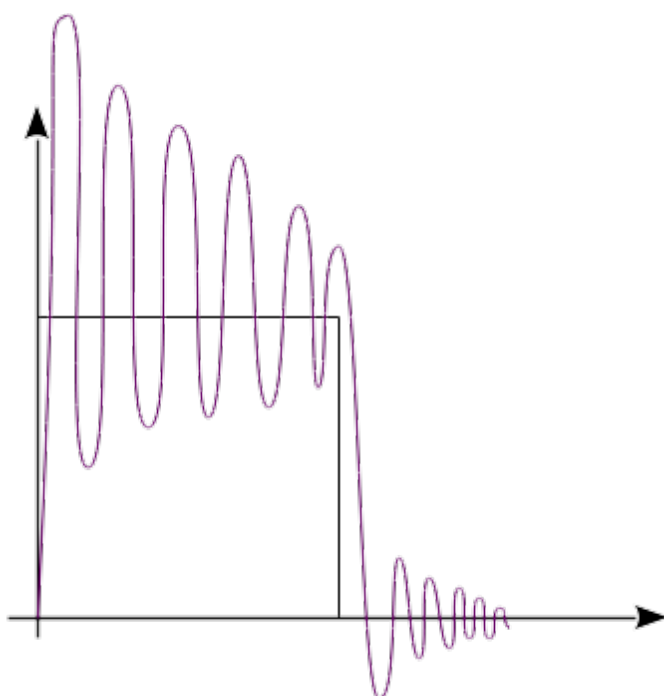


# Vibrações 2015.2 -- Exame Final

## Questão 1

Espera-se uma figura como esta.



As coisas que são importantes na figura são:

1. Partir da origem com derivada (velocidade) diferente de 0.
2. Oscilar com amplitude decrescente durante o tempo de aplicação da força, **em torno do ponto de equilíbrio estático com a nova força.**
3. Continuar oscilando com amplitude decrescente, **em torno do ponto de equilíbrio estático original.**

Para minha surpresa e decepção, pelo que eu vi rapidamente durante a coleta das provas, apenas um ou dois alunos acertaram esta questão.

A enorme maioria das pessoas escolheu um dentre estes dois caminhos absurdos: ou fez a massa oscilar o tempo todo em torno da posição de equilíbrio original, ou a fez oscilar o tempo todo, mesmo após o final da aplicação da força, em torno da posição de equilíbrio estático deslocado que só ocorre quando a força está aplicada. É triste...

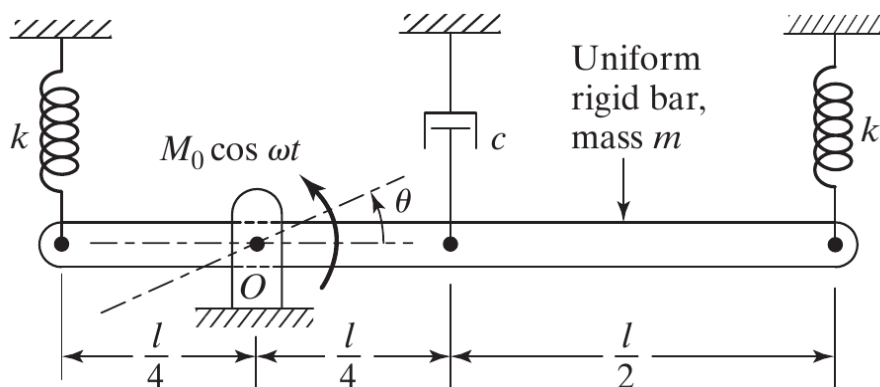
Engenharia não é só aplicar fórmulas, mais importante do que fórmulas, que estão em qualquer livro, é entender a física dos fenômenos e poder prever qualitativamente o que deve acontecer.

## Questão 2

Este claramente é um problema de vibração forçada amortecida com um único grau de liberdade. A única dificuldade do problema está em calcular a massa, rigidez e amortecimento equivalentes, e depois colocar os valores numéricos para fazer as contas.

