复变函数引论思考题

林祺安

机械工程系

May 15, 2018

1

设 $f(z)=z^n+\sum_{k=1}^{n}c_kz^{n-k}$。证明：$f(z)$ 为分圆多项式的充要条件是 $f(z)$ 的 n 个零点为圆内接正 n 边形的 n 个顶点。

- 法一

充分性:

对分圆多项式$f(z)=z^n+c_n$, 令$f(z)=0$，则可得$f(z)$的零点为$z=z_k=|c_n|^{\frac{1}{n}}\cdot e^{i\cdot\frac{arg(-c_n)+2(k-1)\pi}{n}},k=1,2,\cdots,n$

易知

$$\begin{aligned}|z_k|&=\sqrt{z_K\cdot\overline{z_k}}\\&=\sqrt{|c_n|^{\frac{1}{n}}\cdot e^{i\cdot\frac{arg(-c_n)+2(k-1)\pi}{n}}\cdot|c_n|^{\frac{1}{n}}\cdot e^{-i\cdot\frac{arg(-c_n)+2(k-1)\pi}{n}}}\\&=|c_n|^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

这 n 个零点全部在以原点为圆心，半径为 $|c_n|^{\frac{1}{n}}$ 的圆上。即这 n 个零点构成一个圆内接 n 边形。

$$\begin{aligned}\therefore z_{k+1}-z_k&=|c_n|^{\frac{1}{n}}\cdot e^{i\cdot\frac{arg(-c_n)+2k\pi}{n}}-|c_n|^{\frac{1}{n}}\cdot e^{i\cdot\frac{arg(-c_n)+2(k-1)\pi}{n}}\\&=|c_n|^{\frac{1}{n}}\cdot e^{i\cdot\frac{arg(-c_n)+2(k-1)\pi}{n}}\cdot(e^{\frac{2\pi}{n}}-1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore |z_{k+1}-z_k|^2&=|c_n|^{\frac{2}{n}}\cdot(e^{\frac{2\pi}{n}}-1)^2\cdot e^{i\cdot\frac{arg(-c_n)+2(k-1)\pi}{n}}\cdot e^{-i\cdot\frac{arg(-c_n)+2(k-1)\pi}{n}}\\&=|c_n|^{\frac{2}{n}}\cdot(e^{\frac{2\pi}{n}}-1)^2,k=1,2,\ldots,n\end{aligned}$$

（定义 $z_{n+1}=|c_n|^{\frac{1}{n}}\cdot e^{i\cdot\frac{arg(-c_n)+2n\pi}{n}}=|c_n|^{\frac{1}{n}}\cdot e^{i\cdot\frac{arg(-c_n)}{n}}=z_1$）

$\therefore f(z)$ 的 n 个零点构成的 n 边形的边长均相等

又 $\because$ 此 n 边形为圆内接 n 边形

$\therefore f(z)$ 的 n 个零点构成一个正 n 边形

必要性：

对正 n 边形的 n 个顶点

$z = z_k = r \cdot e^{i\cdot(\alpha_0 + \frac{2(k-1)\pi}{n})}, k = 1, 2, \cdots, n$

有 $z_k^n = r^n \cdot e^{i\cdot(n\alpha_0 + 2(k-1)\pi)} = r^n \cdot e^{i\cdot n\alpha_0}, \forall k = 1, 2, \cdots, n$

$\therefore z_1, z2, \cdots, z_n$ 均为首一多项式 $f(z) = z^n - r^n \cdot e^{in\alpha_0}$ 的零点

又 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 互不相等，$degf(z) = n$

$\therefore z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为 $f(z)$ 的全部零点

又 $\because f(z)$ 为首一多项式 $\therefore f(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$

所以有 $f(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k) = z^n - r^n \cdot e^{in\alpha_0}$ ■

- 法二

充分性：

当 $f(z)$ 为分圆多项式时，有 $f(z) = z^n + c_n$

其零点为 $z = z_k = |c_n|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\cdot\frac{arg(-c_n)+2(k-1)\pi}{n}}, k = 1, 2, \cdots, n$

$$
\begin{aligned}
\therefore z_{k+1} - z_k &= |c_n|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\cdot\frac{arg(-c_n)+2k\pi}{n}} - |c_n|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\cdot\frac{arg(-c_n)+2(k-1)\pi}{n}} \\
&= |c_n|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\cdot\frac{arg(-c_n)+2(k-1)\pi}{n}} \cdot (e^{\frac{2\pi}{n}} - 1)
\end{aligned}
$$

同理，

$$
z_{k+2} - z_{k+1} = |c_n|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\cdot\frac{arg(-c_n)+2k\pi}{n}} \cdot (e^{\frac{2\pi}{n}} - 1)
$$

（定义 $z_{n+t} = z_t, \forall t \in \mathbb{Z}$）

$$
\begin{aligned}
arg(z_{k+2} - z_{k+1}) - arg(z_{k+1} - z_k) &= \frac{1}{n} \cdot (arg(-c_n) + 2k\pi) - \frac{1}{n} \cdot (arg(-c_n) + 2(k-1)\pi) \\
&= \frac{2\pi}{n}
\end{aligned}
$$

故相邻边夹角为 $\pi - \frac{2\pi}{n} = \frac{n-2}{n}\pi$ 为常数

所以 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 构成的 n 边形各个顶角相等

又 此 n 边形为圆内接 n 边形

所以 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 构成正 n 边形

必要性：

对正 n 边形的 n 个顶点，以正 n 边形中心为原点，有 $z_{k+1} = z_k \cdot e^{\frac{2\pi}{n}i}, k = 1, 2, \cdots, n$

