Лекция 5. Численное решение уравнений гиперболического типа.

В качестве примера уравнения гиперболического типа рассматривается одномерное уравнение колебаний струны, которое записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \;\; x \in (0, X), \;\; t \in (0, T] \tag{1}$$

Для численного решения данного уравнения введем равномерную сетку по пространству и по времени:

$$\overline{\omega_h} = \{x_i = ih; i = 0, 1, \ldots, N; Nh = X\} \tag{2}$$

$$\overline{\omega_\tau} = \{t_n = n\tau; n = 0, 1, \ldots, M; M\tau = T\} \tag{3}$$

$$\overline{\omega_{h\tau}} = \overline{\omega_h} \times \overline{\omega_\tau} \tag{4}$$

Необходимо выполнить разностную аппроксимацию оператора $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

1 Разностная схема "крест"

Явной разностной схеме соответствует шаблон, представленный на рис. 1.

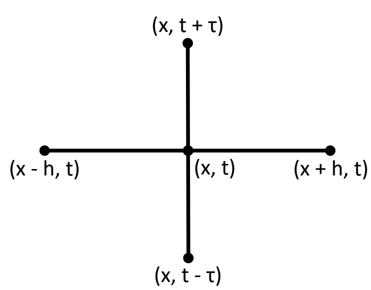

Рис. 1: Шаблон схемы "крест".

Соответствующий разностный оператор имеет вид:

$$L_{h\tau} u = u_{\bar{t}t} - u_{\bar{x}x} = \frac{u(x, t+\tau) - 2u(x,t) + u(x, t-\tau)}{\tau^2} - \frac{u(x+h, t) - 2u(x,t) + u(x-h, t)}{h^2} \tag{5}$$

2 Неявная разностная схема

Неявной разностной схеме соответствует шаблон, представленный на рис. 2.
Соответствующий разностный оператор имеет вид:

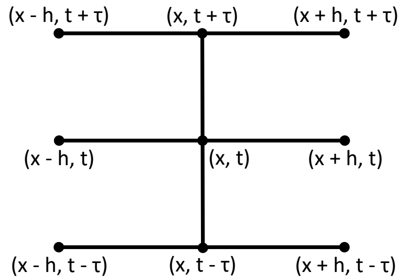

Рис. 2: Шаблон неявной схемы.

$$L_{h\tau}^{\sigma}u = u_{\bar{t}t} - (\sigma \hat{u}_{\bar{x}x} + (1-2\sigma)u_{\bar{x}x} + \sigma \check{u}_{\bar{x}x}) = \frac{u(x,t+\tau) - 2u(x,t) + u(x,t-\tau)}{\tau^2}$$
$$- \Big(\sigma \frac{u(x+h,t+\tau) - 2u(x,t+\tau) + u(x-h,t+\tau)}{h^2}$$
$$+ (1-2\sigma)\frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} + \sigma \frac{u(x+h,t-\tau) - 2u(x,t-\tau) + u(x-h,t-\tau)}{h^2}\Big) \quad (6)$$

3 Оценка погрешности аппроксимации разностных схем

Погрешность аппроксимации разностной схемы с использованием $L_{h\tau}^{\sigma}u$ равна $O(\tau^2 + h^2)$, так как

$$u_{\bar{t}t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + O(\tau^2) \quad (7)$$

$$\check{u}_{\bar{x}x} + \hat{u}_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + O(h^2) \quad (8)$$

$$u_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + O(h^2) \quad (9)$$

4 Система уравнений для численного решения уравнения колебаний

Без учета граничных условий система уравнений для численного решения уравнения колебаний выглядит следующим образом:

$$\frac{y_i^{n+1} - 2y_i^n + y_i^{n-1}}{\tau^2} = \sigma \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} + (1-2\sigma)\frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} + \sigma \frac{y_{i+1}^{n-1} - 2y_i^{n-1} + y_{i-1}^{n-1}}{h^2} + f_i^n \quad (10)$$

В случае использования схемы "крест"($\sigma = 0$) система уравнений вырождается в следующую систему:

$$\frac{y_i^{n+1} - 2y_i^n + y_i^{n-1}}{\tau^2} = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} + f_i^n \quad (11)$$

или

$$y_i^{n+1} - 2y_i^n + y_i^{n-1} = \left(\frac{\tau}{h}\right)^2 (y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n) + \tau^2 f_i^n \quad (12)$$

из которой значение y_i^{n+1} выражается явным образом:

$$y_i^{n+1} = \left(\frac{\tau}{h}\right)^2 (y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n) + 2y_i^n - y_i^{n-1} + \tau^2 f_i^n \tag{13}$$

$$y_i^{n+1} = 2y_i^n \left(1 - \left(\frac{\tau}{h}\right)^2\right) + \left(\frac{\tau}{h}\right)^2 (y_{i+1}^n + y_{i-1}^n) - y_i^{n-1} + \tau^2 f_i^n \tag{14}$$

Для отсутствия накапливания ошибок вычислений необходимо обеспечение условия $\frac{\tau}{h} < 1$, что является условием устойчивости разностной схемы.

При использовании $\sigma \neq 0$ система уравнений может быть записана в виде

$$\frac{y_i^{n+1} - 2y_i^n + y_i^{n-1}}{\tau^2} = \sigma \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} + F_i^n \tag{15}$$

где

$$F_i^n = (1 - 2\sigma)\frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} + \sigma \frac{y_{i+1}^{n-1} - 2y_i^{n-1} + y_{i-1}^{n-1}}{h^2} + f_i^n \tag{16}$$

или

$$y_i^{n+1} - 2y_i^n + y_i^{n-1} = \sigma \left(\frac{\tau}{h}\right)^2 (y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}) + \tau^2 F_i^n \tag{17}$$

$$\left(-\sigma \left(\frac{\tau}{h}\right)^2\right) y_{i+1}^{n+1} + \left(1 + 2\sigma \left(\frac{\tau}{h}\right)^2\right) y_i^{n+1} + \left(-\sigma \left(\frac{\tau}{h}\right)^2\right) y_{i-1}^{n+1} = 2y_i^n - y_i^{n-1} + \tau^2 F_i^n \tag{18}$$

Матрица данной системы уравнений является трехдиагональной, с диагональным преобладанием, поэтому система является разрешимой и решается методом прогонки.

Кроме того, неявная разностная схема является устойчивой, что делает ее использование более предпочтительным, чем использование явной схемы.