A coordenada generalizada mais óbvia para resolução do problema é a rotação em torno do ponto  $O$ , então precisamos calcular o momento de inércia em torno deste ponto, a rigidez e o amortecimento torcionais equivalentes.

O problema é especificado pela figura abaixo:



### Massa equivalente

Em primeiro lugar vamos calcular a massa equivalente rotacional, que, obviamente, não é nada mais nada menos do que o momento de inércia de massa em relação ao ponto  $O$ . Podemos fazer isto de mais de uma maneira, é claro. Vou usar a equivalência das energias cinéticas rotacionais e de translação, e considerar uma barra de comprimento  $l/4$  à esquerda e uma de comprimento  $3l/4$  à direita, desta forma posso fazer sempre a integração de  $0$  até  $L$ , onde  $L$  é o comprimento de cada barra considerada. As massas equivalentes são aditivas, é claro, por definição.

Já fizemos este mesmo exercício inúmeras vezes antes, mas de qualquer forma, para os que estão chegando agora, vamos fazer tudo de novo.

Vamos considerar uma barra rígida pivotada na extremidade, e pequenas rotações somente! A energia cinética total deve ser igual, considerando a rotação em torno do ponto  $O$  ou o movimento de translação vertical de cada elemento infinitesimal de massa

em torno de sua posição de equilíbrio, ou

$$T = \frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}^2 = \int_0^L \frac{1}{2} dm \dot{y}^2$$

Vamos considerar que a barra é homogênea e uniforme, é claro, então o elemento de massa  $dm$  é dado por

$$dm = \rho A dx$$

onde  $\rho$  é a massa específica,  $A$  é a área da seção transversal e  $dx$  é o comprimento infinitesimal do elemento.

Para pequenos ângulos, a velocidade transversal é  $\dot{y} = x\dot{\theta}$ , onde  $x$  é a distância do ponto considerado ao pivô, e  $\dot{\theta}$  é constante.

O termo  $\rho A$  é densidade linear da barra, que é igual à massa total dividida pelo comprimento total da barra. Vocês poderiam ter escrito isto diretamente, é claro, dizendo que a massa do elemento infinitesimal é  $\rho dx$ , onde  $\rho$  é densidade linear, em kg/m.

Cancelando já o fator  $1/2$ , ficamos com

$$J_{\text{eq}} \dot{\theta}^2 = \int_0^L \rho A (x\dot{\theta})^2 dx$$

Tirando os termos constantes de dentro da integral,

$$J_{\text{eq}} \dot{\theta}^2 = \rho A \dot{\theta}^2 \int_0^L x^2 dx$$

Cancelando o termo comum  $\dot{\theta}$  e integrando

$$J_{\text{eq}} = \rho A \frac{L^3}{3}$$

Lembrando que  $\rho A$  é densidade linear, isto é  $\rho A = M/L$ , onde  $M$  é massa total da barra, ficamos com

$$J_{\text{eq}} = \frac{M}{L} \frac{L^3}{3} = \frac{ML^2}{3}$$

Este valor pode ser confirmado rapidamente em qualquer livro de resistência dos materiais, física básica, dinâmica, etc. como o valor do momento de inércia de uma barra pivotada na extremidade, em relação à mesma extremidade.

Neste caso particular, temos

```
var('M, L, l')
Jm = (M*L^2)/3
Jeq = Jm(L=l/4)+Jm(L=3*l/4)
show(Jeq)
```

$$\frac{5}{24} Ml^2$$

O valor numérico do momento de inércia é então

```
Jeqn=N(Jeq(l=1, M=6))
show(Jeqn)
```

1.250000000000000

## Rigidez e amortecimento equivalentes

Para calcular a rigidez equivalente à torção, podemos fazer a equivalência das energias potenciais elásticas.

