Vibrações Mecânicas

Aula12: Vibração Forçada
Sistemas Amortecidos

Ramiro Brito Willmersdorf
ramiro@willmersdorf.net

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco

2015.1

Resposta sob $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$

Supondo que $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = F_0 e^{i\omega t},$$

se a solução particular é tomada como $x_p(t) = X e^{i\omega t}$, com X complexo, temos

$$X = \frac{F_0}{(\kappa - m\omega^2) + ic\omega}.$$

Normalizando,

$$X = F_0 \left[\frac{\kappa - m\omega^2}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} - i\frac{c\omega}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} \right]$$

Resposta sob $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$

Supondo que $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = F_0 e^{i\omega t},$$

se a solução particular é tomada como $x_p(t) = X e^{i\omega t}$, com X complexo, temos

$$X = \frac{F_0}{(\kappa - m\omega^2) + ic\omega}.$$

Normalizando,

$$X = F_0 \left[\frac{\kappa - m\omega^2}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} - i \frac{c\omega}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} \right]$$

Resposta sob $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$

Supondo que $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = F_0 e^{i\omega t},$$

se a solução particular é tomada como $x_p(t) = X e^{i\omega t}$, com X complexo, temos

$$X = \frac{F_0}{(\kappa - m\omega^2) + ic\omega}.$$

Normalizando,

$$X = F_0 \left[\frac{\kappa - m\omega^2}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} - i \frac{c\omega}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} \right]$$

Forma Exponencial

Como $a + bi = Ae^{i\phi}$, onde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\phi = \arctan(b/a)$, temos

$$X = \frac{F_0}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} e^{-i\phi}, \quad \text{com} \quad \phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right).$$

A solução permanente é então

$$x_p(t) = \frac{F_0}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} e^{i(\omega t - \phi)}$$

Forma Exponencial

Como $a + bi = Ae^{i\phi}$, onde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\phi = \arctan(b/a)$, temos

$$X = \frac{F_0}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} e^{-i\phi}, \quad \text{com} \quad \phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right).$$

A solução permanente é então

$$x_p(t) = \frac{F_0}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} e^{i(\omega t - \phi)}$$

Forma Exponencial

Como $a + bi = Ae^{i\phi}$, onde $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\phi = \arctan(b/a)$, temos

$$X = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} e^{-i\phi}, \quad \text{com} \quad \phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right).$$

A solução permanente é então

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} e^{i(\omega t - \phi)}$$

Resposta Complexa em Frequência

Da amplitude complexa

$$\frac{\kappa X}{F_0} = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r} \equiv H(i\omega).$$

A magnitude de $H(i\omega)$ é

$$|H(i\omega)| = \left|\frac{\kappa X}{F_0}\right| = \frac{1}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

e é claro que

$$H(i\omega) = |H(i\omega)|e^{-i\phi}, \quad \text{com} \quad \phi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right).$$

A solução particular pode ser escrita então como

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}.$$

Resposta Complexa em Frequência

Da amplitude complexa

$$\frac{\kappa X}{F_0} = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r} \equiv H(i\omega).$$

A magnitude de $H(i\omega)$ é

$$|H(i\omega)| = \left|\frac{\kappa X}{F_0}\right| = \frac{1}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

e é claro que

$$H(i\omega) = |H(i\omega)| e^{-i\phi}, \quad \text{com} \quad \phi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right).$$

A solução particular pode ser escrita então como

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\kappa} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)}.$$

Resposta Complexa em Frequência

Da amplitude complexa

$$\frac{\kappa X}{F_0} = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r} \equiv H(i\omega).$$

A magnitude de $H(i\omega)$ é

$$|H(i\omega)| = \left|\frac{\kappa X}{F_0}\right| = \frac{1}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

e é claro que

$$H(i\omega) = |H(i\omega)|e^{-i\phi}, \quad \text{com} \quad \phi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1 - r^2}\right).$$

A solução particular pode ser escrita então como

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}.$$

Resposta Complexa em Frequência

A resposta complexa em frequência contém tanto a amplitude quanto a fase da resposta.

