Vibrações Mecânicas

Aula04 – Movimento Harmônico

Ramiro Brito Willmersdorf
ramiro@willmersdorf.net

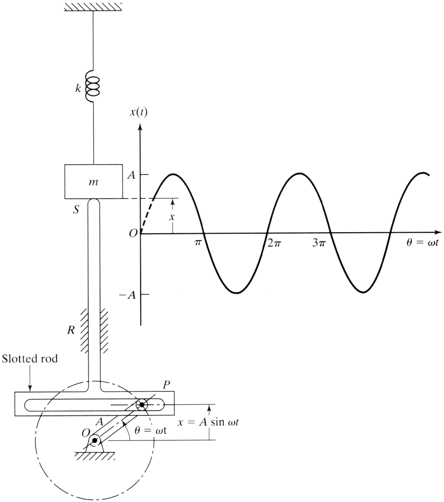
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco

2018.2

Movimento Harmônico

- Se o movimento se repete em intervalos constantes de tempo o movimento é *periódico*.
- O tipo de movimento periódico mais simples e útil na prática é o movimento harmônico.

Movimento Harmônico – Exemplo



Movimento Harmônico – Exemplo

Deslocamento vertical

$$x = A \sin \theta = A \sin \omega t$$

Velocidade vertical

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega A \cos \omega t$$

Aceleração vertical

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 x$$

Movimento Harmônico – Exemplo

Deslocamento vertical

$$x = A \sin \theta = A \sin \omega t$$

Velocidade vertical

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega A \cos \omega t$$

Aceleração vertical

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 x$$

Movimento Harmônico – Exemplo

Deslocamento vertical

$$x = A \sin \theta = A \sin \omega t$$

Velocidade vertical

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega A \cos \omega t$$

Aceleração vertical

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 x$$

Representação Vetorial do Movimento Harmônico

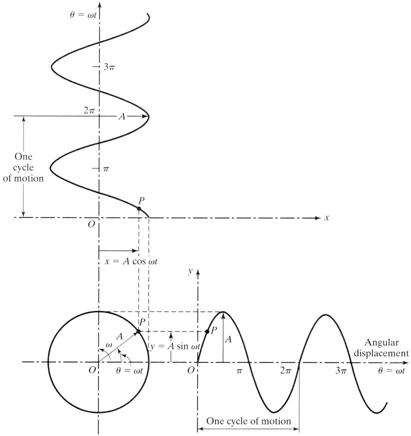
Consideramos um vetor com comprimento A girando com velocidade angular contante ω, e tomamos as projeções de sua extremidade.

Projeção vertical:

$$y = A \sin \omega t$$

Projeção horizontal:

$$x = A \cos \omega t$$



Representação Vetorial do Movimento Harmônico

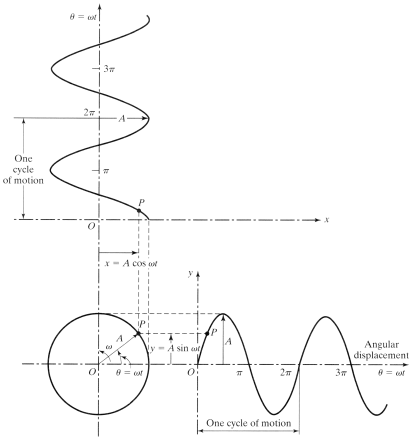
Consideramos um vetor com comprimento A girando com velocidade angular contante ω, e tomamos as projeções de sua extremidade.

Projeção vertical:

$$y = A \sin \omega t$$

Projeção horizontal:

$$x = A \cos \omega t$$



Representação Vetorial do Movimento Harmônico

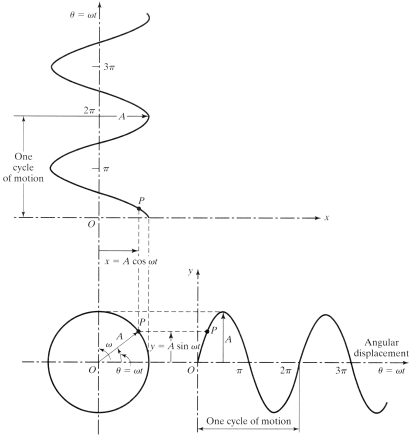
Consideramos um vetor com comprimento A girando com velocidade angular contante ω, e tomamos as projeções de sua extremidade.

