

# Vibrações Mecânicas

## Questão 1)

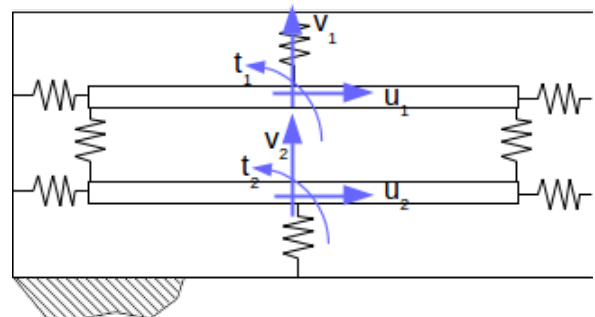
### Número de graus de liberdade

Como as duas barras tem movimento no plano, e são corpos rígidos com inércia rotativa, cada uma tem três graus de liberdade. O sistema portanto tem **6 graus de liberdade**.

Quaisquer 6 coordenadas generalizadas independentes podem ser usadas, no entanto, a melhor escolha é a mais natural, aquela na qual a matriz de massa é completamente desacoplada. Vamos tomar, para cada barra, os deslocamentos horizontal e vertical do centro de massa, bem como o ângulo de rotação da barra em relação à posição horizontal, conforme mostrado na figura.

Esta escolha de coordenadas deve-se ao fato de que uma aceleração em qualquer uma das coordenadas escolhidas não causa nenhuma aceleração em relação às outras.

Vamos ordenar os graus de liberdade desta forma:  $(u_1, v_1, \theta_1, u_2, v_2, \theta_2)$ , onde  $\theta_1$  e  $\theta_2$  representam os ângulos de rotação mostrados na figuras com  $t_1$  e  $t_2$ .



### Matriz de massa

A matriz de massa é obtida diretamente, por inspeção:

```
%hide
```

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_0 \end{bmatrix}$$

Apenas para enfeitar, podemos reescrevê-la como

%hide

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l^2/12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l^2/12 \end{bmatrix}$$

## Matriz de rigidez

Vamos usar o método dos coeficientes de influência para calcular a matrix de rigidez. Em primeiro lugar, vamos lembrar que um deslocamento transversal na extremidade de uma mola não causa esforços na mesma, pois o aumento de comprimento é desprezível. Lembremos também que precisamos aplicar um deslocamento unitário na direção generalizada de um grau de liberdade  $j$ , mantendo todos os outros graus de liberdade fixos. A força necessária na direção do grau de liberdade  $i$  para manter esta configuração em equilíbrio é o coeficiente de rigidez  $k_{ij}$ .

Examinando a figura, rapidamente podemos perceber que, dado um deslocamento unitário na direção de  $u_1$ , mantendo os outros constantes, apenas aparece uma força horizontal igual a  $-2k$ , na direção de  $u_1$ , e nenhum outro grau de liberdade é afetado. A equação de movimento para  $u_1$  é completamente desacoplada das outras, e  $k_{u_1, u_1} = 2k$ .

Analogamente,  $k_{u_2, u_2} = 2k$ .

Todos os outros coeficientes de influência que incluem os graus de liberdade  $u_1$  e  $u_2$  são nulos.

Aplicando um deslocamento unitário vertical na barra superior, isto é, fazendo  $v_1 = 1$ , mantendo todos os outros nulos, aparece, na direção vertical, uma força igual a  $-3k$  na barra superior e uma força igual a  $2k$  na barra inferior. Como as forças são iguais nas duas extremidades da barra e em direções opostas, o momento é nulo. Assim:  $k_{v_1, v_1} = 3k$ ,  $k_{v_2, v_1} = -2k$ ,  $k_{v_1, v_2} = -2k$ , por simetria.

Procedendo analogamente para a barra inferior, obtemos  $k_{v_2, v_2} = 3k$ .