$$\frac{1}{2}k_t\theta^2 = \frac{1}{2}ky^2$$

onde  $k$  é a rigidez da mola e  $y$  é o quanto ela é comprimida. Esta equação vale para uma única mola apenas, é claro, mas como a energia é aditiva, podemos simplesmente somar as energias das duas molas depois de calcular o valor de cada uma. Novamente vamos usar a hipótese dos pequenos ângulos. Vamos chamar de  $L$  a distância entre o ponto de aplicação da mola e o pivô da barra. Assim,  $y = x\theta$ , e

$$\frac{1}{2}k_t\theta^2 = \frac{1}{2}k(x\theta)^2$$

Cancelando os termos comuns, ficamos com

$$k_t = kx^2,$$

onde  $x$  é a distância do ponto de aplicação da mola ao pivot. O mesmo resultado pode ser obtido pelo equilíbrio de momentos, e o mesmo resultado vale para o amortecimento, justificado pelo equilíbrio de momentos das forças viscosas ou pela equivalência da energia total dissipada. Temos então:

```
var('k, kt')
kt = k*L^2
kt1=kt(k=5000, L=0.75)
```

```
kt2=kt(k=5000, L=0.25)
show((kt1, kt2))
```

(2812.500000000000, 312.500000000000)

A rigidez torcional total é

```
ktt= kt1+kt2
show(ktt)
```

3125.000000000000

Aplicando a mesma fórmula para o amortecimento

```
ct=kt(k=1000, L=0.25)
show(ct)
```

62.5000000000000

## Grandezas dinâmicas

Podemos então calcular a frequência natural, razão de amortecimento, etc. etc.

A frequência natural é  $\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{k_t/J_{eq}}$

```
wn = sqrt(ktt/Jeqn)
fn = wn/N(2*pi)
show((wn, fn))
```

(50.0000000000000, 7.95774715459477)

A razão de amortecimento é  $\zeta = c/c_c$ ,  $c_c = 2m\omega_n$ ,

```
cc = 2*Jeqn*wn
c = 1000
zeta = c/cc
show(zeta)
```

8.00000000000000

O sistema então é muito superamortecido! Provavelmente não era o plano original, mas como eu tive que chutar um valor de massa na hora, deu no que deu. Como o sistema

está em vibração forçada, isto não influencia em nada o cálculo, exceto no fato de que as amplitudes de vibração serão pequenas.

A razão de frequências é  $r = \omega/\omega_n$ , então

```
omega=1000*2*N(pi)/60  
show(omega)  
r=omega/wn  
show(r)
```

104.719755119660

2.09439510239320

O fator de amplificação é

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

o que dá entao

```
magf = 1/sqrt((1-r^2)^2+(2*zeta*r)^2)  
show(magf)
```

0.0296903270388967

No caso, deslocamento estático é  $\delta_{st} = M_0/k_t$ , então (em radianos)

```
deltast = 100/ktt  
show(deltast)
```

0.0320000000000000

A amplitude do movimento forçado é dada por  $X = \text{Mag}_f \delta_{st}$  (em radianos)

```
X = deltast*magf  
show(X)
```

