Лекция 3. Численное решение уравнений параболического типа.

В качестве примера уравнения параболического типа рассматривается одномерное уравнение теплопроводности, которое записывается в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ x \in (0, X),\ t \in (0, T] \tag{1}$$

Для численного решения данного уравнения введем равномерную сетку по пространству и по времени:

$$\overline{\omega_h} = \{x_i = ih; i = 0, 1, \ldots, N; Nh = X\} \tag{2}$$

$$\overline{\omega_\tau} = \{t_n = n\tau; n = 0, 1, \ldots, M; M\tau = T\} \tag{3}$$

$$\overline{\omega_{h\tau}} = \overline{\omega_h} \times \overline{\omega_\tau} \tag{4}$$

Необходимо выполнить разностную аппроксимацию оператора $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

1 Явная разностная схема

Явной разностной схеме соответствует шаблон, представленный на рис. 1.

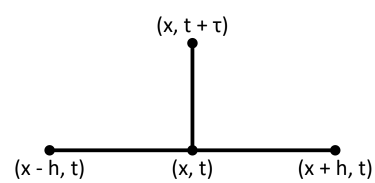

Рис. 1: Шаблон явной схемы.

Соответствующий разностный оператор имеет вид:

$$L^0_{h\tau} u = u_t - u_{\overline{x}x} = \frac{u(x, t+\tau) - u(x,t)}{\tau} - \frac{u(x+h, t) - 2u(x,t) + u(x-h, t)}{h^2} \tag{5}$$

2 Неявная разностная схема

Неявной разностной схеме соответствует шаблон, представленный на рис. 2.
Соответствующий разностный оператор имеет вид:

$$L^1_{h\tau} u = u_t - \hat{u}_{\overline{x}x} = \frac{u(x, t+\tau) - u(x,t)}{\tau} - \frac{u(x+h, t+\tau) - 2u(x,t+\tau) + u(x-h, t+\tau)}{h^2} \tag{6}$$

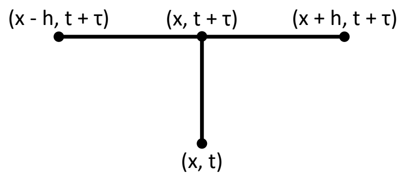

Рис. 2: Шаблон неявной схемы.

3 Оценка погрешности аппроксимации явной и неявной разностных схем

Для оценки погрешности аппроксимации явной и неявной разностных схем рассмотрим данные оценки отдельно для операторов u_t, $u_{\bar{x}x}$, $\hat{u}_{\bar{x}x}$.

$$u_t = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + O(\tau) = \frac{\partial u(x,t+\frac{\tau}{2})}{\partial t} + O(\tau^2) = \frac{\partial u(x,t+\tau)}{\partial t} + O(\tau) \tag{7}$$

$$u_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + O(h^2) = \frac{\partial^2 u(x,t+\frac{\tau}{2})}{\partial x^2} + O(\tau + h^2) = \frac{\partial^2 u(x,t+\tau)}{\partial x^2} + O(\tau + h^2) \tag{8}$$

$$\hat{u}_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + O(\tau + h^2) = \frac{\partial^2 u(x,t+\frac{\tau}{2})}{\partial x^2} + O(\tau + h^2) = \frac{\partial^2 u(x,t+\tau)}{\partial x^2} + O(h^2) \tag{9}$$

Из данных соотношений следует, что и $L^0_{h\tau}$, и $L^1_{h\tau}$ аппроксимируют дифференциальный оператор Lu с погрешностью $O(\tau + h^2)$ в точках (x,t), $(x, t+\frac{\tau}{2})$, $(x, t+\tau)$.

4 Симметричная разностная схема

Для построения разностной схемы более высокого порядка аппроксимации по времени используется разностный оператор с весами

$$L^\sigma_{h\tau} u = \sigma L^1_{h\tau} u + (1-\sigma) L^0_{h\tau} u = u_t - (\sigma \hat{u}_{\bar{x}x} + (1-\sigma) u_{\bar{x}x}) \tag{10}$$

Шаблон данной разностной схемы представлен на рис. 3.

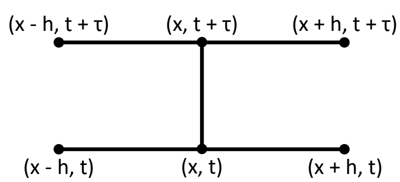

Рис. 3: Шаблон симметричной схемы.

Учитывая соотношения

$$u_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u(x,t+\frac{\tau}{2})}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2}\frac{\partial^3 u(x,t+\frac{\tau}{2})}{\partial x^2 \partial t} + O(\tau^2 + h^2) \tag{11}$$

$$\hat{u}_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u(x,t+\frac{\tau}{2})}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2}\frac{\partial^3 u(x,t+\frac{\tau}{2})}{\partial x^2 \partial t} + O(\tau^2 + h^2) \tag{12}$$

получим, что при $\sigma = 0.5$ в точке $(x, t+\frac{\tau}{2})$ разностный оператор $L^{0.5}_{h\tau}$ аппроксимирует L с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$.

5 Система уравнений для численного решения уравнения теплопроводности

Без учета граничных условий система уравнений для численного решения уравнения теплопроводности выглядит следующим образом:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = (1-\sigma)\frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} + \sigma\frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f_i^{n+\sigma} \tag{13}$$

$$y_i^{n+1} - y_i^n = \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}(y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n) + \frac{\sigma\tau}{h^2}(y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}) + \tau f_i^{n+\sigma} \tag{14}$$

В случае использования явной схемы ($\sigma = 0$) значение y_i^{n+1} выражается через значения сеточной функции на предыдущем слое по времени, при этом для избежания накопления ошибки необходимо выполнение условия $|1-\frac{2\tau}{h2}| \leq 1$, то есть $\tau \leq \frac{h^2}{2}$, что является условием устойчивости данной разностной схемы.

В случае использования схемы с весами система уравнений приводится к следующему виду:

$$(-\frac{\sigma\tau}{h^2})y_{i-1}^{n+1} + (1 + \frac{2\sigma\tau}{h^2})y_i^{n+1} + (-\frac{\sigma\tau}{h^2})y_{i+1}^{n+1} = \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2}(y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n) + y_i^n + \tau f_i^{n+\sigma} \tag{15}$$

Матрица данной системы является трехдиагональной, при этом выполнено условие диагонального преобладания. Таким образом, схема с весами является устойчивой.