

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЛИН ТРЕЩИН МНОГОЗОННОГО ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРУБКАХ ТОКА

© 2025 г. *К.А. Поташев<sup>1,2</sup>, А.А. Ураимов<sup>1,3</sup>, А.Б. Мазо<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, КФУ

<sup>2</sup> Казанский государственный энергетический университет

<sup>3</sup> Научно-исследовательский центр “Курчатовский институт”

AAUraimov@gmail.com

Работа выполнена при финансовой поддержке Научно-исследовательского центра “Курчатовский институт” в рамках государственного задания (номер проекта FNEF-2022-0016).

DOI: 10.20948/mm-2025-01-08

Дана постановка и экономичный алгоритм решения обратной задачи интерпретации трассерных исследований длин трещин многозонного гидроразрыва пласта. Рассмотрен случай трещин бесконечной проницаемости. Решение прямой задачи требует численного моделирования многокомпонентной фильтрации. Для сокращения вычислительных затрат пространственная задача раскладывается на набор задач пониженной размерности вдоль трубок тока. При высоком уровне точности такая модель на два порядка сокращает машинное время расчета. Представлен устойчивый алгоритм решения обратной задачи. Выполнена оценка чувствительности квазирешения задачи к погрешности измерений.

Ключевые слова: многозонный гидроразрыв пласта, трещины бесконечной проницаемости, трассерные исследования, идентификация длин трещин, многокомпонентная фильтрация, обратная задача, модель трубок тока, высокопроизводительные вычисления.

## DETERMINATION OF THE LENGTH OF FRACTURES IN MULTISTAGE HYDRAULIC FRACTURING USING THE STREAM TUBES MODEL

*K.A. Potashev<sup>1,2</sup>, A.A. Uraimov<sup>1,3</sup>, A.B. Mazo<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan Federal University

<sup>2</sup>Kazan State Power Engineering University

<sup>3</sup>Scientific Research Center “Kurchatov Institute”

The mathematical statement and efficient high-speed algorithm for solving the inverse problem of interpreting tracer studies of the lengths of fractures of multi-stage hydraulic fracturing are given. The case of fractures of infinite permeability is considered. Solving the forward problem requires numerical modeling of multi-component flow. To reduce computational costs, the spatial problem is decomposed into a set of problems of reduced dimension along the stream tubes. At a high level of accuracy, such a model reduces computer calculation time by two orders of magnitude. A stable algorithm for solving the inverse problem is presented. The evaluation of sensitivity of the quasi-solution of the problem to measurement error is given.

Key words: multi-stage hydraulic fracturing, infinite permeability fractures, tracer studies, identification of fracture lengths, multi-component flow, inverse problem, stream tube model, high-performance computing.

## **1. Введение**

При разработке нефтегазовых месторождений, особенно низкопроницаемых коллекторов, применяется такой метод интенсификации добычи углеводородов, как многозонный гидравлический разрыв пласта (МГРП) на горизонтальных скважинах [1-4]. При этом длина скважин составляет сотни и тысячи метров, вдоль которых выполняется до нескольких десятков трещин (стадий) гидроразрыва. Протяженность каждой трещины может достигать сотен метров, вследствие чегократно увеличивается область пониженного давления в окрестности скважины. Для долгосрочного планирования и управления процессом разработки пласта требуются знания о размерах и фильтрационных параметрах трещин на каждом интервале МГРП [5]. Поскольку непосредственные измерения таких параметров невозможны, то применяются косвенные методы, например, индикаторные (трассерные) исследования [6,7]. Они состоят в измерении и анализе величин концентраций разноименных трассеров в отбираемой скважиной жидкости. Предварительно эти индивидуальные трассеры нагнетаются в каждый интервал МГРП на этапе выполнения гидроразрыва [8-10].

Технология трассерных исследований МГРП является относительно новой. Для интерпретации полученных данных обычно используются быстрые, но в то же время тривиальные инженерные подходы, не учитывающие ряд факторов, значимо влияющих на распределение индикаторов в системе пласт-трещина-скважина – таких как интерференция трещин в структуре фильтрационного потока в пласте, сорбционные и дисперсионные эффекты. Поэтому крайне актуальным является оснащение технологии алгоритмической базой, позволяющей быстро и надежно интерпретировать данные результаты. Наиболее достоверный способ – это прямое трехмерное числен-

ное моделирование, детально воспроизводящее перенос трассера вблизи каждой трещины [11-16]. Однако такой подход предполагает весьма значительные затраты машинного времени, что оказывается критическим при решении обратных задач, требующих большого числа многовариантных расчетов данной нестационарной задачи [17-19].

В настоящей работе предлагается использовать упрощенную физическую и математическую модели процесса, не приводящие к значимой потере точности. Каждый интервал гидроразрыва задается единой трещиной с эффективными свойствами. Пространственная фильтрационная модель переноса в пласте раскладывается на набор задач пониженной размерности в отдельных фиксированных трубках тока [20,21]. За счет такого разложения происходит значительное ускорение расчетов с экономией вычислительных ресурсов. При этом эти задачи в трубках тока могут решаться независимо друг от друга, что позволяет применять алгоритмы параллельных вычислений для дополнительного кратного ускорения вычислений [19, 22].

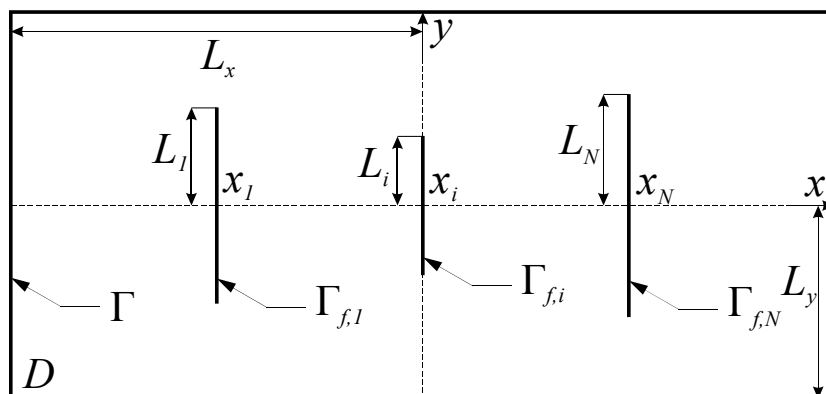
В данной работе изложен метод решения обратной задачи интерпретации трассерных исследований МГРП с использованием указанной модели. В рамках упрощенной постановки прямой задачи, приводящей к понижению ее размерности, оценена точность метода решения обратной задачи, чувствительность к погрешности исходных данных и показана его устойчивость.

## 1. Прямая задача

Поскольку в полевых условиях истинные параметры трещин остаются неизвестными, то в качестве результатов трассерных исследований (или «точного» решения) используется синтетическая модель – численное решение задачи о закачке и последующем отборе трассеров, когда параметры трещин МГРП заданы. В свою очередь «замерами» являются вычисленные значения суммарного расхода скважины и концентрации трассеров в общем объеме отбираемой жидкости в течение некоторого периода работы скважины.

