Vibrações Mecânicas

Aula09: Vibração Livre Amortecida

Ramiro Brito Willmersdorf
ramiro@willmersdorf.net

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco

2018.2

Decremento Logarítmico

A resposta subamortecida é

$$x(t) = Xe^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi),$$

tomando o deslocamento em t_1 e t_2, afastados de um "período" $\tau_d = 2\pi/\omega_d$, podemos escrever

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{Xe^{-\zeta\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 - \phi)}{Xe^{-\zeta\omega_n t_2}\cos(\omega_d t_2 - \phi)},$$

mas, obviamente,

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n (t_1+\tau_d)}} = e^{\zeta\omega_n \tau_d}.$$

Decremento Logarítmico

A resposta subamortecida é

$$x(t) = Xe^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_d t - \phi\right),$$

tomando o deslocamento em t_1 e t_2, afastados de um "período" $\tau_d = 2\pi/\omega_d$, podemos escrever

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{Xe^{-\zeta\omega_n t_1}\cos\left(\omega_d t_1 - \phi\right)}{Xe^{-\zeta\omega_n t_2}\cos\left(\omega_d t_2 - \phi\right)},$$

mas, obviamente,

$$\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n(t_1+\tau_d)}} = e^{\zeta\omega_n\tau_d}.$$

Decremento Logarítmico

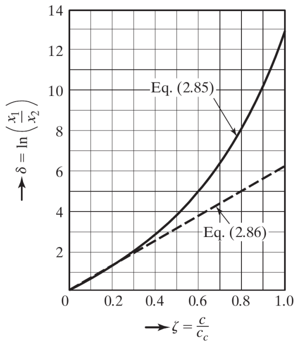
O decremento logarítmico δ é definido como

$$\delta = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} = \zeta\omega_n\tau_d = \zeta\omega_n \frac{2\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi}{\omega_d}\frac{c}{2m}$$

Se o amortecimento é pequeno,

$$\delta \approx 2\pi\zeta, \qquad \zeta \ll 1.$$

O erro na aproximação é aceitavelmente pequeno, para $\delta < 0,3$.



Observações

- O decremento logarítmico pode ser medido muito facilmente!
- O amortecimento é muito difícil de medir diretamente;
- Na escala logarítmica, a amplitude decresce do mesmo valor entre quaisquer dois extremos consecutivos;

A razão de amortecimento pode ser facilmente calculada de

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}},$$

ou, aproximadamente,

$$\zeta = \frac{\delta}{2\pi}.$$

Múltiplos ciclos

Tomando 2 tempos separados por m períodos completos, t_1 e $t_1 + m\tau_d$, temos

$$\frac{x_1}{x_{m+1}} = \frac{Xe^{-\zeta\omega_n t_1}\cos(\omega_d t_1 - \phi)}{Xe^{-\zeta\omega_n(t_1+m\tau_d)}\cos(\omega_d(t_1 + m\tau_d) - \phi)}.$$

Claramente,

$$\ln\frac{x_1}{x_{m+1}} = \ln\frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n(t_1+m\tau_d)}} = \zeta\omega_n m\tau_d = m\delta,$$

e assim,

$$\delta = \frac{1}{m}\ln\frac{x_1}{x_{m+1}}.$$

Múltiplos ciclos

Tomando 2 tempos separados por m períodos completos, t_1 e $t_1 + m\tau_d$, temos

$$\frac{x_1}{x_{m+1}} = \frac{Xe^{-\zeta\omega_n t_1}\cos\left(\omega_d t_1 - \phi\right)}{Xe^{-\zeta\omega_n(t_1+m\tau_d)}\cos\left(\omega_d(t_1 + m\tau_d) - \phi\right)}.$$