Projeção vertical:

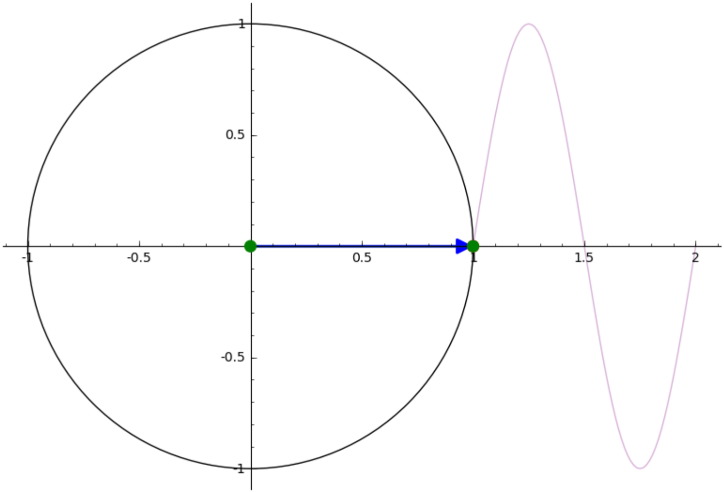
$$y = A \sin \omega t$$

Projeção horizontal:

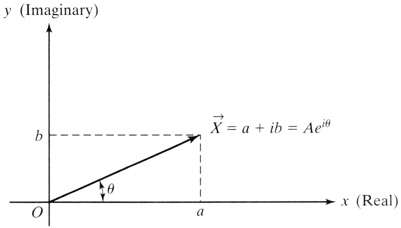
$$x = A \cos \omega t$$



Ilustração



Representação com Números Complexos



Número complexo:

$$\vec{X} = a + ib$$

onde

$$i = \sqrt{-1}$$

ou vetor no plano complexo

$$\vec{X} = A\cos\theta + iA\sin\theta$$

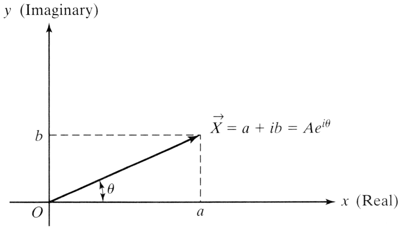
com

$$A = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}.$$

Representação com Números Complexos



Número complexo:

$$\vec{X} = a + ib$$

onde

$$i = \sqrt{-1}$$

ou vetor no plano complexo

$$\vec{X} = A\cos\theta + iA\sin\theta$$

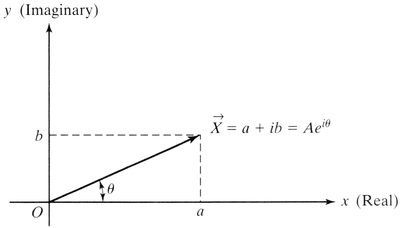
com

$$A = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}.$$

Representação com Números Complexos



Número complexo:

$$\vec{X} = a + ib$$

onde

$$i = \sqrt{-1}$$

ou vetor no plano complexo

$$\vec{X} = A\cos\theta + iA\sin\theta$$

com

$$A = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a}.$$

Representação com Números Complexos

Lembrando que:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \ldots,$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots = 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots \qquad \text{e}$$

$$i\sin\theta = i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right] = i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots.$$

Somando as duas expressões:

$$\cos\theta + i\sin\theta = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots,$$

Representação com Números Complexos

Lembrando que:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \ldots,$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots = 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots \qquad \text{e}$$

$$i\sin\theta = i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right] = i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots.$$

Somando as duas expressões:

$$\cos\theta + i\sin\theta = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots,$$

Representação com Números Complexos

Lembrando que:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \ldots,$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots = 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots \qquad \text{e}$$

$$i\sin\theta = i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right] = i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots .$$

Somando as duas expressões:

$$\cos\theta + i\sin\theta = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots ,$$

