Vibrações Mecânicas

Aula05 – Definições e Análise Harmônica

Ramiro Brito Willmersdorf
ramiro@willmersdorf.net

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco

2018.2

Definições Importantes

Ciclo Um período completo de movimento do corpo.

Amplitude O máximo deslocamento do corpo em relação à posição de equilíbrio.

Período O tempo necessário para completar um ciclo.

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

ω é a *frequência circular* (em rad/s).

Frequência Número de ciclos por unidade de tempo (em Hertz).

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Definições Importantes

Ângulo de Fase Distância angular entre dois movimentos vibratórios.

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}$$
$$x_2 = A_2 e^{i(\omega t + \phi)}$$

Frequência Natural Frequência em que um sistema com 1 grau de liberdade oscila em vibração livre a partir de um deslocamento inicial.

Oitava Faixa de frequências na qual o limite superior é o dobro do limite inferior, eg, 200-400 Hz.

Decibel

Em eletricidade, acústica e vibrações, é normal medir-se grandezas com uma grande faixa de variação. O decibel é usado para criar uma escala logaritmica para estas grandezas.
Por definição:

$$dB = 10 \log \left(\frac{P}{P_0} \right)$$

onde X_0 é uma potência de referência.

Como a potência elétrica é proporcional ao quadrado da voltagem,

$$dB = 10 \log \left(\frac{X}{X_0} \right)^2 = 20 \log \left(\frac{X}{X_0} \right)$$

onde X_0 é uma voltagem de referência.

Decibel

Em eletricidade, acústica e vibrações, é normal medir-se grandezas com uma grande faixa de variação. O decibel é usado para criar uma escala logaritmica para estas grandezas.
Por definição:

$$dB = 10 \log \left(\frac{P}{P_0} \right)$$

onde X_0 é uma potência de referência.

Como a potência elétrica é proporcional ao quadrado da voltagem,

$$dB = 10 \log \left(\frac{X}{X_0} \right)^2 = 20 \log \left(\frac{X}{X_0} \right)$$

onde X_0 é uma voltagem de referência.

Batimento

Quando duas funções harmônicas com frequências próximas são somadas, uma coisa curiosa acontece:

$$x_1 = X \cos \omega t$$
$$x_2 = X \cos(\omega + \delta)t, \qquad \delta << \omega$$

Somando as duas equações

$$x(t) = X\left[\cos \omega t + \cos(\omega + \delta)t\right]$$

Sabendo que

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Temos

$$x(t) = 2X \cos\frac{\delta t}{2} \cos\left(\omega + \frac{\delta}{2}\right)t$$

Batimento

Quando duas funções harmônicas com frequências próximas são somadas, uma coisa curiosa acontece:

$$x_1 = X \cos \omega t$$
$$x_2 = X \cos(\omega + \delta)t, \qquad \delta << \omega$$

Somando as duas equações

$$x(t) = X \left[\cos \omega t + \cos(\omega + \delta)t\right]$$

Sabendo que

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A + B}{2}\right) \cos \left(\frac{A - B}{2}\right)$$

Temos

$$x(t) = 2X \cos \frac{\delta t}{2} \cos \left(\omega + \frac{\delta}{2}\right) t$$

Batimento

Quando duas funções harmônicas com frequências próximas são somadas, uma coisa curiosa acontece:

$$x_1 = X\cos\omega t$$
$$x_2 = X\cos(\omega+\delta)t, \qquad \delta << \omega$$

Somando as duas equações

$$x(t) = X\left[\cos\omega t + \cos(\omega+\delta)t\right]$$

Sabendo que

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Temos

$$x(t) = 2X\cos\frac{\delta t}{2}\cos\left(\omega+\frac{\delta}{2}\right)t$$

Batimento

Quando duas funções harmônicas com frequências próximas são somadas, uma coisa curiosa acontece:

$$\begin{aligned} x_1 &= X\cos\omega t \\ x_2 &= X\cos(\omega+\delta)t, \qquad \delta << \omega \end{aligned}$$