0.000950090465244696

O ângulo de fase é dado por

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \right)$$

## Resposta total

```
phi = arctan2(2*zeta*r, 1 - r^2)
show(phi)
```

1.67151253456978

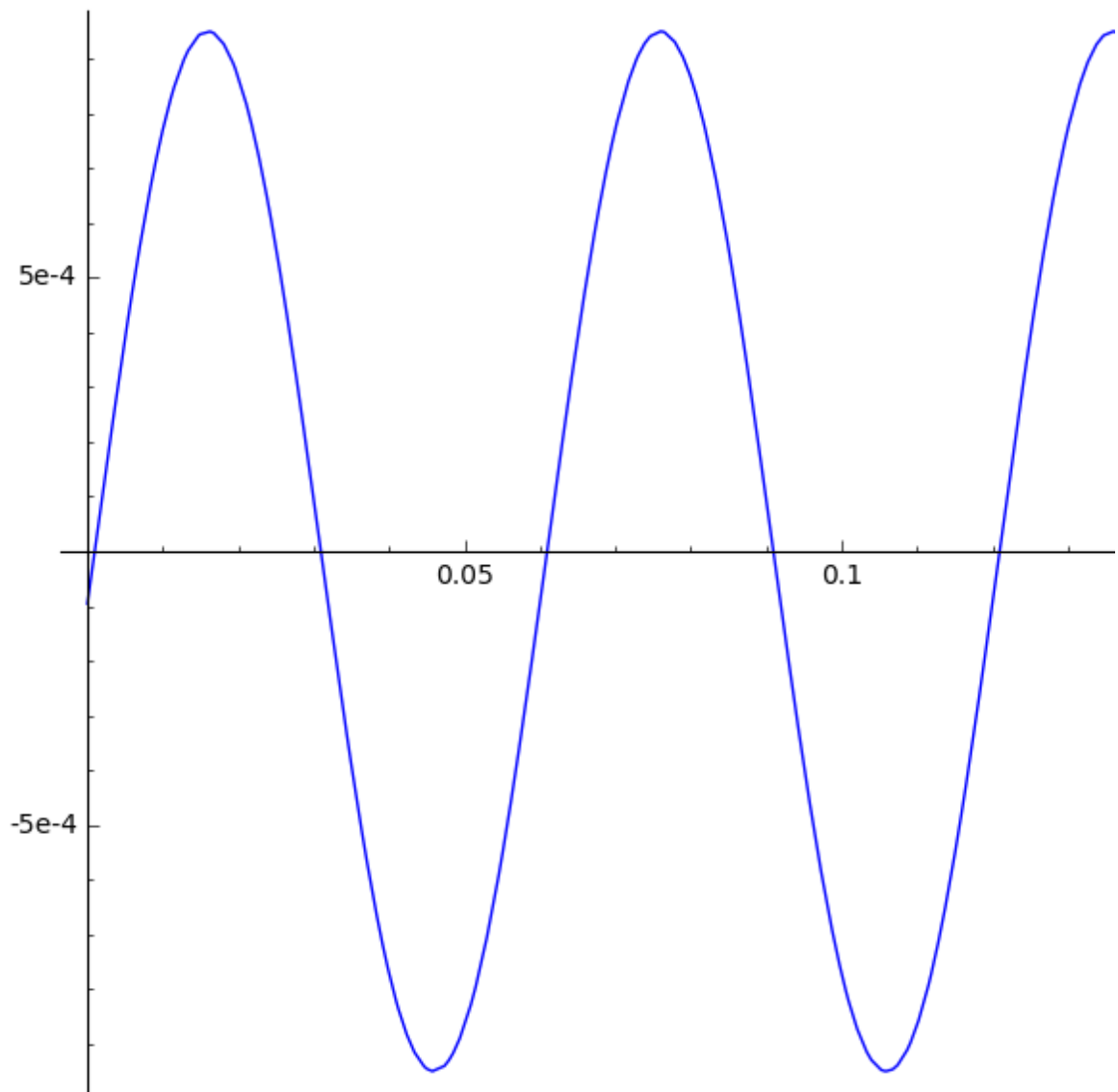
A resposta total é  $\theta(t) = \Theta \cos(\omega t - \phi)$ , assim

```
theta(t) = X*cos(omega*t - phi)
show(theta)
```

$t \mapsto 0.000950090465244696 \cos(104.719755119660 t - 1.67151253456978)$

Para ilustrar apenas,

```
plot(theta, (t, 0, 6*pi/omega))
```

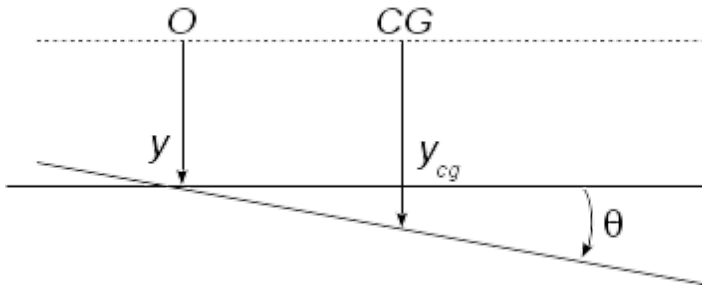


### Questão 3

Este é claramente um problema com dois graus de liberdade, que, por não oscilar em torno do centro de gravidade, deve apresentar em suas equações de movimento com acoplamento dinâmico, se escritas em termo do deslocamento vertical e da rotação em torno do ponto  $O$ .

