Vibrações Mecânicas

Aula14: Vibração Forçada
Excitação Periódica

Ramiro Brito Willmersdorf
ramiro@willmersdorf.net

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco

2018.2

Introdução

A excitação pode ser:

- Periódica não harmônica: Série de Fourier
- Não periódica:
  - Transformada de Fourier;
  - Integral de Convolução;
  - Transformada de Laplace;
  - Métodos Numéricos

Métodos computacionais são mais poderosos, porém resolvem o problema para um conjunto específico de parâmetros.

Expansão da Força em Série de Fourier

Supondo $F(t)$ periódica com período $\tau = 2\pi/\omega$,

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t$$

onde

$$a_j = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\cos j\omega t\, dt, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

e

$$b_j = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\sin j\omega t\, dt, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

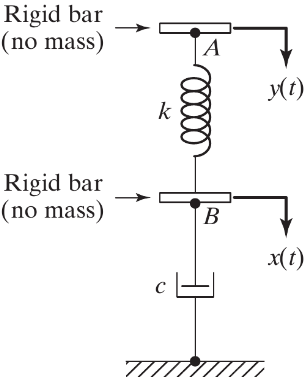
Sistemas de Primeira Ordem

Em vibração forçada, o comportamento de sistemas de primeira ordem é interessante também.

- Variável e sua derivada apenas;
- Posição e velocidade;
- Velocidade e aceleração;

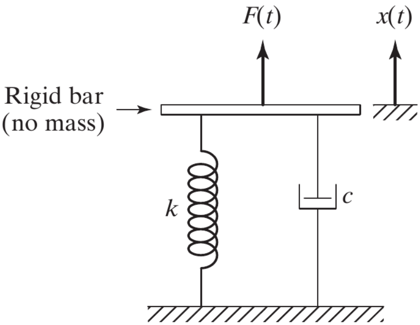
Como a excitação é periódica, pode haver vibração permanente, mesmo que não haja transferência de energia armazenada entre potencial e cinética!

Exemplo



$$c\dot{x} + kx = ky(t)$$

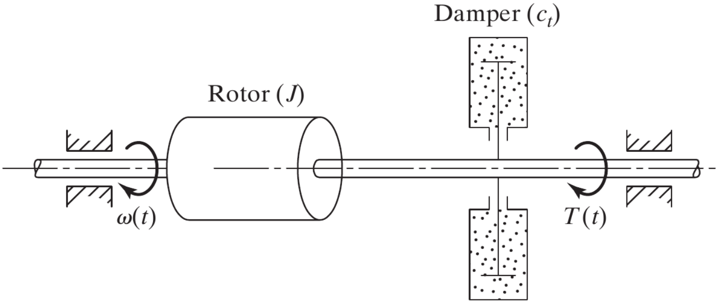
(a)



$$c\dot{x} + kx = f(t)$$

(b)

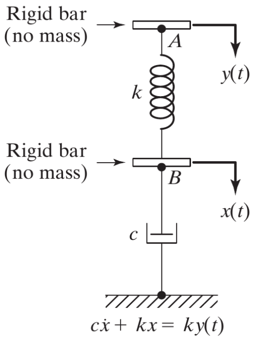
Exemplo



$$J\dot{\omega} + c_t\omega = T(t)$$

(c)

Exemplo



Considerando que este sistema seja acionado pelo movimento da extremidade, $y(t)$, a eq. de movimento é

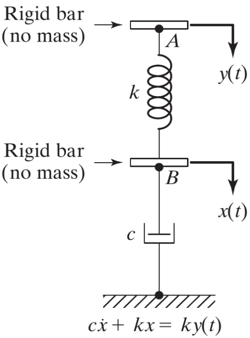
$$c\dot{x} + k(x - y) = 0.$$

Podemos rescrever a equação como

$$\dot{x} + ax = ay,$$

com $a = \frac{k}{c}$.

Exemplo



Considerando que este sistema seja acionado pelo movimento da extremidade, $y(t)$, a eq. de movimento é

$$c\dot{x} + k(x - y) = 0.$$

Podemos rescrever a equação como

$$\dot{x} + ax = ay,$$

com $a = \frac{k}{c}$.

