c, \Omega_j) \simeq \overline{\mathrm{Sub}}_{\mathcal{E}}(c)$。 □

回忆在 Heyting 代数中，我们定义 $\neg x = x \implies 0$。并且，由指数对象的性质，我们有 $x \leq \neg\neg x$。

构造 3.2.22. 对于任意一个意象 $\mathcal{E}$，双重否定拓扑 $\neg\neg : \Omega \to \Omega$ 是一个 *Lawvere-Tierney* 拓扑：首先对于常规的 *Heyting* 代数，$\neg\neg$ 显然满足 *Lawvere-Tierney* 拓扑的三个条件。于是由自然性，其对于内蕴 *Heyting* 代数也满足三个条件。我们将在最后一节展现这个构造的作用。
对于 *Grothendieck* 意象，以上的构造有更显式的刻画方式。考虑一个范畴 $\mathcal{C}$ 上的预层 $\mathcal{P}$ 和其子预层 $\mathcal{Q}, \mathcal{R}$，我们证明 $\mathcal{Q} \implies \mathcal{R}$ 由 $\mathcal{Q} \implies \mathcal{R}(U) = \{x \in \mathcal{P}(U) | \forall f : V \to U, f^*(x) \in \mathcal{Q}(V) \implies f^*(x) \in \mathcal{R}(V)\}$。若某个子预层 $\mathcal{S} \leq \mathcal{Q} \implies \mathcal{R}$，则这等价于 $\mathcal{S}(U) \leq (\mathcal{Q} \implies \mathcal{R})(U)$，于是对于 $x \in \mathcal{S}(U) \wedge \mathcal{Q}(U)$，取 $1_U : U \to U$，$1_U^*(x) = x \in \mathcal{Q}(U)$，于是 $1_U^*(x) = x \in \mathcal{R}(U)$，所以 $\mathcal{S} \wedge \mathcal{Q} \leq \mathcal{R}$。反之，若 $\mathcal{S} \wedge \mathcal{Q} \leq \mathcal{R}$，则任意 $x \in \mathcal{S}(U)$，$f : V \to U$ 则 $f^*(x) \in \mathcal{S}(V)$，若 $f^*(x) \in \mathcal{Q}(V)$，则显然有 $f^*(x) \in \mathcal{R}(V)$，于是 $x \in (\mathcal{Q} \implies \mathcal{R})(U)$。所以 $\implies$ 具有泛性质。所以 $\neg\mathcal{Q} = \mathcal{Q} \implies 0$ 具有刻画：$\neg\mathcal{Q}(U) = \{x \in \mathcal{P}(U) | \forall f : V \to U, f^*(x) \notin \mathcal{Q}(V)\}$。这表明 $\neg\neg\mathcal{Q}(U) = \{x \in \mathcal{P}(U) | \forall f : V \to U, \exists g : W \to V, (fg)^*(x) \in \mathcal{Q}(W)\}$。
我们定义一个范畴上的稠密拓扑为 $S \in J(c) \iff \forall f : d \to c, \exists g : e \to d, fg \in S$。显然，这与 $\neg\neg$ 诱导的拓扑等价。

3.3 意象与逻辑

范畴论，尤其是意象理论，与类型论息息相关。在本章正式开始前我们先对类型论做出一些简单的介绍。

定义 3.3.1. 一般而言，类型论没有最通用的定义方式，我们只能逐个定义类型理论。
要定义一个类型理论（Type theory），我们一般需要给出如下的几个数据：

1. 类型形成规则（type formation rules），以定义新的类型。
2. 项引入规则（term introduction rules），以从新的类型中定义项。
3. 项消去规则（term elimination rules），以从这个新的类型中的项得到其它类型中的项。
4. 计算规则（computation rules），以用项消去规则定义其它类型的项时如何对应于其项引入规则（通俗的说，就是用项消去规则得到其它类型的项时等于什么引入规则定义的项）。

定义 3.3.2. 对于某个固定的类型理论中的一个类型 A，如果 a 是类型 A 中的项，那我们将其写做 $a : A$，以与集合论中 $a \in A$ 作出区分。
对于几个类型 A_i，我们定义一个语境是一系列 A_i 的变量的声明，其中变量可以指代该类型中任何一个项。
一个判断是指形如 $\Gamma \vdash \mathscr{J}$ 的语句，其中 Γ 是一个语境。$\mathscr{J}$ 的形式可以有很多，但是较为常见的是类型声明和公式（值得注意的是在一些存在等于类型的类型理论中，此二者是统一的）。其中公式一般形如 $\tau = \sigma$ 和诸多逻辑符号（如 $\wedge$，$\vee$ 等），其中 τ 和 σ 是项。
一个规则从若干个判断中推导出另一个判断，通常形如

$$\frac{\Gamma_1 \vdash t_1 : A_1, \cdots, \Gamma_n \vdash t_n : A_n}{\Delta \vdash s : B}$$

类型之间的函数：$f : A \to B$ 可以将 A 中的项变为 B 中的项。

注记. 类型论是高度构造性的。注意到在其上的定义中，对于某个类型而言，$x : A$ 并不是判断句，而是陈述句。这即是说，我们只能说 x 是 A 的项，而不能说 x 不是 A 的项，因为项不能脱离其类型存在。我们只能通过项引入规则得到某个项，而不能像集合论一样，对于任意一个元素 x 和一个集合 S，得到 $x \in S$ 或 $x \notin S$。这即是说，对于某个项，我们或多或少能追溯到其来源。一般而言，我们会把（-1-截断的）类型看作命题，而其中的项则是该命题的证明。所以类型论是构造主义逻辑中的重要构造。幸运的是，对于每个意象，我们能定义一个类型理论，称为内语言，也被称作 Mitchell-Benabou 语言。

构造 3.3.3. *对于一个意象 $\mathcal{E}$，我们令其内语言为如下的类型理论* $\mathrm{Lang}(\mathcal{E})$*：*

1. *其所有类型为 $\mathcal{E}$ 中的对象。*
2. *类型 X 中的变量是单位态射 $1_X : X \to X$。*
3. *对于一个 X 中的项 τ，假设其构造中只涉及到 $Y_1, \cdots, Y_n$ 中的变量 $y_1, \cdots, y_n$，其对应一个态射 $\tau : Y_1 \times \cdots \times Y_n \to X$。*

4. 对于 X 的一个项 $\sigma: U \to X$ 和 Y 的一个项 $\tau: V \to Y$ 可以得到 $X \times Y$ 的一个项 $\langle\sigma,\tau\rangle: W \to X \times Y$。其对应态射 $(\sigma\pi_1, \tau\pi_2): W \to X \times Y$。

5. 对于 X 中的两个项 $\sigma: U \to X$ 和 $\tau: V \to X$，公式 $\sigma = \tau$ 对应 $(\sigma\pi_1, \tau\pi_2): W \to X \times X \to \Omega$，其中后者是 δ_X。也就是说，公式是 Ω 的项。

6. 对于一个态射 $f: X \to Y$ 和一个 X 的项 $\sigma: U \to X$，这自然的给出一个 Y 的项 $f \circ \sigma: U \to X \to Y$。

7. 对于一个项 $\theta: V \to Y^X$ 和一个 X 的项 $\sigma: U \to X$，我们自然的有一个 Y 的项 $\theta(\sigma): W \to Y^X \times X \to Y$，其中后者是取值态射。

8. 对于一个 X 的变量 x 和一个 Z 中包含 x 作为自由变量的项 $\sigma: X \times U \to Z$，我们可以得到一个不包含 x 作为自由变量的项 $\lambda x\sigma: U \to Z^X$。