Claramente,

$$\ln\frac{x_1}{x_{m+1}} = \ln\frac{e^{-\zeta\omega_n t_1}}{e^{-\zeta\omega_n(t_1+m\tau_d)}} = \zeta\omega_n m\tau_d = m\delta,$$

e assim,

$$\delta = \frac{1}{m}\ln\frac{x_1}{x_{m+1}}.$$

Taxa de Dissipação de Energia

A taxa de dissipação de energia é

$$\frac{dW}{dt} = F_{\text{vis}}\dot{x} = -c\dot{x}^2.$$

Supondo movimento harmônico $x(t) = X \sin \omega_d t$, (não óbvio), a energia dissipada por ciclo é

$$\Delta W = \int_{t=0}^{\frac{2\pi}{\omega_d}} c \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = \int_{t=0}^{2\pi} cX^2 \omega_d \cos^2 \omega_d t \, d(\omega_d t)$$
$$= \pi c \omega_d X^2$$

Taxa de Dissipação de Energia

A taxa de dissipação de energia é

$$\frac{dW}{dt} = F_{\text{vis}}\dot{x} = -c\dot{x}^2.$$

Supondo movimento harmônico $x(t) = X \sin \omega_d t$, (não óbvio), a energia dissipada por ciclo é

$$\Delta W = \int_{t=0}^{\frac{2\pi}{\omega_d}} c \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = \int_{t=0}^{2\pi} cX^2\omega_d \cos^2 \omega_d t \, d(\omega_d t)$$
$$= \pi c \omega_d X^2$$

Energia dissipada por ciclo

Para pequeno amortecimento, a energia total pode ser aproximada pela energia potencial máxima ou energia cinética máxima, assim

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\pi c \omega_d X^2}{\frac{1}{2} m \omega_d^2 X^2} = 2\frac{2\pi}{\omega_d}\frac{c}{2m} = 2\delta \approx 4\pi\zeta = \text{cte}$$

esta quantidade é denominada capacidade de amortecimento específico.

Em alguns contextos é usado o coeficiente de perda, que é a energia dissipada por radiano:

$$\text{coef. de perda} = \frac{\Delta W/(2\pi)}{W} = \frac{\Delta W}{2\pi W}$$

Energia dissipada por ciclo

Para pequeno amortecimento, a energia total pode ser aproximada pela energia potencial máxima ou energia cinética máxima, assim

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\pi c \omega_d X^2}{\frac{1}{2} m \omega_d^2 X^2} = 2 \frac{2\pi}{\omega_d} \frac{c}{2m} = 2\delta \approx 4\pi\zeta = \text{cte}$$

esta quantidade é denominada capacidade de amortecimento específico.

Em alguns contextos é usado o coeficiente de perda, que é a energia dissipada por radiano:

$$\text{coef. de perda} = \frac{\Delta W/(2\pi)}{W} = \frac{\Delta W}{2\pi W}$$

Sistemas em Torção

O momento viscoso é

$$T_{\text{vis}} = -c_t\dot{\theta},$$

a equação de movimento é

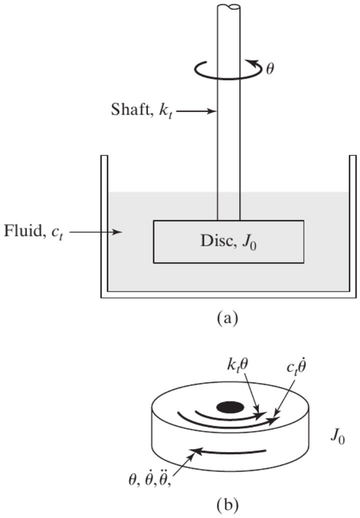
$$J_0\ddot{\theta} + c_t\dot{\theta} + \kappa_t\theta = 0,$$

e ainda,

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{\kappa_t}{J_0}}$$

e

$$\zeta = \frac{c_t}{c_{tc}} = \frac{c_t}{2J_0\omega_n} = \frac{c_t}{2\sqrt{\kappa_t J_0}}$$

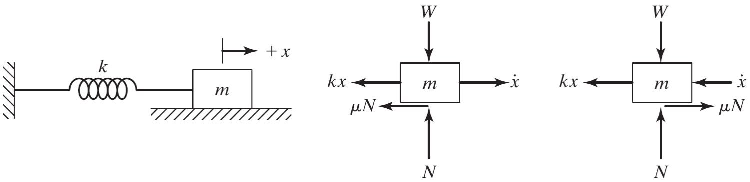


Atrito de Coulomb

Para o deslizamento a seco entre duas superfícies

$$F_{\text{at}} = \mu N = \mu W = \mu mg.$$

A força é constante e independente da velocidade de deslizamento.