Exemplo

Supondo que $y(t)$ seja periódico e expandido em Série de Fourier,

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t$$

com a_j e b_j como calculados anteriormente, multiplicamos tudo por a e escrevemos

$$ay(t) = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos \omega_j t + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin \omega_j t$$

com

$$A_0 = \frac{aa_0}{2}, \quad A_j = aa_j, \quad B_j = ab_j, \quad \omega_j = j\omega,$$

e $j = 1, 2, \ldots$.

Solução

A equação a ser resolvida é então

$$\dot{x} + ax = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos \omega_j t + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin \omega_j t$$

com

$$A_0 = \frac{aa_0}{2}, \quad A_j = aa_j, \quad B_j = ab_j, \quad \omega_j = j\omega,$$

e $j = 1, 2, \ldots$.

Claramente a "força" é a soma de uma componente constante com uma combinação linear de funções harmônicas.
O problema é linear, portanto vale o Princípio da Superposição!

Solução

A equação a ser resolvida é então

$$\dot{x} + ax = A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos \omega_j t + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin \omega_j t$$

com

$$A_0 = \frac{aa_0}{2}, \quad A_j = aa_j, \quad B_j = ab_j, \quad \omega_j = j\omega,$$

e $j = 1, 2, \ldots$.

Claramente a "força" é a soma de uma componente constante com uma combinação linear de funções harmônicas.
O problema é linear, portanto vale o Princípio da Superposição!

Parcela Constante

A parcela da solução que corresponde ao termo constante é

$$\dot{x}_0 + a x_0 = A_0$$

Obs: x_0 é, em princípio, uma *variável*, $x_0(t)$.

No caso, por inspeção, a solução desta EDO é

$$x_0(t) = \frac{A_0}{a},$$

que é de fato uma constante.

Parcela Constante

A parcela da solução que corresponde ao termo constante é

$$\dot{x}_0 + a x_0 = A_0$$

Obs: x_0 é, em princípio, uma *variável*, $x_0(t)$.

No caso, por inspeção, a solução desta EDO é

$$x_0(t) = \frac{A_0}{a},$$

que é de fato uma constante.

Termos em Cosseno

Para os termos $A_j \cos \omega_j t$, as equações são

$$\dot{x}_j + a x_j = A_j \cos \omega_j t$$

Vamos reescrever esta equação como

$$\dot{x}_j + a x_j = A_j e^{i \omega_j t},$$

Vamos supor que a solução seja da forma

$$x_j(t) = U_j e^{i \omega_j t}$$

com U_j um valor complexo.

Termos em Cosseno

Para os termos $A_j \cos \omega_j t$, as equações são

$$\dot{x}_j + a x_j = A_j \cos \omega_j t$$

Vamos reescrever esta equação como

$$\dot{x}_j + a x_j = A_j e^{i\omega_j t},$$

Vamos supor que a solução seja da forma

$$x_j(t) = U_j e^{i\omega_j t}$$

com U_j um valor complexo.

Termos em Cosseno

Para os termos $A_j \cos \omega_j t$, as equações são

$$\dot{x}_j + a x_j = A_j \cos \omega_j t$$

Vamos reescrever esta equação como

$$\dot{x}_j + a x_j = A_j e^{i\omega_j t},$$

Vamos supor que a solução seja da forma

$$x_j(t) = U_j e^{i\omega_j t}$$

com U_j um valor complexo.