Se $F(t) = F_0 \cos \omega t$, a solução particular é a parte *real*:

$$x_p(t) = \Re\left[\frac{F_0}{\kappa} H(i\omega) e^{i\omega t}\right] = \Re\left[\frac{F_0}{\kappa} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)}\right]$$

Se $F(t) = F_0 \sin \omega t$, a solução particular é a parte *imaginária*:

$$x_p(t) = \Im\left[\frac{F_0}{\kappa} H(i\omega) e^{i\omega t}\right] = \Im\left[\frac{F_0}{\kappa} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)}\right]$$

Resposta Complexa em Frequência

A resposta complexa em frequência contém tanto a amplitude quanto a fase da resposta.

Se $F(t) = F_0 \cos \omega t$, a solução particular é a parte *real*:

$$x_p(t) = \Re\left[\frac{F_0}{\kappa} H(i\omega) e^{i\omega t}\right] = \Re\left[\frac{F_0}{\kappa} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)}\right]$$

Se $F(t) = F_0 \sin \omega t$, a solução particular é a parte *imaginária*:

$$x_p(t) = \Im\left[\frac{F_0}{\kappa} H(i\omega) e^{i\omega t}\right] = \Im\left[\frac{F_0}{\kappa} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)}\right]$$

Resposta Complexa em Frequência

A resposta complexa em frequência contém tanto a amplitude quanto a fase da resposta.

Se $F(t) = F_0 \cos \omega t$, a solução particular é a parte *real*:

$$x_p(t) = \Re\left[\frac{F_0}{\kappa} H(i\omega) e^{i\omega t}\right] = \Re\left[\frac{F_0}{\kappa} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)}\right]$$

Se $F(t) = F_0 \sin \omega t$, a solução particular é a parte *imaginária*:

$$x_p(t) = \Im\left[\frac{F_0}{\kappa} H(i\omega) e^{i\omega t}\right] = \Im\left[\frac{F_0}{\kappa} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)}\right]$$

Representação Vetorial Complexa

Temos que:

$$\text{Deslocamento} = x_p(t) = \frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$\text{Velocidade} = \dot{x}_p(t) = i\omega\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)} = i\omega x_p(t)$$

$$\text{Aceleração} = \ddot{x}_p(t) = -\omega^2\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)} = -\omega^2 x_p(t)$$

A velocidade precede o deslocamento em $\pi/2$ radianos, e a aceleração precede o deslocamento em π radianos.

Representação Vetorial Complexa

Temos que:

$$\text{Deslocamento} = x_p(t) = \frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$\text{Velocidade} = \dot{x}_p(t) = i\omega\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)} = i\omega x_p(t)$$

$$\text{Aceleração} = \ddot{x}_p(t) = -\omega^2\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)} = -\omega^2 x_p(t)$$

A velocidade precede o deslocamento em $\pi/2$ radianos, e a aceleração precede o deslocamento em π radianos.

Representação Vetorial Complexa

Temos que:

$$\text{Deslocamento} = x_p(t) = \frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)}$$

$$\text{Velocidade} = \dot{x}_p(t) = i\omega\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)} = i\omega x_p(t)$$

$$\text{Aceleração} = \ddot{x}_p(t) = -\omega^2\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t-\phi)} = -\omega^2 x_p(t)$$

A velocidade precede o deslocamento em $\pi/2$ radianos, e a aceleração precede o deslocamento em π radianos.

