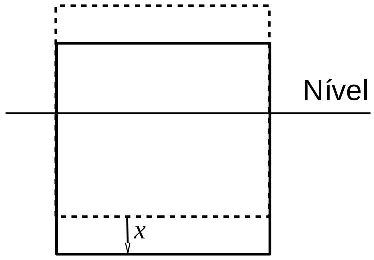
Questão 1

Em todos os itens, molas, amortecedores, etc., não afetam o número de graus de liberdade do sistema pois não impõe restrições cinemáticas, eles podem ser completamente ignorados.

- a) 2 GL, já que fixando a barra, a massa na extremidade ainda poder girar;
- b) 1 GL. É um mecanismo de quatro barras, sem mais argumentação necessária;
- c) 3GL, já que é um corpo rígido com movimento plano;
- 4) 3GL, só há movimento horizontal e a rotação e o deslocamento linear dos cilindros não são independentes pois eles giram sem delizar.

Questão 2

Na figura abaixo podemos ver o cilindro após ser afundado de uma distância x.



Do princípio de Arquimedes, a força vertical resultante do deslocamento é igual ao peso do volume de água deslocada.

O volume de água deslocada pode ser calculado facilmente, $V(x) = Ax = \pi r^2 x$, onde r é o raio do cilindro.

Para calcular o peso é necessário apenas multiplicar este valor pela massa específica da água, ρ_a, e pela aceleração da gravidade. Assim

$$F(x) = \pi r^2 \rho_a g x.$$

Daí é claro que a rigidez equivalente é $F(x)/x$, ou

$$k = \pi r^2 \rho_a g.$$

Para adiantar a nossa vida mais adiante, o valor numérico é

In [63]:
```
from math import pi, sqrt, atan2

r = 0.040/2
rhoa = 1000
g = 9.8

k = pi*r**2*rhoa*g
print("k = {}".format(k))
```

```
k = 12.31504320207199
```

A massa total do cilindro é $\pi r^2 h \rho_c$, onde ρ_c é a massa específica do cilindro.

In [64]:
```
rhoc = 650
mc = pi*0.020**2*0.020*rhoc
print("Massa do cilindro: {}".format(mc))
```

```
Massa do cilindro: 0.016336281798666925
```

A frequência natural é, obviamente, $\omega_n = \sqrt{k/m}$,

In [65]:
```
wn = sqrt(k/mc)
print("Frequência natural : {}".format(wn))
```

```
Frequência natural : 27.456258919345768
```

O amortecimento crítico é $c_c = 2m\omega_n$,

In [66]:
```
cc = 2*mc*wn
print("Amortecimento crítico : {}".format(cc))
```

```
Amortecimento crítico : 0.8970663656871893
```

In [67]:
```
print(cc*0.05)
```

```
0.04485331828435947
```

Podemos calcular a razão de amortecimento, já que o amortecimento é dado,

In [68]:
```
c = 4.5e-2
zeta = c/cc
print("Razão de amortecimento : {}".format(zeta))
```

```
Razão de amortecimento : 0.050163512668907353
```

A frequência de vibração amortecida é dada por $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$, então

In [69]:
```
wd = sqrt(1-zeta**2)*wn
print("Frequência de vibração amortecida : {}".format(wd))
```

```
Frequência de vibração amortecida : 27.421691996788883
```

Como o amortecimento é muito baixo, a frequência de vibração amortecida é idêntica, na prática, à frequência natural do sistema.

Sabemos que o deslocamento para um sistema em vibração livre amortecida é dado por $x(t) = Xe^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d - \varphi)$. Precisamos calcular X e φ. Do formulário, para $\dot{x}_0 = 0$, temos que $X = x_0/\sqrt{1-\zeta^2}$, e $\varphi = \arctan(\zeta/\sqrt{1-\zeta^2})$, assim

In [70]:
```
x0 = 0.001
X = x0/sqrt(1-zeta**2)
print("X = {}.".format(X))
```

```
X = 0.0010012605685513838.
```

Que tem mesmo que ser muito próximo de x_0 para um amortecimento tão baixo e sem velocidade inicial.

