Лекция 6. Метод крупных частиц.

1 Система уравнений газовой динамики

Будем рассматривать систему уравнений газовой динамики в следующем развернутом виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial \rho u w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v u}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v^2 + p)}{\partial y} + \frac{\partial \rho v w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho w u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w v}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w^w + p)}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho e + p) u}{\partial x} + \frac{\partial (\rho e + p) v}{\partial y} + \frac{\partial (\rho e + p) w}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

где ρ - плотность; u, v, w - составляющие скорости по направлениям x, y, z; p - давление; e - удельная энергия $e = \epsilon + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$.

Будем рассматривать одномерный вариант данной задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho e u}{\partial x} + \frac{\partial p u}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

где ρ - плотность; u - скорость; p - давление; e - удельная энергия $e = \epsilon + \frac{u^2}{2}$.

2 Метод крупных частиц

Метод крупных частиц расчета движения жидкости и газа выполняется в три этапа. На первом («эйлеровом») этапе движение газа рассматривается без учета переноса массы, количества движения и энергии. На втором («лагранжево») этапе определяется перенос массы газа. На третьем (заключительном) этапе производится пересчет параметров с учетом перетекания массы, количества движения и энергии.

Далее подробно рассмотрим этапы методы крупных частиц на примере одномерного уравнения движения газа.

3 Эйлеров этап

Система уравнений (2) для эйлерова этапа преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial p u}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Перепишем систему еще раз с учетом постоянства ρ:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial p u}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Разобьем расчетную область на равное количество расчетных ячеек с линейным размером h и составим разностную схему, обозначая нижним индексом i газодинамические величины, отнесенные к центру i-ой ячейки, а индексом $i+\frac{1}{2}$ - газодинамические величины на границе между ячейками i и $(i+1)$. Верхним индексом будем обозначать слой по времени.

$$\begin{cases} \rho_i^n \frac{\tilde{u}_i^{n+1}-u_i^n}{\tau} + \frac{p^n_{i+\frac{1}{2}}-p^n_{i-\frac{1}{2}}}{h} = 0 \\ \rho_i^n \frac{\tilde{e}_i^{n+1}-e_i^n}{\tau} + \frac{p^n_{i+\frac{1}{2}}u^n_{i+\frac{1}{2}}-p^n_{i-\frac{1}{2}}u^n_{i-\frac{1}{2}}}{h} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Из данных уравнений выражаются промежуточные значения скорости и внутренней энергии для ячейки:

$$\tilde{u}_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\tau}{h\rho_i^n}(p^n_{i+\frac{1}{2}} - p^n_{i-\frac{1}{2}}) \tag{6}$$

$$\tilde{e}_i^{n+1} = e_i^n - \frac{\tau}{h\rho_i^n}(p^n_{i+\frac{1}{2}}u^n_{i+\frac{1}{2}} - p^n_{i-\frac{1}{2}}u^n_{i-\frac{1}{2}}) \tag{7}$$

При этом газодинамические параметры на границе между ячейками вычисляются как среднее арифметическое параметров соответствующих соседних ячеек

$$p^n_{i+\frac{1}{2}} = \frac{p_i^n + p_{i+1}^n}{2} \tag{8}$$

$$p^n_{i-\frac{1}{2}} = \frac{p_i^n + p_{i-1}^n}{2} \tag{9}$$

$$u^n_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_i^n + u_{i+1}^n}{2} \tag{10}$$

$$u^n_{i-\frac{1}{2}} = \frac{u_i^n + u_{i-1}^n}{2} \tag{11}$$

После вычисления промежуточных значений $\tilde{u}_i^{n+1}$ и $\tilde{e}_i^{n+1}$ эйлеров этап считается завершенным.