9. 对于两个公式 $\varphi: U \to \Omega, \psi: V \to \Omega$，我们定义 $\varphi \wedge \psi: W \to \Omega \times \Omega \to \Omega$，其中后者是 $\wedge: \Omega \times \Omega \to \Omega$。类似的，我们有 $\vee, \implies$ 和 $\neg$ 的定义。

10. 回忆对于 $f: X \to Y$，$Pf: PY \to PX$ 有内蕴左伴随 $\exists_f: PX \to PY$ 和内蕴右伴随。对于一个包含 X 和 Y 中变量的公式 $\varphi(x,y)$，我们有项 $\lambda x\varphi(x,y): Y \to \Omega^X = PX$。如果令 $!_X: X \to 1$ 是唯一态射，则我们定义 $\exists x\varphi(x,y): Y \to PX \to P1 = \omega$，$\forall x\varphi(x,y): Y \to PX \to P1 = \Omega$，其中第二个态射分别为 $\exists_{!_X}$ 和 $\forall_{!_X}$。注意到这两个操作消除了自由变量 x。

意象有许多逻辑相关的性质，直接对应到其内语言的性质上。

定义 3.3.4. 我们定义意象 $\mathcal{E}$ 是 Boole 的，如果 Ω 作为内蕴 Heyting 代数是 Boole 的。
我们定义意象 $\mathcal{E}$ 是二值的，如果 1 有且仅有两个子对象，即 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(1,\Omega)$ 有且仅有两个元素。
我们定义意象 $\mathcal{E}$ 满足选择公理，如果其中所有满射都有截面（即满射都可裂满）。
我们定义意象 $\mathcal{E}$ 满足内蕴选择公理，如果指数 $(-)^c: \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ 保持满态射。
我们定义意象 $\mathcal{E}$ 是带点的，如果其中 $0 \not\cong 1$，并且如果 $f \neq g: c \to d$，则存在态射 $k: 1 \to c$，使得 $f \circ k \neq g \circ k$。

引理 3.3.5. 如果对于某个 c 的子对象 $i: u \to c$ 如下方块是拉回（其中 $1_\top$ 和 $1_\perp$ 都是指终对象）：

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1_\top \arrow[d] \\ c \arrow[r] & 1_\top + 1_\perp \end{tikzcd}$$

那么 $u \vee \neg u = c$。

这些逻辑性质间存在着一些符合常理的互相推导的关系，如满足选择公理的意象一定有排中律（即 Boole）（见命题 3.3.11）。

证明: 我们考虑图表

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r] \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1_\top \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1_\top \arrow[d] \\ c \arrow[r] & 1_\perp + 1_\top \arrow[r, "{(\perp,\top)}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

由于 $1_\top \vee \neg 1_\top = 1_\top \vee 1_\perp = 1_\top + 1_\perp$，由于拉回保持子对象格的 Heyting 代数结构，我们有 $u \vee \neg u = c$。 □

引理 3.3.6. *对于一个意象 $\mathcal{E}$，以下五条性质等价：*

1. *$\mathcal{E}$ 布尔。*
2. *态射 $\neg : \Omega \to \Omega$ 满足 $\neg\neg = 1_\Omega$。*
3. *对于任意对象 c，Heyting 代数 $\mathrm{Sub}(c)$ 是布尔代数。*
4. *对于任意子对象 $i : u \to c$，我们有 $\neg u \vee u = c$。*
5. *态射 $\top : 1 \to \Omega$ 和 $\perp = \neg \circ \top : 1 \to \Omega$ 给出等价 $(\perp, \top) : 1 + 1 \simeq \Omega$。*

证明: 显然我们有 (1) $\iff$ (2), (3) $\iff$ (4)。同时由于 Ω 的内蕴 Heyting 代数结构来源于每个 c 的子对象格的 Heyting 代数结构，显然有 (1) $\iff$ (3)。最后我们证明 (4) $\implies$ (5) $\implies$ (2)。
(5) $\implies$ (2) 是显然的，由于 $\neg\top = \perp$，$\neg\perp = \top$，所以自然有 $\neg\neg = 1_{1_\top + 1_\perp}$。
回忆定义 3.1.21 中并的等价定义。(4) $\implies$ (5) 中，我们考虑 $\top : 1 \to \Omega$ 是子对象，于是由 (4)，我们有 $\top \vee \neg\top = \top \vee \perp = \Omega$。然而，显然 $\top \wedge \perp = \perp$，于是由定义 3.1.21 中并的等价定义，我们有 $\top \vee \perp = 1_\top + 1_\perp \to \Omega$ 是等价。 □

命题 3.3.7. *带点的意象 $\mathcal{E}$ 既是二值的又是 Boole 的。*

证明: 首先，我们注意到在带点的意象 $\mathcal{E}$ 中，一个非零的对象 c 总有一个态射 $1 \to c$。这是因为 $c \neq 0$ 总有两个不同的子对象 $0 \to c$ 和 $c \to c$，于是有两个不同的态射 $c \rightrightarrows \Omega$，所以存在一个态射 $1 \to c$ 以区分这两个态射。
然后，考虑 1 的非零子对象 $i : u \to 1$。由于 $u \neq 0$，我们有态射 $s : 1 \to u$。显然 $is = 1_1$，所以 $isi = i$，于是由单态射的左消去律知 $si = 1_u$。所以 $u = 1$，$\mathcal{E}$ 二值。
我们再证明 $\mathcal{E}$ 是 Boole 的。考虑 c 的子对象 $i : u \to c$。如果 $u \vee \neg u \neq c$，那么存在 $x : 1 \to c$ 以区分这两个子对象对应的 $c \rightrightarrows \Omega$。由于任何态射 $1 \to c$ 均穿过 $1_c : c \to c$，这个态射 $x : 1 \to c$ 可以被选择以不穿过 $u \vee \neg u$。
然而，我们考虑如下拉回方块：

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near start] & u \vee \neg u \arrow[d] \\ 1 \arrow[r, "x"'] & c \end{tikzcd}$$

由于 $\mathcal{E}$ 二值，$v = 1$ 或者 $v = 0$。但是如果 $v = 1$，那么 $x : 1 \to c$ 穿过 $u \vee \neg u$，与假设矛盾。若 $v = 0$，那么作为 c 的子对象，$x \wedge i = 0$。由 $\mathrm{Sub}(c)$ 的子对象格的 Heyting 代数结构，我们有 $x \leq i \implies 0$，即 $x \leq \neg i$。这说明 $x : 1 \to c$ 穿过 $\neg i : \neg u \to c$，于是穿过 $u \vee \neg u \to c$，矛盾。所以 $\mathcal{E}$ 布尔。 □

引理 3.3.8. *具有内蕴选择公理的意象 $\mathcal{E}$ 中任何满射 $p : c \to d$ 都有 $\Pi_d(p : c \to d) \to 1$ 是满射。*

证明：我们考虑定义 $\Pi_d(p:c\to d)$ 的拉回图

$$\begin{tikzcd}
\Pi_d(p:c\to d) \arrow[r] \arrow[d] & c^d \arrow[d] \\
1 \arrow[r, "1_d"'] & d^d
\end{tikzcd}$$

于是图表中 $\Pi_d(p)\to 1$ 是 $p_*:c^d\to d^d$ 的拉回，然而由于 $(-)^d$ 保持满射，p_* 是满射，而拉回保持满射，于是 $\Pi_d(p)\to 1$ 是满射。 □

推论 3.3.9. *存在 s，使得 $s\times c\to s\times d$ 作为 $\mathcal{E}/s$ 中的满态射有截面。*

证明：我们令 $s=\Pi_d(p)$，则 $\Pi_d(p)\times c\to \Pi_d(p)\times d$ 的截面由 $\Pi_d(p)\times d\to c^d\times d\to c$ 给出，其中 $\Pi_d(p)\to c^d\times d$ 由 $\Pi_d(p)\to c^d$ 诱导，$c^d\times d\to c$ 是取值态射。 □