Voltando para a barra superior. Uma rotação unitária no sentido antihorário, faz com que a extremidade direita da barra eleve-se de  $l/2\theta_1 = l/2$ , já que os deslocamentos são pequenos, enquanto a extremidade esquerda desce do mesmo valor. Como a barra inferior não se move, em cada extremidade da barra aparece a força  $kl$ , apontando é claro em direções opostas. Como as forças são iguais, paralelas e em sentidos opostos, formam um binário de valor  $-kl^2$ . Assim, é claro que  $k_{\theta_1, \theta_1} = kl^2$ .

As reações destas forças agem sobre a barra inferior, é claro, com a direção invertida, produzindo portanto um binário de valor  $kl^2$ , portanto,  $k_{\theta_1, \theta_2} = k_{\theta_2, \theta_1} = -kl^2$ .

Com o mesmo raciocínio aplicado à barra inferior,  $k_{\theta_2, \theta_2} = kl^2$ .

Todos os outros coeficientes de influência são nulos, e a matriz de rigidez é portanto

%hide

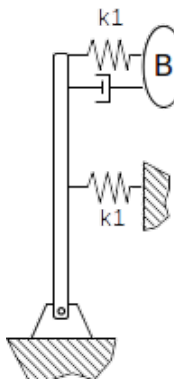
$$\begin{bmatrix} 2k & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3k & 0 & 0 & -2k & 0 \\ 0 & 0 & kl^2 & 0 & 0 & -kl^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2k & 0 & 0 \\ 0 & -2k & 0 & 0 & 3k & 0 \\ 0 & 0 & -kl^2 & 0 & 0 & kl^2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tem muitas curiosidades, como o fato da submatriz associada às rotações ser singular! Isto tem um significado importante, pensem sobre isto.

## Questão 2)

### Equações de movimento

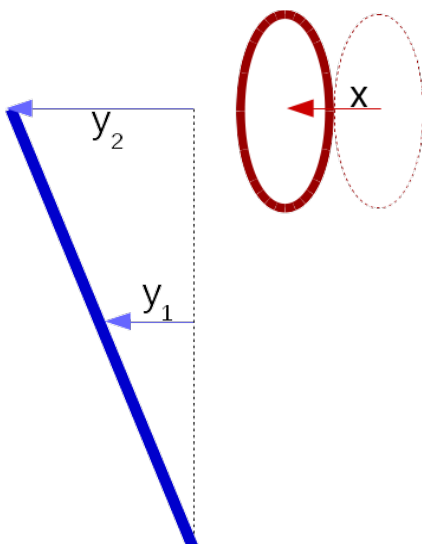
Claramente este é um problema com dois graus de liberdade. Dentre as várias possibilidades, vou usar como coordenadas generalizadas a rotação barra em relação à vertical, no sentido antihorário, e o deslocamento horizontal do bloco  $B$ , em relação à posição de equilíbrio.



Vamos usar o diagrama a seguir para escrever as equações de movimento, usando as leis de Newton e suas consequências.

Vamos supor, para facilitar, que  $y$  seja maior do que  $x$ . Cuidado que na figura ao lado as duas molas estão como  $k_1$ , a figura está errada.  $k_1$  é a mola inferior,  $k_2$  a de cima.

Vamos ver um diagrama dos deslocamentos que importam no problema. Perceba que para pequenos ângulos,  $y_2 = l\theta$ , e  $y_1 = l\theta/2$ .



Da figura é óbvio que o aumento de comprimento da mola 1 é  $l\theta/2$ , enquanto que o da mola 2 é  $l\theta - x$ .

Vamos supor que o aumento de  $y_2$  é maior do que  $x$ , e a mesma coisa para as suas derivadas temporais.

Assim, as forças na barra agem para a direita, enquanto que na massa, agem para a esquerda. Fazendo o somatório de forças para o bloco  $B$ , temos:

$$m_B \ddot{x} = k_2(l\theta - x) + c(l\dot{\theta} - \dot{x})$$

Ou, rearrumando,

$$m_B \ddot{x} + c\dot{x} - cl\dot{\theta} + k_2x - k_2l\theta = 0$$

Vamos fazer somatório de momentos da barra em relação ao pivot,

$$J_p \ddot{\theta} = -k_1(l/2)^2 \theta - k_2 l(l\theta - x) - cl(l\dot{\theta} - \dot{x})$$