Somando as duas equações

$$x(t) = X\left[\cos\omega t + \cos(\omega+\delta)t\right]$$

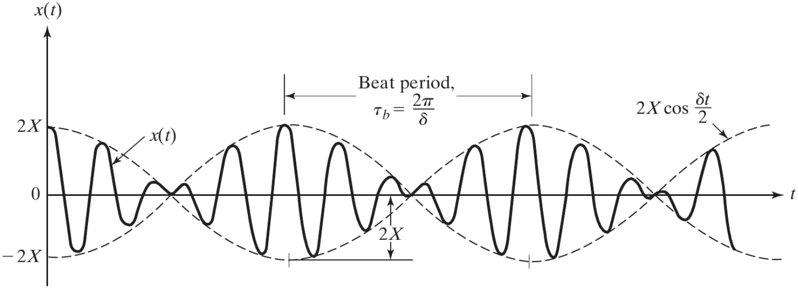
Sabendo que

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Temos

$$x(t) = 2X\cos\frac{\delta t}{2}\cos\left(\omega+\frac{\delta}{2}\right)t$$

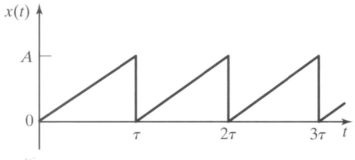
Batimento


x(t)
2X
0
−2X
x(t)
Beat period,
$\tau_b = \frac{2\pi}{\delta}$
$2X \cos \frac{\delta t}{2}$
2X
t

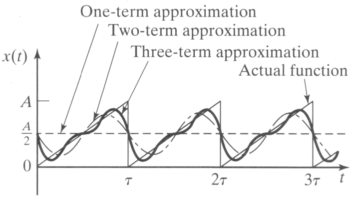
Análise Harmônica

Muitos sistemas físicos interessantes tem movimentos periódicos porem não harmônicos.

Uma maneira de simplificar o problema é usar a Série de Fourier da função periódica.



(a)



(b)

Séries de Fourier

Para $x(t)$ periódica com período τ, a série de Fourier da função é dada por:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots$$
$$+ b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots$$

ou

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Vamos prémultiplicar tudo por $\cos m\omega t$ e $\sin m\omega t$, e integrar de 0 a τ, para $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Séries de Fourier

Para $x(t)$ periódica com período τ, a série de Fourier da função é dada por:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots + b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots$$

ou

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Vamos prémultiplicar tudo por $\cos m\omega t$ e $\sin m\omega t$, e integrar de 0 a τ, para $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Séries de Fourier

Para $x(t)$ periódica com período τ, a série de Fourier da função é dada por:

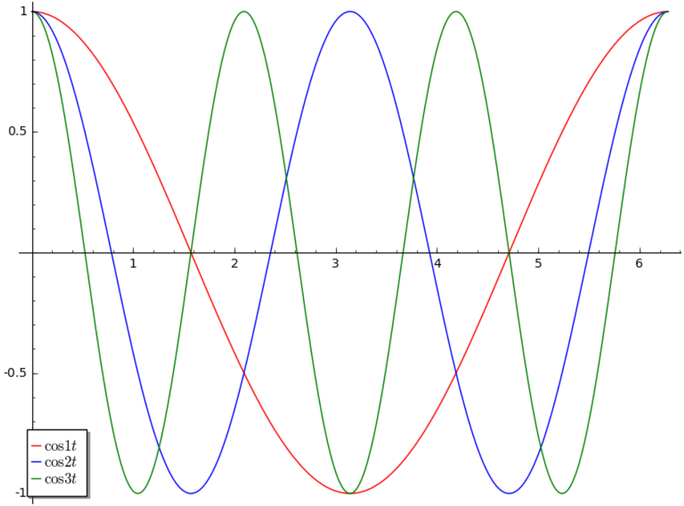
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots$$
$$+ b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots$$

ou

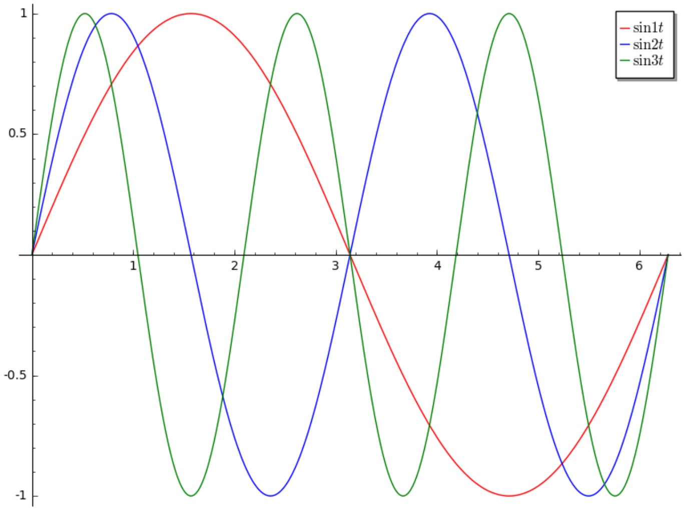
$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Vamos prémultiplicar tudo por $\cos m\omega t$ e $\sin m\omega t$, e integrar de 0 a τ, para $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Harmônicas do Cosseno