**1.1. Постановка задачи.** Для общего исследования обратной задачи и алгоритмов ее решения рассматривается упрощенная схема физического процесса: 1) трещины гидроразрыва вертикальны и вскрывают пласт по всей высоте (рис.1); 2) по сравнению с характерной проницаемостью пород коллектора проницаемость трещин бесконечна; 3) ствол скважины между трещинами МГРП изолирован; 4) пласт однородный по вертикали. Тогда фильтрационное течение в пласте является двумерным в горизонтальной плоскости  $(x,y)$ , в которой трещины МГРП являются разрезами. Процесс формирования трещин не моделируется. Величина раскрытия трещин бесконечной

проницаемости не имеет значения. Ориентация всех трещин в пласте полагается одинаковой и для определенности задается ортогональной оси скважины  $Ox$ . Кроме того, предполагается, что трещины симметричны относительно оси  $Ox$ . При таких ограничениях каждая трещина полностью определяется своим расположением  $x_i$  и полудлиной  $L_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) (рис.1).



**Рис.1.** Схема расположения трещин МГРП вдоль горизонтальной скважины.

Перенос трассера в пласте описывается моделью однофазной многокомпонентной фильтрации несжимаемой жидкости с пассивной примесью в несжимаемом пласте [23]. Такая постановка приближена к условиям закачки нефтерастворимых трассеров в нефтенасыщенный пласт.

Процесс трассерных исследований имитируется численно следующим образом: на начальном этапе моделируется закачка индивидуальных трассеров в пласт через  $N$  трещин МГРП с заданными длинами. На втором этапе моделировалась работа скважины в режиме добычи с одновременным отбором трассеров со всех интервалов МГРП и их мгновенным смешением в стволе скважины. Периоды закачки и отбора моделируются в режиме заданного забойного давления.

Математическая постановка прямой задачи в безразмерном виде в области  $D = [-L_x \leq x \leq L_x] \times [-L_y \leq y \leq L_y]$  пласта содержит:

уравнение для давления

$$\operatorname{div}(h \mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u} = -k \operatorname{grad} p; \quad (1)$$

уравнения для концентрации трассеров

$$mh \frac{\partial c_i}{\partial t} + \operatorname{div}(c_i h \mathbf{u}) = 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad (2)$$

начальные условия

$$t = 0, \quad (x, y) \in D: \quad c_i = 0, \quad i = 1, \dots, N; \quad (3)$$

и граничные условия

а) в период  $0 < t \leq t_1$  закачки трассеров

$$(x, y) \in \Gamma: p = 0;$$

$$(x, y) \in \Gamma_{f,i}: p = 1, i = 1, \dots, N; \quad (4.1)$$

$$(x, y) \in \Gamma_{f,i}: c_j = \delta_{ij}, i, j = 1, \dots, N. \quad (5.1)$$

б) в период  $t_1 < t \leq t_2$  отбора трассеров

$$(x, y) \in \Gamma: p = 0;$$

$$(x, y) \in \Gamma_{f,i}: p = -1, i = 1, \dots, N; \quad (4.2)$$

$$(x, y) \in \Gamma: c_i = 0, i = 1, \dots, N;$$

$$(x, y) \in \Gamma_{f,i}: c_j = 0, i \neq j, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N. \quad (5.2)$$

Здесь  $t$  – время;  $h(x, y)$ ,  $k(x, y)$ ,  $m(x, y)$  – толщина, проницаемость и пористость пласта;  $\mathbf{u}$  – вектор скорости фильтрации;  $p$  – давление в пластовом флюиде;  $c_i$  – объемная концентрация трассера  $i$  в жидкой фазе;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $\Gamma$  – внешняя граница области  $D$ ;  $\Gamma_{f,i} = \{x = x_i; -L_i \leq y \leq L_i\}$  – внутренние границы области  $D$ , представляющие разрезы от трещин МГРП;  $L_i \in (0, L_y)$  – полудлина трещин МГРП.

Координаты  $x_i$  расположения интервалов МГРП вдоль ствола скважины считаются известными и в модельных расчетах задавались равномерно и симметрично относительно центра горизонтальной скважины.

Суммарный дебит скважины в момент времени  $t \in (t_1, t_2]$

$$q(t) = \sum_{i=1}^N q_i(t), \quad q_i(t) = \int_{\Gamma_{f,i}} h u_n d\gamma, \quad u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_{f,i}} = \begin{cases} u_x, \Gamma_{f,i}^-; \\ -u_x, \Gamma_{f,i}^+; \end{cases} i = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  – внешняя по отношению к области  $D$  нормаль на поверхности трещин;  $\Gamma_{f,i}^-, \Gamma_{f,i}^+$  – левый и правый берега трещины  $i$  соответственно. Концентрация трассера в общем дебите скважины в момент  $t \in (t_1, t_2]$

$$C_i(t) = q_i^c(t) / q(t), \quad q_i^c(t) = \int_{\Gamma_{f,i}} h c_i u_n d\gamma, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7)$$

**1.2. Метод решения задачи.** Построение численного решения задачи (1) – (5) выполнялось с помощью традиционной пространственной модели: на двумерной треугольной конечно-элементной сетке по неявной схеме для давления и на ассоциированной с ней неструктурированной конечно-объемной сетке по явной схеме для концентраций трассеров (схема IMPES).

Даже в двумерной постановке численное решение задачи (1) – (5) с погрешностью расчета дебита  $q$  и концентрации трассеров  $C_i$  в общем дебите, не превосходящей 1%, предполагает значительные затраты машинного времени, поскольку требует использования расчетных сеток с размерностью порядка 100000 узлов в области дренирования каждой трещины МГРП. Для решения одной прямой задачи на персональном компьютере для инженерных расчетов стандартной конфигурации требуется от десятков до сотен минут. При этом пространственная модель является фактически неприменимой для алгоритма решения обратной задачи, требующего решения большого числа прямых задач. Поэтому полученное в рамках двумерной модели решение, как наиболее точное, использовалось лишь для расчета показателей (6), (7) в качестве замены результатов трассерных исследований.

Для ускорения численного решения прямой задачи (1) – (5) предлагается использовать модель пониженной размерности – модель фильтрации в фиксированных трубках тока [19,20,24]. В отличие от известных методов линий тока или трубок тока [25-28], которые предполагают непрерывное перестроение линий тока с соответствующим переносом искомых сеточных функций между неизменной пространственной сеткой и сеткой линий тока, используемая модель опирается на предположение о неизменности структуры трубок тока в течение моделируемого процесса.

Согласно рассматриваемой упрощенной постановке задачи, форма трубок тока в области решения действительно является стационарной. О возможности пренебрежения изменчивостью геометрии трубок тока в более общей постановке задачи указано в работах [19, 29].

Понижение размерности двумерной модели происходит путем ее разложения на набор одномерных задач вдоль трубок тока переменной относительной ширины  $\omega(l)$ , где  $l$  – продольная координата. Трубки тока строятся вдоль линий тока, соответствующих полю скорости фильтрации  $\mathbf{u}(x,y)$ , найденному из решения двумерной стационарной задачи (1), (4.1). Относительная ширина  $\omega(l)$  в каждой точке  $l$  определяется из условия постоянства расхода вдоль трубки тока  $Q = |u(l)|\omega(l)h(l) = \text{const}$ .

Заметим, что для периода отбора трассера перестроение геометрии трубок тока не требуется, поскольку замена граничных условий (4.1) на (4.2) меняет лишь направление потока, сохраняя структуру линий тока и функции относительной ширины трубок тока.