Representação com Números Complexos

Lembrando que:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \ldots,$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots = 1 + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots \qquad \text{e}$$

$$i\sin\theta = i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right] = i\theta + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots.$$

Somando as duas expressões:

$$\cos\theta + i\sin\theta = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \cdots,$$

Representação com Números Complexos

mas,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots ,$$

assim

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Como consequência:

$$\vec{X} = A(\cos\theta + i\sin\theta) = Ae^{i\theta}.$$

Representação com Números Complexos

mas,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots ,$$

assim

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Como consequência:

$$\vec{X} = A(\cos\theta + i\sin\theta) = Ae^{i\theta}.$$

Representação com Números Complexos

mas,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots ,$$

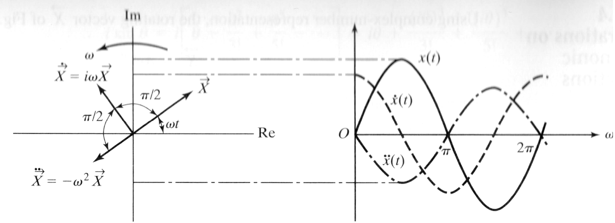
assim

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}.$$

Como consequência:

$$\vec{X} = A(\cos\theta + i\sin\theta) = Ae^{i\theta}.$$

Operações com a Representação Complexa



Como

$$\vec{X} = Ae^{i\omega t},$$

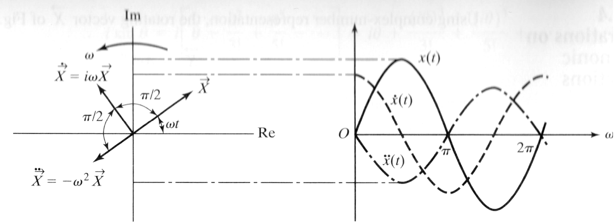
$$\dot{\vec{X}} = i\omega Ae^{i\omega t} = i\omega\vec{X},$$

e

$$\ddot{\vec{X}} = -\omega^2 Ae^{i\omega t} = -\omega^2\vec{X}.$$

$\vec{X}$ é um número complexo!

Operações com a Representação Complexa



Como

$$\vec{X} = Ae^{i\omega t},$$

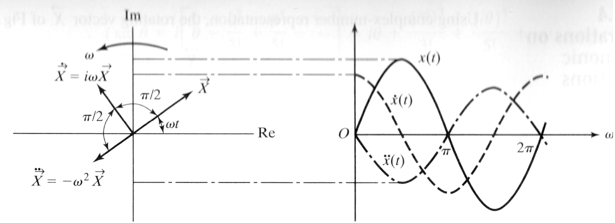
$$\dot{\vec{X}} = i\omega Ae^{i\omega t} = i\omega\vec{X},$$

e

$$\ddot{\vec{X}} = -\omega^2 Ae^{i\omega t} = -\omega^2\vec{X}.$$

$\vec{X}$ é um número complexo!

Operações com a Representação Complexa



Como

$$\vec{X} = Ae^{i\omega t},$$

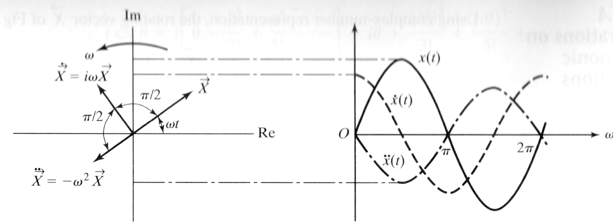
$$\dot{\vec{X}} = i\omega Ae^{i\omega t} = i\omega\vec{X},$$

e

$$\ddot{\vec{X}} = -\omega^2 Ae^{i\omega t} = -\omega^2\vec{X}.$$

$\vec{X}$ é um número complexo!

Operações com a Representação Complexa



Como

$$\vec{X} = Ae^{i\omega t},$$

$$\dot{\vec{X}} = i\omega Ae^{i\omega t} = i\omega\vec{X},$$

e

$$\ddot{\vec{X}} = -\omega^2 Ae^{i\omega t} = -\omega^2\vec{X}.$$

$\vec{X}$ é um número complexo!

