线性代数

人工智能

前言

1 线代为什么比较难?

1. 较为抽象，不知道他们的物理意义或几何意义是啥，不知道有何用；
2. 定义较多，给出一个定义，必然是为了更好的阐述某一性质。从学科的发展的角度，必然是先有规律的发现，而后才在推倒公式的过程中下一些定义。但是对于学习者来说，是先接受定义的，定义太多，难免被“噎着”；
3. 很多性质或推理是相通的，但因为章节的编排，对应到矩阵或行列式上，会有不同的表述。如果我们不能串起来的看，势必增加理解的难度。比如
4. 性质、定理的推倒较为繁琐。有人说背住线代的公式和定理，感觉线代也不难了。但背公式总归没会推公式来的踏实。但线代的很多定理的推倒证明确实繁琐。

第1章 线性方程组的消元法和矩阵的初等变换

概要：通过介绍线性方程组的基本概念和求解线性方程组的消元法，引出矩阵及其初等变换的相关概念。

§1.1 线性方程组的消元法

1.1.1 概述

这一节讲解线性方程组的消元法，主要是为了引出矩阵的初等变换，而矩阵初等变换的思想在简化行列式的计算上很有用。

1.1.2 几个定义

同解变换：

> 如果方程组(Ⅰ)和方程组(Ⅱ)互为线性组合，就称这两个方程组等价。等价的线性方程组一定同解，将方程组(Ⅰ)变成方程组(Ⅱ)的过程称为**同解变换**。

定义1：如下三种变换称为线性方程组的**初等变换**：

> - 交换两个方程的次序；
> - 用一个非零的常数乘有个方程；
> - 把一个方程的适当倍数加到另一个方程上。

1.1.3 几个定理

定理1：

> 线性方程的初等变换总是把方程组变成同解方程组。

§1.2 矩阵的初等变换

1.2.1 概述

将线性方程组的系数和常数用矩阵表示。那么求解线性方程组的消元法就变成矩阵的`初等行变换`。矩阵的`初等变换`是`初等行变换`和`初等列变换`的统称。**切记**求解线性方程组时请勿对矩阵进行初等列变换。

1.2.2 几个定义

矩阵定义：
矩阵的定义(略)，记为$A=(a_{ij})_{m\times n}$或$A=(a_{ij})$
行数和列数都是n的矩阵A称为n阶矩阵或n阶方阵，记作A_n

同型矩阵：两个矩阵行数相等，列数相等。

转置矩阵：矩阵A的行换成同序数的列得到的矩阵，称A的转置矩阵，记A^T或$A^{'}$。

矩阵的初等行变换：

- 对调矩阵的两行（对调i,j两行，记作$r_i\leftrightarrow r_j$）；
- 以非零常数k乘矩阵某一行的各元（第i行乘k，记作$r_i\times k$）；
- 把某一行所有元素的k倍加到另一行对应的元上去（第j行的k倍加到第i行上，记作$r_i\leftrightarrow kr_j$）

初等列变换类似

等价矩阵： 如果矩阵A经过有限次初等变换变成矩阵B，就称矩阵A与矩阵B `等价`，记作A~B。

矩阵之间的等价具有如下性质：

1. 自反性： A~A
2. 对称性：若A~B，则B~A
3. 传递性：若A~B，B~C 则A~C

行最简形矩阵：

1. 非零行的第一个非零元为1；
2. 非零行的第一个非零元所有的列的其他元都是零。

矩阵的标准型： 矩阵的左上角元$a_{ii} = 1(i = 1, 2, 3)$，其余元为0.

定理： 任意一个$m \times n$矩阵A，总可以经过初等变换（行变换和列变换）把它化为标准形。

第2章 行列式 克拉默法则

概要： 主要讨论n阶行列式的定义、性质及计算方法。以及求解一类特殊线性方程组的克拉默法则。

§2.1 二阶和三阶行列式

2.1.1 概述

通过求解线性方程组，定义了二阶和三阶行列式的计算公式。并给克拉默法则作了铺垫。

2.1.2 几个定义

矩阵A的行列式记作$|A|$或det$A$，即

$$detA = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

§2.2 排列

2.2.1 几个定义

排列的定义： 由1,2,⋯,n组成的一个有序数组称为n级排列。

排列的逆序数： 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，那么它们就称为一个逆序，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的`逆序数`。

逆序数为奇数的排列称为`奇排列`，逆序数为偶数的排列称为`偶排列`。

排列逆序数的表示：

> 设$p_1p_2\cdots p_n$为1,2,⋯,n的一个排列，则记这个排列的逆序数为$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$

