Лекция 4. Численное решение уравнений эллиптического типа.

В качестве примера уравнения эллиптического типа рассматривается двумерное уравнение Пуассона, которое записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y),\ x \in (0,X),\ y \in (0,Y) \tag{1}$$

Для численного решения данного уравнения введем равномерную сетку по каждому измерению пространства:

$$\overline{\omega_{h_x}} = \{x_i = ih_x; i = 0,1,\ldots,N_x; N_x h_x = X\} \tag{2}$$

$$\overline{\omega_{h_y}} = \{y_j = jh_y; j = 0,1,\ldots,N_y; N_y h_y = Y\} \tag{3}$$

$$\overline{\omega_{h_x h_y}} = \overline{\omega_{h_x}} \times \overline{\omega_{h_y}} \tag{4}$$

Необходимо выполнить разностную аппроксимацию оператора $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

1 Разностная схема

В каждой внутренней ячейке рассматриваемой области можно выполнить аппроксимацию

$$u_{\overline{x}x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O(h_x^2) \tag{5}$$

$$u_{\overline{y}y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + O(h_y^2) \tag{6}$$

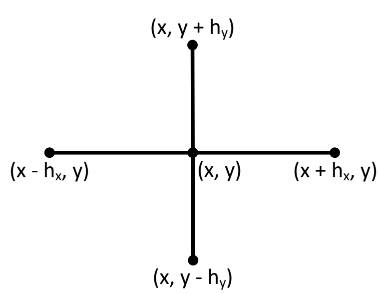

Рис. 1: Шаблон разностной схемы для уравнения Пуассона.

Таким образом, можно рассмотреть разностный оператор

$$L_{h_x h_y} u = \frac{u(x+h_x,y) - 2u(x,y) + u(x-h_x,y)}{h_x^2} + \frac{u(x,y+h_y) - 2u(x,y) + u(x,y-h_y)}{h_y^2} \tag{7}$$

для которого верно

$$L_{h_x h_y} u = Lu + O(h_x^2 + h_y^2) \tag{8}$$

Данной разностной схеме соответствует шаблон, представленный на рис. 1.

2 Устойчивость разностной схемы для уравнения Пуассона

Для определения устойчивости разностной схемы запишем сеточное уравнение (сеточную функцию будем обозначать той же буквой u, так как буква y занята под пространственную переменную).

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} = f_{i,j} \tag{9}$$

Лемма 2.1. *Пусть сеточная функция u определена на сетке $\overline{\omega_{h_x h_y}}$, во всех внутренних узлах удовлетворяет уравнению*

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} = f_{i,j} \tag{10}$$

причем $f_{i,j} \geq 0$. Тогда наибольшее значение сеточная функция u достигает хотя бы в одной точке границы сеточной области.

Предположим, что это не так, и наибольшее значение достигается во внутренней точке (i, j). Перепишем сеточное уравнение для этой точки в следующем виде:

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_y^2} + \frac{u_{i,j-1} - u_{i,j}}{h_y^2} = f_{i,j} \tag{11}$$

В силу предположения слева хотя бы одно из слагаемых отрицательно, а остальные неположительны, тогда как справа стоит неотрицательное число. Противоречие. ■

Лемма 2.2. *Пусть сеточная функция u определена на сетке $\overline{\omega_{h_x h_y}}$, во всех внутренних узлах удовлетворяет уравнению*

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} = f_{i,j} \tag{12}$$

причем $f_{i,j} \leq 0$. Тогда наименьшее значение сеточная функция u достигает хотя бы в одной точке границы сеточной области.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы. ■

Лемма 2.3. *Решение сеточного уравнения Лапласа*

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2} = 0 \tag{13}$$

достигает своего минимального и максимального значения на границе сеточной области.

Доказательство данной леммы является объединением утверждений двух предыдущих лемм. ■

Рассмотрим норму сеточной функции $||u|| = \max_D |u_{i,j}|$, где максимум берется по всем внутренним точкам сеточной области.

Для доказательства устойчивости нужно доказать однозначную разрешимость разностной задачи с любой правой частью, и любыми граничными условиями, а также получить оценку

$$||u|| \leq C||f|| \tag{14}$$

где

$$||f|| = \max_D |f_{i,j}| + \max_{\partial D} \phi_{i,j} \tag{15}$$

Здесь через D обозначены внутренние точки сеточной области, ∂D - граничные точки сеточной области, ϕ - функция граничных условий.

Рассмотрим сеточное уравнение Лапласа, в силу Леммы 2.3 оно имеет лишь тривиальное решение. Так как сеточная система это система линейных уравнений, и она имеет только тривиальное решение с нулевой правой частью, то она разрешима единственным образом при любой ненулевой правой части.

Погрешность разностного оператора, приближающего оператор Лапласа, на любом полиноме второй степени равна нулю. Рассмотрим следующую функцию

$$P_h = \frac{1}{4}(R^2 - (x^2 + y^2)) \max_D |f_{i,j}| + \max_{\partial D} \phi_{i,j} \tag{16}$$

где R - радиус окружности с центром в начале координат и включающей в себя всю область D.

Рассмотрим сеточную функцию $w = u - P^h$ и применим к ней разностный оператор Лапласа. В результате получим:

$$\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{h_y^2} = f_{i,j} + \max_D |f_{i,j}| \tag{17}$$

Тогда, согласно Лемме 2.1, функция w принимает наибольшее значение на границе области. Однако функция w на границе области принимает только отрицательные значения. Таким образом $u_{i,j} - P^h_{i,j} \leq 0$ во всех точках сеточной области.

Аналогично, рассматривая сеточную функцию $v = u + P^h$, и применяя Лемму 2.2, получим, что $u_{i,j} + P^h_{i,j} \geq 0$ во всех точках области.

Отсюда получим

$$|u_{i,j}| \leq |P^h_{i,j}| \leq \frac{1}{4} R^2 \max_D f_{i,j} + \max_{\partial D} \phi_{i,j} \tag{18}$$

а значит

$$||u|| \leq \max\left(1, \frac{R^2}{4}\right) ||f|| \tag{19}$$

что доказывает устойчивость разностной схемы.