Equações de Movimento

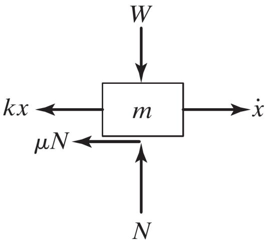
Infelizmente, a direção da força de atrito é a mesma da velocidade, mas a velocidade não aparece na equação de movimento!

Temos que colocar o sinal “na mão”, considerando:

1. Movimento com velocidade negativa;
2. Movimento com velocidade positiva;

Podemos dividir o movimento em dois semiciclos correspondentes à estas situações.

Velocidade Positiva



A equação de movimento é

$$m\ddot{x} = -\kappa x - \mu N,$$

ou

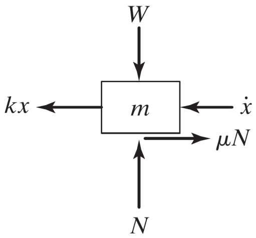
$$m\ddot{x} + \kappa x = -\mu N,$$

que é uma EDO de 2ª ordem não homogênea, cuja solução é:

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t - \frac{\mu N}{\kappa},$$

com $\omega_n = \sqrt{\kappa/m}$ e A_1 e A_2 constantes que dependem das condições iniciais do semiciclo!

Velocidade Negativa



A equação de movimento é

$$m\ddot{x} = -\kappa x + \mu N,$$

ou

$$m\ddot{x} + \kappa x = +\mu N,$$

que é uma EDO de 2ª ordem não homogênea, cuja solução é:

$$x(t) = A_3 \cos \omega_n t + A_4 \sin \omega_n t + \frac{\mu N}{\kappa},$$

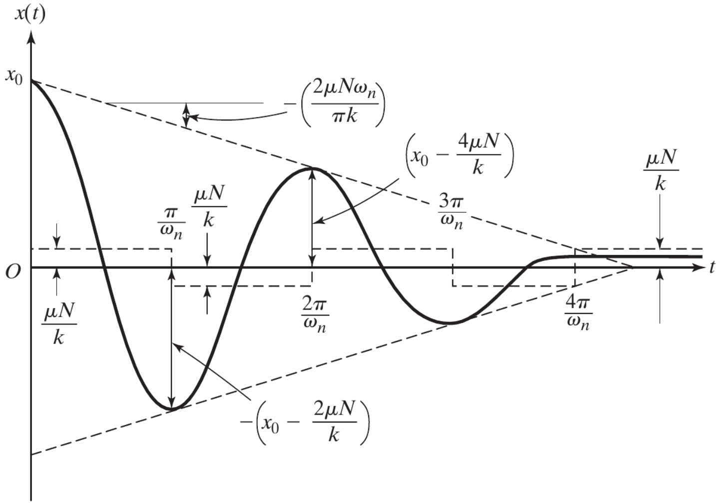
com $\omega_n = \sqrt{\kappa/m}$ e A_3 e A_4 constantes que dependem das condições iniciais do semiciclo!

Observações

Claramente:

- O movimento é harmônico em cada semiciclo!
- O termo $\pm\frac{\mu N}{\kappa}$ pode ser visto como um deslocamento estático causado pela força constante $\pm\mu N$;
- A posição de equilíbrio então alterna-se entre $\pm\frac{\mu N}{\kappa}$ para cada semiciclo;

Visualização



Solução

As duas equações podem ser reescritas como

$$m\ddot{x} + \mu m g \,\mathrm{sgn}(\dot{x}) + \kappa x = 0,$$

com

$$\mathrm{sgn}(y) = \begin{cases} 0, & y = 0; \\ 1, & y > 0; \\ -1, & y < 0. \end{cases}$$

Esta é uma equação não linear que só pode ser resolvida numericamente.
No entanto, podemos determinar a solução analítica a cada semiciclo e combiná-las.