4 Лагранжев этап

На лагранжевом этапе нужно вычислить массу газа, которая проходит через границы ячейки. Так как мы рассматриваем одномерный случай, то требуется вычислить потоки массы через правую и левую границу. При этом площадь границы у всех ячеек считаем постоянной, равной S.

$$\Delta M^n_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\rho_i^n S\tau(\tilde{u}_i^{n+1} + \tilde{u}_{i+1}^{n+1})}{2},\ \tilde{u}_i^{n+1} + \tilde{u}_{i+1}^{n+1} > 0 \tag{12}$$

$$\Delta M^n_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\rho_{i+1}^n S\tau(\tilde{u}_i^{n+1} + \tilde{u}_{i+1}^{n+1})}{2},\ \tilde{u}_i^{n+1} + \tilde{u}_{i+1}^{n+1} < 0 \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

Смысл данных формул в том, что если на правой границе ячейки скорость движения газа положительна, то газ с плотностью ρ_i^n перетекает из текущей ячейки в правую ячейку. Если же на правой границе ячейки скорость движения газа отрицательна, то газ с плотностью ρ_{i+1}^n перетекает из ячейки справа в текущую ячейку.

Аналогично рассматриваем левую границу ячейки.

$$\Delta M^n_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\rho_{i-1}^n S\tau(\tilde{u}_i^{n+1} + \tilde{u}_{i-1}^{n+1})}{2},\ \tilde{u}_i^{n+1} + \tilde{u}_{i-1}^{n+1} > 0 \tag{15}$$

$$\Delta M^n_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\rho_i^n S\tau(\tilde{u}_i^{n+1} + \tilde{u}_{i-1}^{n+1})}{2},\ \tilde{u}_i^{n+1} + \tilde{u}_{i-1}^{n+1} < 0 \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

После вычисления потоков масс через все границы всех ячеек лагранжев этап считается завершенным.

5 Заключительный этап

На третьем этапе происходит пересчет новых значений газодинамических параметров из соотношений для нового значения массы, количества движения и энергии в ячейке.

$$M_i^{n+1} = M_i^n - \Delta M_{i+\frac{1}{2}}^n - \Delta M_{i-\frac{1}{2}}^n \tag{18}$$

$$M_i^{n+1} u_i^{n+1} = M_i^n u_i^n - \Delta M_{i+\frac{1}{2}}^n \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + \Delta M_{i-\frac{1}{2}}^n \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \tag{19}$$

$$M_i^{n+1} e_i^{n+1} = M_i^n e_i^n - \Delta M_{i+\frac{1}{2}}^n \tilde{e}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} + \Delta M_{i-\frac{1}{2}}^n \tilde{e}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \tag{20}$$

Из данных уравнений выражаются новые значения газодинамических величин в ячейке

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n + \frac{\Delta M_{i-\frac{1}{2}}^n - \Delta M_{i+\frac{1}{2}}^n}{Sh} \tag{21}$$

$$u_i^{n+1} = \frac{\rho_i^n}{\rho_i^{n+1}} u_i^n + \frac{\Delta M_{i-\frac{1}{2}}^n \tilde{u}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - \Delta M_{i+\frac{1}{2}}^n \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}}{\rho_i^{n+1} Sh} \tag{22}$$

$$e_i^{n+1} = \frac{\rho_i^n}{\rho_i^{n+1}} e_i^n + \frac{\Delta M_{i-\frac{1}{2}}^n \tilde{e}_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - \Delta M_{i+\frac{1}{2}}^n \tilde{e}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1}}{\rho_i^{n+1} Sh} \tag{23}$$

Значения промежуточных значений скорости и энергии на границах ячейки определяются с учетом направления движения газа

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1},\ \tilde{e}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \tilde{e}_i^{n+1},\ \tilde{u}_i^{n+1} + \tilde{u}_{i+1}^{n+1} > 0 \tag{24}$$

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \tilde{u}_{i+1}^{n+1},\ \tilde{e}_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} = \tilde{e}_{i+1}^{n+1},\ \tilde{u}_i^{n+1} + \tilde{u}_{i+1}^{n+1} < 0 \tag{25}$$

$$\tag{26}$$