Лекция 1. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

1 Основные определения

Определение 1.1. *Соотношение вида*

$$\frac{d^M y}{dx^M} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(M-1)}) \tag{1}$$

называется обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) M-го порядка.

Так как произвольное ОДУ M-го порядка можно свести к системе ОДУ первого порядка с помощью введения вспомогательных функций $y_m(x) = y^{(m)}(x), \ , m \leq M-1$, то в дальнейшем будем рассматривать только системы ОДУ первого порядка.

Определение 1.2. *Соотношения вида*

$$\frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_M), \ 1 \leq m \leq M) \tag{2}$$

называются системой ОДУ первого порядка.

Система ОДУ может быть записана в векторных обозначениях:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \ y = \{y_1, y_2, \ldots, y_M\}, \ f = \{f_1, f_2, \ldots, f_M\} \tag{3}$$

Определение 1.3. *Задачей Коши называется система ОДУ с дополнительными условиями, заданными в одной точке в виде $y(x_0) = y_0$.*

Из курса ОДУ известны следующие теоремы:

Теорема 1.1. *Если в задаче Коши $\frac{dy}{dx} = f(x, y), \ y(x_0) = y_0$ функция f непрерывна в некоторой окрестности начальной точки $\{x_0, y_0\}$ интегральной кривой, то задача имеет решение (возможно не единственное).*

Теорема 1.2. *Если в задаче Коши $\frac{dy}{dx} = f(x, y), \ y(x_0) = y_0$ функция f не только непрерывна в некоторой окрестности начальной точки $\{x_0, y_0\}$ интегральной кривой, но и удовлетворяет условию Липшица по переменным y_m, то задача имеет решение, это решение единственно и непрерывно зависит от координат начальной точки. Это означает корректность постановки задачи Коши.*

Теорема 1.3. *Если в задаче Коши $\frac{dy}{dx} = f(x, y), \ y(x_0) = y_0$ функция f непрерывна в некоторой окрестности начальной точки $\{x_0, y_0\}$ интегральной кривой, удовлетворяет условию Липшица по переменным y_m, и имеет непрерывные производные вплоть до p-го порядка по всем аргументам, включая x, то задача имеет решение, это решение единственно, непрерывно зависит от координат начальной точки и имеет $(p+1)$-ю непрерывную производную по t.*

Определение 1.4. *Система ОДУ вида $\frac{dy}{dx} = f(y)$ (f не зависит от x) называют автономной.*

Любая система ОДУ может быть приведена к виду автономной системы с помощью введения вспомогательной функции $y_{M+1}(x) = x$. Данный процесс называется автономизацией.

2 Метод Эйлера численного решения задачи Коши

Пусть рассматривается ОДУ

$$y' = f(x, y) \tag{4}$$

при начальном условии $y(x_0) = y_0$, $f(x, y)$ - функция, аналитическая в точке (x_0, y_0).

С помощью правил дифференциирования сложной функции можно получить значения старших производных функции y:

$$y'' = f_x(x, y) + f_y(x, y)y' \tag{5}$$

$$y''' = f_{xx}(x, y) + 2f_{xy}(x, y)y' + f_{yy}(x, y)y'^2 + f_y(x, y)y'' \tag{6}$$

Далее, применяя формулу Тейлора, получим

$$y(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \tag{7}$$

Если значение $|x - x_0|$ меньше радиуса сходимости ряда

$$\sum_{i} \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \tag{8}$$

то данная формула неприменима.

В таком случае можно поступить следующим образом. Если решение задачи Коши требуется найти на некотором промежутке $[x_0, x_0 + X]$, то этот промежуток разбивается на точки x_j, $j = 0, \dots, N$, $x_N = x_0 + X$ и значения функции y_j вычисляются последовательно:

$$y_{j+1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_j^{(i)}}{i!}(x_{j+1} - x_j)^i \tag{9}$$

Будем рассматривать только равномерное разбиение промежутка поиска решений $[x_0, x_0 + X]$ на отрезки длины h, тогда формула принимает вид

$$y_{j+1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_j^{(i)}}{i!}h^i \tag{10}$$

При $n = 1$ данная формула превращается в

$$y_{j+1} = y_i + hf(x_j, y_j) \tag{11}$$

Данный метод вычисления называется методом Эйлера.