Harmônicas do Seno



Cálculo de Coeficientes

$$\int_0^{\tau} \cos(m\omega t) x(t)\, dt =$$

$$\int_0^{\tau} \cos(m\omega t) \frac{a_0}{2}\, dt +$$

$$\int_0^{\tau} \cos(m\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)\, dt$$

$$\int_0^{\tau} \sin(m\omega t) x(t)\, dt =$$

$$\int_0^{\tau} \sin(m\omega t) \frac{a_0}{2}\, dt +$$

$$\int_0^{\tau} \sin(m\omega t) \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)\, dt$$

Cálculo de Coeficientes, $m = 0$

Para $m = 0$

$$\int_0^\tau x(t)\,dt =$$

$$\int_0^\tau \frac{a_0}{2}\,dt +$$

$$\int_0^\tau \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)\,dt$$

mas,

$$\int_0^\tau \cos n\omega t\,dt = \int_0^\tau \sin n\omega t\,dt = 0$$

para $n = 1,2,\ldots$.

Cálculo de Coeficientes, $m \neq 0$

Dar ortogonalidade das funções trigonométricas, para $m = n$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2 m\omega t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2 m\omega t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\tau}{2}$$

e, para $m \neq n$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos m\omega t \, \sin n\omega t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin m\omega t \, \sin n\omega t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos m\omega t \, \cos n\omega t \,\mathrm{d}t = 0$$

Cálculo de Coeficientes

Assim,

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t)\,\mathrm{d}t$$

e

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \cos n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \cos n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \sin n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \sin n\omega t\,\mathrm{d}t$$

Cálculo de Coeficientes

Assim,

$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t)\,\mathrm{d}t$$

e

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t$$

Cálculo de Coeficientes

Assim,

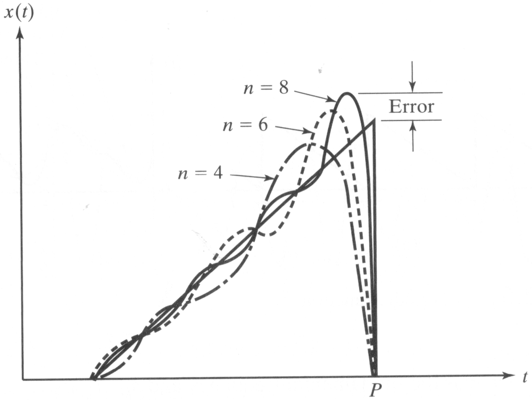
$$a_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t)\,\mathrm{d}t$$

e

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \cos n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \cos n\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} x(t) \sin n\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\tau} \int_0^{\tau} x(t) \sin n\omega t\,\mathrm{d}t$$

Fenômeno de Gibbs



Espectro de Frequências

As funções harmônicas

$$a_n \cos n\omega t \qquad \text{e} \qquad b_n \sin_n \omega t$$

são harmônicas de ordem n de $x(t)$.
Estas harmônicas tem período $\frac{\tau}{n}$.

Plotando as amplitudes destas funções em função da frequência, temos o espectro de frequências.

Espectro de Frequências

As funções harmônicas

$$a_n \cos n\omega t \qquad \text{e} \qquad b_n \sin_n \omega t$$

são harmônicas de ordem n de $x(t)$.
Estas harmônicas tem período $\frac{\tau}{n}$.

Plotando as amplitudes destas funções em função da frequência, temos o espectro de frequências.

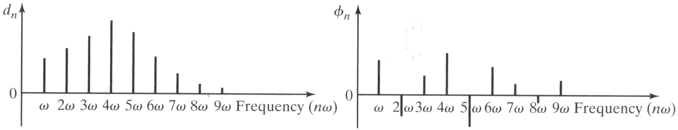
Espectro de Frequências

As funções harmônicas

$$a_n \cos n\omega t \qquad \text{e} \qquad b_n \sin_n \omega t$$

são harmônicas de ordem n de $x(t)$.
Estas harmônicas tem período $\frac{\tau}{n}$.

Plotando as amplitudes destas funções em função da frequência, temos o espectro de frequências.



Representação nos Domínios do Tempo e Frequência