Solução – Primeiro Semiciclo

Supondo apenas deslocamento inicial no início do movimento:

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = 0,$$

vamos dividir o movimento em intervalos onde a velocidade muda de direção, i.e., o valor da velocidade é zero. Neste caso a massa vai se mover com velocidade negativa, e aplica-se

$$x(t) = A_3 \cos \omega_n t + A_4 \sin \omega_n t + \frac{\mu N}{\kappa}$$

e

$$A_3 = x_0 - \frac{\mu N}{\kappa}, \qquad A_4 = 0.$$

A solução para o primeiro semiciclo é então

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{\kappa} \right) \cos \omega_n t + \frac{\mu N}{\kappa}.$$

Solução – Primeiro Semiciclo

Supondo apenas deslocamento inicial no início do movimento:

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = 0,$$

vamos dividir o movimento em intervalos onde a velocidade muda de direção, i.e., o valor da velocidade é zero.Neste caso a massa vai se mover com velocidade negativa, e aplica-se

$$x(t) = A_3 \cos \omega_n t + A_4 \sin \omega_n t + \frac{\mu N}{\kappa}$$

e

$$A_3 = x_0 - \frac{\mu N}{\kappa}, \qquad A_4 = 0.$$

A solução para o primeiro semiciclo é então

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{\kappa} \right) \cos \omega_n t + \frac{\mu N}{\kappa}.$$

Solução – Primeiro Semiciclo

Supondo apenas deslocamento inicial no início do movimento:

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = 0,$$

vamos dividir o movimento em intervalos onde a velocidade muda de direção, i.e., o valor da velocidade é zero.Neste caso a massa vai se mover com velocidade negativa, e aplica-se

$$x(t) = A_3 \cos \omega_n t + A_4 \sin \omega_n t + \frac{\mu N}{\kappa}$$

e

$$A_3 = x_0 - \frac{\mu N}{\kappa}, \qquad A_4 = 0.$$

A solução para o primeiro semiciclo é então

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{\kappa} \right) \cos \omega_n t + \frac{\mu N}{\kappa}.$$

Solução – Primeiro Semiciclo

Ao final do primeiro ciclo, $t = \pi/\omega_n$, e o deslocamento é

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{\kappa}\right)\cos\pi + \frac{\mu N}{\kappa} = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{\kappa}\right).$$

e a velocidade é

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = -\omega_n\left(x_0 - \frac{\mu N}{\kappa}\right)\sin\pi = 0.$$

Estas são as condições iniciais para o segundo ciclo, que deve usar a solução para velocidade positiva.

Solução – Primeiro Semiciclo

Ao final do primeiro ciclo, $t = \pi/\omega_n$, e o deslocamento é

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{\kappa}\right)\cos\pi + \frac{\mu N}{\kappa} = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{\kappa}\right).$$

e a velocidade é

$$\dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = -\omega_n\left(x_0 - \frac{\mu N}{\kappa}\right)\sin\pi = 0.$$

Estas são as condições iniciais para o segundo ciclo, que deve usar a solução para velocidade positiva.

Solução – Segundo Semiciclo

Usando

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = -\left(x_0 - \frac{2\mu N}{\kappa}\right), \qquad \dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = 0,$$

e

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t - \frac{\mu N}{\kappa},$$

calculamos

$$A_1 = x_0 - \frac{3\mu N}{\kappa}, \qquad A_2 = 0,$$

e a solução para este semiciclo é

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{3\mu N}{\kappa}\right) \cos \omega_n t - \frac{\mu N}{\kappa}.$$

Solução – Demais Semiciclos

Podemos verificar facilmente que ao final do segundo semiciclo,

$$x\left(\frac{2\pi}{\omega_n}\right) = x_0 - \frac{4\mu N}{\kappa}, \qquad \dot{x}\left(\frac{2\pi}{\omega_n}\right) = 0,$$

que são as condições iniciais para o terceiro semiciclo.