Representação Vetorial Complexa

Temos que:

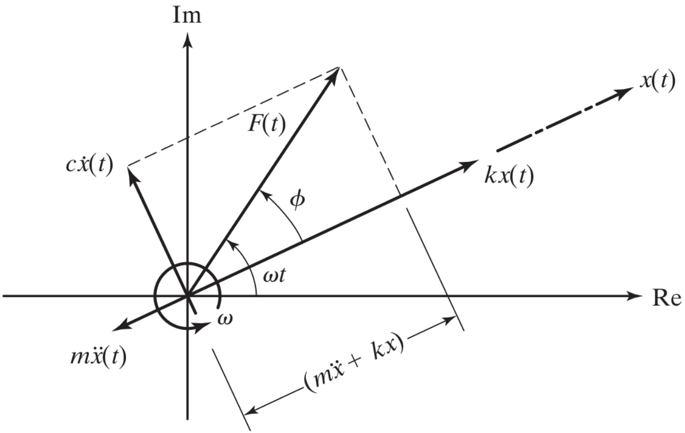
$$\text{Deslocamento} = x_p(t) = \frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$\text{Velocidade} = \dot{x}_p(t) = i\omega\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)} = i\omega x_p(t)$$

$$\text{Aceleração} = \ddot{x}_p(t) = -\omega^2\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)} = -\omega^2 x_p(t)$$

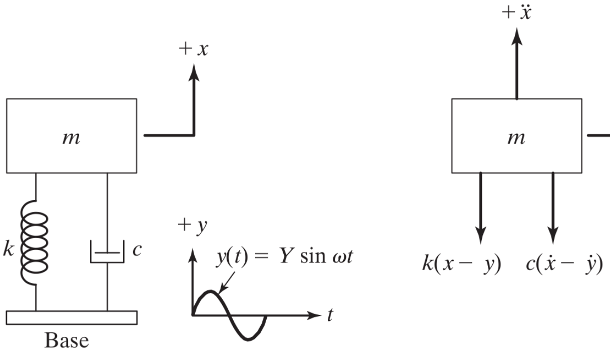
A velocidade precede o deslocamento em $\pi/2$ radianos, e a aceleração precede o deslocamento em π radianos.

Representação Gráfica



Movimento da Base

A excitação do sistema também pode ser feita por movimento da base.



Equação de Movimento

A equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0.$$

Supondo que $y(t) = Y \sin \omega t$,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = c\dot{y} + \kappa x = c\omega Y \cos \omega t + \kappa Y \sin \omega t$$

ou

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = A \sin(\omega t - \alpha),$$

onde $A = Y\sqrt{\kappa^2 + (c\omega)^2}$, e $\alpha = \arctan(-c\omega/\kappa)$.

Conclusão: o movimento base corresponde a aplicação de uma força de amplitude A, "atrasada" de um ângulo α.

Equação de Movimento

A equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0.$$

Supondo que $y(t) = Y \sin \omega t$,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = c\dot{y} + \kappa x = c\omega Y \cos \omega t + \kappa Y \sin \omega t$$

ou

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = A \sin(\omega t - \alpha),$$

onde $A = Y\sqrt{\kappa^2 + (c\omega)^2}$, e $\alpha = \arctan(-c\omega/\kappa)$.

Conclusão: o movimento base corresponde a aplicação de uma força de amplitude A, "atrasada" de um ângulo α.

Equação de Movimento

A equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0.$$

Supondo que $y(t) = Y \sin \omega t$,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = c\dot{y} + \kappa x = c\omega Y \cos \omega t + \kappa Y \sin \omega t$$

ou

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = A \sin(\omega t - \alpha),$$

onde $A = Y\sqrt{\kappa^2 + (c\omega)^2}$, e $\alpha = \arctan(-c\omega/\kappa)$.

Conclusão: o movimento base corresponde a aplicação de uma força de amplitude A, "atrasada" de um ângulo α.

Solução Particular

Para uma força harmônica $F(t) = F_0 \sin \omega t$,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1); \qquad \tan \phi_1 = \frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}.$$

Se a força é atrasada de α, isto é, $F(t) = F_0 \sin(\omega t - \alpha)$, a resposta atrasa do mesmo valor!

$$x_p(t) = \frac{F_0}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1 - \alpha).$$

No caso, $F_0 = Y\left(\kappa^2 + (c\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, então

$$x_p(t) = \frac{Y(\kappa^2 + (c\omega)^2)^{\frac{1}{2}}}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1 - \alpha).$$

Solução Particular

Para uma força harmônica $F(t) = F_0 \sin \omega t$,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1); \qquad \tan \phi_1 = \frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}.$$

Se a força é atrasada de α, isto é, $F(t) = F_0 \sin(\omega t - \alpha)$, a resposta atrasa do mesmo valor!

