Vibrações Mecânicas

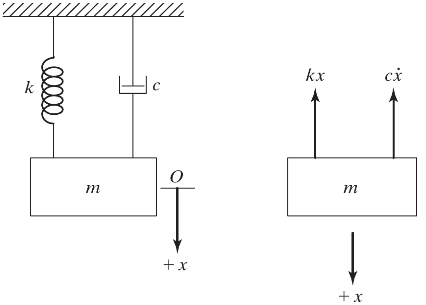
Aula08 – Vibração Livre Amortecida

Ramiro Brito Willmersdorf
ramiro@willmersdorf.net

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco

2018.2

Equação de Movimento



System

Free-body diagram

Supondo a força de amortecimento proporcional à viscosidade,

$$F = -c\dot{x},$$

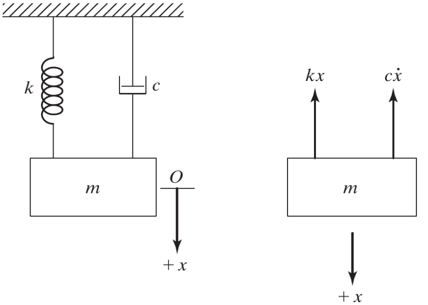
e a equação de movimento é

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - \kappa x$$

ou

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = 0.$$

Equação de Movimento



System

Free-body diagram

Supondo a força de amortecimento proporcional à viscosidade,

$$F = -c\dot{x},$$

e a equação de movimento é

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - \kappa x$$

ou

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = 0.$$

Solução

Supondo a solução $x(t) = Ce^{st}$, a equação característica é

$$ms^2 + cs + k = 0,$$

cujas raízes são

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{\kappa}{m}}.$$

As soluções são então

$$x_1(t) = C_1 e^{s_1 t}, \qquad x_2(t) = C_2 e^{s_2 t}.$$

Solução

Supondo a solução $x(t) = Ce^{st}$, a equação característica é

$$ms^2 + cs + k = 0,$$

cujas raízes são

$$s_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{\kappa}{m}}.$$

As soluções são então

$$x_1(t) = C_1 e^{s_1 t}, \qquad x_2(t) = C_2 e^{s_2 t}.$$

Solução Geral

A solução geral é $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, ou

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\frac{c}{2m}+\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{\kappa}{m}}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{c}{2m}-\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2-\frac{\kappa}{m}}\right)t}.$$

As constantes C_1 e C_2 devem ser calculadas a partir das condições iniciais.

Amortecimento Crítico

O amortecimento crítico é o valor para o qual o radical é nulo:

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{\kappa}{m} = 0$$

ou

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{\kappa}{m}} = 2\sqrt{\kappa m}$$

ou ainda

$$c_c = 2m\omega_n.$$

Razão de Amortecimento

Uma medida adimensional conveniente do amortecimento é a razão de amortecimento

$$\zeta = \frac{c}{c_c}.$$

Podemos escrever

$$\frac{c}{2m} = \frac{c}{c_c}\frac{c_c}{2m} = \zeta\omega_n,$$

e as raízes como

$$s_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n.$$

A solução geral é então

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t} + C_2 e^{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}$$

A equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = 0.$$

Dividindo tudo por m, obtemos

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{\kappa}{m}x = 0.$$

Claramente,

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 \quad \text{e} \quad \frac{c}{m} = \frac{c_c\zeta}{m} = \frac{2m\omega_n\zeta}{m} = 2\zeta\omega_n,$$

e a equação de movimento pode ser reescrita então como

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0.$$

A equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = 0.$$

Dividindo tudo por m, obtemos

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{\kappa}{m}x = 0.$$

Claramente,

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 \quad \text{e} \quad \frac{c}{m} = \frac{c_c\zeta}{m} = \frac{2m\omega_n\zeta}{m} = 2\zeta\omega_n,$$

e a equação de movimento pode ser reescrita então como

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0.$$

A equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = 0.$$

Dividindo tudo por m, obtemos

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{\kappa}{m}x = 0.$$

Claramente,

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 \quad \text{e} \quad \frac{c}{m} = \frac{c_c\zeta}{m} = \frac{2m\omega_n\zeta}{m} = 2\zeta\omega_n,$$

e a equação de movimento pode ser reescrita então como

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0.$$

Comportamento das Soluções

A natureza das soluções depende do valor dos radicais e portanto do amortecimento.

Para $\zeta = 0$, o sistema não é amortecido.