3 Метод Адамса численного решения задачи Коши

Метод Эйлера можно получить другим способом из соотношения

$$y(x + h) = y(x) + \int_0^h y'(x + t)dt \tag{12}$$

заменяя интеграл приближенной формулой прямоугольников

$$y(x + h) = y(x) + hf(x, y(x)) + O(h^2) \tag{13}$$

Если вместо формулы прямоугольников воспользоваться квадратурной формулой трапеций, то получим соотношение

$$y(x + h) = y(x) + \frac{h}{2}\left(y'(x) + y'(x + h)\right) + O(h^3) \tag{14}$$

то есть

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left(f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1})\right) + O(h^3) \tag{15}$$

Данная формула называется неявной формулой Адамса второго порядка точности.

Для разрешения данной схемы вычислим значение y_{j+1} в правой части с помощью формулы Эйлера:

$$y^*_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j) \tag{16}$$

$$y_{j+1} = y_j + \frac{h}{2}\left(f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y^*_{j+1})\right) \tag{17}$$

4 Методы Рунге-Кутты численного решения задачи Коши

В общем виде семейство методов Рунге-Кутты записывается следующим образом. Пусть в процессе вычислений фиксированы числа $\alpha_2, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, $p_1, p_2, \ldots, p_q$, β_{ij}, $0 < j < i \le q$. Тогда схема Рунге-Кутты представлена следующей последовательностью вычислений:

$$k_1(h) = hf(x, y) \tag{18}$$

$$k_2(h) = hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21}k_1(h)) \tag{19}$$

$$\ldots \tag{20}$$

$$k_q(h) = hf(x + \alpha_q h, y + \beta_{q,1}k_1(h) + \ldots + \beta_{q,q-1}k_{q-1}(h)) \tag{21}$$

$$y(x+h) \approx z(h) = y(x) + \sum_{i=1}^{q} p_i k_i(h) \tag{22}$$

При этом коэффициенты α_i, p_i, β_{ij} выбираются таким образом, чтобы для функции $\phi(h) = y(x+h) - z(h)$, раскладываемой в ряд Тейлора,

$$\phi(h) = \sum_{i=0}^{s} \frac{\phi^{(i)}(0)}{i!}h^i + \frac{\phi^{(s+1)}(\theta h)}{(s+1)!}h^{s+1} \tag{23}$$

первые s производных в точке $h = 0$ обращались в ноль: $\phi'(0) = \ldots = \phi^{(s)} = 0$. В этом случае s называют порядком погрешности метода.

При $q = 1$ получим метод Эйлера с первым порядком погрешности.

При $q = s = 2$ можно получить, например следующую схему второго порядка:

$$y_{j+\frac{1}{2}} = y_j + \frac{h}{2}f(x_j, y_j) \tag{24}$$

$$y_{j+1} = y_j + hf\left(x_j + \frac{h}{2}, y_{j+\frac{1}{2}}\right) \tag{25}$$

При $q = s = 3$ наиболее часто используемой схемой является следующая:

$$k_1 = hf(x, y) \tag{26}$$

$$k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right) \tag{27}$$

$$k_3 = hf(x + h, y - k_1 + 2k_2) \tag{28}$$

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \tag{29}$$

При $q = s = 4$ наиболее часто используемой схемой является следующая:

$$k_1 = hf(x, y) \tag{30}$$

$$k_2 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right) \tag{31}$$

$$k_3 = hf\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right) \tag{32}$$

$$k_4 = hf(x + h, y + k_3) \tag{33}$$

$$\Delta y = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{34}$$