2.2.2 几个定理

定理1： 对换改变排列的奇偶性。

定理2： 在全部n级排列中，奇、偶排列的个数相等，各有$\frac{n!}{2}$个。

§2.3 n阶行列式的定义和性质

2.3.1 概述

注意行列式的各种性质的灵活运用，可以化简行列式。

2.3.2 几个定义

行列式的定义：

$$D = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

这里，$\sum$表示对$1, 2, \cdots, n$这n个数的所有排列$p_1 p_2 \cdots p_n$求和。

几个特殊行列式的计算：

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \cdots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = a^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

2.3.3 行列式的性质

性质1： 行列式与它的转置行列式相等。$|A| = \left|A^T\right|$

性质2： 互换行列式的两行（列），行列式变号。

性质3： 用数k乘行列式的某一行（列）的每一个元，等于用数k乘此行列式。
推论1： 行列式某一行（列）的所有元的公因子可以提到行列式符号的外面。
推论2： 若行列式的两行（列）对应元成比例，则此行列式为零。

性质4： 若行列式的某一行（列）的元皆为两数之和，则此行列式等于两个行列式的和。

利用性质4和性质3的推论，得
性质5： 用数k乘行列式的某一行（列）的所有元加到另一行（列）的对应元上，行列式的值不变。

2.3.4 总结

通过行列式的定义和性质，把一个普通行列式通过行列变换成`对角行列式`或`上（下）三角形行列式`，从而方便计算。

§2.4 行列式的展开和计算

2.4.1 概述

行列式的阶越低越容易计算。本节主要讲解如何将高阶行列式转化为低阶行列式来计算。引入了余子式和代数余子式的概念，最后介绍一了一种特殊行列式——范德蒙德行列式。

2.4.2 几个定义

余子式和代数余子式：
在n阶行列式$det(a_{ij})$中，划去元a_{ij}所在的第i行和第j列的元，剩下的元不改变原来的顺序所构成的$n-1$阶行列式称为元a_{ij}的`余子式`，记作M_{ij};又记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$$

称A_{ij}为元a_{ij}的`代数余子式`。

2.4.3 几个定理

引理： 一个n阶行列式，如果其中第i行所有元除a_{ij}外都是零，则这个行列式等于a_{ij}与它的代数余子式的乘积，即

$$D=a_{ij}A_{ij}=(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}$$

> 根据某一对角全为0的分块矩阵的计算可证。

行列式按行（列）展开法则： 行列式等于它的任一行（列）的各元与其对应的代数余子式乘积之和：

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

推论： 行列式某一行（列）的元与另一行（列）的对应元的代数余子式乘积之和等于零。即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0$$

范德蒙德行列式：

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)$$

§2.5 克拉默法则

2.5.1 概述

对于n个未知数n个方程的线性方程组，什么时候有解，什么时候无解。如果有解，解又是多少。克拉默法则会给出答案。

2.5.2 几个定理

克拉默（Cramer）法则： 如果方程个数与未知量个数相等的线性方程组的系数矩阵的行列式$D = |A| \neq 0$，那么线性方程组有解，并且`解唯一`。解可以通过系数与常数项表示为

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)^T = (\frac{D_1}{D}, \frac{D_2}{D}, \cdots, \frac{D_n}{D})^T$$

其中D_j是把系数矩阵中的第j列换成方程组的常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$所成的矩阵的行列式。

定理1'： 如果非齐次线性方程组无解或有至少两个不同的解，则它的系数行列式必为零。

> 与第4章线性方程组理论中的一些定理有相同的含义。

定理2： 如果`齐次线性方程组`的系数矩阵的行列式$D = |A| \neq 0$，那么它只有零解；也就是说，如果齐次线性方程组有非零解，那么必有$D = |A| = 0$。

第3章 矩阵的运算

概要：主要介绍了矩阵的线性运算，乘法运算。引入了逆矩阵、分块矩阵、矩阵的秩的概念。矩阵的秩在线性方程组的理论部分非常有用。

§3.1 矩阵的概念及运算

3.1.1 矩阵的线性运算

矩阵的加法：两个同型矩阵才能相加，相加结果为两矩阵对应位置元相加。

数与矩阵相乘：数λ与矩阵A的乘积记作λA或$A\lambda$，规定为

$$\lambda A = A\lambda = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

> - 注意与$\lambda|A|$的区别
> - 数与矩阵相乘满足交换律、结合律和分配率。

3.1.2 矩阵的乘法

矩阵乘法的定义：设矩阵$A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，那么规定矩阵A与矩阵B的乘积是一个$m\times n$矩阵$C=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{ij} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$$