O ângulo de fase é

In [71]:
```
phi = atan2(zeta,sqrt(1-zeta**2))
phid = phi*180/pi
print("Ângulo de fase = {} rad, {} degrees.".format(phi, phid))
```

```
Ângulo de fase = 0.050184574921207564 rad, 2.8753643396432693 degrees.
```

Que é muito próximo de zero, já que o problema tem amortecimento baixo e não tem velocidade inicial. Vamos plotar um gráfico da resposta. Obviamente na prova isto deve ser esquematizado apenas.

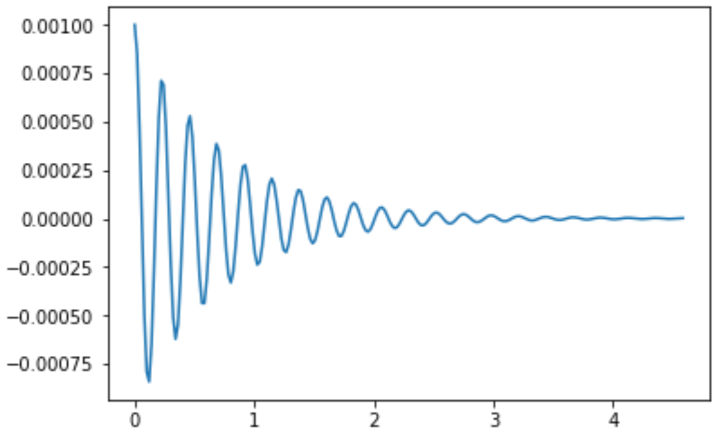
In [72]:
```
%matplotlib inline
from numpy import exp, cos, linspace
import matplotlib.pyplot as plt

def xf(t):
    return X*exp(-zeta*wn*t)*cos(wd*t-phi)

taud = 2*pi/wd
nt = 20

t = linspace(0, nt*taud, int(50*nt*taud))
x = xf(t)
plt.plot(t,x)
```

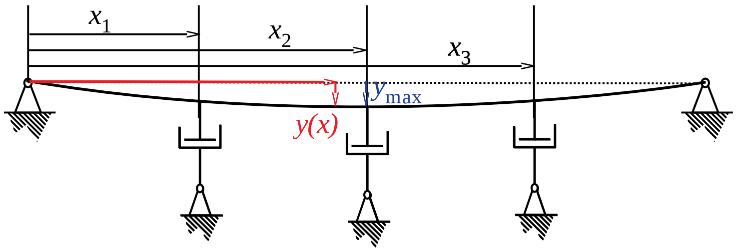
Out[72]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x7f6f3be71978>]
```



Percebam que mesmo para $\zeta = 5\%$, aproximadamente, a amplitude cai muito rapidamente, em algo próximo a 20 "períodos" a amplitude já é praticamente desprezível!

Questão 3

Na figura abaixo, mostramos a viga em um instante de tempo de seu movimento, com os principais deslocamentos destacados.



Do enunciado, sabemos que para uma carga igual a 30N, o centro da viga move-se 3mm, como $k = F/x$,

In [73]:
```
dst = 0.003
F = 30
k = F/dst
print("k =  {}".format(k))
```