Задача переноса концентрации  $c_i$  вдоль каждой трубки тока, примыкающей к трещине  $\Gamma_{f,i}$ , получается интегрированием уравнений (2) по поперечному сечению трубки тока с соответствующими начальными (3) и гра-

ничными (5.1), (5.2) условиями:

$$m \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{1}{h\omega} \frac{\partial}{\partial l} (c_i h\omega U) = 0, \quad 0 < l < \lambda; \quad (8)$$

$$t = 0, \quad 0 \leq l \leq \lambda: \quad c_i = 0; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} 0 < t \leq t_1, \quad l = 0: \quad c_i = 1; \\ t_1 < t \leq t_2, \quad l = \lambda: \quad c_i = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $U$  – скорость фильтрации вдоль трубки тока, полученная из решения  $\mathbf{u}(x, y)$  задачи (1), (4);  $\lambda$  – длина трубки тока.

Одномерная задача переноса насыщенности (8) – (10) в трубках тока решается, как и уравнение (2), методом конечных объемов по явной схеме.

Суммарный дебит скважины (6) и концентрация трассера в общем дебите (7) по модели трубок тока вычисляются по формулам

$$\tilde{q} = \sum_{i=1}^N \tilde{q}_i, \quad \tilde{q}_i = \sum_n \Delta y_n (h\omega U)_{l=0}^n, \quad (11)$$

$$\tilde{C}_i(t) = \tilde{q}_i^c(t) / \tilde{q}, \quad \tilde{q}_i^c(t) = \sum_n \Delta y_n (h\omega c_i(t) U)_{l=0}^n, \quad (12)$$

где  $n$  – индекс трубки тока;  $\Delta y_n$  – длина участка границы трещины  $\Gamma_f$ , относимая к трубке тока с индексом  $n$ .

Заметим, что упрощенная физическая постановка задачи позволяет понизить размерность исходной пространственной задачи до двумерной, а моделей трубок тока – до одномерных. Тем не менее, рассматриваемый подход может быть применен и в более общем случае неоднородного по вертикали пласта, трещин конечной проницаемости и учета иных физико-химических процессов, влияющих на неоднородность вертикального распределения трассеров в трещинах и пласте. В этом случае исходная модель остается трехмерной, а модель фильтрации в трубках тока записывается для их вертикальных двумерных сечений [20,22,30].

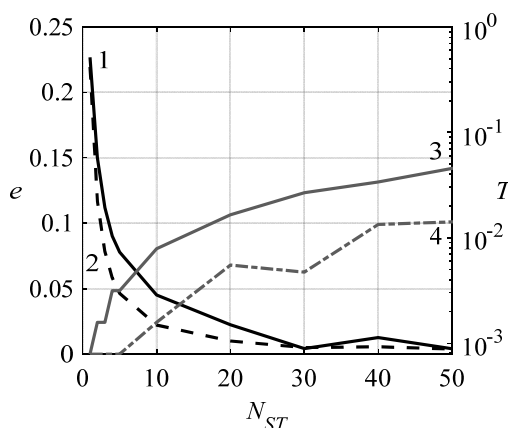
### 1.3. Оценка точности и производительности упрощенной модели.

Число трубок тока  $N_{ST}$ , примыкающих к каждой трещине МГРП, может быть задано произвольным образом и определяется, с одной стороны, из соображений экономии вычислительных ресурсов, а с другой стороны, из условия непревышения заданного уровня погрешности приближенного численного решения задачи (8), (9).

В качестве модельной задачи рассматривается приток однофазной двухкомпонентной жидкости к одной трещине со стороны эллиптического контура питания. Сравниваются величины дебита (6) и (11) и концентрации трассера (7) и (12), полученные из численного решения задачи (1)–(5) в двумерной постановке и из приближенного решения по модели трубок тока с вариацией их количества  $N_{ST}$ . Уклонения  $e_q = \rho(\tilde{q}, q)$ ,  $e_C = \rho(\tilde{C}, C)$  вычисляются в квадратичной метрике  $L_2$ :

$$\rho^2(\tilde{f}, f) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (\tilde{f}(t) - f(t))^2 dt. \quad (13)$$

На рис.2 показаны результаты оценочных расчетов для одной четверти области дренирования трещины. Видно, что при числе трубок тока  $N_{ST}$  на одной четверти трещины порядка 10 погрешность модели не превосходит 5%, а при использовании порядка 20 трубок тока погрешность расчета концентрации трассера уже не превосходит 1% [19, 29].



**Рис.2** Сходимость и быстродействие упрощенного решения по числу трубок тока: 1, 2 — погрешности по дебиту  $e_q$  и концентрации  $e_C$ ; 3, 4 — относительная длительность расчета в последовательном и параллельном режиме.

На рис.2 приведена длительность  $T$  численного решения задачи по упрощенной модели трубок тока, нормированная на длительность численного решения той же задачи по двумерной модели на расчетной сетке, обеспечивающей сходимость решения до уровня 1%. Такой уровень погрешности соответствует числу трубок тока  $N_{ST}=20$ , когда в последовательном режиме решения задач переноса в каждой трубке тока удастся достичь 50-кратного ускорения по сравнению с двумерной моделью.

Значительным преимуществом модели трубок тока является независимость решения задач (8)–(10) в разных трубках тока, что позволяет осуществлять их решение в параллельном режиме. В этом случае достигается до-



полнительное кратное ускорение численного решения в зависимости от числа ядер процессора – сравнение производительности последовательного и параллельного режимов для 6-ядерного процессора показано линиями 3, 4 на рис.2, где видно достижение 70-кратного ускорения по сравнению с двумерной моделью.

## 2. Обратная задача

**2.1. Постановка задачи.** Целью интерпретации трассерных исследований является оценка полудлин трещин  $L_i$ ,  $i=1, \dots, N$  на каждом интервале МГРП. При этом считается, что расположение  $x_i$  каждой трещины известно по условиям проведения гидроразрыва.

На практике результаты замеров величин  $q(t)$  и  $C_i(t)$  никогда не являются точными по отношению к решению математической задачи многокомпонентной фильтрации, во-первых, ввиду упрощенного модельного представления о переносе трассера в фактической системе пласт-трещина-скважина, во-вторых, ввиду наличия погрешности измерений. Поэтому для решения обратной задачи используется метод подбора приближенного квазирешения [31].

Задача сводится к нахождению таких значений полудлин трещин  $L_i^a$ ,  $i=1, \dots, N$ , которые доставляют минимум функционалу отклонения значений дебита скважины  $\tilde{q}$  (11) и концентрации трассеров  $\tilde{C}_i$  (12) в суммарном дебите, полученных из приближенного решения задачи (8)–(10), от тех же величин, полученных путем замеров:

$$R^2(\tilde{q}(L_i^a), \tilde{C}_i(L_i^a), q, C_i) = \inf_{L_{\min} < L_i < L_{\max}} R^2(\tilde{q}(L_i), \tilde{C}_i(L_i), q, C_i), \quad (14)$$

где  $L_{\min}$ ,  $L_{\max}$  – допустимые предельные значения полудлин трещин. Как указано выше, в роли замеров  $q$ ,  $C_i$  выступают значения  $q(t)$  и  $C_i(t)$ , вычисленные по (6), (7) из решения задачи (1)–(5) с наперед заданными размерами трещин  $L_i^e$ ,  $i=1, \dots, N$ .

