2016.2--1ºEE-TurmaA

Questão 1

Do enunciado, vemos que o sistema tem atrito de Coulomb, e os dados são como dados a seguir,

```
m = 0.75
X0 = 0.150
deltat = 3.5
```

Para um problema de vibração livre com atrito de Coulomb, a resposta é formada por uma sequência de semi-ciclos, com frequência ω_n, cuja amplitude decai linearmente.

Como é dito no enunciado, o sistema para após 20 semi-ciclos, isto é, 10 ciclos. Vamos imaginar que a posição de repouso final é aproximadamente a posição de equilíbrio, ou que, caso a massa pare afastada da posição de equilíbrio, o tempo que falta para completar o último ciclo é pequeno em relação ao tempo total decorrido. Assim, temos então que 10 ciclos levam 3.5 segundos, portanto, o tempo gasto em um ciclo, isto é, um período, é 0.35 segundos.

Com isto podemos calcular rapidamente a frequência natural do sistema.

```
r = 20
tau = deltat/(r/2.0)
wn = 2*N(pi)/tau
show(wn)
```

$$17.9519580205131$$

A frequência natural de um sistema em vibração livre com atrito de Coulomb é a mesma que em um sistema com atrito viscoso, isto é $\omega_n = \sqrt{k/m}$, assim, a rigidez é dada por $k = \omega_n^2 m$.

```
k = wn^2*m
show(k)
```

$$241.704597577699$$

Como dado no formulário, o número de semiciclos até a parada é dado por

$$r \leq \frac{x_0 - \frac{\mu N}{k}}{\frac{2\mu N}{K}}$$

Considerando esta equação como uma igualdade, podemos resolver para μ,

$$r\frac{2\mu N}{k} = x_0 - \frac{\mu N}{k},$$

$$\frac{\mu N}{k}(2r+1) = x_0,$$

$$\mu = \frac{x_0 k}{N(2r+1)} = \frac{x_0 k}{mg(2r+1)},$$

```
g = 9.8
mu = (X0*k)/(m*g*(2*r+1))
show(mu)
```

0.120310899740019

Questão 2

Para um sistema com amortecimento histerético, a energia dissipada por ciclo é dada por $\Delta W = \pi h X^2$. É dado no enunciado que, quando a amplitude de vibração é igual a 0.020 metros, a energia dissipada por ciclo é 1.15 Joules. A massa é igual a 23 kg, e δ_{st}, causado pelo peso próprio, é igual a 4 milímetros.

Da fórmula da energia dissipada por ciclo, podemos calcular imediatamente o coeficiente de amortecimento histerético,

```
deltaw = 1.15
X = 0.020
h = deltaw/(N(pi)*X^2)
show(h)
```

915.140922778398

Como $\delta_{\text{st}} = F_0/k = mg/k$, $k = mg/\delta_{\text{st}}$ e assim, $\omega_n = \sqrt{k/m}$, ou $\omega_n = \sqrt{mg/(\delta_{\text{st}} m)}$ e, finalmente, $\omega_n = \sqrt{g/\delta_{\text{st}}}$.

Sabemos que para amortecimento histerético de baixo valor (o que estamos supondo aqui) a frequência natural é a mesma que a frequência natural de um sistema não amortecido.

No caso, temos,

```
m = 23
g = 9.8
dst = 0.004
wn = sqrt(g/dst)
show(wn)
```

$$49.4974746830583$$

Sabemos também que, o amortecimento equivalente pode ser calculado por $\omega c = h$, assim,

```
c = h/wn
show(c)
```

$$18.4886386353691$$

Para temos uma ideia de valor do amortecimento, vamos calcular ζ.

```
cc = 2*m*wn
zeta = c/cc
show(zeta)
```

$$0.00812015015774976$$

Que é menor do que 1%, o que é razoavelmente pequeno. Para valores pequenos de amortecimento, um sistema com amortecimento histerético se comporta como um sistema com amortecimento viscos, com $\omega_d \approx \omega_n$, então a resposta para vibração livre é dada por

$$x(t) = Xe^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_n t - \phi),$$

Como estamos considerando o movimento a partir do ciclo em que foi medida a amplitude de 0.20 metros, consideramos que este seja o deslocamento inicial, e que a velocidade incial seja nula. Assim, a amplitude da envoltória, X, é dada por

$$X = \frac{\sqrt{x_0^2\omega_n^2}}{\omega_d} = x_0.$$

Esta fórmula esta no formulário, e já desprezamos todos os termos com velocidade inicial. Aplicando a mesma consideração para a ângulo de fase,

$$\phi = \arctan \frac{\zeta \omega_n x_0}{x_0 \omega_d} = \arctan \zeta \approx 0.$$

Conforme o enunciado, a amplitude de vibração deve ser menor do que 0.1% da amplitude incial. Assim, vamos considerar a amplitude da envoltória exponencial,

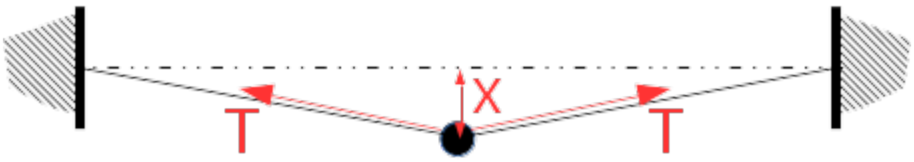
$$0.001X = Xe^{-\zeta\omega_n t}, \qquad 0.001 = e^{-\zeta\omega_n t}, \qquad \ln(0.001) = -\zeta\omega_n t, \qquad t =$$

```
t = -log(0.001)/(zeta*wn)
show(t)
```

17.1865949191794

Portanto o sistema leva mais ou menos 17 segundos até que a amplitude seja menor do que a tolerância especificada.