O processo deve ser repetido até o movimento cesse.

Parada

O movimento cessa quando a força da mola é menor ou igual do que a força de atrito máxima,

$$\kappa x_n \leq \mu N, \qquad \text{ou} \qquad x_n \leq \frac{\mu N}{\kappa}.$$

O número de semiciclos r até a parada é dado por

$$x_0 - r\frac{2\mu N}{\kappa} \leq \frac{\mu N}{\kappa},$$

ou

$$r \geq \frac{x_0 - \frac{\mu N}{\kappa}}{\frac{2\mu N}{\kappa}}.$$

Parada

O movimento cessa quando a força da mola é menor ou igual do que a força de atrito máxima,

$$\kappa x_n \leq \mu N, \qquad \text{ou} \qquad x_n \leq \frac{\mu N}{\kappa}.$$

O número de semiciclos r até a parada é dado por

$$x_0 - r\frac{2\mu N}{\kappa} \leq \frac{\mu N}{\kappa},$$

ou

$$r \geq \frac{x_0 - \frac{\mu N}{\kappa}}{\frac{2\mu N}{\kappa}}.$$

Comparação

As principais diferenças entre sistemas com atrito seco e viscoso são:

- Equação de movimento não é linear;
- A frequência de vibração amortecida é a mesma;
- O movimento é sempre periódico;
- O movimento cessa em um tempo finito;
- A amplitude decai linearmente;
- A relação entre amplitudes em ciclos subsequentes é:

$$X_m = X_{m-1} - \frac{4\mu N}{\kappa}$$

- A posição de parada não é 0.

Relação Força × Deslocamento

Para um sistema mola amortecedor viscoso, a força necessária para causar um deslocamento x é

$$F = \kappa x + c\dot{x},$$

e se o movimento é harmônico, $x(t) = X \sin \omega t$.
A força é então

$$\begin{aligned}
F(t) &= \kappa X \sin \omega t + cX\omega \cos \omega t \\
&= \kappa x + c\omega X \cos \omega t \\
&= \kappa x + c\omega X \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} \\
&= \kappa x + c\omega \sqrt{X^2 - X^2 \sin^2 \omega t} \\
&= \kappa x + c\omega \sqrt{X^2 - x^2}.
\end{aligned}$$

Relação Força × Deslocamento

Para um sistema mola amortecedor viscoso, a força necessária para causar um deslocamento x é

$$F = \kappa x + c\dot{x},$$

e se o movimento é harmônico, $x(t) = X \sin \omega t$.
A força é então

$$\begin{aligned} F(t) &= \kappa X \sin \omega t + cX\omega \cos \omega t \\ &= \kappa x + c\omega X \cos \omega t \\ &= \kappa x + c\omega X \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} \\ &= \kappa x + c\omega \sqrt{X^2 - X^2 \sin^2 \omega t} \\ &= \kappa x + c\omega \sqrt{X^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Relação Força × Deslocamento

Para um sistema mola amortecedor viscoso, a força necessária para causar um deslocamento x é

$$F = \kappa x + c\dot{x},$$

e se o movimento é harmônico, $x(t) = X \sin \omega t$.
A força é então

$$\begin{aligned} F(t) &= \kappa X \sin \omega t + cX\omega \cos \omega t \\ &= \kappa x + c\omega X \cos \omega t \\ &= \kappa x + c\omega X \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} \\ &= \kappa x + c\omega \sqrt{X^2 - X^2 \sin^2 \omega t} \\ &= \kappa x + c\omega \sqrt{X^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Relação Força × Deslocamento