Operações com a Representação Complexa

Tomando as partes reais:
Deslocamento:

$$\mathrm{Re}[Ae^{i\omega t}] = \mathrm{Re}[A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = A\cos\omega t$$

Velocidade:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[i\omega Ae^{i\omega t}] &= \mathrm{Re}[i\omega A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = \mathrm{Re}[\omega A(i\cos\omega t - \sin\omega t)] \\ &= -\omega A\sin\omega t\end{aligned}$$

Aceleração:

$$\mathrm{Re}[-\omega^2 Ae^{i\omega t}] = \mathrm{Re}[-\omega^2 A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = -\omega^2 A\cos\omega t$$

Operações com a Representação Complexa

Tomando as partes reais:
Deslocamento:

$$\mathrm{Re}[Ae^{i\omega t}] = \mathrm{Re}[A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = A\cos\omega t$$

Velocidade:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[i\omega Ae^{i\omega t}] &= \mathrm{Re}[i\omega A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = \mathrm{Re}[\omega A(i\cos\omega t - \sin\omega t)] \\ &= -\omega A\sin\omega t\end{aligned}$$

Aceleração:

$$\mathrm{Re}[-\omega^2 Ae^{i\omega t}] = \mathrm{Re}[-\omega^2 A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = -\omega^2 A\cos\omega t$$

Operações com a Representação Complexa

Tomando as partes reais:
Deslocamento:

$$\mathrm{Re}[Ae^{i\omega t}] = \mathrm{Re}[A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = A\cos\omega t$$

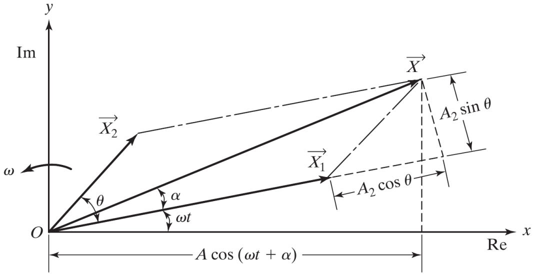
Velocidade:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}[i\omega Ae^{i\omega t}] &= \mathrm{Re}[i\omega A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = \mathrm{Re}[\omega A(i\cos\omega t - \sin\omega t)] \\ &= -\omega A\sin\omega t\end{aligned}$$

Aceleração:

$$\mathrm{Re}[-\omega^2 Ae^{i\omega t}] = \mathrm{Re}[-\omega^2 A(\cos\omega t + i\sin\omega t)] = -\omega^2 A\cos\omega t$$

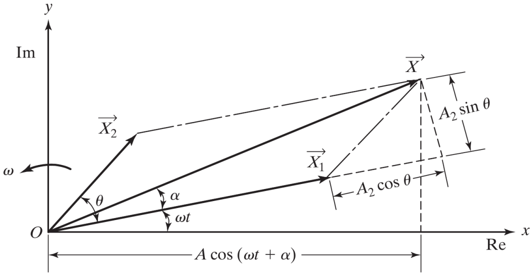
Adição Vetorial da Representação Complexa



$$\vec{X}_1(t) = A_1 e^{i\omega t}, \qquad \vec{X}_2(t) = A_2 e^{i(\omega t+\theta)}$$

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2\cos\theta)^2 + (A_2 \sin\theta)^2}, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{A_2 \sin\theta}{A_1 + A_2 \cos\theta}\right)$$

Adição Vetorial da Representação Complexa



$$\vec{X}_1(t) = A_1 e^{i\omega t}, \qquad \vec{X}_2(t) = A_2 e^{i(\omega t + \theta)}$$

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2\cos\theta)^2 + (A_2 \sin\theta)^2}, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{A_2\sin\theta}{A_1 + A_2\cos\theta}\right)$$

Adição via Trigonometria

Se a frequência é igual:

$$\vec{X}_1(t) = A_1 \cos(\omega t), \qquad \vec{X}_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \theta)$$

$$\begin{aligned}\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(\omega t + \theta) \\ &= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \left(\cos(\omega t)\cos(\theta) - \sin(\omega t)\sin(\theta)\right) \\ &= \cos(\omega t)(A_1 + A_2\cos(\theta)) - \sin(\omega t)(A_2 \sin(\theta))\end{aligned}$$