Questão 3



Na figura acima consideramos a massa deslocada de um valor x, que será considerado pequeno. Claramente, para este deslocamento lateral será criada uma força de restauração com magnitude igual a $2T \sin\theta$, onde θ é o ângulo que o fio faz com a horizontal.

Como x é pequeno, podemos aproximar o seno de θ como $\sin\theta \approx x/(L/2) = 2x/L$.

A força total de restauração é então

$$2T\sin\theta = 2T\frac{2x}{L} = \frac{4Tx}{L},$$

onde a tração e o comprimento do fio estão dados no enunciado. É claro então que a rigidez do sistema é dada por $k = 4T/L$, assim

```
T = 750
L = 1.5
k = 4*T/L
show(k)
```

2000.00000000000

Precisamos considerara a massa equivalente do fio. Vamos calcular para apenas metade do fio, e depois vamos dobrar o valor. O fio é considerado de seção uniforme, com densidade linear constante. A densidade linear é calculada pela dvisão da massa total do fio por ser comprimento, isto é,

```
mf = 0.150
L = 1.5
rho = mf/L
show(rho)
```

0.100000000000000

Vamos considerar, é claro, que os fios permanecem retos durante a vibração, o que ocorreria se a massa concentrada fosse muito maior do que a do fio, mas não é exatametne o caso, mas segue a vida...

A energia cinética da metade do fio é dada por

$$T = \int_0^{L/2} \frac{1}{2}\dot{x}^2 \rho \, dl,$$

onde ρ é a densidade linear do fio, e $\dot{x}$ é a velocidade transversal de cada ponto. Como todos os pontos movem-se em fase, com a mesma frequência, em movimento harmônico, a magnitude da velocidade em cada ponto é, claramente, ωx, e o deslocamento lateral x pode ser calculado por $2xl/L$, onde l é a distância do ponto considerado à extremidade do fio (uma **variável**), e L o comprimento do fio.

A energia cinética do fio é então,

$$T = \frac{1}{2}\int_0^{L/2} \frac{4x^2l^2}{L^2}\omega^2 \rho \, dl = \frac{1}{2}\frac{4\rho x^2\omega^2}{L^2}\int_0^{L/2} l^2 \, dl = \frac{1}{2}\frac{4\rho x^2\omega^2}{L^2}\frac{l^3}{3}\bigg|_0^{L/2} =$$

onde $m_f = \rho L$ é a massa do fio. Para as duas metades,

$$T = \frac{1}{2}\frac{m_f\omega^2 x^2}{3}.$$

Comparando este valor com o que corresponde ao de uma massa equivalente, em movimento harmônico e com a mesma frequência,

$$T = \frac{1}{2}\frac{m_f \omega^2 x^2}{3} = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} \omega^2 x^2,$$

a massa equvalente é, claramente,

$$m_{\text{eq}} = \frac{m_f}{3}.$$

Podemos calcular imediatamente a frequência natural do sistema,

```
m = 0.250
mf = 0.150
mt = m + mf/3.0
wn = sqrt(k/mt)
show(wn)
```

$$81.6496580927726$$

A razão de amortecimento é dada no enunciado, sendo igual a 0.01.

Como as paredes tem movimento harmônico na direção vertical, este é um problema de excitação pela base. A amplitude de vibração, neste caso, é dada por,

$$T_d = \frac{X}{Y} = \left(\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

conforme dado no formulário

A frequência de excitação é igual a 15 Hertz, e a amplitude de vibração é igual a 2 milimetros. Assim,

```
f = 15
w = 2*N(pi)*f
r = w/wn
show((r, w, wn))
```

$$(1.15429484714568, 94.2477796076938, 81.6496580927726)$$

A frequência de excitação é próxima da frequência natural do sistema, então podemos crer que teremos uma amplitude de vibração razoável. A razão de amotecimento é dada, e é igual a 0.01

```
zeta = 0.01
zr = (2*zeta*r)^2
Td = sqrt((1+zr)/((1-r^2)^2+zr))
show(Td)
```

$$3.00202427227539$$

A ampltude de vibração da massa é então,

```
Y = 0.002
X = Td*Y
show(X)
```

$$0.00600404854455078$$

Que é mais ou menos 6 milímetros.

Questão 4

Na ressonância, a força no amortecedor viscoso é a única força que equilibra a força externa aplicada. A magnitude da força viscosa é $\omega c X$, onde X é a amplitude de vibração, c é o coeficiente de amortecimento viscosos e ω, **neste caso particular**, é igual a ω_n, pois o sistema está em ressonância.

É dado no enunciado que a frequência de vibração, e portanto a frequência natural, é igual a 440 Hz, a amplitude de vibração é igual a 5 mm e a força aplicada é igual a 1200 Newton. Assim,

$$F_0 = \omega c X, \qquad c = \frac{F_0}{\omega X}.$$

```
f = 440
X = 0.005
w = 2*N(pi)*f
F0 = 1200
c = F0/(X*w)
show((c, w))
```

$$(86.8117871410338, 2764.60153515902)$$

```

```