Podemos reescrever como,

$$J_p \ddot{\theta} + cl^2 \dot{\theta} - cl^2 \dot{x} + \frac{1}{4} k_1 l^2 \theta + k_2 l^2 \theta - k_2 l^2 x = 0$$

Podemos colocar as duas equações diferenciais ordinárias com um sistema de EDOs, na forma matricial

%hide

$$\begin{bmatrix} m_b & 0 \\ 0 & J_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -cl \\ -cl^2 & cl^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 l \\ -k_2 l^2 & (k_1/4 + k_2)l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

O sistema mostrado acima não tem as matrizes de rigidez e amortecimento simétricas, mas isto é facilmente resolvível dividindo a segunda equação por  $l$ , o que leva ao sistema mostrado a seguir. Isto não é *estritamente necessário para a solução do problema!* Só faço isto por preciosismo.

%hide

$$\begin{bmatrix} m_b & 0 \\ 0 & J_p/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -cl \\ -cl & cl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 l \\ -k_2 l & (k_1/4 + k_2)l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

O momento de inércia de uma barra em relação à extremidade é  $ml^2/3$ , como deduzimos eu sala de aula, ou pelo teorema dos eixos paralelos. Não está dado na prova, ninguém perguntou, então acho que todo mundo sabe disto. Vamos colocar isto no sistema acima só para remover uma variável desnecessária.

%hide

$$\begin{bmatrix} m_b & 0 \\ 0 & ml/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -cl \\ -cl & cl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 l \\ -k_2 l & (k_1/4 + k_2)l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Percebam outra coisa, que também não é necessária para a solução, e que eu não vou usar para nada, apenas para ilustração. Como o deslocamento da extremidade da barra,  $y_2$ , é igual a  $l\theta$ , podemos colocar em evidência o  $l$  que aparece em todos os coeficientes da segunda equação, ficando com

%hide

$$\begin{bmatrix} m_b & 0 \\ 0 & m/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ l\ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -cl \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ l\dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 l \\ -k_2 l & (k_1/4 + k_2)l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ l\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Que obviamente é igual a

%hide

$$\begin{bmatrix} m_b & 0 \\ 0 & m/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -cl \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_2 & -k_2l \\ -k_2l & (k_1/4 + k_2)l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Que são as equações do sistema para as variáveis  $x$  e  $y_2$ , obviamente. Qualquer par de coordenadas generalizadas é aceitável, mas vamos resolver em função de  $x$  e  $\theta$ .

## Matriz de impedância mecânica

Como este é um problema de vibração forçada, é mais fácil resolvê-lo usando a matriz de impedância mecânica. Conforme dado no formulário,  $Z(i\omega) = -\omega^2 m_{rs} + i\omega c_{rs} + k_{rs}$ , mas vamos fazer as operações todas na forma matricial para ficar mais bonito.

```
mb = 3
m = 4
c = 240
l = 1
k1 = 1e6
k2 = 0.33e6
```

```
M = matrix([[mb, 0], [0, m*l/3]])
C = matrix([[-c, -c*l], [-c*l, c*l]])
K = matrix([[k2, -k2*l], [-k2*l, (k1/4+k2)*l]])
show(M, C, K)
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -240 & -240 \\ -240 & 240 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 330000.000000000 & -330000.000000000 \\ -330000.000000000 & 580000.000000000 \end{pmatrix}$$

A frequência de excitação é 65Hz, em radianos por segundo

```
omega = N(65*2*pi)
show(omega)
```

408.407044966673

A matriz de impedância mecânica pode ser escrita diretamente como  $Z(i\omega) = K - \omega^2 M + i\omega C$ , onde  $K$ ,  $C$  e  $M$  são as matrizes de rigidez, amortecimento e massa do sistema. No nosso caso temos.