引理 3.3.10. *子对象 $\iota_1:c\to c+d$ 满足 $\iota_1\vee\neg\iota_1=c+d$。*

证明：由推论 3.1.25 我们显然有拉回图表

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r] \arrow[d, "\iota_1"'] & 1_\top \arrow[d] \\
c+d \arrow[r, "(c,d)"'] & 1_\top+1_\bot
\end{tikzcd}$$

于是由引理 3.3.5，$\iota_1\vee\neg\iota_1=c+d$。 □

命题 3.3.11. *具有内蕴选择公理的意象 $\mathcal{E}$ 是 Boole 的。*

证明：我们首先说明若子对象 $i:u\to c$ 为两个态射 $f,g:c\to 1+1$ 的等化子，则 $i\vee\neg i=c$。如果的确如此，则有拉回图表：

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & 1_\top+1_\bot \arrow[d, "\Delta_{1_\top+1_\bot}"] \\
c \arrow[r, "(f,g)"'] & (1_\top+1_\bot)\times(1_\top+1_\bot)
\end{tikzcd}$$

但是我们可以在右侧拼接另一个拉回图表（由上述引理），于是我们有

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & 1_\top+1_\bot \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_{1_\top+1_\bot}"] & 1_\top \arrow[d] \\
c \arrow[r, "(f,g)"'] & (1_\top+1_\bot)\times(1_\top+1_\bot) \arrow[r, "\delta_{1_\top+1_\bot}"'] & 1_\top+1_\bot
\end{tikzcd}$$

是拉回。于是再由引理 3.3.5，$u\wedge\neg u=c$。

然后，我们考虑满态射 $c\amalg c\to c\amalg_u c$。由推论 3.3.9 和推论 3.1.25，存在一个 s 使得拉回 $s^*c\amalg s^*c\to s^*c\amalg_{s^*u}s^*c$ 有一个截面 t。特别的，这个截面是单态射。显然，$s^*u\to s^*c$ 是 $\iota_1,\iota_2:s^*c\rightrightarrows s^*c\amalg_{s^*u}s^*c$ 的等化子。由截面的单性，$s^*u\to s^*c$ 是 $t\iota_1,t\iota_2:s^*c\rightrightarrows s^*c\amalg s^*c$ 的

等化子。由于 $s^*c \amalg s^*c = (1+1)\times s^*c$，而由于 t 是截面，$\pi_2 t\iota_1 = \pi_2 t\iota_2$，于是 $s^*u \to s^*c$ 是 $\pi_1 t\iota_1, \pi_1 t\iota_2 : s^*c \rightrightarrows 1+1$ 的等化子，如图所示：

$$\begin{tikzcd}
s^*u \arrow[r] & s^*c \arrow[r, shift left, "\iota_1"] \arrow[r, shift right, "\iota_2"'] & s^*c \amalg_{s^*u} s^*c \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "(1_{s^*c},1_{s^*c})"'] & s^*c \amalg s^*c \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & 1+1 \\
 & & & s^*c &
\end{tikzcd}$$

所以 $s^*u \vee \neg s^*u = s^*c$。最后我们证明 $u \vee \neg u = c$。考虑态射 $s^*(u\vee\neg u) \to s^*c$，由于我们有交换图

$$\begin{tikzcd}
s^*(u\vee\neg u) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & u\vee\neg u \arrow[d] \\
s^*c \arrow[r, "\pi_2"'] & c
\end{tikzcd}$$

于是沿逆时针复合得到满态射，于是 $u\vee\neg u \to c$ 是满态射，所以是等价。 □

命题 3.3.12. *令意象 $\mathcal{E}$ 被 1 的子对象生成（即任何一对态射 $f \neq g : c \to d$，都存在某个 1 的子对象 p 和态射 $h : p \to c$，使得 $fh \neq gh : p \to c \to d$），而且对任意对象 c，$\mathrm{Sub}(c)$ 是完备 Boole 代数（即存在无限交和无限并的 Boole 代数），则 $\mathcal{E}$ 满足选择公理。*

证明: 令 $p : d \to c$ 为满态射。则由 $\mathrm{Sub}(c)$ 子对象格的完备性，由 Zorn 引理知存在一个极大的子对象 $i : c_0 \hookrightarrow c$，使得存在态射 $s : c_0 \to d$ 使得 $ps = i$。如果 $c_0 \neq c$，则由于 $\mathrm{Sub}(c)$ 是布尔代数，$\neg c_0 \neq 0$。于是存在一个 1 的子对象 $x \to 1$ 和态射 $t : x \to \neg c_0$ 以区分 $\neg c_0$ 和 0（此处 t 为单态射，由于到 x 的态射至多只有一个）。我们考虑如下的拉回图表：

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "r"] \arrow[dd, bend right, "j"'] \arrow[drr] \arrow[ddr] & tj(y) \arrow[dd] & \\
d' \arrow[rr, "k"] \arrow[d, "p'"] & & d \arrow[d, "p"] \\
x \arrow[r, "t"'] & \neg c_0 \arrow[r] & c
\end{tikzcd}$$

由于 p 是满态射，p' 也是满态射。于是由于 $x \neq 0$，$d' \neq 0$。于是我们又有 $y \to 1$ 是子对象和态射 $r : y \to d'$。于是 $p'r : y \to d' \to x$ 推出有 $j : y \leq x$。于是我们有 $tj : y \to tj(y) \subseteq \neg c_0$ 是同构（由于 y 是 1 的子对象，而且 $tj(y)$ 是像，于是该态射又单又满，所以是同构）。但是 $c_0 \wedge \neg c_0 = 0$，于是 $c_0 \wedge tj(y) = 0$。于是 $c_0 \vee tjr(y) = c_0 + tjr(y) \to c$ 是单态射（由定义 3.1.21 中的等价刻画）。于是 $s : c_0 \to d$ 和 $kr : y \to d$ 诱导了 $c_0 + kr \to d$ 的截面，与 c_0 的极大性矛盾。所以 $c_0 = c$。即该满态射有截面。 □

推论 3.3.13. *对于一个偏序集 $\mathbf{P}$，$\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathbf{P})$ 满足选择公理。*

证明: 由于 $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathbf{P})$ 中，$\neg\neg = 1 : \Omega_{\neg\neg} \to \Omega_{\neg\neg}$，于是由引理 3.3.6，该意象是 Boole 的。同时，由于 Grothendieck 意象完备且余完备，$\mathrm{Sub}(c)$ 一定是完备 Boole 代数。于是由上述命题，我们只需要证明 $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathbf{P})$ 被 1 的子对象生成。首先注意到 $\mathbf{pSh}(\mathbf{P})$ 被全部 $h(p)$ 生成，其中 $p \in \mathbf{P}$，于是 $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathbf{P})$ 被 $Lh(p)$ 生成。然后注意到由于 $\mathbf{P}$ 是偏序集，$h(p)(q)$ 中至多只有一个元素，于是是终对象的子对象。由于 L 左正合，$Lh(p) \to L(1) = 1$ 依然是单态射，于是 $\mathbf{Sh}_{\neg\neg}(\mathbf{P})$ 被 1 的子对象生成。 □