Vamos fazer um esquema simplificado do aerofólio, deslocado de sua posição de repouso





Esqueci de colocar a distância  $e$  entre  $O$  e o centro de gravidade, e também esqueci de colocar as forças. Agora fica assim mesmo, por preguiça...

O equilíbrio de forças na direção vertical é  $\sum F_y = m\ddot{y}_{CG}$ . É claro que  $y_{CG} = y + e\theta$ , e portanto  $\ddot{y}_{CG} = \ddot{y} + e\ddot{\theta}$ . A equação de movimento na direção vertical é então:

$$m(\ddot{y} + e\ddot{\theta}) = -ky,$$

ou,

$$m\ddot{y} + me\ddot{\theta} + ky = 0.$$

A equação de equilíbrio de momentos é  $\sum M_{CG} = J_{CG}\ddot{\theta}$ . Como o momento é um vetor livre, o momento em relação ao centro de gravidade devido a rotação é dado por  $-k_t\theta$ . O momento devido ao deslocamento  $y$  é  $kye$ . O somatório dos momento é portanto:

$$J_{CG}\ddot{\theta} = -k_t\theta + kye.$$

Pelo teorema dos eixos paralelos,  $J_0 = J_{CG} + me^2$ . A equação de movimento torna-se

$$(J_0 - me^2)\ddot{\theta} + k_t\theta - kye = 0.$$

O sistema de equações que descreve o movimento do sistema pode ser escrito como

$$\begin{cases} m\ddot{y} + me\ddot{\theta} + ky = 0 \\ (J_0 - me^2)\ddot{\theta} + k_t\theta - kye = 0 \end{cases}$$

Como sempre, vamos supor que as soluções são harmônicas e em fase,  $y(t) = Y \cos(\omega t + \phi)$ , e  $\theta(t) = \Theta \cos(\omega t + \phi)$ . Introduzindo nas equações de movimento, ficamos com

$$\begin{cases} (k - m\omega^2)Y - me\omega^2\Theta = 0 \\ ((k_t - \omega^2(J_0 - me^2))\Theta - keY) = 0 \end{cases}$$

Claro que para tenhamos solução não trivial, o determinante do sistema de equações de deve ser nulo, isto é:

$$\begin{vmatrix} k - m\omega^2 & -m\omega^2 \\ -ke & k_t - \omega^2(J_0 - me^2) \end{vmatrix} = 0$$

A equação característica é

$$(k - m\omega^2)(k_t - \omega^2(J_0 - me^2)) - kme^2\omega^2 = 0$$

ou

$$kk_t - k\omega^2(J_0 - me^2) + k_tm\omega^2 + m\omega^4(J_0 - me^2) - kme^2\omega^2 = 0$$

que, explicitando em função de  $\omega$ , fica

$$(J_0 - me^2)m\omega^4 - (J_0k + mk_t)\omega^2 + kk_t = 0$$

que é uma equação biquadrática para as frequências naturais  $\omega_1^2$  e  $\omega_2^2$ .

As raízes desta equação são,

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{J_0k + mk_t \pm \sqrt{(J_0k + mk_t)^2 - 4kk_t(J_0 - me^2)}}{2(J_0 - me^2)}$$

Daqui para a frente vamos usar  $\omega_1$  e  $\omega_2$  como as raízes da equação característica, sem carregar os valores literais acima, por motivos óbvios.