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1 - \alpha).$$

No caso, $F_0 = Y\left(\kappa^2 + (c\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, então

$$x_p(t) = \frac{Y\left(\kappa^2 + (c\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1 - \alpha).$$

Solução Particular

Para uma força harmônica $F(t) = F_0 \sin \omega t$,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1); \qquad \tan \phi_1 = \frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}.$$

Se a força é atrasada de α, isto é, $F(t) = F_0 \sin(\omega t - \alpha)$, a resposta atrasa do mesmo valor!

$$x_p(t) = \frac{F_0}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1 - \alpha).$$

No caso, $F_0 = Y\left(\kappa^2 + (c\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}$, então

$$x_p(t) = \frac{Y(\kappa^2 + (c\omega)^2)^{\frac{1}{2}}}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1 - \alpha).$$

Solução Particular

A solução particular é uma função harmônica,

$$x_p(t) = Y\left[\frac{\kappa^2 + (c\omega)^2}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}} \sin(\omega t - \phi_1 - \alpha),$$

que pode ser escrita como

$$x_p(t) = X\sin(\omega_n t - \phi)$$

com

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{\kappa^2 + (c\omega)^2}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{e} \qquad \phi = \phi_1 + \alpha.$$

Transmissibilidade de Deslocamento e Ângulo de Fase

A transmissibilidade de deslocamento X/Y pode ser reescrita como

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{\kappa^2 + (c\omega)^2}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

O ângulo de fase ϕ é dado por

$$\tan\phi = \tan(\phi_1 + \alpha) = \frac{\tan\phi_1 + \tan\alpha}{1 - \tan\phi_1 \tan\alpha} = \frac{\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2} + \frac{-c\omega}{\kappa}}{1 - \frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\frac{-c\omega}{\kappa}},$$

o que pode ser simplificado para

$$\phi = \arctan\left(\frac{mc\omega^3}{\kappa(\kappa - m\omega^2) + (c\omega)^2}\right) = \arctan\left(\frac{2\zeta r^3}{1 + (4\zeta^2 - 1)r^2}\right).$$

Transmissibilidade de Deslocamento e Ângulo de Fase

A transmissibilidade de deslocamento X/Y pode ser reescrita como

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{\kappa^2 + (c\omega)^2}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}} .$$

O ângulo de fase ϕ é dado por

$$\tan\phi = \tan(\phi_1 + \alpha) = \frac{\tan\phi_1 + \tan\alpha}{1 - \tan\phi_1 \tan\alpha} = \frac{\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2} + \frac{-c\omega}{\kappa}}{1 - \frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\frac{-c\omega}{\kappa}},$$

o que pode ser simplificado para

$$\phi = \arctan\left(\frac{mc\omega^3}{\kappa(\kappa - m\omega^2) + (c\omega)^2}\right) = \arctan\left(\frac{2\zeta r^3}{1 + (4\zeta^2 - 1)r^2}\right) .$$

Transmissibilidade de Deslocamento e Ângulo de Fase

A transmissibilidade de deslocamento X/Y pode ser reescrita como

$$\frac{X}{Y} = \left[\frac{\kappa^2 + (c\omega)^2}{(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

O ângulo de fase ϕ é dado por

$$\tan\phi = \tan(\phi_1 + \alpha) = \frac{\tan\phi_1 + \tan\alpha}{1 - \tan\phi_1 \tan\alpha} = \frac{\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2} + \frac{-c\omega}{\kappa}}{1 - \frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\frac{-c\omega}{\kappa}},$$

o que pode ser simplificado para

$$\phi = \arctan\left(\frac{mc\omega^3}{\kappa(\kappa - m\omega^2) + (c\omega)^2}\right) = \arctan\left(\frac{2\zeta r^3}{1 + (4\zeta^2 - 1)r^2}\right).$$