我们最后讨论如何使用内语言解读意象中的性质。实际上，我们有一套方法，使得我们能够将内语言翻译成外部的描述，称作 Kripke-Joyal 语义。

定义 3.3.14. 对于一个对象（即类型）X 和 X 上的一个公式 $\varphi : X \to \Omega$，我们定义 $\{x : X|\varphi(x)\}$ 为 X 中由 φ 诱导的子对象。
我们称一个公式 $\varphi : X \to \Omega$ 成立，如果 $\{x : X|\varphi(x)\} = X$，或者等价的，φ 穿过 $\top : 1 \to \Omega$。
对于一个 X 中的元素 $x_0 : U \to X$ 和一个 X 上的公式 $\varphi : X \to \Omega$，我们称 U 满足 $\varphi(x_0)$，记作 $U \models \varphi(x_0)$，如果 $\operatorname{Im} x_0 \leq \{x : X|\varphi(x)\}$。

引理 3.3.15. *满足关系满足如下两条性质：*

1. *若 $U \models \varphi(x_0)$，则对任意态射 $f : U' \to U$，我们都有 $U' \models \varphi(f \circ x_0)$。*
2. *若 $f : U' \to U$ 是满态射，而且 $U' \models \varphi(x_0 \circ f)$，则 $U \models \varphi(x_0)$。*

证明: 第一条性质显然。第二条性质由 $x_0 \circ f$ 满单分解的泛性质得到。 □

我们陈述满足关系的如下性质：

定理 3.3.16. *令 $x_0 : U \to X$ 为 X 中的元素，$\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是 X 中的公式，则：*

1. *$U \models \varphi(x_0) \wedge \psi(x_0)$ 当且仅当 $U \models \varphi(x_0)$ 且 $U \models \psi(x_0)$。*
2. *$U \models \varphi(x_0) \vee \psi(x_0)$ 当且仅当存在态射 $i : V \to U$，$j : W \to U$，使得 $i + j : V + W \to U$ 是满的，而且 $V \models \varphi(x_0 i)$，$W \models \psi(x_0 j)$。*
3. *$U \models \varphi(x_0) \implies \psi(x_0)$ 当且仅当对于任意态射 $i : V \to U$，使得 $V \models \varphi(x_0 i)$，就有 $V \models \varphi(x_0 j)$。*
4. *$U \models \neg\varphi(x_0)$ 当且仅当对于任意 $i : V \to U$ 满足 $V \models \varphi(x_0 i)$，就有 $V = 0$。*
5. *$U \models \exists y \varphi(x_0, y)$ 当且仅当存在满态射 $p : V \to U$ 和一个态射 $y_0 : V \to Y$，使得 $V \models \varphi(x_0 p, y_0)$（此处 V 以 $(x_0 p, y_0) : V \to X \times Y$ 的形式作为 $X \times Y$ 的元素）。*
6. *$U \models \forall y \varphi(x_0, y)$ 当且仅当对任意态射 $p : V \to U$ 和任意态射 $y_0 : V \to Y$，都有 $V \models \varphi(x_0 p, y_0)$。*

6'. *$U \models \forall y \varphi(x_0, y)$ 当且仅当 $U \times Y \models \varphi(x_0 \pi_1, \pi_2)$。*

7. *$\varphi(x)$ 成立当且仅当 $1 \models \forall x \varphi(x)$，此处 $\top : 1 \to \Omega$ 是子对象。*
8. *对于两个 Y 中仅含 X 中变量的元素 $\varphi, \psi : X \to Y$，我们有 $U \models \varphi(x_0) = \psi(x_0)$ 当且仅当 $\varphi x_0 = \psi x_0$。*

注记. 以上的性质都有明确的直观。U 可以视为 X 的子集，而 $\{x : X|\varphi(x)\}$ 可以视为 φ 在 X 中成立的区域。而 $U \models \varphi(x_0)$ 就是 φ 在 U 上成立，因为 U 被 φ 在 X 中成立的区域包含。
于是在以上的六条性质中，第一个性质即是说只要 U 同时被两个命题成立的区域包含当且仅当被这两个命题都成立的区域包含。

第二个性质即是说 U 被两个命题之一成立的区域包含当且仅当其被两个命题分别成立的区域的并覆盖。
第三个性质中，我们先用乘积指数伴随翻译该性质：$U \models \varphi(x_0) \implies \psi(x_0)$ 当且仅当 $U \wedge \varphi(x_0) \leq \psi(x_0)$，于是只要有 $p: V \to U$ 的像被 $\varphi(x_0)$ 包含，其必然被 $\psi(x_0)$ 包含。
第四个性质由第三个性质的翻译显然（回忆 $\neg u = u \implies 0$）。
第五个性质中，我们考虑 $X \times Y$ 中 φ 成立的区域。考虑被包含在这个区域中的一个 $V \to X \times Y$，则我们将其投影到 X 上，记作 U，则对于每个 U 中的点，都有 V 中的点投影到这个点。这符合存在的直观。由于我们没有内蕴选择公理，我们无法选取 $V \to U$ 的截面。
第六个性质中，U 被 $\forall y \varphi$ 成立的区域包含当且仅当 $U \times Y$ 被 φ 成立的区域包含，于是 6' 成立，于是对任意 $V \to U$ 和 $V \to Y$ 都有 $V \models \forall y \varphi(x_0 p, y_0)$。
第七个性质是第六个的直接推论。
第八条性质确实是显然的。

构造 3.3.17. 最后我们用内语言解读意象的诸多逻辑性质。
在此之前我们先刻画满射。注意到一个态射 $f: X \to Y$ 是满的当且仅当其像是 Y。又因为取像的自然性，我们有态射 $\mathrm{Im}: Y^X \to \Omega^Y$。我们定义 $Epi(X,Y)$ 为如下拉回：

$$\begin{tikzcd}
Epi(X,Y) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y^X \arrow[d, "\mathrm{Im}"] \\
1 \arrow[r, "\top_Y"'] & \Omega^Y
\end{tikzcd}$$

我们证明用内语言解读，$Epi(X,Y) = \{f : Y^X | \forall y : Y, \exists x : X, f(x) = y\}$。首先，注意到一个态射 $g: U \to Y^X$ 穿过 $Epi(X,Y)$ 当且仅当诱导的态射 $(\pi_1, g_*) : U \times X \to U \times Y$ 是满的，其中 g_* 是 g 的转置。同时，由满足关系的定义，$g: U \to Y^X$ 穿过右侧公式定义的子对象当且仅当 $U \models \forall y \exists x g(x) = y$。我们证明两者等价。由上述定理，令 $\varphi(g,y)$ 为 $\exists x g(x) = y$，故 $U \models \forall y \exists x g(x) = y$ 当且仅当 $U \times Y \models \exists x (g\pi_1)(x) = \pi_2$。然后由存在的刻画，存在满态射 $p: V \to U \times Y$ 和 $x_0 : V \to X$ 使得 $V \models (g\pi_1 p)(x_0) = \pi_2 p$。这说明 $(g\pi_1 p)x_0 = \pi_2 p$。于是我们有 $ev(g\pi_1 p, x_0) = \pi_2 p$。或者显式的说，我们有交换图：

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "{(\pi_1 p, x_0)}"] \arrow[d, "p"'] & U \times X \arrow[r, "{(g, 1_X)}"] & Y^X \times X \arrow[d, "ev"] \\
U \times Y \arrow[rr, "\pi_2"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

我们使用公式 $g_* = ev(g, 1)$，于是我们得出第二个交换图

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "{(\pi_1 p, x_0)}"] \arrow[dr, "p"'] & U \times X \arrow[d, "{(\pi_1, g_*)}"] \\
& U \times Y
\end{tikzcd}$$

由于 p 是满的，公式成立等价于这个交换图成立等价于 (π_1, g_*) 是满射，等价于 $g: Y^X$ 穿过 $Epi(X,Y)$。
然后，我们考虑一个 *Boole* 的意象。我们生成一个 *Boole* 的意象用内语言翻译是公式 $\forall p : \Omega, (p \vee$