Do sistema de equações de movimento, temos que

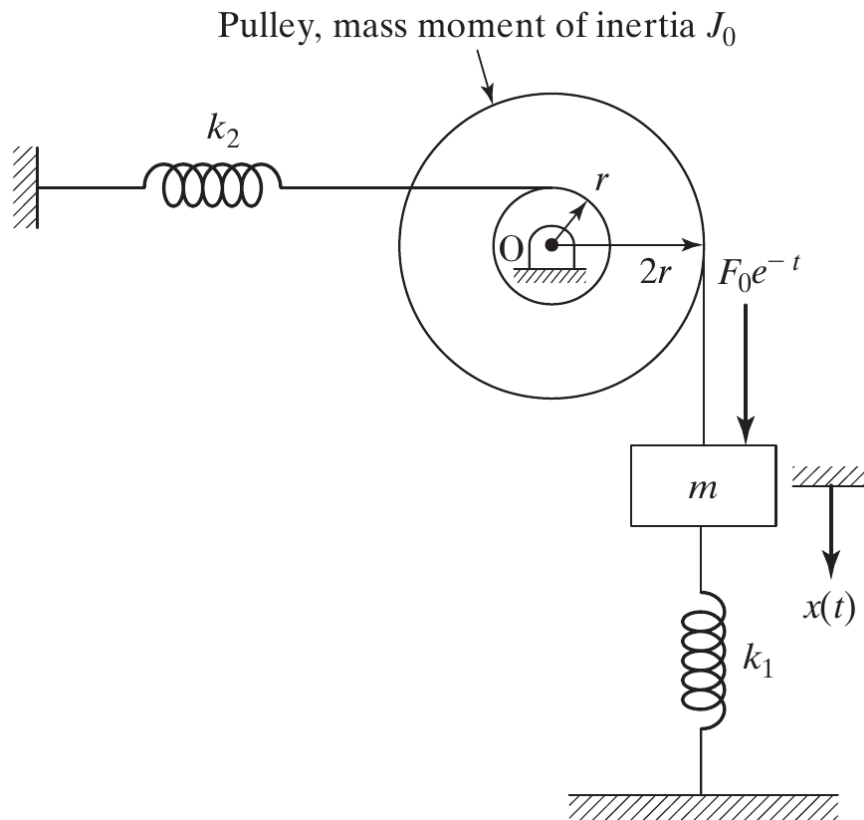
$$(K - m\omega^2)Y - me\omega^2\Theta = 0$$

Temos então que os modos normais são dados pelas razões de amplitude:

$$r_1 = \frac{\Theta^{(1)}}{Y^{(1)}} = -\frac{k - m\omega_1^2}{me\omega_1^2}, \quad r_2 = \frac{\Theta^{(2)}}{Y^{(2)}} = -\frac{k - m\omega_2^2}{me\omega_2^2}$$

## Questão 4

Este é um problema com um único grau de liberdade, submetido a uma força não periódica. Devido ao que é dado no formulário, fica claro que temos que usar a integral de Duhamel para resolvê-lo. Para nossa sorte, o sistema não tem amortecimento, isto é,  $\zeta = 0$ .



Antes disto, é claro, precisamos decidir qual coordenada generalizada empregar e calcular as grandezas equivalentes correspondentes à esta coordenada. As duas coordenadas óbvias são a posição angular da polia e a posição da massa  $m$ . Vamos adotar a posição da massa  $m$ , só por que é o que está desenhado na figura. Empregar a rotação do tambor teria uma dificuldade equivalente.

A massa equivalente da polia pode ser calculada pela equivalência da energia cinética. Como o cabo é inextensível, a velocidade angular da polia  $\dot{\theta}$  e a velocidade linear da massa estão relacionadas por  $\dot{x} = 2\dot{\theta}r$ . Podemos escrever então

$$\frac{1}{2}m_{\text{eq}}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2,$$

e, substituído a relação cinemática entre as velocidades,

$$m_{\text{eq}}(2\dot{\theta}r)^2 = J_0\dot{\theta}^2,$$

cancelando  $\dot{\theta}$ , a massa equivalente da polia é

$$m_{\text{eq}} = \frac{J_0}{4r^2}$$

Do enunciado,

$$J_0 = 1$$

```
r = 0.55
meqp = J0/(4.0*r^2)
show(meqp)
```

0.826446280991735

A massa equivalente total é então

```
m = 10
meq = m + meqp
show(meq)
```

10.8264462809917

A rigidez equivalente pode ser calculada, ou calculando uma rigidez equivalente para a mola 2 e somando-a à rigidez da mola, 1, já que as duas molas atuam em paralelo, ou simplesmente fazendo a equivalência da energia potencial elástica total do sistema. Vamos seguir este segundo caminho.