Минимизируемый в (14) функционал имеет вид

$$R^2(\tilde{q}(L_i), \tilde{C}_i(L_i), q(L_i^e), C_i(L_i^e)) = wR_q^2(\tilde{q}, q) + (1-w)R_C^2(\tilde{C}_i, C_i), \quad (15)$$

$$R_q^2(\tilde{q}, q) = \rho^2(\tilde{q}, q), \quad R_C^2(\tilde{C}_i, C_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i^2(\tilde{C}_i, C_i), \quad R_i^2 = \rho^2(\tilde{C}_i, C_i). \quad (16)$$

Здесь  $0 < w < 1$  – весовой коэффициент, определяющий относительную значимость приближения суммарного дебита скважины по сравнению с приближением концентрации трассеров за счет подбора квазирешения  $\{L_i^a\}$ .

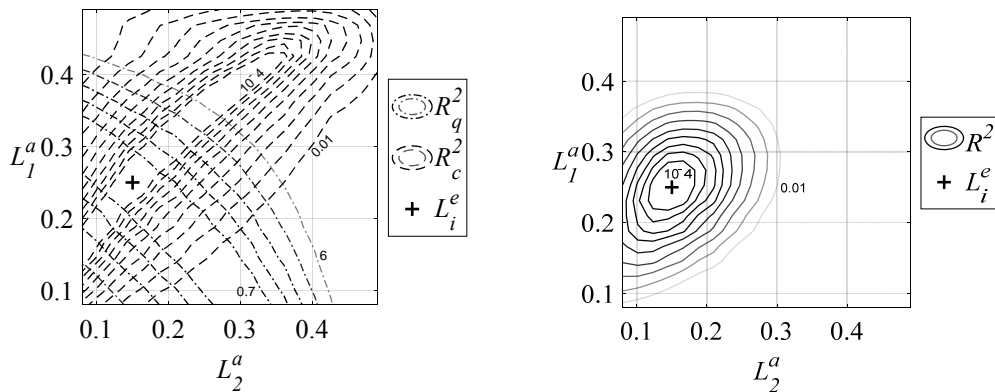
**2.2. Определение весового коэффициента.** Подбор весового коэффициента  $w$  в (15) значительно влияет на поведение функционала  $R^2$  и, следовательно, на эффективность метода решения обратной задачи (14), то есть на стремление приближенного решения  $\{L_i^a\}$  к точному  $\{L_i^e\}$  при стремлении уклонения  $R^2$  к нулю [31].

Для определения коэффициента  $w$  исследуется типичное поведение уклонений  $R_q^2$ ,  $R_C^2$  (16) и их линейной комбинации (15) на модельном примере двух трещин МГРП со следующими параметрами:

$$L_1^e = 0.25, \quad L_2^e = 0.15, \quad L_x = 1, \quad L_y = 0.5, \quad t_1 = 0.01, \quad t_2 = 0.02,$$

$$(x, y) \in D: \quad h(x, y) = 1, \quad k(x, y) = 1, \quad m(x, y) = 1.$$

На рис.3 показаны поля уклонений  $R_q^2$ ,  $R_C^2$  в плоскости приближенных значений полудлин трещин  $(L_1^a, L_2^a)$ . Характерной особенностью является их выраженное овражное поведение. Для уклонения  $R_q^2$  это связано с тем, что одно и то же значение дебита можно получить с увеличением длины одной трещины и одновременным уменьшением длины второй трещины МГРП. И наоборот, одновременное увеличение обеих длин трещин приводит к сохранению вклада притока каждой из них в суммарный дебит и, следовательно, к малым изменениям уклонения  $R_C^2$ .



**Рис.3.** Уклонения  $R_q^2$ ,  $R_C^2$  (слева) и функционал  $R^2$  с подобранным коэффициентом  $w$  (справа) с указанием точного решения для двух трещин.

Таким образом, минимизация лишь одного из уклонений  $R_q^2$  или  $R_C^2$  не позволяет однозначно определить длины трещин МГРП и подтверждает необходимость одновременных замеров как дебита скважины, так и концентрации трассеров в отбираемой жидкости.

Подбор весового коэффициента  $w$  сводится к приведению уклонений

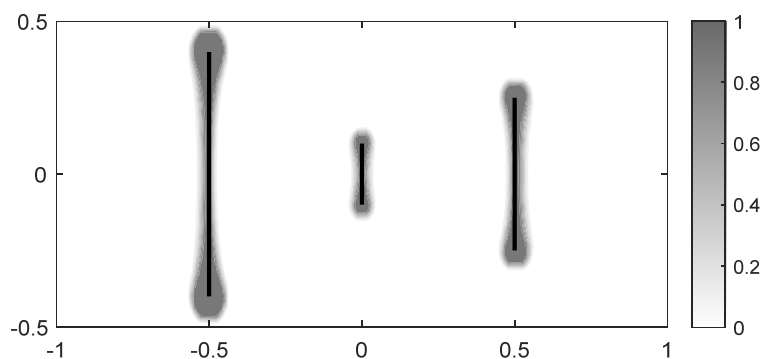
$R_q^2$  и  $R_C^2$  к единому масштабу с целью устранения овражного поведения итогового функционала  $R^2$  так, чтобы он обладал глобальным минимумом вблизи точного решения. Тогда можно утверждать, что задача (14) корректна, а компактная область  $\bigcap_{i=1,\dots,N} L_i \in [L_{\min}, L_{\max}]$  является классом корректности данной задачи [31].

Весовой коэффициент  $w$  в (15) определяется из условия минимизации степени овражности функционала  $R^2$  в области точного решения, что эквивалентно согласованию масштабов уклонений  $\bar{R}_q^2$  и  $\bar{R}_C^2$  в области дна оврагов функций  $R_q^2$  и  $R_C^2$ :

$$w \approx \bar{R}_C^2 / \bar{R}_q^2.$$

Так весовой коэффициент был задан равным  $w = 10^{-3}$ , в результате чего степень овражности итогового функционала уклонений  $R^2$  в области точного решения была сокращена в 5.2 и 14 раз по сравнению с уклонениями  $R_q^2$  и  $R_C^2$  и составила всего 8.3 (рис.3).

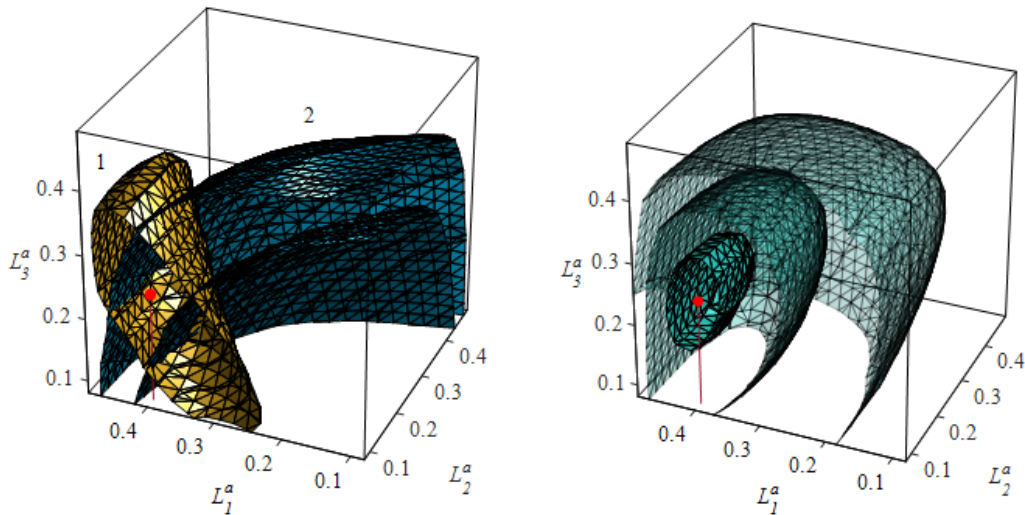
Рассмотрим далее применимость подобранного значения весового коэффициента в случае трех трещин при  $L_1^e = 0.4$ ,  $L_2^e = 0.1$ ,  $L_3^e = 0.25$ . Совмещенное поле концентрации всех трассеров в момент прекращения их закачки показано на рис.4.