（定义 $z_{n+1} = z_1$） $\therefore z_{k+1}^n = z_k^n \cdot e^{2\pi i} = z_k^n, \forall k = 1, 2, \cdots, n$

$\therefore z_k^n = z_1^n, \forall k = 1, 2, \cdots, n$

令 $f(z) = z^n - z_1^n$ 为分圆多项式，则 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 互不相同，且皆为 $f(z)$ 的零点

又 $degf(z) = n$

$\therefore z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为 $f(z)$ 的全部零点

$\therefore f(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k) = z^n - z_1^n$ ■

2

证明：$\zeta(2n) = c_n\zeta^n(2) = c_n(\frac{\pi^2}{6})^n, \quad c_1 = 1$

$(n + \frac{1}{2})c_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} c_k c_{n-k}, \quad n \geq 2$

由于 $ln(\frac{sinz}{z}) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} ln(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2})$，由 Taylor 展开，

$$\begin{aligned} ln\frac{sinz}{z} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}\cdot(-z^2)^k}{k\cdot(n^2\pi^2)^k} \\ &= -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^{2k}}{k\pi^{2k}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}} \\ &= -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^{2k}}{k\pi^{2k}}\cdot\zeta(2k) \end{aligned} \tag{1}$$

对上式求导得，$cotz - \frac{1}{z} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{\pi^{2k}}\zeta(2k) \cdot z^{2k-1}$

故有

$$zcotz - 1 = -2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\pi^{2k}}\zeta(2k)\cdot z^{2k} \tag{2}$$

用 πz 代替 z，有 $cot(\pi z)-\frac{1}{\pi z}=-2\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\zeta(2k)\cdot z^{2k-1}\cdot\pi^{-1}$
所以有

$$\pi z\cdot cot(\pi z)-1=-2\sum_{k=1}^{+\infty}\zeta(2k)\cdot z^{2k} \tag{3}$$

对(3)求导得，$\pi cot(\pi z)+\pi z\cdot[cot(\pi z)]'=-2\sum\limits_{k=1}^{+\infty}2n\cdot\zeta(2k)\cdot z^{2k-1}$
又 $\because\quad [cot(\pi z)]'=\pi(-1-cot^2(\pi z))$
$\therefore \pi cot(\pi z)+\pi^2 z\cdot cot'(\pi z)=\pi cot(\pi z)-\pi^2 z-\frac{1}{z}\cdot(\pi z\cdot cot(\pi z))^2$
将(3)代入上式可得,
$-2\sum\limits_{k=1}^{+\infty}2n\cdot\zeta(2k)\cdot z^{2k-1}=\frac{1}{z}[-2\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\zeta(2k)\cdot z^{2k}+1]-\pi^2 z-\frac{1}{z}\cdot[-2\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\zeta(2k)\cdot z^{2k}+1]^2$
所以有

$$\begin{aligned}2\sum_{k=1}^{+\infty}(2n-1)\cdot\zeta(2k)\cdot z^{2k}+1&=\pi^2z^2+[-2\sum_{k=1}^{+\infty}\zeta(2k)\cdot z^{2k}+1]^2\\&=\pi^2z^2+4(\sum_{k=1}^{+\infty}\zeta(2k)\cdot z^{2k})^2-4\sum_{k=1}^{+\infty}\zeta(2k)\cdot z^{2k}+1\end{aligned}$$

整理得,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty}(2n+1)\cdot\zeta(2k)\cdot z^{2k-1}&=2(\sum_{k=1}^{+\infty}\zeta(2k)\cdot z^{2k})^2+\pi^2z^2\\&=2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\zeta(2k)\cdot\zeta(2n-2k)z^{2n}+\pi^2z^2\end{aligned} \tag{4}$$

比较等式(4)两边 $2n(n\geq 2)$ 次项的系数，有
$(2n+1)\zeta(2n)=2\sum\limits_{k=1}^{n-1}\zeta(2k)\cdot\zeta(2n-2k)$
又 $\quad c_n=\frac{\zeta(2n)}{\zeta^n(2)}$
$\therefore$ 两边同时除以$\zeta^n(2)$得：$(n+\frac{1}{2})c_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}c_k\cdot c_{n-k}\quad\blacksquare$

3

证明：$\frac{\zeta(2n)}{\pi^{2n}} - \frac{\zeta(2n-2)}{3!\pi^{2n-2}} + \frac{\zeta(2n-4)}{5!\pi^{2n-4}} + \cdots + (-1)^(n-1)\frac{\zeta(2)}{\pi^2} + \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = 0, \quad n \in \mathbb{N}$
将式(2)两边同乘以 $sinz$ 得：

$$\begin{aligned} zcosz - sinz &= -2sinz(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^{2k}}\zeta(2k)\cdot z^{2k}) \\ &= -2(\sum_{k=1}^{+\infty})(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi^{2k}}\zeta(2k)\cdot z^{2k}) \\ &= -2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\pi^{2k}\cdot(2n-2k+1)!}\zeta(2k)z^{2n+1} \end{aligned} \tag{5}$$

而

$$\begin{aligned} zcosz - sinz &= z(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ &= (\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!})z^{2n+1} \end{aligned} \tag{6}$$

比较式(5)和式(6)，可以得到

$$-2\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\pi^{2k}\cdot(2n-2k+1)!}\zeta(2k)z^{2n+1} = (\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!})z^{2n+1} \tag{7}$$

比较式(7)两端的 2n+1 次项系数，可得

$$-2\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{\pi^{2k}\cdot(2n-2k+1)!}\zeta(2k) = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n\cdot 2n}{(2n+1)!} \tag{8}$$

整理得，$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k\zeta(2n-2k)}{(2k+1)!\pi^(2n-2k)} + \frac{(-1)^n\cdot n}{(2n+1)!} = 0$ ■