$\neg p) = 1$ 成立，其中 p 是 Ω 的自由变量。这个公式成立意味着 $1 \models \forall p : \Omega, (p \vee \neg p) = 1$，此处 1 代表 $\top : 1 \to \Omega$。于是由定理 *3.3.16* 的第六条，我们有对于任意 $\varphi : U \to \Omega$，都有 $U \models \varphi \vee \neg\varphi$。我们希望证明这等价于 φ 分类的 U 的子对象 A 满足 $A \vee \neg A = U$。由第二条，$U \models \varphi \vee \neg\varphi$ 等价于存在 $q : V \to U$ 和 $r : W \to U$ 使得 $(q, r) : V + W \to U$ 是满态射，并且 $V \models \varphi q$，$W \models \varphi\neg r$。然后，注意到对于一个态射 $\psi : X \to \Omega$，$X \models \psi$ 当且仅当 $X \models \psi(1_X)$ 当且仅当 $X \leq \{x : X | \psi(x)\}$，即 ψ 成立。于是 φq 在 V 上恒成立，即 φq 穿过 $\top : 1 \to \Omega$。由拉回图表的泛性质，我们有

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\
& A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & 1 \arrow[d, "\top"] \\
& U \arrow[r, "\varphi"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

于是 $V \models \varphi q$ 当且仅当 $q(V) \leq A$。同时，$W \models \neg\varphi r$ 当且仅当任何态射 $s : W' \to W$ 使得 $W' \models \varphi rs$（同上，等价于 $rs(W') \leq A$）都有 $W' = 0$。于是只要 rs 穿过 A，就有 $W' = 0$。于是 $r^{-1}(A) = 0$，这也等价于 $r(W) \leq \neg A$。这说明 $U = q(V) \vee r(W) \leq A \vee \neg A$，于是 $A \vee \neg A = U$。反之，若 $\mathcal{E}$ 是 *Boole* 的，$A \vee \neg A = U$。这表明 $\varphi \vee \neg\varphi : U \to \Omega$ 穿过 $\top : 1 \to \Omega$。此时我们直接令 $V = A$，$W = \neg A$，由于上述证明过程中前半段都是等价，于是 $\mathcal{E}$*Boole* 与公式 $\forall p : \Omega, p \vee \neg p$ 成立等价。

最后，我们证明内蕴选择公理（即 $(-)^c$ 保持满射）与内语言中的公式 $\forall f : Y^X((\forall y \exists x, f(x) = y) \implies \exists s : X^Y, \forall y, fs(y) = y)$ 成立等价（注意到这就是用内语言叙述的常规的选择公理，即任何满态射有截面）。

我们首先解析这个公式。$1 \models \forall f : Y^X((\forall y \exists x, f(x) = y) \implies \exists s : X^Y, \forall y, fs(y) = y)$ 等价于对任意 $g : U \to Y^X$，都有 $U \models \forall y \exists x, g(x) = y$ 推出 $U \models \exists s : X^Y \forall y : Y, gs(y) = y$。然后，$U \models \exists s : X^Y \forall y, gs(y) = y$，这等价于存在某个满态射 $r : P \to U$ 和某个 $h : P \to X^Y$ 使得 $P \models \forall y, grh(y) = y$。

我们先证明满足内蕴选择公理的意象中该公式成立。于是我们令 $g : U \to Y^X$ 满足 $U \models \forall y \exists x, g(x) = y$。这表明 $(\pi_1, g_*) : U \times X \to U \times Y$ 是满态射。现在我们希望构造一个 s。由于 *IAC*，$(U \times X)^Y \to (U \times Y)^Y$ 是满态射。于是考虑 $1_* : U \to (U \times Y)^Y$，我们形成拉回图表

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "q"] \arrow[d, "r"'] & (U \times X)^Y \arrow[r, "\pi_2^Y"] \arrow[d, "(\pi_1, g_*)^Y"] & X^Y \\
U \arrow[r, "1_*"'] & (U \times Y)^Y &
\end{tikzcd}$$

其中 r 是满态射。我们令 $h = \pi_2^Y q : P \to (U \times X)^Y \to X^Y$。我们将这个图表整体转置，得到如下图表：

$$\begin{tikzcd}
Y & P \times Y \arrow[l, "\varpi_2"'] \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "(r,1)"'] & U \times X \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "(\pi_1, g_*)"] & X \\
& U \times Y \arrow[r, "1_{U \times Y}"'] & U \times Y &
\end{tikzcd}$$

由上图的交换性，我们有 $\pi_1 q_* = r\pi_1 : P \times Y \to U \times X \to U$，$\pi_2 q_* = h_* : P \times Y \to U \times X \to X$，于是 $q_* = (r, h_*)$。$h_* = ev(h, 1) = ev(h, \varpi_2) = h(\varpi_2) : P \times Y \to X$。这说明 $\varpi_2 = g_* q_* =$

$ev(g,1)q_* = ev(g,1)(r,h_*) = ev(gr,h_*)$。而这对应到内语言上是 $P\times Y \models (gr)(h(\varpi_2)) = \varpi_2$，于是由定理 *3.3.16* 中的 *6'* 我们有 $P\models \forall y(gr)(h(y)) = y$，这即为所求。

反之，假设公式在 $\mathcal{E}$ 的内语言中成立，我们证明 $\mathcal{E}$ 满足内蕴选择公理。我们考虑满态射 $\gamma: X\to Y$，我们希望证明对于任意 U，我们都有 $\gamma^U: X^U\to Y^U$ 是满态射。我们考虑复合：$\alpha: Y^U\to 1\to Y^X$，其中后者是 γ_*。于是 α 的转置 α_* 是 $\gamma\pi_2: Y^U\times X\to Y$，这显然是满态射。于是 $(\pi_1,\alpha_*): Y^U\times X\to Y^U\to Y$ 是满态射。注意到这正好对应 $\alpha: Y^U\to Y^X$ 穿过 $Epi(X,Y)$。由 Epi 的内语言刻画，我们有满足关系 $Y^U\models \forall y: Y\exists x: X, \alpha(x) = y$。由内蕴选择公理在内语言中的公式，我们有 $Y^U\models \exists s: X^Y\forall y: Y, \alpha(s(y)) = y$。由推论 *3.3.16* 中第五条我们有满态射 $p: V\to Y^U$ 和 $\sigma: V\to X^Y$，使得有满足关系 $V\models \forall y: Y, (\alpha p)(\sigma(y)) = y$。我们再使用定理的第六条，用 $\pi_1: V\times U\to V$ 和 $p_*: V\times U\to Y$ 代入得 $V\times U\models (\alpha p\pi_1)(\sigma\pi_1(p_*)) = p_*$。最后，我们令 $\theta = ev(\sigma\pi_1,p_*): V\times U\to X$，并且注意到 $\alpha p\pi_1(\theta)$ 的解释是 $ev(\alpha p\pi_1,\theta)$。然而 $ev(\alpha,1) = \alpha_* = \gamma\pi_2$，于是 $ev(\alpha p\pi_1,\theta) = \gamma\pi_2$。所以如下的图表交换：

$$\begin{tikzcd}
V\times U \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "{(p,1)}"'] & X \arrow[d, "\gamma"] \\
Y^U\times U \arrow[r, "e"'] & Y
\end{tikzcd}$$

注意到这个图表的转置后左上到右下的态射是 $\gamma^U\theta_* = p: V\to Y^U$，由于 p 是满的，γ^U 也是满的。这就证明了外部的内蕴选择公理。

3.4 应用：连续统假设

定义 3.4.1. 对于一个意象 $\mathcal{E}$，我们定义其中的自然数对象为一个对象 $\mathbf{N}$，满足存在一个态射 $0:1\to\mathbf{N}$ 和一个态射 $\mathrm{suc}:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，同时具有如下泛性质，使得对于任意一个对象 X，一个态射 $0:1\to X$ 和 $s':X\to X$ 都存在唯一态射 $f:\mathbf{N}\to X$ 使得如下图表交换：