**Рис.4.** Совмещенное поле концентрации всех трассеров в момент прекращения их закачки.

Из рис.5 видно, что поверхности уровня уклонений  $R_q^2$ ,  $R_C^2$  в трехмерном пространстве  $(L_1, L_2, L_3)$  снова имеют овражный характер с более сложной структурой ввиду повышения их размерности. Матрицы Гессе уклонений  $R_q^2$  и  $R_C^2$  вблизи точного решения имеют собственные значения  $\lambda_1^q = 880.2$ ,  $\lambda_2^q = -97.4$ ,  $\lambda_3^q = -16.2$ ;  $\lambda_1^C = 1.401$ ,  $\lambda_2^C = 0.276$ ,  $\lambda_3^C = -0.213$ . Максимальная степень овражности определяется поведением уклонения по дебиту и составля-

ет 54.3. Взвешивание уклонений  $R_q^2$  и  $R_C^2$  с тем же коэффициентом  $w = 10^{-3}$  уменьшает овражное поведение целевого минимизируемого уклонения  $R^2$  вблизи точного решения (рис.5). Матрица  $R^{2''}$  вблизи точного решения имеет собственные значения  $\lambda_1=1.757$ ,  $\lambda_2=0.545$ ,  $\lambda_3=-0.073$ , что соответствует степени овражности, пониженной до 24.2.



**Рис.5.** Поверхности уровня исходных уклонений (слева)  $R_q^2$  (1),  $R_C^2$  (2) и полного уклонения  $(2, 8, 23) \cdot 10^{-3}$  (справа)  $R^2$ ; точкой указано точное решение.

**2.3. Метод решения задачи.** Для решения задачи (14) использовался метод Левенберга-Марквардта в реализации, не требующей явного задания градиента минимизируемого функционала [32,33]. Данный метод зарекомендовал себя как надежный метод многопараметрической минимизации, направленный на решение задач о наименьших квадратах и способный отыскивать решение даже при далеком от него начальном приближении [34].

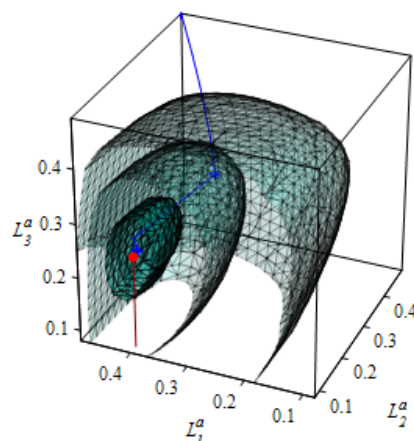
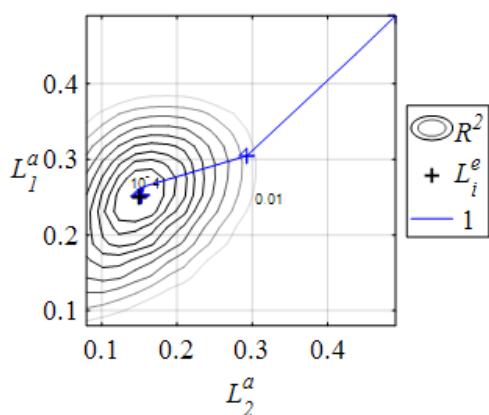
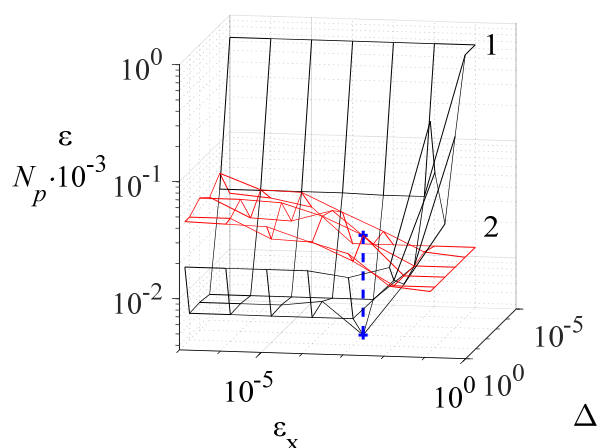
Быстродействие алгоритма решения задачи минимизации (14) определяется числом вычислений функционала  $R^2$ , поскольку для этого требуется решение прямых задач (1), (4) и (8)–(10). С целью сокращения вычислительных затрат было исследовано поведение числа решения прямых задач  $N_p$  (включая аппроксимацию производных) и погрешности получаемого решения  $\varepsilon$  при изменении основных параметров алгоритма минимизации методом Левенберга-Марквардта. Такими параметрами являются  $\varepsilon_x$  – предельное отличие аргументов для прекращения итераций;  $\Delta$  – шаг сетки аппроксимации производных  $R^2$ . Погрешность решения  $\varepsilon$  вычислялась по формуле

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2}, \quad \varepsilon_i = \frac{L_i^a - L_i^e}{L_i^e}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (17)$$

Начальное приближение для алгоритма минимизации всегда задавалось как среднее от предельных значений:  $L_i = (L_{\min} + L_{\max})/2$ ,  $i=1, \dots, N$ . На каждый итерационный шаг алгоритма требовалось  $(2N+1)$  решений прямых задач – одной в точке текущего приближения и  $2N$  для аппроксимации производных минимизируемого функционала.

В качестве предпочтительных параметров, обеспечивающих минимальную погрешность  $\varepsilon$  с приемлемым числом  $N_P$  решений прямых задач, были установлены  $\varepsilon_X = 0.001$ ,  $\Delta = 0.01$  (рис.6). При заданных параметрах задача (14) была решена для случаев двух и трех трещин (рис.7).

**Рис.6.** Эффективность алгоритма минимизации в зависимости от настроечных параметров: 1 –  $\varepsilon$ ; 2 –  $N_P$ ; пунктирная линия – оптимальное сочетание параметров  $(\varepsilon_X, \Delta)$ .



**Рис.7.** Примеры траектории (1) итераций оптимизационного алгоритма в случае двух (слева) и трех (справа) трещин МГРП (начальное приближение длин трещин задавалось максимально возможным).

### 3. Апробация метода

**3.1. Производительность.** Примененная в данной работе упрощенная модель фильтрации в фиксированных трубках тока, позволившая значительно сократить машинное время решения задачи переноса трассеров, продемонстрировала высокую степень соответствия решению, построенному в исходной двумерной постановке. Аналогично результатам п.1.3 для модельной задачи в случае одной трещины решения задачи (8)–(10) и зада-

чи (2), (3), (5) также отличались не более чем на 5-6% и в случае нескольких трещин МГРП во всех проведенных вычислительных экспериментах.