Admitindo um deslocamento  $x_{eq}$ , a energia potencial elástica total na mola  $k_1$  é  $\frac{1}{2}k_1x_{eq}^2$ .

Supondo o mesmo deslocamento linear  $x_{eq}$ , a rotação da polia é  $\theta = x_{eq}/2r$ , igualando este ângulo ao à rotação correspondente à mola  $k_2$ ,  $\theta = x_2/r$ , temos que  $x_2 = x_{eq}/2$ .

A rigidez equivalente é então dada por

$$\frac{1}{2}k_{eq}x_{eq}^2 = \frac{1}{2}k_1x_{eq}^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\frac{x_{eq}}{2}\right)^2,$$

disto obtemos que

$$k_{eq} = k_1 + \frac{k_2}{4}.$$

Do enunciado temos que

```
k1 = 1000.0
k2 = 550.0
keq = k1 + k2/4
show(keq)
```

1137.50000000000

A frequência natural é calculada por  $\omega_n = \sqrt{k_{eq}/m_{eq}}$ , assim

```
wn = sqrt(keq/meq)
show(wn)
```

10.2502094560614

A força aplicada ao sistema é  $F_0 e^{-t}$ , que, claramente, não é periódica. Pelo que temos disponível no formulário, dá para tratar este problema usando a integral de convolução,

$$x_p(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau$$

.

No caso, não há amortecimento, portanto  $\zeta = 0$ , o que implica que  $\omega_d = \omega_n$ , e a fórmula simplifica-se bastante para

$$x_p(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau$$

.

Pelo enunciado,  $F(t) = F_0 e^{-t}$ , e portanto,  $F(\tau) = F_0 e^{-\tau}$ , assim,

$$x_p(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F_0 e^{-\tau} \sin \omega_n(t-\tau) d\tau,$$

ou

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m\omega_n} \int_0^t e^{-\tau} \sin \omega_n(t-\tau) d\tau.$$

Esta integral não é trivial, mas, *coincidentemente*, no formulário existe a seguinte expressão,

$$\int_0^x e^{-y} \sin(a(x-y)) dy = \frac{ae^{-x}}{a^2 + 1} - \frac{a \cos(ax) - \sin(ax)}{a^2 + 1},$$

Note que fazendo  $x = t$ ,  $a = \omega_n$  e  $y = \tau$ , a integral é mesma que precisamos calcular, assim:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m\omega_n} \left( \frac{\omega_n e^{-t}}{\omega_n^2 + 1} - \frac{\omega_n \cos(\omega_n t) - \sin(\omega_n t)}{\omega_n^2 + 1} \right)$$

ou, simplificando,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m\omega_n(\omega_n^2 + 1)} (\omega_n e^{-t} - \omega_n \cos(\omega_n t) - \sin(\omega_n t))$$

Como o sistema parte do repouso, a solução particular é a solução total.

Neste caso particular, temos:

```
F0 = 50
xp(t) = (F0/(meq*wn*(wn^2+1)))*(wn*e^(-t)-wn*cos(wn*t)-
sin(wn*t))
show(xp(t))
```