Forma Complexa

Repetindo a análise com $y(t) = \Re(Ye^{i\omega t})$, a resposta do sistema é

$$x_p(t) = \Re\left(\frac{1 + i2\zeta r}{1 - r^2 + i2\zeta r} Ye^{i\omega t}\right),$$

e a transmissibilidade de deslocamento na forma complexa é

$$\frac{X}{Y} = T_d = \left[1 + (2\zeta r)^2\right]^{\frac{1}{2}} |H(i\omega)|,$$

onde

$$|H(i\omega)| = \frac{1}{\left[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Forma Complexa

Repetindo a análise com $y(t) = \Re(Ye^{i\omega t})$, a resposta do sistema é

$$x_p(t) = \Re\left(\frac{1 + i2\zeta r}{1 - r^2 + i2\zeta r} Ye^{i\omega t}\right),$$

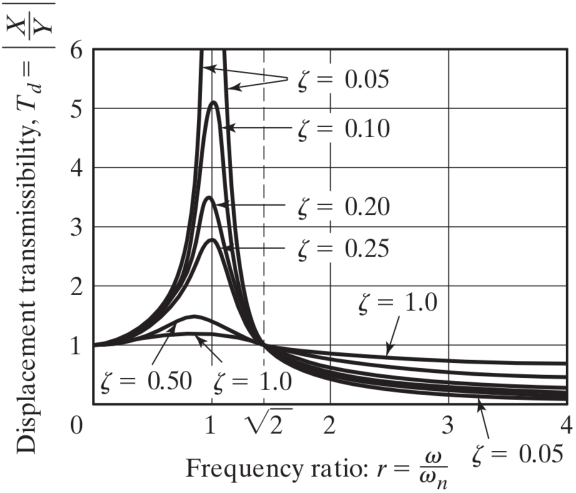
e a transmissibilidade de deslocamento na forma complexa é

$$\frac{X}{Y} = T_d = \left[1 + (2\zeta r)^2\right]^{\frac{1}{2}} |H(i\omega)|,$$

onde

$$|H(i\omega)| = \frac{1}{[(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Transmissibilidade

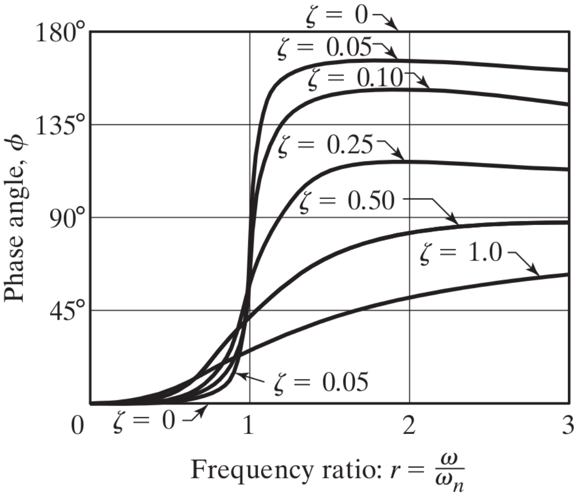


Transmissibilidade – Características

- $T_d \to 1$ quando $r \to 0$;
- Para $\zeta = 0$, $T_d \to \infty$ para $r = 1$;
- Para $r > \sqrt{2}$, $T_d < 1$, para qualquer ζ;
- $T_d = 1$ para $r = \sqrt{2}$, para qualquer ζ;
- Para $r < \sqrt{2}$, aumentar o amortecimendo *diminui* T_d;
- Para $r > \sqrt{2}$, aumentar o amortecimendo *aumenta* T_d;
- Para sistemas subamortecidos, T_d é máximo para

$$r_m = \frac{1}{2\zeta}\left[\sqrt{1 + 8\zeta^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}} < 1$$

