Лекция 2. Основные понятия теории разностных схем.

1 Основные понятия

Пусть дана задача

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x),\ x \in G \\ lu(x) = \mu(x),\ x \in \Gamma,\ \overline{G} = G + \Gamma \end{cases} \tag{1}$$

где L - дифференциальный оператор, l - оператор дополнительных условий (граничных и начальных).

Если поставленную задачу нельзя решить аналитически, то она решается приближенно на некотором множестве точек внутри G. Данное множество точек называется сеткой, а сами точки называются ее узлами.

Например можно на отрезке $[0, X]$ можно ввести равномерную сетку с шагом h следующим образом:

$$\overline{\omega_h} = \{x_k = hk,\ k = 0, 1, \ldots, N,\ hN = X\} \tag{2}$$

Определение 1.1. *Функции, заданные на сетке, называют сеточными функциями:* $y_h = y_h(x_k),\ x_k \in \overline{\omega_h}$

Для сравнения сеточных функций между собой на близость используют сеточные нормы, например, сеточный аналог равномерной нормы:

$$||y_h||_C = \max_{x \in \overline{\omega_h}} |y_h(x)| \tag{3}$$

Для того, чтобы перейти к численному решению уравнения необходимо выполнить разностную аппроксимацию дифференциального оператора на сетке. Это выполняется с помощью шаблона разностного оператора.

Определение 1.2. *Разностным шаблоном* $(\Xi(x,h))$ *называется множество узлов сетки* $\overline{\omega_h}$*, на котором строится разностный оператор.*

$$L_h u_h(x) = \sum_{\xi \in \Xi(x,h)} A_h(x,\xi) u_h(\xi) \tag{4}$$

где $u_h(\xi)$ *- значение функции в узле шаблона,* $A_h(x,\xi)$ *- коэффициенты в линейной комбинации.*

Определение 1.3. *Величина* $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$ *называется погрешностью разностной аппроксимации в точке* x*.*

Определение 1.4. *Говорят, что разностный оператор* L_h *аппроксимирует дифференциальный оператор* L *с порядком* $m > 0$ *в точке* x*, если имеет место равенство*

$$\phi(x) = O(|h|^m) \tag{5}$$

Запишем еще раз исходну задачу

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x),\ x \in G \\ lu(x) = \mu(x),\ x \in \Gamma \end{cases} \tag{6}$$

Перейдем от данной задачи к поиску соответствующей сеточной функции

$$\begin{cases} L_h y_h(x) = \phi(x),\ x \in \omega_h \\ l_h y_h(x) = \chi(x),\ x \in \gamma_h \end{cases} \tag{7}$$

Определение 1.5. *Семейство уравнений относительно значений функции y_h в узлах сетки, зависящее от параметра h, называется разностной схемой.*

Определение 1.6. *Погрешностью разностной схемы называется величина $z_h = y_h - u_h$ Тогда*

$$\begin{cases} L_h z_h = \phi_h - L_h u_h = (\phi_h - f) - (L_h u_h - (Lu)_h) = \psi_h, \ x \in \omega_h \\ l_h z_h = \chi_h - l_h u_h = (\chi_h - \mu) - (l_h u_h - (lu)_h) = \nu_h, \ x \in \gamma_h \end{cases} \tag{8}$$

Определение 1.7. *Говорят, что разностная схема аппроксимирует исходную задачу, если*

$$\lim_{h \to 0} ||\psi_h|| = 0, \ \lim_{h \to 0} ||\nu_h|| = 0 \tag{9}$$

Говорят, что разностная схема имеет m-й порядок аппроксимации если

$$||\psi_h|| = O(|h|^m), \ ||\nu_h|| = O(|h|^m) \tag{10}$$

Говорят, что разностная схема сходится, если

$$\lim_{h \to 0} ||y_h - u_h|| = 0 \tag{11}$$

Говорят, что разностная схема имеет m-й порядок сходимости, если

$$||y_h - u_h|| = O(|h|^m) \tag{12}$$

Определение 1.8. *Разностная задача называется поставленной корректно, если для всех достаточно малых $|h| \le h_0$ система разностных уравнений однозначно разрешима для любых входных данных, а также решения y_h непрерывно зависят от входных данных ϕ_h, χ_h равномерно по h (является устойчивой).*

Устойчивость разностной схемы означает, что для всех достаточно малых $|h| \le h_0$ найдутся такие $M_1 > 0$, $M_2 > 0$, не зависящие ни от h, ни от входных данных, что

$$||y_h|| \le M_1 ||\phi_h|| + M_2 ||\chi_h|| \tag{13}$$

В случае линейных операторов L_h, l_h из устойчивости схемы следует, что

$$||z_h|| = ||y_h - u_h|| \le M_1 ||\psi_h|| + M_2 ||\nu_h|| \tag{14}$$

Другими словами, если линейная схема устойчива и аппроксимирует исходную задачу, то она сходится при этом порядок сходимости определяется порядком аппроксимации.