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "0"] \arrow[d] & \mathbf{N} \arrow[r, "\mathrm{suc}"] \arrow[d, dashed, "f"] & \mathbf{N} \arrow[d, dashed, "f"] \\
1 \arrow[r, "0"'] & X \arrow[r, "s"'] & X
\end{tikzcd}$$

由泛性质，自然数对象如果存在则唯一。
对于两个对象 X,Y，我们定义 $X<Y$ 如果存在单态射 $X\to Y$ 并且 $Epi(Y,X)=0$。对于一个存在自然数对象的意象，我们称其满足连续统假设，如果不存在一个对象 K，使得 $\mathbf{N}<K<P\mathbf{N}$。

本节的主要目的在于证明如下的定理：

定理 3.4.2. *存在一个满足选择公理的意象，同时连续统假设不成立。*

注记. 这是整个证明中最为核心的部分。之后，为了将意象理论转到集合论，我们还需要做如下的两个操作：首先，使用滤商构造（filter-quotient construction）将这个意象变为二值且 Boole 的意象，同时满足选择公理；然后，使用这样一个意象构造一个 ZFC 的集合论模型。这两者我们不在本文中作讨论。

我们希望得到的意象是一个层意象，即 Grothendieck 意象。我们从 **Set** 开始，先构造其底层的景。

构造 3.4.3. *我们取一个集合 $B>P\mathbb{N}$（如 $PP\mathbb{N}$）。我们定义其 Cohen 偏序集 $\mathbf{P}$ 为如下的偏序集：*

1. *其元素为所有对 (F_p,p)，其中 $F_p\subset B\times\mathbb{N}$ 是有限集，$p:F_p\to 2$ 是任意一个映射。*

2. *$(F_p,p)\le(F_q,q)$ 当且仅当 $F_p\supseteq F_q$，并且 $p|_{F_q}=q$。*

之后，我们将 $\mathbf{P}$ 视为范畴。我们最终希望构造的意象是 $\mathbf{Sh}(\mathbf{P},\neg\neg)$（此处 $\neg\neg$ 是与 $\mathbf{pSh}(\mathbf{P})$ 中 $\neg\neg$-拓扑等价的稠密拓扑，由构造 3.2.22）。其被称为 Cohen 意象，并且由推论 3.3.13，其满足选择公理。

引理 3.4.4. *对于一个元素 $p\in\mathbf{P}$，其可表预层 $h(p)\in\mathbf{pSh}(\mathbf{P})$ 是 $\neg\neg$-层。*

证明: 由构造 3.2.22，我们知只需要验证 $h(p)$ 在稠密拓扑下是层。
假设对于 q，筛 D 在稠密拓扑下覆盖 q，则这等同于一族对象 $d_i\le q$，对于任意态射 $r\le q$ 都有某个 $d_i\le r$。我们再假设其上有一族 $h(p)$ 相容的截面，即 $x_i\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}}(d_i,p)$，我们证明存在唯一一个 q 上的截面 $x\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{P}}(q,p)$ 使得 $x|_{d_i}=x_i$。注意到这族相容的截面即是说 $d_i\le p$，我们也只需要证明 $q\le p$。
假设 $q\not\le p$，由 Cohen 偏序集的定义，其说明存在一个 $(b_0,n_0)\in F_p$，或者 $(b_0,n_0)\notin F_q$（即 q 在 (b_0,n_0) 处无定义），或者 $q(b_0,n_0)\ne p(b_0,n_0)$。总之，我们可以将 q 延拓至 q'，其中

$F_{q'} = F_q \cup \{(b_0, n_0)\}$，$q'|_{F_q} = q$，$q'(b_0, n_0) \neq p(b_0, n_0)$。但是由稠密筛 D 的定义，存在一个 $d_i \in D$ 使得 $d_i \leq q' \leq q$。但是 $d_i(b_0, n_0) = q'(b_0, n_0) \neq p(b_0, n_0)$，与 $d_i \leq p$ 矛盾。于是 $p \leq q$。 □

引理 3.4.5. *我们令* $\mathbf{P}$ *在* $(B \times \mathbb{N})$ *处的对角预层为* $\Delta(B \times \mathbb{N})$。*我们定义* A *为如下的子预层：* $A(p) = \{(b, n) | p(b, n) = 0\}$。$A$ *是* $\Delta(B \times \mathbb{N})$ *关于* $\neg\neg$*-拓扑的闭子预层。这即是说，* $\neg\neg A = A$ *作为* $\Delta(B \times \mathbb{N})$ *的子对象成立。*

证明: 回忆我们自然有 $A \leq \neg\neg A$。反之，令 $p \in \mathbf{P}$，$(b, n) \in B \times \mathbb{N}$，则 $(b, n) \in \neg\neg A(p)$ 当且仅当对任意 $q \leq p$ 都有 $r \leq q$ 使得 $(b, n) \in A(r)$，即 $r(b, n) = 0$。若 $(b, n) \notin A(p)$，则存在 $q \leq p$ 使得 $q(b, n) = 1$，于是任意 $r \leq q$ 都有 $r(b, n) = 1 \neq 0$，于是 $(b, n) \notin \neg\neg A(p)$。于是 $\neg\neg A \leq A$。 □

命题 3.4.6. *令* Ω *为* $\mathbf{pSh}(\mathbf{P})$ *的子对象分类子，* $\Omega_{\neg\neg}$ *为* $\mathbf{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$ *的子对象分类子。由构造 3.2.7,* $\Omega_{\neg\neg}$ *分类闭子对象，于是对于* $i : A \to \Delta(B) \times \Delta(\mathbb{N})$，$\mathrm{Char}(i) : \Delta(B) \times \Delta(\mathbb{N}) \to \Omega$ *穿过* $\Omega_{\neg\neg}$，*即* $f : \Delta(B) \times \Delta(\mathbb{N}) \to \Omega_{\neg\neg}$ *分类子预层* A。
其转置 $g : \Delta(B) \to \Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbb{N})}$ *是单态射。*

证明: 我们只需证明对于任意 $p \in \mathbf{P}$，$g(p) : B = \Delta(B)(p) \to \Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbb{N})}(p)$ 是单态射。由米田引理，$\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbb{N})}(p) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathbf{P})}(h(p), \Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbb{N})}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathbf{P})}(h(p) \times \Delta^{\mathbb{N}}, \Omega_{\neg\neg})$。于是对于 $b \in B$，$g(p)(b)$ 是如下的 $h(p) \times \Delta^{\mathbb{N}}$ 到 $\Omega_{\neg\neg}$ 的自然变换：对于 $q \in \mathbf{P}$，若 $q \not\leq p$，则 $h(p)(q) \times \Delta^{\mathbb{N}}(q) = \phi$，我们只能给出平凡的 $g(p)(b)(q)$；对于 $q \leq p$，则 $h(p)(q) \times \Delta^{\mathbb{N}}(q) = \mathbb{N}$，我们令

$$g(p)(b)(q)(n) = \{r \in \mathbf{P} | r \leq q, r(b, n) = 0\} \subseteq \Omega_{\neg\neg}(q)$$

(回忆 $\Omega(p)$ 为所有 $h(p)$ 的子对象的集合，$\Omega_{\neg\neg}(p)$ 为所有 $h(p)$ 的 $\neg\neg$-闭子对象集合)。由 A 的定义，这的确是分类 $i : A \to \Delta(B) \times \Delta(\mathbb{N})$ 的态射。
我们只需要验证对于 $b \neq c \in B$，$g(p)(b)$ 和 $g(p)(c)$ 给出不同的自然变换。由于 $\mathbf{P}$ 中，F_p 都是有限的，存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，$p(b, n_0)$ 和 $p(c, n_0)$ 没有定义。于是我们可以找到 $r \leq p$，使得 $r(b, n_0) = 0$，$r(c, n_0) = 1$。于是 $g(p)(b)(r) \neq g(p)(c)(r)$，于是 g 是单态射。 □