Ângulo de Fase



Força Transmitida

A força transmitida à base é

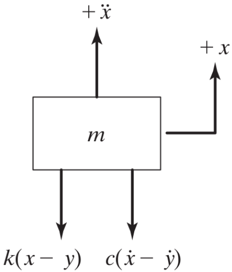
$$F = \kappa(x - y) + x(\dot{x} - \dot{y}) = -m\ddot{x},$$

mas como $x(t) = X\sin(\omega t - \phi)$,

$$F = m\omega^2 X \sin(\omega t - \phi) = F_T \sin(\omega t - \phi),$$

com

$$F_T = m\omega^2 X.$$



Força Transmitida

A força transmitida à base é

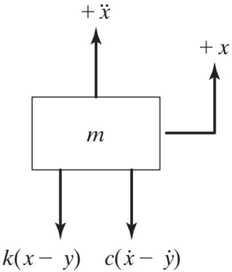
$$F = \kappa(x - y) + x(\dot{x} - \dot{y}) = -m\ddot{x},$$

mas como $x(t) = X\sin(\omega t - \phi)$,

$$F = m\omega^2 X \sin(\omega t - \phi) = F_T \sin(\omega t - \phi),$$

com

$$F_T = m\omega^2 X.$$



Transmissilidade de Força

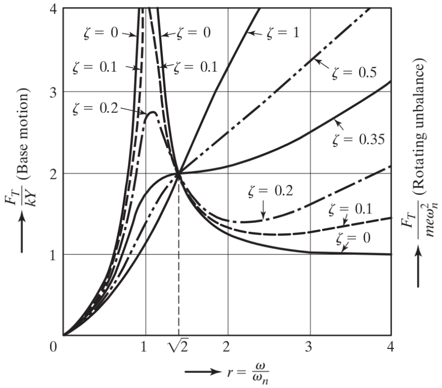
Como $F_T = m\omega^2 X$, temos

$$F_T = m\omega^2 Y \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]$$

ou

$$\frac{F_T}{\kappa Y} = r^2 \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

OBS: Em fase com o deslocamento da massa!



Transmissilidade de Força

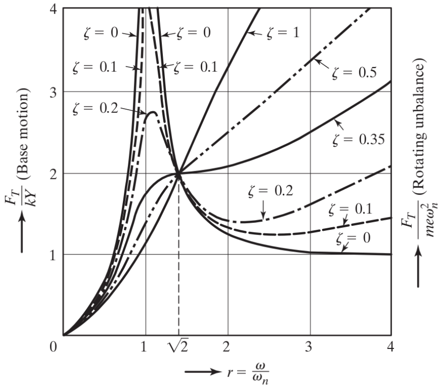
Como $F_T = m\omega^2 X$, temos

$$F_T = m\omega^2 Y \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]$$

ou

$$\frac{F_T}{\kappa Y} = r^2 \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

OBS: Em fase com o deslocamento da massa!



Movimento Relativo

A eq. de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0,$$

definindo $z = x - y$ como o movimento relativo à base, então $\ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{y}$, e eq. de movimento torna-se

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega t.$$

Claramente, uma equação de movimento em z, para força harmônica, onde $F_0 = m\omega^2 Y$.
A solução é

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega t.$$

A resposta é

$$z(t) = \frac{m\omega^2 Y}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1) = Z \sin(\omega t - \phi_1)$$

Movimento Relativo

A eq. de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0,$$

definindo $z = x - y$ como o movimento relativo à base, então $\ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{y}$, e eq. de movimento torna-se

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega t.$$

Claramente, uma equação de movimento em z, para força harmônica, onde $F_0 = m\omega^2 Y$.