Para $\zeta > 0$, existem três possibildades:

$\zeta < 1$ sistemas sub amortecidos;

$\zeta = 1$ sistemas criticamente amortecidos;

$\zeta > 1$ sistemas superamortecidos;

Amortecimento Subcrítico, $\zeta < 1$

Neste caso

$$\zeta < 1 \quad \text{ou} \quad c < c_c \quad \text{ou} \quad \frac{c}{2m} < \sqrt{\frac{\kappa}{m}},$$

isto implica que $\zeta^2 - 1 < 0$, e

$$s_1 = \left(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n, \qquad s_2 = \left(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n.$$

A solução geral torna-se

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n t} + C_2 e^{\left(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n t}$$

ou, equivalentemente,

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{C_1 e^{\left(i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n t} + C_2 e^{\left(-i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n t}\right\}$$

Amortecimento Subcrítico, $\zeta < 1$

Neste caso

$$\zeta < 1 \quad \text{ou} \quad c < c_c \quad \text{ou} \quad \frac{c}{2m} < \sqrt{\frac{\kappa}{m}},$$

isto implica que $\zeta^2 - 1 < 0$, e

$$s_1 = \left(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n, \qquad s_2 = \left(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n.$$

A solução geral torna-se

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n t} + C_2 e^{\left(-\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n t}$$

ou, equivalentemente,

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{C_1 e^{\left(i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n t} + C_2 e^{\left(-i\sqrt{1-\zeta^2}\right)\omega_n t}\right\}$$

Solução Geral

Passando para a forma trigonométrica

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{(C_1 + C_2)\cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \right.$$
$$\left.(C_1 - C_2)\, i \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right\}$$

ou, é claro,

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{C_1' \cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + C_2' \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right\}$$

e finalmente,

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \phi_0\right)$$

e

$$x(t) = X e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t - \phi\right)$$

Solução Geral

Passando para a forma trigonométrica

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{(C_1 + C_2)\cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \right.$$
$$\left.(C_1 - C_2)\, i \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right\}$$

ou, é claro,

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{C_1' \cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + C_2' \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right\}$$

e finalmente,

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \phi_0\right)$$

e

$$x(t) = X e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t - \phi\right)$$

Solução Geral

Passando para a forma trigonométrica

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{(C_1 + C_2)\cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \right.$$
$$\left.(C_1 - C_2)\, i \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right\}$$

ou, é claro,

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{C_1' \cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + C_2' \sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right\}$$

e finalmente,

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta\omega_n t}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \phi_0\right)$$

e

$$x(t) = X e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t - \phi\right)$$

Condições Iniciais

As constantes (C_1', C_2'), (X, ϕ) e (X_0, ϕ_0), devem ser determinadas a partir das condições iniciais.

Fazendo $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$,temos

$$C_1' = x_0, \qquad C_2' = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$$

e a solução geral é

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{x_0 \cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right\}$$

Condições Iniciais

As constantes (C_1', C_2'), (X, ϕ) e (X_0, ϕ_0), devem ser determinadas a partir das condições iniciais.
Fazendo $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$,temos

$$C_1' = x_0, \qquad C_2' = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$$

e a solução geral é

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{x_0 \cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right\}$$

Condições Iniciais

As constantes (C_1', C_2'), (X, ϕ) e (X_0, ϕ_0), devem ser determinadas a partir das condições iniciais.
Fazendo $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$,temos

$$C_1' = x_0, \qquad C_2' = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$$

e a solução geral é

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left\{x_0 \cos\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t\right\}$$

Condições Iniciais

Conforme feito anteriormente,

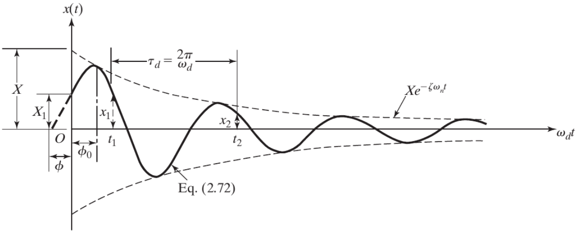
$$X = X_0 = \sqrt{C_1'^2 + C_2'^2} = \frac{\sqrt{x_0^2\omega_n^2 + \dot{x}_0^2 + 2x_0\dot{x}_0\zeta\omega_n}}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}$$

$$\phi_0 = \arctan\left(\frac{C_1'}{C_2'}\right) = \arctan\left(\frac{x_0\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}\right)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{C_2'}{C_1'}\right) = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{x_0\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

Visualização

A resposta é uma função harmônica com frequência $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$, com a amplitude decaindo exponencialmente devido ao termo $e^{-\zeta\omega_n t}$.