В табл.1 приведено число итераций, затраченное машинное время на решение обратной задачи и время решения прямой задачи в исходной двумерной постановке для случаев 2, 3 и 10 трещин МГРП. В расчете, что одна итерация оптимизационного алгоритма включает  $2N+1$  решение прямой задачи, там же приведены оценки длительности решения аналогичной обратной задачи с применением исходной двумерной постановки (2), (3), (5) вместо модели трубок тока (табл.1). Произведенные оценки подтверждают непригодность такого подхода, поскольку в этом случае длительность интерпретации трассерных исследований будет многократно превосходить допустимые сроки принятия решений. Следует отметить, что скорость интерпретации трассерных исследований можно повысить за счет снижения требований к уровню точности прогноза. Так, при допуске 5% погрешности вместо 1%, что соответствует максимальному уровню ошибки модели трубок тока по сравнению с исходной пространственной моделью, согласно выполненному анализу сходимости машинное время на численное решение задач снижается в среднем на один порядок. Тем не менее, даже при таком допущении ожидаемое время интерпретации трассерных исследований 10 трещин МГРП по двумерной модели составило бы порядка двух месяцев вместо минуты по модели трубок тока.

**Таблица 1.** Производительность алгоритма решения обратной задачи.

Число трещин ( $N$ )	2	3	10
Число итераций	26	35	81
Время решения прямой задачи методом трубок тока, минуты	0.32	0.37	4.42
Время решения прямой задачи в двумерной постановке, часы	2.2	2.5	168
Прогноз времени решения обратной задачи с использованием двумерной модели, сутки	2.4	3.65	567

Значения точных  $\{L_i^e\}$  и найденных приближенных  $\{L_i^a\}$  из решения обратной задачи значений полудлин трещин приведены в табл.2,3. Средняя погрешность решения  $\varepsilon$  (17) для  $N=2, 3, 10$ , пересчитанная в проценты, составила соответственно 0.3%, 4.8% и 6.2%.

**Таблица 2.** Сравнение точных и найденных полудлин трещин для  $N = 2, 3$ .

$i$	1	2		$i$	1	2	3
$L_i^e$	0.25	0.15		$L_i^e$	0.4	0.1	0.25
$L_i^a$	0.251	0.149		$L_i^a$	0.401	0.111	0.257
$\varepsilon_i$	0.005	-0.001		$\varepsilon_i$	0.003	0.113	0.029

**Таблица 3.** Сравнение точных и найденных полудлин трещин для  $N = 10$ .

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$L_i^e$	0.21	0.45	0.17	0.15	0.19	0.27	0.42	0.11	0.31	0.11
$L_i^a$	0.220	0.471	0.181	0.162	0.206	0.286	0.44	0.117	0.33	0.116
$\varepsilon_i$	0.048	0.047	0.065	0.08	0.084	0.059	0.048	0.064	0.065	0.055

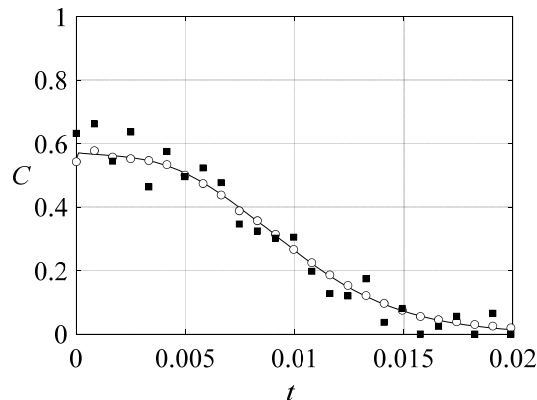
**3.2. Устойчивость.** Как было указано, метод подбора приближенного квазирешения  $\{L_i^a\}$  применяется в том числе ввиду того, что замеры величин дебита  $q(t)$  и концентрации трассеров  $C_i(t)$  всегда имеют некоторую погрешность. В связи с этим для оценки применимости алгоритма решения обратной задачи (14) необходимо исследовать его устойчивость и чувствительность по отношению к отклонениям исходных данных (замеров) от истинных величин.

Отметим, что в рамках сформулированных допущений о несжимаемости породы пласта и жидкости дебит скважины с МГРП будет являться постоянной величиной при фиксированных граничных условиях для давления. При достаточно большом количестве измерений даже со значительной погрешностью их математическое ожидание будет совпадать с истинной величиной расхода. Поэтому погрешность замеров дебита на точность решения обратной задачи в представленной постановке не оказывает сколь угодно значимого влияния.

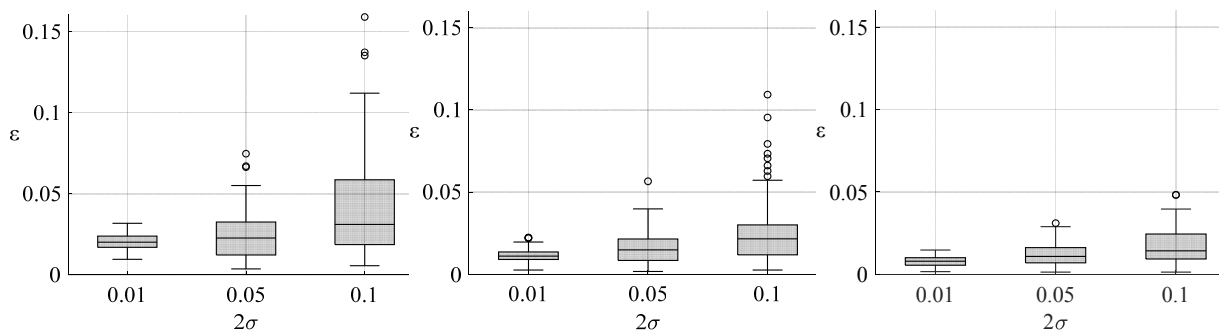
Исследуется влияние погрешности замеров концентрации трассеров в отбираемой из скважины жидкости на точность решения обратной задачи (14). Для этого вместо истинных значений  $C_i(t_j)$  в момент замера  $t_j$  в (14)-(16) используются их зашумленные значения

$$\bar{C}_i(t_j) = C_i(t_j)(1 + \xi_j), \quad j = 1, \dots, N_t, \quad (18)$$

где  $\xi_j$  – случайные величины с нормальным законом распределения  $N(0, \sigma^2)$ ;  $\sigma \in [0, 1]$  – уровень шума;  $N_t$  – число моментов времени измерения концентрации в период отбора трассеров. На рис.8 приведены примеры зашумления кривых выноса концентрации трассера для уровней шума  $2\sigma = 0.01, 0.1$ . Очевидно, что согласно (13) уклонение  $\rho^2(\bar{C}_i, C_i)$  зашумленных  $\bar{C}_i$  (18) от точных  $C_i$  замеров при большом числе измерений стремится к  $\sigma^2$ . Поэтому для оценки чувствительности изложенного алгоритма решения задачи (14) к погрешности замеров концентрации трассеров выясним зависимость между величиной его средней погрешности  $\varepsilon$  и уровнем шума  $\sigma$ . Ограниченность данной зависимости будет свидетельствовать об устойчивости алгоритма.



**Рис.8.** Исходные (линия) и зашумленные (маркеры) кривые выноса концентраций трассера при  $2\sigma = 0.01$  (●),  $2\sigma = 0.1$  (■).