```
k =  10000.0
```

Claramente precisamos também calcular a massa e o amortecimento equivalentes. Para isto, temos que considerar a forma deformada da viga, que é senoidal. Obviamente, temos um meio ciclo de seno, e portanto podemos dizer que $y(x) = y_c \sin(\pi x/l)$, onde y_c é o deslocamento no centro da viga.

Admitindo que todos os pontos da viga movam-se em fase, se o deslocamento do centro é senoidal, isto é $y_c(t) = y_{\max} \sin(\omega_n t)$, o deslocamento de um ponto arbitrário é $y(x,t) = y_{\max} \sin(\pi x/l) \sin(\omega_n t)$. Observem que nem mencionamos a fase, já que todos os pontos tem a mesma.

Para calcular o amortecimento equivalente, podemos usar a equivalência de potências instantâneas dissipadas, ou simplesmente fingir que os amortecedores são molas e usar o mesmo resultado, o que é mais rápido e fácil. Vamos fazer isto então.

Imaginando que os amortecedores são molas, a energia potencial do sistema original pode ser aproximada por

$$T = \frac{1}{2}ky\left(\frac{l}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}ky\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}ky\left(\frac{3l}{4}\right)^2,$$

ou, por simetria,

$$T = 2\frac{1}{2}ky\left(\frac{l}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}ky\left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Para o deslocamento senoidal da forma $y(x) = y_c \sin(\pi x/l)$, claramente, se o deslocamento no centro é $y_{\max}$, temos que

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = y_{\max}, \qquad y\left(\frac{l}{4}\right) = y_{\max} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = y_{\max}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Assim, a energia potencial original é

$$T = 2\frac{1}{2}k\frac{y_{\max}^2}{2} + \frac{1}{2}ky_{\max}^2 = \frac{1}{2}2ky_{\max}^2.$$

Igualando isto a

$$T = \frac{1}{2}k_{\mathrm{eq}}y_{\max}^2,$$

fica claro que

$$k_{\mathrm{eq}} = 2k$$

e portanto, o amortecimento equilavente é igual a duas vezes o amortecimento de um único amortecedor.

O cálculo da massa equivalente é feito através da equivalência de energias cinéticas, mas temos que considerar a massa distribuída ao longo da viga. Para um pedacinho infinitesimal de viga na posição x, a energia cinética é

$$dT = 1/2\, dm\, \dot{y}^2.$$

Como consideramos a viga uniforme, podemos dizer que $dm = m/l\, dx$, então a energia cinéica fica

$$dT = 1/2\, m/l\, \dot{y}^2\, dx.$$

Podemos calcular a velocidade em cada ponto da viga derivando o deslocamento em relação ao tempo, obtendo $\dot{y}(x,t) = -\omega_n y_{\max} \sin(\pi x/l)\cos(\omega_n t)$. A velocidade máxima em cada ponto é então, claramente $\dot{y}_m(x) = \omega_n y_{\max}\sin(\pi x/l)$. A energia cinética do elemento infinitesimal, quando o deslocamento do ponto central é $y_{\max}$ é então

$$dT = \frac{1}{2}\frac{m}{l}\omega_n^2 y_{\max}^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx.$$

A energia cinética total é claramente a integral ao logo do comprimento da viga, isto é

$$T = \int_0^l dT = \int_0^l \frac{1}{2}\frac{m}{l}\omega_n^2 y_{\max}^2 \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx,$$

onde quase tudo é constante e pode ser tirado de dentro da integral, que torna-se

$$T = \frac{1}{2}\frac{m}{l}\omega_n^2 y_{\max}^2 \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx.$$

Do formulário, sabemos que

$$\int_0^l \sin^2(ax)\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a}\bigg|_0^l.$$

Substituindo $a = \pi/l$ e calculando, temos que o valor da integral é $l/2$. Assim, a energia cinética total é

$$T = \frac{1}{2}\frac{m}{l}\omega_n^2 y_{\max}^2 \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2}\frac{m}{l}\omega_n^2 y_{\max}^2 \frac{l}{2} = \frac{1}{2}\frac{m}{2}\omega_n^2 y_{\max}^2.$$

Para um ponto no centro da viga oscilando com a mesma amplitude, a energia cinética é

$$T = \frac{1}{2}m_{\mathrm{eq}}\omega_n^2 y_{\max}^2,$$

de onde fica claro que

$$m_{\mathrm{eq}} = \frac{m}{2}.$$

No caso, temos

In [77]:
```
m = 2

meq = m/2
print('Massa equivalente: {}.'.format(meq))
```

```
Massa equivalente: 1.0.
```

A frquência natural deste sistema é

In [78]:
```
wn = sqrt(k/meq)
print("Frequência natural : {}".format(wn))
```

```
Frequência natural : 100.0
```

O amortecimento crítico é

In [80]:
```
cc = 2*meq*wn
print("Amortecimento crítico : {}".format(cc))
```

```
Amortecimento crítico : 200.0
```

A razão de amortecimento é

In [81]:
```
c = 85
ceq = 2*c
zeta = ceq/cc
print("Razão de amortecimento : {}".format(zeta))
```

```
Razão de amortecimento : 0.85
```

A frequência de vibração amortecida é então

In [82]:
```
wd = sqrt(1-zeta**2)*wn
print("Frequência de vibração amortecida : {}".format(wd))
```

```
Frequência de vibração amortecida : 52.678268764263706
```

Neste caso temos uma diferença considerável em relação à frequência natural pois o sistema está bem próximo do amortecimento crítico.