

Лекция 3. Численное решение уравнений параболического типа.

В качестве примера уравнения параболического типа рассматривается одномерное уравнение теплопроводности, которое записывается в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in (0, X), \quad t \in (0, T] \quad (1)$$

Для численного решения данного уравнения введем равномерную сетку по пространству и по времени:

$$\overline{\omega_h} = \{x_i = ih; i = 0, 1, \dots, N; Nh = X\} \quad (2)$$

$$\overline{\omega_\tau} = \{t_n = n\tau; n = 0, 1, \dots, M; M\tau = T\} \quad (3)$$

$$\overline{\omega_{h\tau}} = \overline{\omega_h} \times \overline{\omega_\tau} \quad (4)$$

Необходимо выполнить разностную аппроксимацию оператора $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

1 Явная разностная схема

Явной разностной схеме соответствует шаблон, представленный на рис. ??.

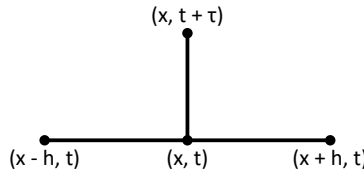


Рис. 1: Шаблон явной схемы.

Соответствующий разностный оператор имеет вид:

$$L_{h\tau}^0 u = u_t - u_{\bar{x}x} = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2} \quad (5)$$

2 Неявная разностная схема

Неявной разностной схеме соответствует шаблон, представленный на рис. ??.

Соответствующий разностный оператор имеет вид:

$$L_{h\tau}^1 u = u_t - \hat{u}_{\bar{x}x} = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x + h, t + \tau) - 2u(x, t + \tau) + u(x - h, t + \tau)}{h^2} \quad (6)$$

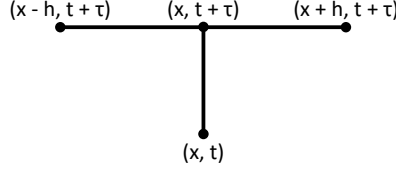


Рис. 2: Шаблон неявной схемы.

3 Оценка погрешности аппроксимации явной и неявной разностных схем

Для оценки погрешности аппроксимации явной и неявной разностных схем рассмотрим данные оценки отдельно для операторов u_t , $u_{\bar{x}x}$, $\hat{u}_{\bar{x}x}$.

$$u_t = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + O(\tau) = \frac{\partial u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial t} + O(\tau^2) = \frac{\partial u(x, t + \tau)}{\partial t} + O(\tau) \quad (7)$$

$$u_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(h^2) = \frac{\partial^2 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2} + O(\tau + h^2) = \frac{\partial^2 u(x, t + \tau)}{\partial x^2} + O(\tau + h^2) \quad (8)$$

$$\hat{u}_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + O(\tau + h^2) = \frac{\partial^2 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2} + O(\tau + h^2) = \frac{\partial^2 u(x, t + \tau)}{\partial x^2} + O(h^2) \quad (9)$$

Из данных соотношений следует, что и $L_{h\tau}^0$, и $L_{h\tau}^1$ аппроксимируют дифференциальный оператор Lu с погрешностью $O(\tau + h^2)$ в точках (x, t) , $(x, t + \frac{\tau}{2})$, $(x, t + \tau)$.

4 Симметричная разностная схема

Для построения разностной схемы более высокого порядка аппроксимации по времени используется разностный оператор с весами

$$L_{h\tau}^\sigma u = \sigma L_{h\tau}^1 u + (1 - \sigma) L_{h\tau}^0 u = u_t - (\sigma \hat{u}_{\bar{x}x} + (1 - \sigma) u_{\bar{x}x}) \quad (10)$$

Шаблон данной разностной схемы представлен на рис. ??.

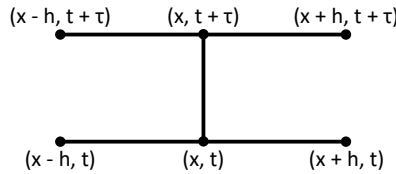


Рис. 3: Шаблон симметричной схемы.

Учитывая соотношения

$$u_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2 \partial t} + O(\tau^2 + h^2) \quad (11)$$

$$\hat{u}_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 u(x, t + \frac{\tau}{2})}{\partial x^2 \partial t} + O(\tau^2 + h^2) \quad (12)$$

получим, что при $\sigma = 0.5$ в точке $(x, t + \frac{\tau}{2})$ разностный оператор $L_{h\tau}^{0.5}$ аппроксимирует L с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$.

5 Система уравнений для численного решения уравнения теплопроводности

Без учета граничных условий система уравнений для численного решения уравнения теплопроводности выглядит следующим образом:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = (1 - \sigma) \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} + \sigma \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f_i^{n+\sigma} \quad (13)$$

$$y_i^{n+1} - y_i^n = \frac{(1 - \sigma)\tau}{h^2} (y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n) + \frac{\sigma\tau}{h^2} (y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}) + \tau f_i^{n+\sigma} \quad (14)$$

В случае использования явной схемы ($\sigma = 0$) значение y_i^{n+1} выражается через значения сеточной функции на предыдущем слое по времени, при этом для избежания накопления ошибки необходимо выполнение условия $|1 - \frac{2\tau}{h^2}| \leq 1$, то есть $\tau \leq \frac{h^2}{2}$, что является условием устойчивости данной разностной схемы.

В случае использования схемы с весами система уравнений приводится к следующему виду:

$$(-\frac{\sigma\tau}{h^2})y_{i-1}^{n+1} + (1 + \frac{2\sigma\tau}{h^2})y_i^{n+1} + (-\frac{\sigma\tau}{h^2})y_{i+1}^{n+1} = \frac{(1 - \sigma)\tau}{h^2} (y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n) + y_i^n + \tau f_i^{n+\sigma} \quad (15)$$

Матрица данной системы является трехдиагональной, при этом выполнено условие диагонального преобладания, таким образом система является разрешимой.

Схема с весами является устойчивой, поэтому ее использование предпочтительнее явной схемы.