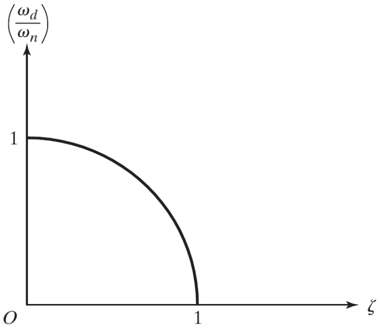
ω_d é a frequência de vibração amortecida.

Frequência Amortecida

O comportamento da frequência amortecida em função de ζ é mostrado ao lado.

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

como só há vibração para $\zeta < 1$, é caso de maior interesse para engenharia.



Amortecimento crítico, $\zeta = 1$

Neste caso as raízes são iguais

$$s_1 = s_2 = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n = -\omega_n.$$

Lembrando que a solução geral é da forma

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t},$$

mas, para raízes repetidas da equação característica, a solução geral

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{st},$$

portanto, para sistemas criticamente amortecidos

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}.$$

Amortecimento crítico, $\zeta = 1$

Neste caso as raízes são iguais

$$s_1 = s_2 = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n = -\omega_n.$$

Lembrando que a solução geral é da forma

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t},$$

mas, para raízes repetidas da equação característica, a solução geral

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{st},$$

portanto, para sistemas criticamente amortecidos

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}.$$

Amortecimento crítico, $\zeta = 1$

Neste caso as raízes são iguais

$$s_1 = s_2 = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n = -\omega_n.$$

Lembrando que a solução geral é da forma

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t},$$

mas, para raízes repetidas da equação característica, a solução geral

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{st},$$

portanto, para sistemas criticamente amortecidos

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t}.$$

Condições Iniciais

Usando $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, obtemos

$$C_1 = x_0, \qquad C_2 = \dot{x}_0 + \omega_n x_0.$$

A solução é então

$$x(t) = \left(x_0 + \left(\dot{x}_0 + \omega_n x_0\right) t\right) e^{-\omega_n t},$$

que claramente não é periódica!

Condições Iniciais

Usando $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, obtemos

$$C_1 = x_0, \qquad C_2 = \dot{x}_0 + \omega_n x_0.$$

A solução é então

$$x(t) = \left(x_0 + \left(\dot{x}_0 + \omega_n x_0\right) t\right) e^{-\omega_n t},$$

que claramente não é periódica!

Amortecimento Supercrítico, $\zeta > 1$

Neste caso, $\sqrt{\zeta^2 - 1} > 0$, e as raízes são reais e distintas,

$$s_1 = \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n < 0$$
$$s_2 = \left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n < 0,$$

com $s_2 \ll s_1$. A solução geral é,

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t} + C_2 e^{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t}$$

Condições Iniciais

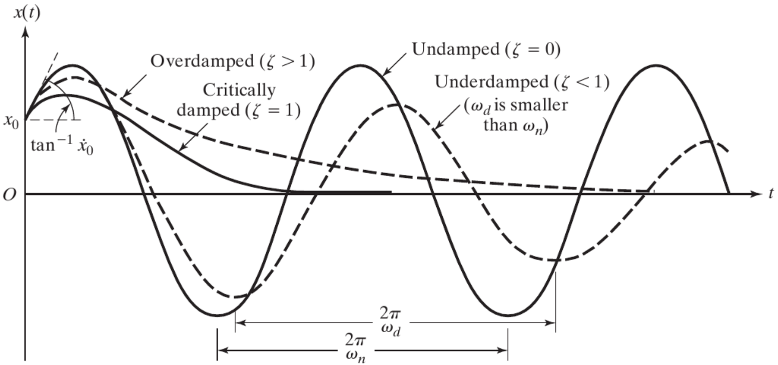
Usando $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, obtemos

$$C_1 = \frac{x_0\omega_n\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) + \dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

$$C_2 = \frac{-x_0\omega_n\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) - \dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

O movimento é claramente aperiódico, e como as duas raízes são negativas, as soluções tendem para 0.

Visualização



Plano de Fase

- Um sistema criticamente amortecido tem o menor amortecimento necessário para movimento aperiódico;
- A massa retorna ao repouso no menor tempo possível;