**Рис.9.** Диаграммы средней ошибки решения обратной задачи при разном уровне шума  $\sigma$  в замерах концентрации при числе измерений  $N_t = 25, 50, 100$  (слева направо).

На рис.9 приведены статистические диаграммы зависимости  $\varepsilon(\sigma)$  в случае  $N=2$  трещин при разном количестве измерений  $N_t=25, 50, 100$ , равномерно распределенных на интервале времени отбора трассеров. Статистические оценки были получены путем выполнения серии вычислительных экспериментов для различных реализаций случайных величин  $\{\xi_j\}$ ,  $j=1, \dots, N_t$ . Средняя величина погрешности  $\varepsilon$  решения обратной задачи независимо от числа измерений  $N_t$  незначительно возрастает и не превосходит уровня 3% даже при  $2\sigma=0.1$ . При этом число измерений  $N_t$  оказывает критическое влияние на дисперсию средней ошибки  $\varepsilon$ . Так при том же уровне шума  $2\sigma=0.1$  сокращение числа замеров от 100 до 25 приводит к росту верхнего квартиля ошибки  $\varepsilon$  с 2.5% до 6%. Тем не менее зависимость  $\varepsilon(\sigma)$  является ограниченной, что говорит об устойчивости алгоритма решения обратной задачи к возмущениям исходных данных – замеров концентрации трассеров.

## Заключение

Дана постановка и экономичный алгоритм решения обратной задачи определения параметров трещин многозонного гидроразрыва пласта на го-



горизонтальных скважинах по результатам трассерных исследований длин. Рассмотрен случай плоских трещин бесконечной проницаемости, ортогональных и симметричных относительно ствола скважины, вскрывающих пласт на всю высоту, когда уточняются лишь их длины. Ввиду невозможности получения достаточно точных полевых данных о фактических размерах трещин гидроразрыва, в качестве истинных данных использовались результаты синтетической имитационной модели о распределении и последующем отборе трассеров вблизи трещин заданных размеров.

Для решения прямых задач выполняется численное моделирование многокомпонентной однофазной фильтрации, что соответствует случаю нагнетания нефтерастворимых трассеров в нефтенасыщенный пласт. Рассмотрен случай однородного пласта, когда задача сводится к двумерной постановке.

Показано, что даже в двумерной постановке для достижения уровня погрешности расчета дебита и концентраций трассеров в отбираемой жидкости порядка 1% необходимо покрывать область дренирования каждой трещины гидроразрыва расчетной сеткой с локальным сгущением размерностью порядка  $10^5$  узлов. При наличии на одной скважине 1-2 десятков стадий гидроразрыва это приводит к затратам до десятков часов на численное моделирование закачки и отбора трассеров только для одного варианта длин трещин. Таким образом, традиционные модели оказываются непригодны для решения обратной задачи интерпретации трассерных исследований, требующей решения прямых задач для множества вариантов сочетаний длин трещин.

Для сокращения вычислительных затрат пространственная задача фильтрации раскладывается на набор задач пониженной размерности вдоль фиксированных трубок тока. В рамках рассмотренной двумерной задачи трубки тока являются одномерными. Дополнительное ускорение вычислений обеспечивается возможностью параллельного решения задач переноса трассера на отдельных трубках тока. При том же уровне погрешности численного решения с помощью модели трубок тока достигнуто сокращение машинного времени счета на два порядка.

Исследовано поведение целевого минимизируемого функционала и указан способ его нормировки, кратно снижающий степень овражности для сокращения числа итераций при поиске его минимума. Реализован устойчивый алгоритм решения обратной задачи методом Левенберга – Марквардта и определены его параметры, обеспечивающие малое число итераций при высокой точности решения. Средняя погрешность определения длин трещин в условиях точных исходных данных составила 0.3%, 4.8% и 6.2% для 2, 3 и 10 трещин гидроразрыва соответственно.

Выполнена оценка чувствительности квазирешения задачи к погрешности измерения концентрации трассеров в отбираемой скважиной жидкости. Средняя величина погрешности незначительно возрастает и не превосходит уровня 3 % при нормальном распределении шума замеров с удвоенным средним квадратическим отклонением на уровне 10 %. При этом число замеров оказывает значительное влияние на дисперсию средней ошибки определения длин трещин: при том же уровне шума сокращение числа замеров от 100 до 25 приводит к кратному росту верхнего квартиля ошибки от 2.5% до 6%.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J.L. Gidley, S.A. Holditch, D.E. Nierode, R.W. Veatch. Recent Advances in Hydraulic Fracturing // SPE, 1989, 318 p.
2. E. Ozkan, M. Brown, R. Raghavan, H. Kazemi. Comparison of fractured horizontal-well performance in conventional and unconventional reservoirs // SPE Western Regional Meeting, 2009, p.345-360.
3. Y. Wei, M.J. Economides. Transverse hydraulic fractures from a horizontal well. Proceedings // SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 2005 p.25-36.
4. Р.М. Батлер. Горизонтальные скважины для добычи нефти, газа и битумов. – М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010, 536 с.;  
R.M. Batler. Gorizontálne skvazhiny dlia dobychi nefti, gaza i bitumov. – M.: Izhevsk: Institut kompiuternykh issledovanii, NITS «Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika», 2010, 536 s.
5. B.R. Meyer, L.W. Bazan, R. H. Jacot, M.G. Lattibeaudiere. Optimization of multiple transverse hydraulic fractures in horizontal wellbores // SPE Unconventional Gas Conference, 2010, №131732, 37 p.
6. C.J. Gardien, G.A. Pope, A.D. Hill. Hydraulic fracture diagnosis using chemical tracers // SPE Annual Technical Conference and Exhibition, 1996, p.925-932.
7. W. Tian, X. Wu, T. Shen, S. Kalra. Estimation of hydraulic fracture volume utilizing partitioning chemical tracer in shale gas formation // Journal of Natural Gas Science and Engineering, 2016, v.33, p.1069-1077.
8. G.E. King, D. Leonard. Utilizing fluid and proppant tracer results to analyze multi-fractured well flow back in shales // SPE Hydraulic Fracturing Tech. Conf., 2011, p.146-164.
9. J. Spencer, D. Bucior, R. Catlett, E. Lolon. Evaluation of horizontal wells in the Eagle Ford using oil-based chemical tracer technology to optimize stimulation design // SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference, 2013, №163846, 9 p.
10. A.B. Mazo, R.I. Sattarov, M.R. Khamidullin, K.A. Potashev, T.V. Trifonof. Interpretation of Indicator Studies of Multistage Fracturing // SPE Russian Petroleum Technology Conference, 2017, №187762–MS, 23 p.
11. P.C. Robinson. Connectivity, flow and transport in network models of fractured media – Oxford: Oxford University, Theor. Phys. Div., 1984, 155 p.
12. N. Frih, V. Martin, J.E. Roberts, A. Saâda. Modeling fractures as interfaces with non-matching grids // Computer Geosciences, 2012, v.16, p.1043-1060.