记作$C=AB$

注意：

1. 根据定义，只有当第一个矩阵（左矩阵）的列数等于第二个矩阵（右矩阵）的行数时，乘积AB才是有意义的；并且AB的行数等于第一个矩阵A的行数，AB的列数等于第二个矩阵B的列数。
2. 矩阵乘法`不满足交换定理`；
3. 矩阵乘法满足结合定律和分配定理：
   - $(AB)C = A(BC)$
   - $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
   - $A(B+C) = AB + AC$

§3.2 特殊矩阵 方阵乘积的行列式

3.2.1 特殊矩阵

1. 单位矩阵

主对角线上元都是1，其它元都为零的矩阵，称为单位矩阵，记为E_n，简记为E。

单位矩阵性质： $EA = AE = A$

2. 对角矩阵

形如：

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

对角矩阵常记作$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$

3. 三角形矩阵

上三角形矩阵： 主对角线的左下方的元全是零；
下三角形矩阵： 主对角线的右上方的元全是零。
`两个同阶的上三角形矩阵的乘积仍是上三角形矩阵；下三角形矩阵同理。`

4. 转置矩阵

性质：

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(\lambda A)^T = A^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

5. 对称矩阵和反对称矩阵

定义：

> 设$A = (a_{ij})$为n阶`方阵`，如果$A^T = A$，那么称A为对称矩阵；如果$A^T = -A$，那么称A为反对称矩阵。

特点：

- 对称矩阵的元以主对角线为对称轴对应相等；
- 反对称矩阵主对角线上的元都是0。

性质：

- 若A, B都是对称矩阵，则$A+B$，λA仍是对称矩阵；
- 若A, B都是对称矩阵，则AB为对称矩阵的充要条件是$AB = BA$.

3.2.2 方阵乘积的行列式

定理： 设A,B是两个n阶方阵，则$|AB|=|A||B|$.

伴随矩阵：

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

伴随矩阵的性质：

1. $AA^* = A^*A = |A|E$
2. 当$|A| \neq 0$时，$|A^*| = |A|^{n-1}$

§3.3 逆矩阵

3.3.1 概述

对于非零的常数a，其倒数与之相乘等于1。那么对于方阵A，是否存在一个方阵B，使得$AB=E$?

3.3.2 逆矩阵的定义

对于n阶方阵A，如果有一个n阶方阵B，使

$$AB = BA = E$$

则称A是可逆的，并把矩阵B称为A的逆矩阵。

注意： 定义中的两个连等必须同时满足。

3.3.3 逆矩阵的相关定理

逆矩阵存在的条件及求解逆矩阵的方法：
方阵A可逆的充要条件是$|A| \neq 0$，且当A可逆时，$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，其中$A^*$为矩阵$A$的伴随矩阵。

定义：
当$|A| \neq 0$时，A称为`非奇异矩阵`，否则称为`奇异矩阵`。

逆矩阵满足的运算规律：

1. 若n阶方阵A可逆，则A^{-1}也可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$.
2. 若A可逆，数$\lambda \neq 0$，则λA可逆，且$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.
3. 若A,B为同阶方阵且均可逆，则AB亦可逆，且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. 若A可逆，则A^T也可逆，且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. 若A可逆，且$AB = AC$，则$B = C$.

§3.4 分块矩阵

3.4.1 概述

一方面是在处理一些实际问题时，经常遇到行数和列数较高或结构特殊的矩阵，运算时采用分块法，`使大矩阵的运算化成小矩阵的运算`；

另一方面，将矩阵进行分块，可以使矩阵的`结构变得更加清晰`。

3.4.2 分块矩阵的运算

1. 加法
同型矩阵有相同的分块法，则两矩阵相加等于各矩阵的子块相加。

2. 数乘分块矩阵
用数λ乘一个分块矩阵，等于用λ去乘矩阵的每个块。

3. 分块矩阵的乘法
与矩阵乘法类似。

4. 分块矩阵的转置
整体转置，每个块也转置。

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rt} \end{bmatrix}$$

则

$$A^T=\begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{r1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{r2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1t}^T & A_{2t}^T & \cdots & A_{rt}^T \end{bmatrix}$$

5. 分块对角矩阵
性质与对角矩阵类似。

3.4.3 矩阵按行分块和按列分块

$m\times n$矩阵A有m行，称为矩阵A的m个`行向量`，记第i行

$$\alpha_i^T=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,m)$$

则矩阵A可记为

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{bmatrix}$$

同理，若用`列向量`表示：

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

§3.5 分初等矩阵

fa

- [x] 讲了什么
- [x] 新的定义
- [x] how
- [x] why
- [x] 新的定理对老的定理的证明
- [x] 定理对应页数
- [x]