构造 3.4.7. 回忆由定理 *3.2.20*，存在一个左正合的层化函子：$L : \mathbf{pSh}(\mathbf{P}) \to \mathbf{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$。
对于某个集合 S，我们定义 $\hat{S} = L(\Delta(S))$。则我们有态射 $L(g) : L(\Delta(B)) \to L(\Omega_{\neg\neg}^{\mathbb{N}})$。依定义，$L(\Delta(B)) = \hat{B}$，而我们有如下的等式：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathbf{P})}(X, \Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbb{N})}) \\
\simeq &\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathbf{P})}(\Delta(\mathbb{N}) \times X, \Omega_{\neg\neg}) \\
\simeq &\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)}(L(\Delta(\mathbb{N})) \times L(X), \Omega_{\neg\neg}) \\
\simeq &\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)}(L(X), \Omega_{\neg\neg}^{L(\Delta(\mathbb{N}))}) \\
\simeq &\mathrm{Hom}_{\mathbf{pSh}(\mathbf{P})}(X, \Omega_{\neg\neg}^{\hat{\mathbb{N}}})
\end{aligned}$$

于是 $\Omega_{\neg\neg}^{\hat{\mathbb{N}}}$ 与 $\Omega_{\neg\neg}^{\Delta(\mathbb{N})}$ 自然同构，所以有 $L(\Omega_{\neg\neg}^{\mathbb{N}}) \simeq L(\Omega_{\neg\neg}^{\hat{\mathbb{N}}}) = \Omega_{\neg\neg}^{\hat{\mathbb{N}}}$，由层范畴的积闭性。
最终，我们有 $m : \hat{B} \to \Omega_{\neg\neg}^{\hat{\mathbb{N}}}$ 在 $\mathbf{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$ 中是单态射。

引理 3.4.8. $\hat{\mathbb{N}}$ 是 $\mathbf{Sh}(\mathbf{P},\neg\neg)$ 中的自然数对象。

证明: 由于我们有如下的伴随:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set} \arrow[r, shift left, "\Delta"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{pSh}(\mathbf{P}) \arrow[l, shift left, "\varprojlim"] \arrow[r, shift left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{Sh}(\mathbf{P},\neg\neg) \arrow[l, shift left, "U"] \end{tikzcd}$$

于是 $S\mapsto\hat{S}$ 是左伴随。于是若在 $\mathbf{Sh}(\mathbf{P},\neg\neg)$ 中有对象 $\mathcal{F}$ 和态射 $0:\Delta(1)\to\mathcal{F}$ 和 $s:\mathcal{F}\to\mathcal{F}$(注意到 $\Delta(1)$ 仍然是终对象),那么存在唯一态射 $\mathbb{N}\to\varprojlim(\mathcal{F})$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{N} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{N} \arrow[d] \\ \varprojlim\Delta(1) \arrow[r, "0"] & \varprojlim\mathcal{F} \arrow[r, "s"] & \varprojlim\mathcal{F} \end{tikzcd}$$

由伴随的定义,存在唯一态射 $\hat{\mathbb{N}}\to\mathcal{F}$ 使得下图交换:

$$\begin{tikzcd} \hat{1}=\Delta(1) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\mathbb{N}} \arrow[r] \arrow[d] & \hat{\mathbb{N}} \arrow[d] \\ \Delta(1) \arrow[r, "0"] & \mathcal{F} \arrow[r, "s"] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

即 $\hat{\mathbb{N}}$ 是自然数对象。 $\square$

构造 3.4.9. 由于 Δ 和 L 都左正合,所以单射 $\mathbb{N}\hookrightarrow P\mathbb{N}\hookrightarrow B$ 诱导了单态射 $\hat{\mathbb{N}}\hookrightarrow\widehat{P\mathbb{N}}\hookrightarrow\hat{B}$。而由构造 *3.4.7*,我们有单态射 $\hat{B}\hookrightarrow\Omega_{\neg\neg}^{\hat{\mathbb{N}}}=P_{\neg\neg}\hat{\mathbb{N}}$。

至此,我们已经完成了证明的一半,即证明了存在单态射 $\hat{\mathbb{N}}\hookrightarrow\widehat{P\mathbb{N}}\hookrightarrow P_{\neg\neg}\hat{\mathbb{N}}$。我们下一步证明上述的单态射诱导严格的 $\hat{\mathbb{N}}<\widehat{P\mathbb{N}}<\hat{B}$,于是有 $\hat{\mathbb{N}}<\widehat{P\mathbb{N}}<P_{\neg\neg}\hat{\mathbb{N}}$。

引理 3.4.10. 令 $p:Y\to Z$ 为满态射,则态射 $p^X:Y^X\to Z^X$ 可以被限制到 $Epi(X,Y)\to Epi(X,Z)$。

证明: 回忆 $f:E\to Y^X$ 穿过 $Epi(X,Y)$ 当且仅当 $(\pi_1,f_*):E\times X\to E\times Y$ 是满态射。于是我们只需要证明对于 $p:Y\to Z$ 是满态射,$(\pi_1,f_*):E\times X\to E\times Y$ 是满态射,$(\pi_1,(p^X\circ f)_*):E\times X\to E\times Z$ 是满态射。但是 $(\pi_1,(p^X\circ f)_*)=(1_E,p)(\pi_1,f_*)$。$(1_E,p)$ 显然满,于是 $(\pi_1,(p^X\circ f)_*)$ 是满的。 $\square$

引理 3.4.11. 在一个 *Boole* 的意象 $\mathcal{E}$ 中,令 X 为一个对象,$m:Z\to Y$ 是单态射,而且有态射 $z_0:1\to Z$,则若 $Epi(X,Z)=0$,$Epi(X,Y)=0$。

证明: 由于 $\mathcal{E}$ 是 Boole 的,$Y=Z+\neg Z$。令 $1_Z:Z\to Z$ 和 $\neg Z\to 1\to Z$,于是这诱导了 $r:Y=Z+\neg Z\to Z$,$rm=1_Z$。于是我们有 r 可裂满,于是满。由引理 3.4.10,我们有态射 $r_*:Epi(X,Y)\to Epi(X,Z)$。由于 $Epi(X,Z)=0$,所以 $(r_*,1):Epi(X,Y)\to 0\times Epi(X,Y)$ 是单态射,于是 $Epi(X,Y)$ 是 0 唯一的子对象 0。 $\square$

定义 3.4.12. 对于一个 Grothendieck 意象 $\mathcal{E}$,我们称其中的一个对象 X 具有 Souslin 性质,如果其子对象 Heyting 代数 $\mathrm{Sub}(X)$ 中一族两两无交的子对象 X_i 至多具有可数个。我们称 $\mathcal{E}$ 具有 Souslin 性质,如果其被具有 Souslin 性质的对象生成。

命题 3.4.13. *对于一个 Grothendieck 意象 $\mathcal{E}$，若 $\mathcal{E}$ 具有 Souslin 性质，则对于任意两个无限集 S,T，在* **Set** *中 $Epi(S,T)=0$ 可以推出 $Epi(\hat{S},\hat{T})=0$。*