```
Z = K - omega^2*M + CDF(I)*omega*C
show(Z)
```

$$\begin{pmatrix} -170388.943135 - 98017.690792i & -330000.0 - 98017.690792i \\ -330000.0 - 98017.690792i & 357604.914162 + 98017.690792i \end{pmatrix}$$

## Cálculo de deslocamentos

A magnitude da força no bloco  $B$  é 1750N, portanto o vetor de forças externas aplicadas é

```
F0 = matrix([1750, 0]).T
show(F0)
```

$$\begin{pmatrix} 1750 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A inversa da matriz de impedância mecânica é

```
Zinv = Z.inverse()
show(Zinv)
```

$$\begin{pmatrix} -1.80094871397 \times 10^{-06} + 7.41567929217 \times 10^{-07}i & -1.68623511472 \\ -1.68623511472 \times 10^{-06} + 6.52881001616 \times 10^{-07}i & 1.02296339776 \end{pmatrix}$$

Multiplicando pelo vetor de forças externas temos os deslocamentos, e fases, já que estamos trabalhando com números complexos, do sistema.

```
X = Zinv*F0
x = X[0][0]
theta = X[1][0]
show(x)
show(theta)
```

$$\begin{aligned} & -0.00315166024945 + 0.00129774387613i \\ & -0.00295091145076 + 0.00114254175283i \end{aligned}$$

A magnitude e a fase (em radianos e em graus!) de do deslocamento do bloco são portanto

```
show(x.abs())
show(x.arg())
show(x.arg()*180/N(pi))
```

0.00340838693461

2.75098522452

157.619842868

Isto é, mais ou menos 3,4 milímetros e 158 graus.

Fazendo a mesma coisa para a rotação da barra,

```
show(theta.abs())
show(theta.abs()*180/N(pi))
show(theta.arg())
show(theta.arg()*180/N(pi))
```

0.00316437672334

0.181305431037

2.7721843023

158.834460554

Isto é, mais ou menos uns 0,18 graus, defasada de 159 graus.

### Observação:

Como eu sempre digo em aula, computacionalmente, calcular a inversa e multiplicar pelo vetor é muito ruim, apesar de funcionar para problemas pequenos. O que você realmente quer é resolver o sistema de equações  $ZX = F_0$ . É claro que isto também pode ser feito facilmente.

Resolvendo o sistema para os deslocamentos (complexos), temos

```
from numpy import linalg
X = linalg.solve(Z, F0)
show(X)
```

$[-0.00315166+0.00129774j]$

$[-0.00295091+0.00114254j]$

Que é o mesmo resultado que obtivemos acima, ainda bem. O jeito certo de fazer é

este, fiz com a inversa apenas para ficar mais compatível com o livro.

### Questão 3)

Este é um problema de desbalanceamento rotativo, onde não conhecemos quase nada. A fórmula para o desbalanceamento rotativo é dada no formulário

$$\frac{Mx}{me} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}},$$

já substituindo a fórmula para  $|H(i\omega)|$ .

Vamos supor que o amortecimento seja baixo e que a amplitude máxima de vibração ocorra para muito próximo da ressonância, isto é para  $r = 1$ . É dado no enunciado que, neste caso, a amplitude de vibração é 14 mm. Podemos escrever então

$$\frac{M14}{me} = \frac{1}{2\zeta}.$$

Sabemos também que, para frequências muito altas, a amplitude é igual a 3.0 mm. Frequências muito altas significam frequências de excitação muito acima da frequência natural, isto é  $r \gg 1$ . Neste caso, podemos dizer que 1 é desprezível em relação a  $r^2$  e primeiro termo dentro da raiz torna-se  $r^4$ . Além disto, o segundo termo torna-se  $4\zeta^2 r^2$ . Como  $\zeta$  é pequeno e, além disto,  $r$  é muito grande e portanto  $r^4 \gg r^2$ , podemos desprezá-lo frente ao primeiro.

A equação é então

$$\frac{M3.9}{me} = \frac{r^2}{\sqrt{r^4}} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

É claro então que

$$\frac{M}{me} = \frac{1}{3.9},$$

e, substituindo isto na primeira equação, obtemos

$$\frac{1}{2\zeta} = \frac{14}{3.9}$$

ou

$$\zeta = \frac{3.9}{28},$$

o que dá



```
z = 3.9/28  
show(z)
```

evaluate

0.139285714285714

O que não é nem tão pequeno assim, mas de outro jeito não dá para resolver.