A solução é

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega t.$$

A resposta é

$$z(t) = \frac{m\omega^2 Y}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1) = Z \sin(\omega t - \phi_1)$$

Movimento Relativo

A eq. de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0,$$

definindo $z = x - y$ como o movimento relativo à base, então $\ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{y}$, e eq. de movimento torna-se

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega t.$$

Claramente, uma equação de movimento em z, para força harmônica, onde $F_0 = m\omega^2 Y$.
A solução é

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega t.$$

A resposta é

$$z(t) = \frac{m\omega^2 Y}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1) = Z \sin(\omega t - \phi_1)$$

Movimento Relativo

A eq. de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0,$$

definindo $z = x - y$ como o movimento relativo à base, então $\ddot{x} = \ddot{z} + \ddot{y}$, e eq. de movimento torna-se

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega t.$$

Claramente, uma equação de movimento em z, para força harmônica, onde $F_0 = m\omega^2 Y$.
A solução é

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y} = m\omega^2 Y \sin \omega t.$$

A resposta é

$$z(t) = \frac{m\omega^2 Y}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t - \phi_1) = Z \sin(\omega t - \phi_1)$$

Movimento Relativo

A amplitude do movimento relativo é

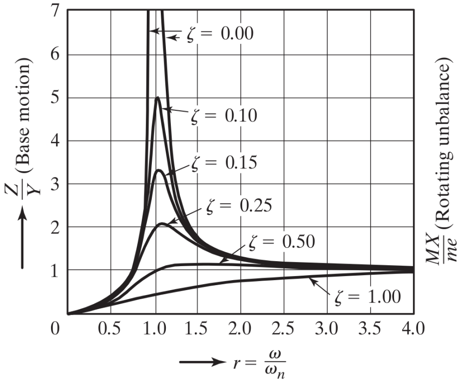
$$Z = \frac{m\omega^2 Y}{\sqrt{(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}},$$

ou

$$Z = Y \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},$$

e ϕ_1 é dado por

$$\tan \phi_1 = \frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2} = \frac{2\zeta r}{1 - r^2}$$



Movimento Relativo

A amplitude do movimento relativo é

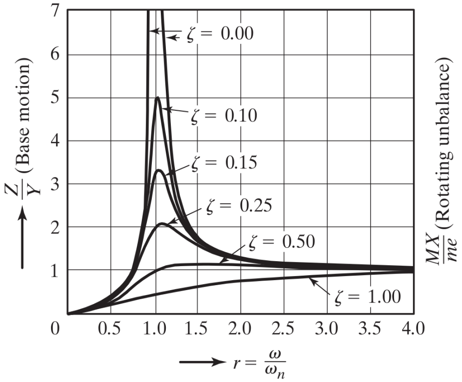
$$Z = \frac{m\omega^2 Y}{\sqrt{(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}},$$

ou

$$Z = Y\frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},$$

e ϕ_1 é dado por

$$\tan\phi_1 = \frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2} = \frac{2\zeta r}{1 - r^2}$$



Modelo Físico

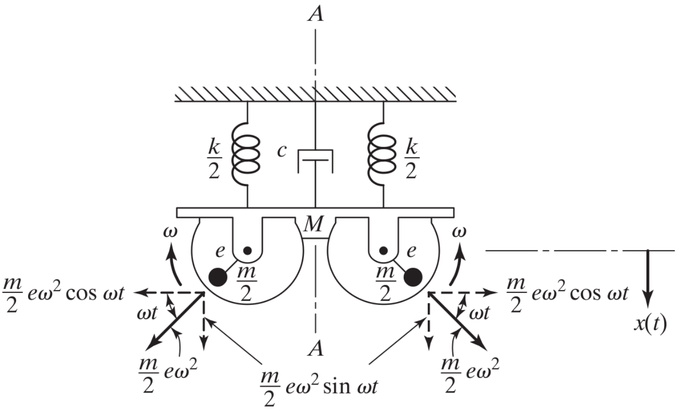
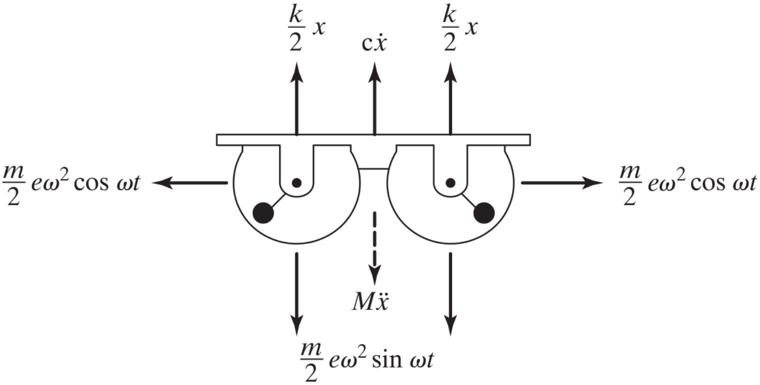