$$-0.0435416254340668 \cos(10.2502094560614 t) + 0.0435416254340668 e^{-t}$$

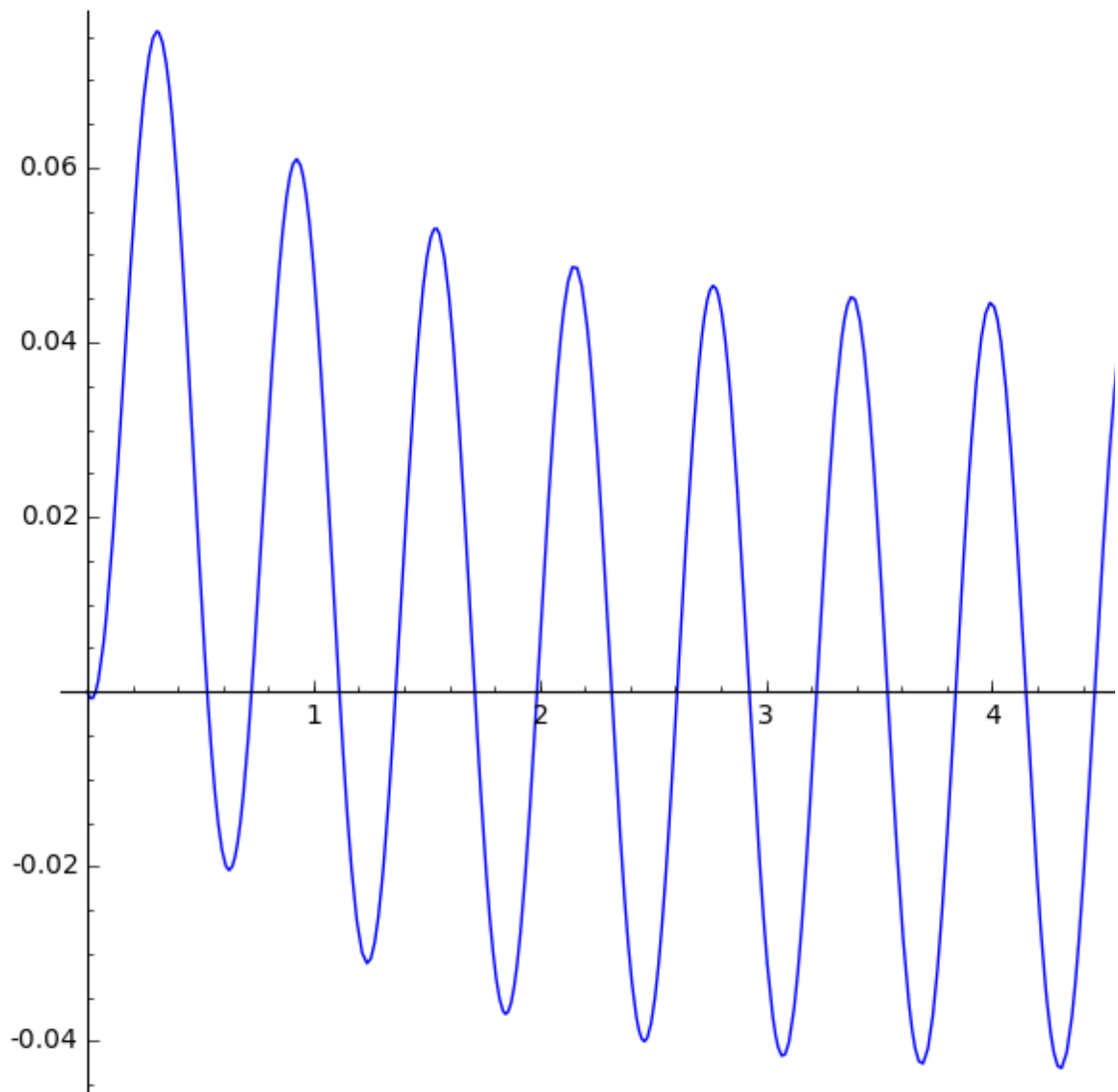
Para visualizar o jeitão da resposta, vamos calcular o período natural para ter uma noção de quanto tempo precisamos plotar.

```
fn = wn/(2*N(pi))
taun=1/fn
show((fn, taun))
```

$$(1.63137150265945, 0.612981162396061)$$

Vamos plotar a resposta por 6 segundos, mais ou menos 10 períodos naturais.

```
plot(xp, (t, 0, 6))
```



Percebam que, como não há amortecimento, a amplitude (pico a pico) não diminui ao longo do tempo, mas como a força vai diminuindo ao longo do tempo, a posição de equilíbrio vai tendendo a voltar para a origem.