证明: 反之假设 $Epi(\hat{S},\hat{T})\neq 0$。于是其有至少两个不同的子对象，所以存在一个具有 Souslin 性质的对象 X 到其的态射 $f:X\to Epi(\hat{S},\hat{T})$。于是 f 对应一个满态射 $g=(\pi_1,f_*):X\times\hat{S}\to X\times\hat{T}$。对于 $s\in S$ 和 $t\in T$，这对应单态射 $s:1\to S$ 和 $t:1\to T$。于是我们有 $\mathcal{E}$ 中的单态射 $\hat{s}:1\to\hat{S}$ 和 $\hat{t}:1\to\hat{T}$（回忆 $\hat{1}=1$）。然后考虑如下的图表

$$\begin{tikzcd} U_{s,t} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & P_t \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X \arrow[d, "(1_X,\hat{t})"] \\ X \arrow[r, "(1_X,\hat{s})"'] & X\times\hat{S} \arrow[r, "g"'] & X\times\hat{T} \end{tikzcd}$$

令集合 $W=\{(s,t)\in S\times T|U_{s,t}\neq 0\}$。我们证明对任意 $t\in T$，都存在 $s\in S$ 使得 $(s,t)\in W$。由于层化保持左伴随，$\hat{S}=\coprod_{s\in S}1$。又由推论 3.1.25，$X\times(-)$ 保持余极限，于是 $X\times\hat{S}=\coprod_{s\in S}(X\times 1)=\coprod_{s\in S}X$。再对某个 t，将其沿 P_t 拉回，我们得到 $\coprod_{s\in S}U_{s,t}=P_t$。另外，由于右上的态射 $P_t\to X$ 是满态射 g 的拉回，又由于 $X\neq 0$，$P_t\neq 0$，于是我们有对于某个 s，$U_{s,t}\neq 0$。于是 $(s,t)\in W$。

我们接下来证明 $U_{s,t}$ 和 $U_{s,t'}$ 作为 X 的子对象无交。由于对于两个不同的态射 $t,t':1\to T$，其拉回为 0，我们得到拉回图

$$\begin{tikzcd} X\times\hat{0} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X \arrow[d, "(1,\hat{t})"] \\ X \arrow[r, "(1,\hat{t}')"'] & X\times\hat{T} \end{tikzcd}$$

但是 $X\times\hat{0}=0$，所以 $(1,\hat{t})$ 和 $(1,\hat{t}')$ 作为 $X\times\hat{T}$ 的子对象无交，于是其各自的拉回 $U_{s,t}$ 和 $U_{s,t'}$ 也无交。

最后我们以此构造满态射 $S\to T$。由于 X 具有 Souslin 性质，$W_s=\{t\in T|(s,t)\in W\}$ 可数。由于 S 无限，于是 $W=\bigcup_{s\in S}W_s$ 与 S 等势。于是我们考虑态射 $S\simeq W\to T$，其中 $W\to T$ 是 π_2，于是是满的。这诱导了满态射 $S\to T$，与条件矛盾。 $\square$

引理 3.4.14. *Cohen 偏序集* $\mathbf{P}$ *中，两两不相容（p 和 q 不相容当且仅当存在 $(b,n)\in F_p\cap F_q$，$p(b,n)\neq q(b,n)$）的元素至多可数。*

证明: 令 A 为一族两两不相容的元素。我们令 A_n 为其中 $\#F_p=n$ 的子集，则我们只需要说明 A_n 可数。我们使用归纳法。$n=0$ 的情况是显然的。我们再令 $A_n=\bigcup A_{n,m}$，其中

$$A_{n,m}=\{p\in A_n|\exists b\in B,(b,m)\in F_p\}$$

于是我们只需要说明 $A_{n,m}$ 是可数的。对于 $p\in A_{n,m}$，我们令 $b_p\in B$ 使得 $(b_p,m)\in F_p$。对于 $i=0,1$，我们令 $A_{n,m,i}=\{p\in A_n|p(b_p,m)=i\}$。由于 $A_{n,m,i}$ 中的元素两两不相容，$p|_{F_p-\{(b_p,m)\}}$ 这族元素也两两不相容（由于其在 (b_p,m) 上的定义相同，所以将其去掉不影响不相容性）。然后，注意到 $p|_{F_p-\{(b_p,m)\}}$ 这族元素的定义域具有 $n-1$ 个元素，于是其至多可数，由 $n-1$ 的情况。 $\square$

命题 3.4.15. *Cohen 意象满足 Souslin 性质。*

证明: 回忆 $h(p)$ 生成 $\mathbf{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$。由于 $h(p)$ 是 1 的子对象，而 Souslin 性质显然在子对象意义下继承，我们只需要证明 1 满足 Souslin 性质。我们令一族子对象 U_i 非零且两两无交，我们需要证明其可数。由于 $h(p)$ 生成 $\mathbf{Sh}(\mathbf{P}, \neg\neg)$，对于每个 U_i 存在某个 p_i 使得 $h(p_i) \to U_i$ 区分其的两个不同子对象。于是 $h(p_i) \wedge h(p_j) \leq U_i \wedge U_j = 0$。于是不存在 $r \leq p_i$，$r \leq p_j$。这表明 p_i 和 p_j 是不相容的。于是由上述引理，这族 $h(p_i)$ 至多可数，于是 U_i 至多可数。 $\square$

证明: 至此，我们完成定理 3.4.2 的证明。我们现在有单态射 $\hat{\mathbb{N}} \to \hat{P\mathbb{N}} \to \hat{B} \to P_{\neg\neg}(\hat{\mathbb{N}})$。同时，由于 $Epi(\mathbb{N}, P\mathbb{N}) = Epi(P\mathbb{N}, B) = 0$，且此三者为无限集合，由命题 3.4.13，$Epi(\hat{\mathbb{N}}, \hat{P\mathbb{N}}) = Epi(\hat{P\mathbb{N}}, \hat{B}) = 0$。于是我们有 $\hat{\mathbb{N}} < \hat{P\mathbb{N}} < \hat{B}$。由于 $\hat{B} \to P_{\neg\neg}(\hat{\mathbb{N}})$ 是单态射，由引理 3.4.11，$\hat{P\mathbb{N}} < P_{\neg\neg}(\hat{\mathbb{N}})$。于是我们有 $\hat{\mathbb{N}} < \hat{P\mathbb{N}} < P_{\neg\neg}\hat{\mathbb{N}}$。 $\square$

参考文献

[Car53] H Cartan. “Séminaire 1951–52”. In: *Exposés XVa XX* (1953) (cit. on p. 1).

[Del74] Pierre Deligne. “La conjecture de Weil. I”. In: *Publications Mathématiques de l’Institut des Hautes Études Scientifiques* 43 (1974), pp. 273–307 (cit. on p. 13).

[Dwo60] Bernard Dwork. “On the rationality of the zeta function of an algebraic variety”. In: *American Journal of Mathematics* 82.3 (1960), pp. 631–648 (cit. on p. 13).

[Gro64] Alexander Grothendieck. “Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L”. In: *Séminaire Bourbaki* 9.41-55 (1964), p. 8 (cit. on p. 13).

[Law64] F William Lawvere. “An elementary theory of the category of sets”. In: *Proceedings of the national academy of sciences* 52.6 (1964), pp. 1506–1511 (cit. on p. 31).

[Ler45] Jean Leray. “Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations”. In: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* 24 (1945), pp. 95–167 (cit. on p. 1).

[nLa24a] nLab authors. *etale morphism of schemes*. https://ncatlab.org/nlab/show/etale+morphism+of+ Revision 33. Feb. 2024 (cit. on p. 28).

[nLa24b] nLab authors. *sheafification*. https://ncatlab.org/nlab/show/sheafification. Revision 35. Feb. 2024 (cit. on p. 23).

[Tie73] Myles Tierney. “Axiomatic sheaf theory: some constructions and applications”. In: *Categories and commutative algebra*. Springer, 1973, pp. 249–326 (cit. on p. 31).