Para um sistema mola amortecedor viscoso, a força necessária para causar um deslocamento x é

$$F = \kappa x + c\dot{x},$$

e se o movimento é harmônico, $x(t) = X \sin \omega t$.
A força é então

$$\begin{aligned} F(t) &= \kappa X \sin \omega t + cX\omega \cos \omega t \\ &= \kappa x + c\omega X \cos \omega t \\ &= \kappa x + c\omega X \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} \\ &= \kappa x + c\omega \sqrt{X^2 - X^2 \sin^2 \omega t} \\ &= \kappa x + c\omega \sqrt{X^2 - x^2}. \end{aligned}$$

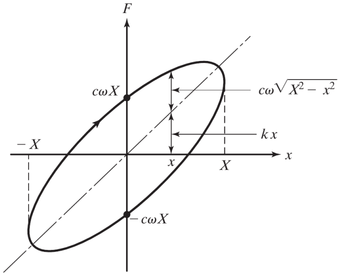
Relação Força × Deslocamento

Para um sistema mola amortecedor viscoso, a força necessária para causar um deslocamento x é

$$F = \kappa x + c\dot{x},$$

e se o movimento é harmônico, $x(t) = X \sin \omega t$.
A força é então

$$\begin{aligned} F(t) &= \kappa X \sin \omega t + cX\omega \cos \omega t \\ &= \kappa x + c\omega X \cos \omega t \\ &= \kappa x + c\omega X \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} \\ &= \kappa x + c\omega \sqrt{X^2 - X^2 \sin^2 \omega t} \\ &= \kappa x + c\omega \sqrt{X^2 - x^2}. \end{aligned}$$



Energia Dissipada Por Ciclo

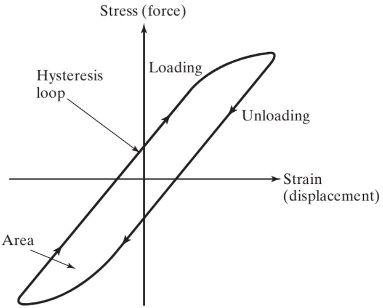
A área dentro da elipse é a energia dissipada por ciclo, isto é,

$$\Delta W = \oint F\,dx = \int_0^{2\pi/\omega} (KX \sin\omega t + cX\omega \cos\omega t)(\omega X \cos\omega t)\,dt$$
$$= \pi c \omega X^2,$$

que já foi encontrada antes.
Atenção: Esta fórmula e esta figura foram encontradas para amortecimento viscoso!

Amortecimento Interno

Um ciclo de carregamento e descarregamento de um material produz um gráfico como este:

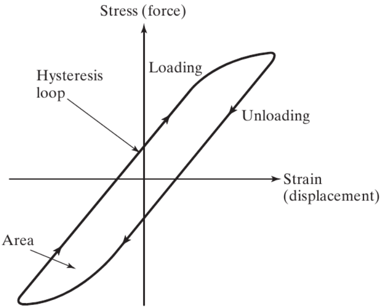


A energia dissipada por ciclo de carregamento é a área dentro da curva fechada.

Como é uma curva fechada com um "jeitão" de uma elipse inclinada, fazemos uma correspondência com o amortecimento viscoso.

Amortecimento Interno

Um ciclo de carregamento e descarregamento de um material produz um gráfico como este:



A energia dissipada por ciclo de carregamento é a área dentro da curva fechada.
Como é uma curva fechada com um "jeitão" de uma elipse inclinada, fazemos uma correspondência com o amortecimento viscoso.

Resultado Experimental

> *A energia dissipada por ciclo no amortecimento interno é independente da frequência e proporcional ao quadrado da amplitude.*

Para que isto aconteça com um amortecedor viscoso, onde $\Delta W = \pi c \omega X^2$, o coeficiente de amortecimento deve ser

$$c = \frac{h}{\omega},$$

onde h é a constante de amortecimento histerético.