2 Разностная аппроксимация простейших дифференциальных операторов

Простейшим дифференциальным оператором является оператор взятия первой производной $Lu = \frac{du}{dx}$. Во внутренней точке равномерной сетки с шагом h аппроксимацию данного оператора можно выполнить следующими способами

$$u_x = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \tag{15}$$

$$u_{\overline{x}} = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} \tag{16}$$

$$u_{\mathring{x}} = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \tag{17}$$

Применяя формулу Тейлора, можно получить погрешности аппроксимации для данных операторов

$$u'(x) - u_x = O(h), \ u'(x) - u_{\overline{x}} = O(h), \ u'(x) - u_{\mathring{x}} = O(h^2) \tag{18}$$

Таким образом, из приведенных операторов только центральная производная аппроксимирует производную со вторым порядком. Однако при аппроксимации граничных условий взятие центральной производной оказывается недоступным. В этом случае используется следующая схема. Первая производная ищется в общем виде:

$$L_h = au(x) + bu(x+h) + cu(x+2h) \tag{19}$$

Для нахождения коэффициентов a, b, c необходимо разложить данные значения в ряд Тейлора

$$L_h = au(x) + b\left(u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3)\right) + c\left(u(x) + 2hu'(x) + 2h^2u''(x) + O(h^3)\right) \tag{20}$$

откуда для достижения условия $L_h = u'(x) + O(h^3)$ коэффициенты должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + 2c = \frac{1}{h} \\ \frac{b}{2} + 2c = 0 \end{cases} \tag{21}$$

что приводит к следующей аппроксимации со вторым порядком

$$L_h = \frac{3u(x) - 4u(x+h) + u(x+2h)}{2h} \tag{22}$$

Для дифференциального оператора, представляющего собой взятие второй производной $Lu = \frac{d^u}{dx^2}$ разностная аппроксимация со вторым порядком выглядит следующим образом

$$L_h u = u_{\overline{x}x} = \frac{u_x(x) - u_{\overline{x}}(x)}{h} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \tag{23}$$

3 Построение разностной схемы на примере линейного уравнения переноса

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t) \tag{24}$$

Рассмотрим только два шаблона аппроксимации для данной схемы. Сначала рассмотрим явную разностную схему, шаблон которой представлен на рис. 1.

$$\frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau} + c\frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{h} = \phi(x,t) \tag{25}$$

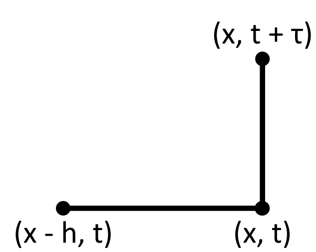

Рис. 1: Шаблон явной схемы.

Данная разностная схема затрагивает два слоя по времени (n и $n+1$), причем со слоя с номером $n+1$ в шаблон входит только одна точка, что позволяет выразить значение $u(x, t+\tau)$ через остальные уже известные элемента шаблона. Такие разностные схемы называют явными.

Запишем разностную схему в виде сеточного уравнения (считаем, что i - нумерация точек по пространству, n - нумерация слоев по времени).

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + c\frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} = \phi_i^n \tag{26}$$

$$y_i^{n+1} = \tau\phi_i^n + \left(1 - \frac{c\tau}{h}\right) y_i^n + \frac{c\tau}{h} y_{i-1}^n \tag{27}$$

Данная разностная схема аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h)$, а из выражения y_i^{n+1} через значения с предыдущего слоя видно, что для устойчивости схемы необходимо выполнение условия $|\frac{c\tau}{h}| < 1$.

Неявной разностной схеме соответствует шаблон, представленный на рис. 22.

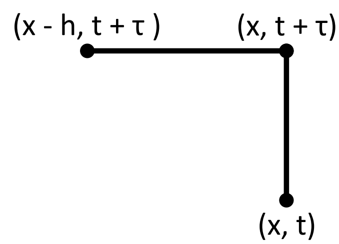

Рис. 2: Шаблон неявной схемы.

Запишем неявную схему

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} + c\frac{y_i^{n+1} - y_{i-1}^{n+1}}{h} = \phi_i^n \tag{28}$$

Данная схема аппроксимирует исходную задачу с порядком $O(\tau + h)$ и является устойчивой.