Termos em Cosseno

Como

$$x_j(t) = U_j e^{i\omega_j t},$$

a velocidade é

$$\dot{x}_j(t) = i\omega_j U_j e^{i\omega_j t}.$$

A equação de movimento fica então

$$i\omega_j U_j e^{i\omega_j t} + aU_j e^{i\omega_j t} = A_j e^{i\omega_j t}$$

como $e^{i\omega_j t} \neq 0$,

Termos em Cosseno

Como
$$x_j(t) = U_j e^{i\omega_j t},$$
a velocidade é
$$\dot{x}_j(t) = i\omega_j U_j e^{i\omega_j t}.$$
A equação de movimento fica então
$$i\omega_j U_j e^{i\omega_j t} + a U_j e^{i\omega_j t} = A_j e^{i\omega_j t}$$
como $e^{i\omega_j t} \neq 0$,

Termos em Cosseno

(...) a equação torna-se

$$i\omega_j U_j + aU_j = A_j$$

ou

$$U_j = \frac{A_j}{a + i\omega_j}.$$

A amplitude do movimento é magnitude deste número complexo,

$$X_j = |U_j| = \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}}.$$

e a fase dada pela direção do número

$$\phi_j = \arctan \frac{\omega_j}{a}.$$

Termos em Cosseno

(...) a equação torna-se

$$i\omega_j U_j + a U_j = A_j$$

ou

$$U_j = \frac{A_j}{a + i\omega_j}.$$

A amplitude do movimento é magnitude deste número complexo,

$$X_j = |U_j| = \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}}.$$

e a fase dada pela direção do número

$$\phi_j = \arctan \frac{\omega_j}{a}.$$

Termos em Cosseno

Assim,

$$x(t) = U_j e^{i\omega_j t} = X_j e^{-i\phi_j} e^{i\omega_j t} = X_j e^{i(\omega_j t - \phi_j)},$$

com

$$X_j = \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}}, \qquad \phi_j = \arctan \frac{\omega_j}{a}.$$

Tomando a parte real, a solução para qualquer termo forçante em cosseno é então

$$x_j(t) = \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} \cos(\omega_j t - \phi_j),$$

com

$$\phi_j = \arctan \frac{\omega_j}{a}.$$

Termos em Cosseno

Assim,

$$x(t) = U_j e^{i\omega_j t} = X_j e^{-i\phi_j} e^{i\omega_j t} = X_j e^{i(\omega_j t - \phi_j},$$

com

$$X_j = \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}}, \qquad \phi_j = \arctan \frac{\omega_j}{a}.$$

Tomando a parte real, a solução para qualquer termo forçante em cosseno é então

$$x_j(t) = \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} \cos(\omega_j t - \phi_j),$$

com

$$\phi_j = \arctan \frac{\omega_j}{a}.$$

Termos em Seno

Procedemos de forma completamente análoga, e as soluções são

$$x_j(t) = \frac{B_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} \sin(\omega_j t - \phi_j),$$

com

$$\phi_j = \arctan \frac{\omega_j}{a}.$$

Solução Particular

A solução particular é a soma de todos estes termos

$$x_p(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} \cos(\omega_j t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{\sqrt{a^2 + \omega_j^2}} \sin(\omega_j t - \phi_j).$$

Para obtermos a solução geral ainda falta adicionar a *solução homogênea*!

Solução Particular

A solução particular é a soma de todos estes termos

$$x_p(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j}{\sqrt{a^2+\omega_j^2}} \cos(\omega_j t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{\sqrt{a^2+\omega_j^2}} \sin(\omega_j t - \phi_j).$$

Para obtermos a solução geral ainda falta adicionar a *solução homogênea*!

Solução Geral

A solução homegênea é, por inspeção

$$x_h(t) = Ce^{-at}$$

A solução geral é, finalmente,

$$x(t) = Ce^{-at} + \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \cos(\omega_j t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \sin(\omega_j t - \phi_j),$$

com A_0, X_j, Y_j e ϕ_j como definidos previamente.

Solução Geral

A solução homegênea é, por inspeção

$$x_h(t) = Ce^{-at}$$

A solução geral é, finalmente,

$$x(t) = Ce^{-at} + \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \cos(\omega_j t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \sin(\omega_j t - \phi_j),$$

com A_0, X_j, Y_j e ϕ_j como definidos previamente.