13. J.D. Hyman, S. Karra, N. Makedonska, C.W. Gabel, S.L. Painter, H.S. Viswanathan. dfnWorks: A discrete Fracture network framework for modeling subsurface flow and transport // Computers & Geoscience, 2015, v.84, p.10-19.
14. Ф.В. Григорьев. Моделирование течения жидкости в трещиновато-пористой среде на основе модели дискретных сетей трещин и матрицы // Математическое моделирование, 2024, т.36, №2, с.113-128;  
F.V. Grigorev. Numerical Modeling of a Groundwater Flow in Fractured Porous Media Based on the DFM Approach // MM & Computer Simul., 2024, v.16, №4, p.598-608.
15. Т.Ф. Киреев, Г.Т. Булгакова. Процедура апскейлинга для моделирования скважин с трещинами гидроразрыва пласта // Матем. моделирование, 2019, т.31, №3, с.97-108; англ. пер.: T.F. Kireev, G.T. Bulgakova. Near-Well Upscaling to Simulate Wells with Hydraulic Fractures // Math. Models and Computer Simulations, 2019, v.11, №6, p.877-883.
16. А.В. Блонский, Е.Б. Савенков. Моделирование двухфазных течений в трещиноватой среде с кавернами // Математическое моделирование, 2019, т.31, №2, с.78-94; англ. пер.: A.V. Blonskii, E.B. Savenkov. Two-Phase Modeling within Fractured Vuggy Reservoir // Mathematical Models and Computer Simulations, 2019, v.11, №5, p.778-788.
17. Р.Д. Каневская. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. – М.: ООО "Недра-Бизнес-центр", 1999, 212 с.;  
R.D. Kanevskaya. Matematicheskoe modelirovanie razrabotki mestorozhdenii nefiti i gaza s primeneniem gidravlichesкого razryva plasta. – М.: ООО "Nedra-Biznestsentr", 1999, 212 s.
18. А.Б. Мазо, М.Р. Хамидуллин. Явно-неявные алгоритмы ускорения расчета двухфазного притока к горизонтальной скважине с многостадийным гидроразрывом пласта // Вычислительные методы и программирование, 2017, т.18, №3, с.204-213;  
A.B. Mazo, M.R. Khamidullin. Iavno-neiavnye algoritmy uskoreniia rascheta dvukhfaznogo pritoka k gorizontальной skvazhine s mnogostadiinym gidrorazryvom plasta // Vychislitelnye metody i programmirovaniye, 2017, t.18, №3, s.204-213.
19. А.Б. Мазо, М.Р. Хамидуллин, К.А. Поташев, А.А. Ураимов. Mathematical Model of Water- and Oil-Soluble Tracers Transfer in Studying Multistage Hydraulic Fracturing // Fluid Dynamics, 2024, v.59, №3, p.427-443.
20. А.Б. Мазо, К.А. Поташев, В.В. Баушин, Д.В. Булыгин. Расчет полимерного заводнения нефтяного пласта по модели фильтрации с фиксированной трубкой тока // Георесурсы, 2017, т.19, №1, с.15-20;  
A.B. Mazo, K.A. Potashev, V.V. Baushin, D.V. Bulygin. Raschet polimernogo zavodneniia neftyanogo plasta po modeli filtratsii s fiksirovannoi trubkoi toka // Georesursy, 2017, t.19, №1, s.15-20.
21. К.А. Поташев, А.Б. Мазо, М.В. Мухина, А.А. Ураимов, Д.В. Маклаков, М.Р. Хамидуллин. Моделирование притока пластового флюида к трещинам бесконечной проницаемости многозонного гидроразрыва пласта с помощью трубок тока // Ученые записки Казанского ун-ва. Серия Физико-матем. науки, 2022, т.164, №1, с.101-121;  
K.A. Potashev, A.B. Mazo, M.V. Mukhina, A.A. Uraimov, D.V. Maklakov, M.R. Khamidullin. Modelirovanie pritoka plastovogo fluida k treshchinam beskonechnoi pronitsaemosti mnogozonnogo gidrorazryva plasta s pomoshchiu trubok toka // Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki, 2022, t.164, №1, s.101-121.
22. К.А. Поташев, В.В. Баушин, А.Б. Мазо, Р.Г. Рамазанов, В.В. Шелепов. Проектирова-

- ние положения изолирующего материала в обводненном слое суперколлектора для пятиточечной схемы заводнения нефтяного пласта // Вестник Московского университета. Серия 4. Геология, 2023, №6, с.144-155;
- K.A. Potashev, V.V. Baushin, A.B. Mazo, R.G. Ramazanov, V.V. Shelepov.* Proektirovanie polozheniia izoliruiushchego materiala v obvodnennom sloe superkollektora dlia piatitochечноi skhemy zavodneniia neftianogo plasta // Vestnik Moskovskogo universiteta. Seria 4. Geologia, 2023, №6, s.144-155.
23. *Г.И. Баренблатт, В.М. Ентов, В.М. Рыжик.* Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984, 212 с.;
- G.I. Barenblatt, V.M. Entov, V.M. Ryzhik.* Dvizhenie zhidkosti i gazov v prirodnykh plastakh. – М.: Nedra, 1984, 212 s.
24. *К.А. Поташев, А.Б. Мазо, Р.Г. Рамазанов, Д.В. Булыгин.* Анализ и проектирование разработки участка нефтяного пласта с использованием модели фиксированной трубки тока // Нефть. Газ. Новации, 2016, т.4, №187, с.32-40;
- K.A. Potashev, A.B. Mazo, R.G. Ramazanov, D.V. Bulygin.* Analiz i proektirovanie razrabotki uchastka neftianogo plasta s ispolzovaniem modeli fiksirovannoi trubki toka // Neft. Gaz. Novatsii., 2016, t.4, №187, s.32-40.
25. *M.R. Thiele.* Modeling Multiphase Flow in Heterogeneous Media Using Streamtubes. - PhD dissertation. Stanford University, Dept. of petroleum Engineering, 1994, 217 p.
26. *R.P. Batycky.* A Three Dimensional Two Phase Field Scale Streamline Simulation. – PhD dissertation. Stanford University, 1997, 177 p.
27. *A.A. Al-Najem, S. Siddiqui, M. Soliman, B. Yuen.* Streamline Simulation Technology: Evolution and Recent Trends // SPE Saudi Arabia Section Technical Symposium and Exhibition, 2012, №160894, 22 p.
28. *B.T Mallison, M.G. Gerritsen, S.F. Matringe.* Improved Mappings for Streamline-Based Simulation // SPE Journal, 2006, v.11, p.294-302.
29. *M.V. Mukhina, A.A. Uraimov, K.A. Potashev, A.B. Mazo.* High-speed modeling of reservoir fluid flow near the multistage hydraulic fractures on horizontal well // AIP Conference Proceedings, 2024, v. 3119(1), p.030001-1 – 030001-8.
30. *D.R. Salimyanova, R.A. Potashev.* Numerical simulation of high-permeability water-flooded sublayer water shut-off under uncertainty of its location in a petroleum reservoir // SOCAR Proceedings, 2023, v.4, p.092-098.
31. *А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986, 288 с.;
- A.N. Tikhonov, V.Ia. Arsenin.* Metody resheniia nekorrektnykh zadach. – М.: Nauka, 1986, 288 s.
32. *K. Levenberg.* A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares // The Quarterly of Applied Mathematics, 1944, №2, p.164-168.
33. *D.W. Marquardt.* An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1963, p.431-441.
34. *R. Fletcher.* Practical methods of optimization. – М.: NY: John Wiley & Sons, 1987, 436 p.

Поступила в редакцию 05.08.24

После доработки 09.10.24

Принята к публикации 14.10.24