

Лекция 6. Метод крупных частиц.

1 Система уравнений газовой динамики

Будем рассматривать систему уравнений газовой динамики в следующем развернутом виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho vu}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} + \frac{\partial \rho vw}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho wu}{\partial x} + \frac{\partial \rho wv}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2 + p)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial(\rho e + p)u}{\partial x} + \frac{\partial(\rho e + p)v}{\partial y} + \frac{\partial(\rho e + p)w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где ρ - плотность; u, v, w - составляющие скорости по направлениям x, y, z ; p - давление; e - удельная энергия $e = \epsilon + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$.

Будем рассматривать одномерный вариант данной задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho e u}{\partial x} + \frac{\partial p u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

где ρ - плотность; u - скорость; $p = (\gamma - 1)\rho\epsilon$ - давление; e - удельная энергия $e = \epsilon + \frac{u^2}{2}$.

2 Метод крупных частиц

Метод крупных частиц расчета движения жидкости и газа выполняется в три этапа. На первом («эйлеровом») этапе движение газа рассматривается без учета переноса массы, количества движения и энергии. На втором («лагранжево») этапе определяется перенос массы газа. На третьем (заключительном) этапе производится пересчет параметров с учетом перетекания массы, количества движения и энергии.

Далее подробно рассмотрим этапы методы крупных частиц на примере одномерного уравнения движения газа.

3 Эйлеров этап

Система уравнений (2) для эйлерова этапа преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial p u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Перепишем систему еще раз с учетом постоянства ρ :

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial p u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Разобьем расчетную область на равное количество расчетных ячеек с линейным размером h и составим разностную схему, обозначая нижним индексом i газодинамические величины, отнесенные к

центру i -ой ячейки, а индексом $i + \frac{1}{2}$ - газодинамические величины на границе между ячейками i и $(i + 1)$. Верхним индексом будем обозначать слой по времени.

$$\begin{cases} \rho_i^n \frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}}^n - p_{i-\frac{1}{2}}^n}{h} = 0 \\ \rho_i^n \frac{\tilde{e}_i^{n+1} - e_i^n}{\tau} + \frac{p_{i+\frac{1}{2}}^n u_{i+\frac{1}{2}}^n - p_{i-\frac{1}{2}}^n u_{i-\frac{1}{2}}^n}{h} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Из данных уравнений выражаются промежуточные значения скорости и внутренней энергии для ячейки:

$$\tilde{u}_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\tau}{h\rho_i^n} (p_{i+\frac{1}{2}}^n - p_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (6)$$

$$\tilde{e}_i^{n+1} = e_i^n - \frac{\tau}{h\rho_i^n} (p_{i+\frac{1}{2}}^n u_{i+\frac{1}{2}}^n - p_{i-\frac{1}{2}}^n u_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (7)$$

При этом газодинамические параметры на границе между ячейками вычисляются как среднее арифметическое параметров соответствующих соседних ячеек

$$p_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{p_i^n + p_{i+1}^n}{2} \quad (8)$$

$$p_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{p_i^n + p_{i-1}^n}{2} \quad (9)$$

$$u_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{u_i^n + u_{i+1}^n}{2} \quad (10)$$

$$u_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{u_i^n + u_{i-1}^n}{2} \quad (11)$$

После расчета промежуточных величин \tilde{u}_i^{n+1} и \tilde{e}_i^{n+1} мы можем точно так же вычислять значения данных величин на левой и правой границе ячеек:

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{\tilde{u}_i^{n+1} + \tilde{u}_{i+1}^{n+1}}{2} \quad (12)$$

$$\tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{\tilde{u}_i^{n+1} + \tilde{u}_{i-1}^{n+1}}{2} \quad (13)$$

$$\tilde{e}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{\tilde{e}_i^{n+1} + \tilde{e}_{i+1}^{n+1}}{2} \quad (14)$$

$$\tilde{e}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} = \frac{\tilde{e}_i^{n+1} + \tilde{e}_{i-1}^{n+1}}{2} \quad (15)$$

После вычисления промежуточных значений \tilde{u}_i^{n+1} и \tilde{e}_i^{n+1} эйлеров этап считается завершенным.