Condições Iniciais

Aplicando a condição inicial $x(0) = x_0$,

$$x_0 = C + \frac{A_0}{a} - \sum_{j=1}^{\infty} X_j \sin\phi_j + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \cos\phi_j,$$

o que leva a

$$C = x_0 - \frac{A_0}{a} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \sin\phi_j - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \cos\phi_j.$$

Forma Final

A forma final da solução é então,

$$x(t) = \left[x_0 - \frac{A_0}{a} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \sin\phi_j - \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \cos\phi_j \right] e^{-at}$$
$$+ \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \cos(\omega_j t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \sin(\omega_j t - \phi_j).$$

Sistemas de Segunda Ordem

. Se a força $f(t)$ na equação de movimento

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t)$$

é periódica, então expandimos a força em sua série de Fourier,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos j\omega t + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin j\omega t,$$

e temos as três "famílias" de equações para resolver,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = \frac{a_0}{2},$$

e, para $j = 1, \ldots, \infty$,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = a_j \cos j\omega t, \qquad \text{e} \qquad m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = b_j \sin j\omega t.$$

Soluções Particulares

A solução particular de $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = a_0/2$ é

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2\kappa}$$

Claramente, as soluções de $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = a_j \cos j\omega t$ são

$$x_p(t) = \frac{a_j/\kappa}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2j\zeta r)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j),$$

e para $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = b_j \sin j\omega t$, temos

$$x_p(t) = \frac{b_j/\kappa}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2j\zeta r)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j),$$

com $r = \dfrac{\omega}{\omega_n}$ e $\phi_j = \arctan\left(\dfrac{2\zeta j r}{1-j^2r^2}\right)$.

Soluções Particulares

A solução particular de $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = a_0/2$ é

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2\kappa}$$

Claramente, as soluções de $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = a_j \cos j\omega t$ são

$$x_p(t) = \frac{a_j/\kappa}{\sqrt{(1 - j^2 r^2)^2 + (2j\zeta r)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j),$$

e para $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = b_j \sin j\omega t$, temos

$$x_p(t) = \frac{b_j/\kappa}{\sqrt{(1 - j^2 r^2)^2 + (2j\zeta r)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j),$$

com $r = \dfrac{\omega}{\omega_n}$ e $\phi_j = \arctan\left(\dfrac{2\zeta j r}{1 - j^2 r^2}\right)$.

Soluções Particulares

A solução particular de $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = a_0/2$ é

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2\kappa}$$

Claramente, as soluções de $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = a_j \cos j\omega t$ são

$$x_p(t) = \frac{a_j/\kappa}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2j\zeta r)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j),$$

e para $m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = b_j \sin j\omega t$, temos

$$x_p(t) = \frac{b_j/\kappa}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2j\zeta r)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j),$$

com $r = \dfrac{\omega}{\omega_n}$ e $\phi_j = \arctan\left(\dfrac{2\zeta jr}{1-j^2r^2}\right)$.

Solução completa

A solução particular completa é então

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2\kappa} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j/\kappa}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2j\zeta r)^2}} \cos(j\omega t - \phi_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{b_j/\kappa}{\sqrt{(1-j^2r^2)^2 + (2j\zeta r)^2}} \sin(j\omega t - \phi_j),$$

com

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} \qquad \text{e} \qquad \arctan\left(\frac{2\zeta j r}{1 - j^2 r^2}\right).$$

Observações

- No regime permanente, $x(t) = x_p(t)$;
- Amplitude e fase dependem do harmônico j;
- Pode haver ressonância com qualquer harmônico;
- Amplitudes tendem a diminuir quand j cresce;
- Normalmente poucos primeiros harmônicos são suficientes;
- Calcular a solução transiente é possível, mas não trivial!
- Não vamos calcular séries de Fourier, vamos usar tabelas ou sistemas de matemática computacional;