Diagrama de Forças



A força de excitação é $F(t) = me\omega^2 \sin \omega t$.

Equação de Movimento

A equação de movimento é

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = me\omega^2 \sin \omega t,$$

que é idêntica a de um sistema submetida a uma força harmônica de magnitude $F_0 = me\omega^2$ e frequência ω.

A solução particular é, claramente:

$$\begin{aligned} x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi) &= \Im \left[\frac{F_0}{\kappa} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \right] \\ &= \Im \left[\frac{me\omega^2}{\kappa} |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \right] \\ &= \Im \left[\frac{me}{M} \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 |H(i\omega)| e^{i(\omega t - \phi)} \right] \end{aligned}$$

Equação de Movimento

A equação de movimento é

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = me\omega^2 \sin \omega t,$$

que é idêntica a de um sistema submetida a uma força harmônica de magnitude $F_0 = me\omega^2$ e frequência ω.

A solução particular é, claramente:

$$\begin{aligned} x_p(t) = X \sin(\omega t - \phi) &= \Im\left[\frac{F_0}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}\right] \\ &= \Im\left[\frac{me\omega^2}{\kappa}|H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}\right] \\ &= \Im\left[\frac{me}{M}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 |H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}\right] \end{aligned}$$

Continuando...

$$x_p(t) = X\sin(\omega t - \phi) = \Im\left[\frac{me}{M}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 |H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}\right],$$

onde,

$$X = \frac{me\omega^2}{[(\kappa - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{me}{M}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 |H(i\omega)|e^{i(\omega t - \phi)}$$

e

$$\phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - M\omega^2}\right).$$

Fazendo $\zeta = c/c_c$ e $c_c = 2M\omega_n$, ficamos com

$$\frac{MX}{me} = \frac{r^2}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{\frac{1}{2}}} = r^2|H(i\omega)| \quad \text{e} \quad \phi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right).$$

Continuando...

$$x_p(t) = X\sin(\omega t - \phi) = \Im\left[\frac{me}{M}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 |H(i\omega)| e^{i(\omega t-\phi)}\right],$$

onde,

$$X = \frac{me\omega^2}{[(\kappa - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{me}{M}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 |H(i\omega)| e^{i(\omega t-\phi)}$$

e

$$\phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - M\omega^2}\right).$$

Fazendo $\zeta = c/c_c$ e $c_c = 2M\omega_n$, ficamos com

$$\frac{MX}{me} = \frac{r^2}{[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2]^{\frac{1}{2}}} = r^2|H(i\omega)| \quad \text{e} \quad \phi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right).$$

Características

- Todas as curvas começam em 0.
- A amplitude próxima à ressonância é muito sensível ao amortecimento.
- Para $\omega \gg \omega_n$, $MX/me \to 1$, e o amortecimento tem pouco efeito.
- Para $0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$, o ponto onde ocorre e o máximo de MX/me são

$$r_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} > 1 \quad \text{e} \quad \left(\frac{MX}{me}\right)_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}};$$

- Para $\zeta > 1/\sqrt{2}$, não há um máximo local, MX/me cresce monotonamente de 0 em $r = 0$ para 1 com $r \to \infty$;

Transmissibildade de Forças

A força transmitida para a base pelo desbalanceamento rotativo é dada por

$$F(t) = \kappa x(t) + c\dot{x}(t),$$

que pode ser calculada como

$$|F| = me\omega^2 \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{\frac{1}{2}} .$$