4 Лагранжев этап

На лагранжевом этапе нужно вычислить массу газа, которая проходит через границы ячейки. Так как мы рассматриваем одномерный случай, то требуется вычислить потоки массы через правую и левую границу. При этом площадь границы у всех ячеек считаем постоянной, равной S .

$$\Delta M_{i+\frac{1}{2}}^n = \rho_i^n S \tau \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} > 0 \quad (16)$$

$$\Delta M_{i+\frac{1}{2}}^n = \rho_{i+1}^n S \tau \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} < 0 \quad (17)$$

Смысл данных формул в том, что если на правой границе ячейки скорость движения газа положительна, то газ с плотностью ρ_i^n перетекает из текущей ячейки в правую ячейку. Если же на правой границе ячейки скорость движения газа отрицательна, то газ с плотностью ρ_{i+1}^n перетекает из ячейки справа в текущую ячейку.

Аналогично рассматриваем левую границу ячейки.

$$\Delta M_{i-\frac{1}{2}}^n = \rho_{i-1}^n S \tau \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} > 0 \quad (18)$$

$$\Delta M_{i-\frac{1}{2}}^n = \rho_i^n S \tau \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} < 0 \quad (19)$$

Аналогично рассматриваются потоки количества движения и количества энергии через границы.

$$\Delta(Mu)_{i+\frac{1}{2}}^n = \rho_i^n \tilde{u}_i^{n+1} S \tau \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} > 0 \quad (20)$$

$$\Delta(Mu)_{i+\frac{1}{2}}^n = \rho_{i+1}^n \tilde{u}_{i+1}^{n+1} S \tau \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} < 0 \quad (21)$$

$$\Delta(Mu)_{i-\frac{1}{2}}^n = \rho_{i-1}^n \tilde{u}_{i-1}^{n+1} S \tau \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} > 0 \quad (22)$$

$$\Delta(Mu)_{i-\frac{1}{2}}^n = \rho_i^n S \tilde{u}_i^{n+1} \tau \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} < 0 \quad (23)$$

$$\Delta(Me)_{i+\frac{1}{2}}^n = \rho_i^n \tilde{e}_i^{n+1} S \tau \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} > 0 \quad (24)$$

$$\Delta(Me)_{i+\frac{1}{2}}^n = \rho_{i+1}^n \tilde{e}_{i+1}^{n+1} S \tau \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} < 0 \quad (25)$$

$$\Delta(Me)_{i-\frac{1}{2}}^n = \rho_{i-1}^n \tilde{e}_{i-1}^{n+1} S \tau \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} > 0 \quad (26)$$

$$\Delta(Me)_{i-\frac{1}{2}}^n = \rho_i^n S \tilde{e}_i^{n+1} \tau \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}, \quad \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} < 0 \quad (27)$$

После вычисления потоков масс, а также количества движения и количества энергии через все границы всех ячеек лагранжев этап считается завершенным.

5 Заключительный этап

На третьем этапе происходит пересчет новых значений газодинамических параметров из соотношений для нового значения массы, количества движения и энергии в ячейке.

$$M_i^{n+1} = M_i^n - \Delta M_{i+\frac{1}{2}}^n + \Delta M_{i-\frac{1}{2}}^n \quad (28)$$

$$M_i^{n+1} u_i^{n+1} = M_i^n u_i^n - \Delta(Mu)_{i+\frac{1}{2}}^n + \Delta(Mu)_{i-\frac{1}{2}}^n \quad (29)$$

$$M_i^{n+1} e_i^{n+1} = M_i^n e_i^n - \Delta(Me)_{i+\frac{1}{2}}^n + \Delta(Me)_{i-\frac{1}{2}}^n \quad (30)$$

Из данных уравнений выражаются новые значения газодинамических величин в ячейке

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\Delta M_{i-\frac{1}{2}}^n - \Delta M_{i+\frac{1}{2}}^n}{Sh} \quad (31)$$

$$u_i^{n+1} = \frac{\rho_i^n}{\rho_i^{n+1}} u_i^n + \frac{\Delta(Mu)_{i-\frac{1}{2}}^n - \Delta(Mu)_{i+\frac{1}{2}}^n}{\rho_i^{n+1} Sh} \quad (32)$$

$$e_i^{n+1} = \frac{\rho_i^n}{\rho_i^{n+1}} e_i^n + \frac{\Delta(Me)_{i-\frac{1}{2}}^n - \Delta(Me)_{i+\frac{1}{2}}^n}{\rho_i^{n+1} Sh} \quad (33)$$