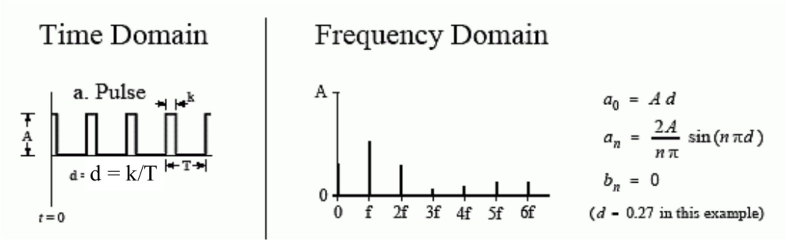
Séries de Fourier

Table of Fourier Series

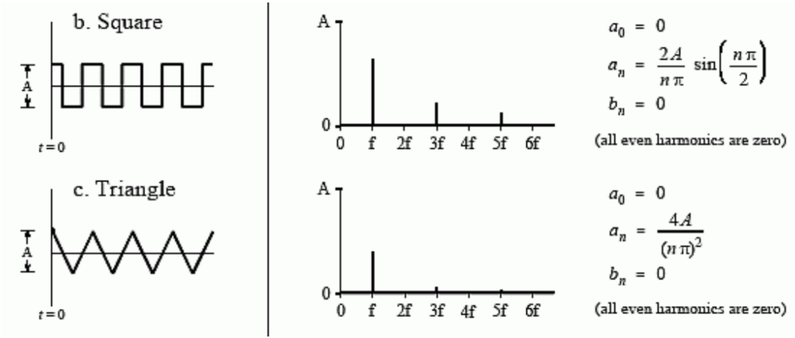
The table below assumes a Fourier series representation of the form

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right] \qquad \text{where } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

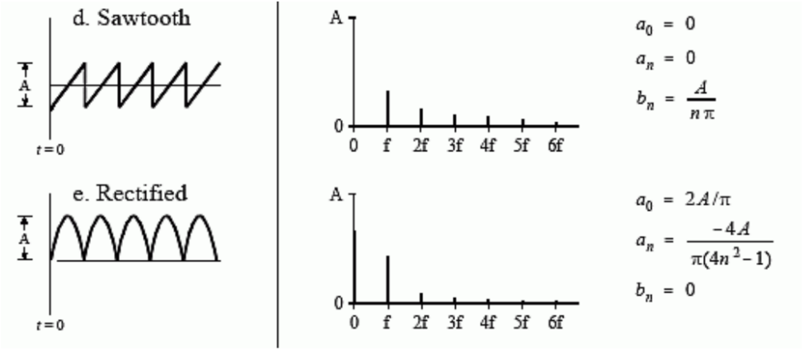
The signal must be periodic with a period T



Séries de Fourier

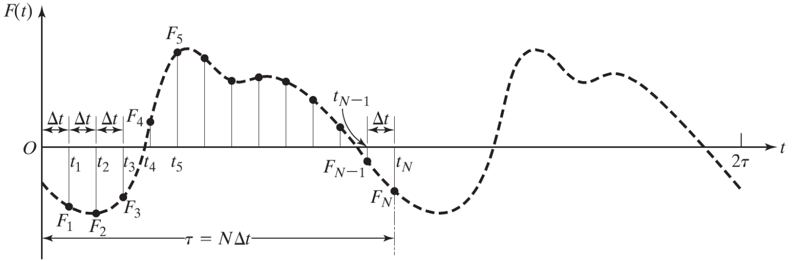


Séries de Fourier



Integração Numérica

Uma força pode ser periódica, mas não ter série de Fourier analítica. Por exemplo, a força pode ser medida experimentalmente, através de uma amostragem a tempos regulares de um sinal.



É possível calcular a Série de Fourier numericamente, integrando os coeficientes da série de Fourier. Em geral, isto não é uma boa ideia.

Regra do Trapézio

Empregando a regra do trapézio, os coeficientes de Fourier são dados por:

$$a_0 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} F_i,$$

$$a_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} F_i \cos \frac{2j\pi t_i}{\tau}, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

$$b_j = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N} F_i \sin \frac{2j\pi t_i}{\tau}, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

onde τ é o período, $\Delta t = \tau / N$ e $t_i = i \Delta t$.

Problemas

- O procedimento anterior é extremamente ineficiente computacionalmente;
- É preciso cuidado para que o procedimento não falhe catastroficamente: Teorema de Nyquist