Rigidez Complexa

Para um deslocamento dado na forma complexa como

$$x(t) = Xe^{i\omega t},$$

a força em um sistema mola amortecedor viscoso é

$$F(t) = \kappa X e^{i\omega t} + c\omega i X e^{i\omega t} = (\kappa + i\omega c)x.$$

Considerando um sistema mola amortecedor histerético equivalente, com $c = h/\omega$, temos

$$F(t) = (\kappa + ih)x.$$

Rigidez Complexa

Definimos a rigidez complexa como

$$(\kappa + ih) = \kappa\left(1 + i\frac{h}{\kappa}\right) = \kappa(1 + i\beta),$$

com $\beta = h/\kappa$ sendo uma medida adimensional do amortecimento.

Resposta do Sistema Histerético

Para um sistema histerético, a energia dissipada por ciclo é

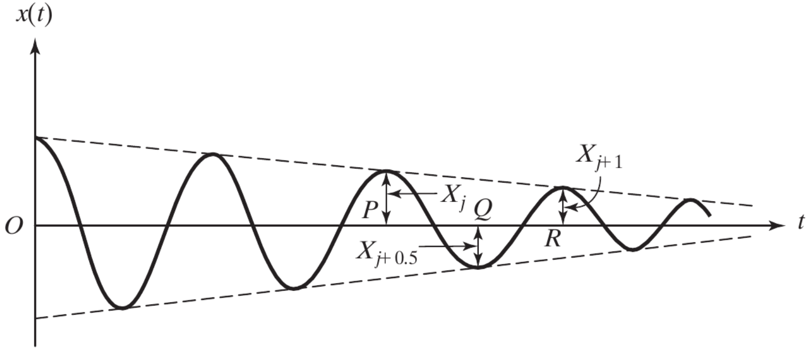
$$\Delta W = \pi h X^2, \quad \text{ou} \quad \Delta W = \pi \kappa \beta X^2.$$

Como o amortecimento histerético é muito pequeno, o movimento é quase harmônico, e a variação de amplitude pode ser calculada com balanço de energia.

Resposta do Sistema Histerético

Considerando a energia total nos pontos P e Q,

$$\frac{\kappa X_j^2}{2} - \frac{\pi\kappa\beta X_j^2}{4} - \frac{\pi\kappa\beta X_{j+0.5}^2}{4} = \frac{\kappa X_{j+0.5}^2}{2}$$



Resposta do Sistema Histerético

Isto leva a

$$\frac{X_j}{X_{j+0.5}} = \sqrt{\frac{2+\pi\beta}{2-\pi\beta}}.$$

Analogamente, para Q e R,

$$\frac{X_{j+0.5}}{X_{j+1}} = \sqrt{\frac{2+\pi\beta}{2-\pi\beta}}.$$

Eliminando a amplitude intermediária,

$$\frac{X_j}{X_{j+1}} = \frac{2+\pi\beta}{2-\pi\beta} = \frac{2-\pi\beta+2\pi\beta}{2-\pi\beta} \approx 1+\pi\beta = \text{cte.}$$

Decremento Logarítmico

O decremento logarítmico histerético é definido como

$$\delta = \ln\left(\frac{X_j}{X_{j+1}}\right) \approx \ln(1 + \pi\beta) \approx \pi\beta.$$

Como o movimento é quase harmônico, a frequência de vibração amortecida é $\omega_n = \sqrt{\kappa/m}$.
Por analogia a um sistema viscoso,

$$\delta \approx 2\pi\zeta_{eq} \approx \pi\beta = \frac{\pi h}{\kappa},$$

o que leva a

$$\zeta_{eq} = \frac{\beta}{2} = \frac{h}{2\kappa}.$$

Amortecimento Equivalente

Por analogia a um sistema viscoso,

$$\delta \approx 2\pi\zeta_{\text{eq}} \approx \pi\beta = \frac{\pi h}{\kappa},$$

o que leva a

$$\zeta_{\text{eq}} = \frac{\beta}{2} = \frac{h}{2\kappa}.$$

O coeficiente de amortecimento equivalente é

$$c_{\text{eq}} = c_c\zeta_{\text{eq}} = 2\sqrt{m\kappa}\frac{\beta}{2} = \beta\sqrt{m\kappa} = \frac{\beta\kappa}{\omega} = \frac{h}{\omega}.$$