Definindo

$$A\cos(\phi) = A_1 + A_2\cos(\theta), \qquad A\sin(\phi) = A_2\sin(\theta)$$

$$\begin{aligned}\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A\left(\cos(\omega t)\cos(\phi) - \sin(\omega t)\sin(\phi)\right) \\ &= A\cos(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

Adição via Trigonometria

Se a frequência é igual:

$$\vec{X}_1(t) = A_1\cos(\omega t), \qquad \vec{X}_2(t) = A_2\cos(\omega t + \theta)$$

$$\begin{aligned}\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A_1\cos(\omega t) + A_2\cos(\omega t + \theta)\\ &= A_1\cos(\omega t) + A_2\left(\cos(\omega t)\cos(\theta) - \sin(\omega t)\sin(\theta)\right)\\ &= \cos(\omega t)(A_1 + A_2\cos(\theta)) - \sin(\omega t)(A_2\sin(\theta))\end{aligned}$$

Definindo

$$A\cos(\phi) = A_1 + A_2\cos(\theta), \qquad A\sin(\phi) = A_2\sin(\theta)$$

$$\begin{aligned}\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A\left(\cos(\omega t)\cos(\phi) - \sin(\omega t)\sin(\phi)\right)\\ &= A\cos(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

Adição via Trigonometria

Se a frequência é igual:

$$\vec{X}_1(t) = A_1 \cos(\omega t), \qquad \vec{X}_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \theta)$$

$$\begin{aligned}
\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(\omega t + \theta) \\
&= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \left(\cos(\omega t)\cos(\theta) - \sin(\omega t)\sin(\theta)\right) \\
&= \cos(\omega t)(A_1 + A_2 \cos(\theta)) - \sin(\omega t)(A_2 \sin(\theta))
\end{aligned}$$

Definindo

$$A \cos(\phi) = A_1 + A_2 \cos(\theta), \qquad A \sin(\phi) = A_2 \sin(\theta)$$

$$\begin{aligned}
\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A \left(\cos(\omega t)\cos(\phi) - \sin(\omega t)\sin(\phi)\right) \\
&= A \cos(\omega t + \phi)
\end{aligned}$$

Adição via Trigonometria

Se a frequência é igual:

$$\vec{X}_1(t) = A_1 \cos(\omega t), \qquad \vec{X}_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \theta)$$

$$\begin{aligned}
\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(\omega t + \theta) \\
&= A_1 \cos(\omega t) + A_2 \left(\cos(\omega t)\cos(\theta) - \sin(\omega t)\sin(\theta)\right) \\
&= \cos(\omega t)(A_1 + A_2 \cos(\theta)) - \sin(\omega t)(A_2 \sin(\theta))
\end{aligned}$$

Definindo

$$A \cos(\phi) = A_1 + A_2 \cos(\theta), \qquad A \sin(\phi) = A_2 \sin(\theta)$$

$$\begin{aligned}
\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A \left(\cos(\omega t)\cos(\phi) - \sin(\omega t)\sin(\phi)\right) \\
&= A \cos(\omega t + \phi)
\end{aligned}$$

Adição via Trigonometria

Se a frequência é igual:

$$\vec{X}_1(t) = A_1\cos(\omega t), \qquad \vec{X}_2(t) = A_2\cos(\omega t + \theta)$$

$$\begin{aligned}\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A_1\cos(\omega t) + A_2\cos(\omega t + \theta)\\ &= A_1\cos(\omega t) + A_2\left(\cos(\omega t)\cos(\theta) - \sin(\omega t)\sin(\theta)\right)\\ &= \cos(\omega t)(A_1 + A_2\cos(\theta)) - \sin(\omega t)(A_2\sin(\theta))\end{aligned}$$

Definindo

$$A\cos(\phi) = A_1 + A_2\cos(\theta), \qquad A\sin(\phi) = A_2\sin(\theta)$$

$$\begin{aligned}\vec{X}_1(t) + \vec{X}_2(t) &= A\left(\cos(\omega t)\cos(\phi) - \sin(\omega t)\sin(\phi)\right)\\ &= A\cos(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

Adição via Trigonometria

Claramente,

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2\cos(\theta))^2 + A_2\sin(\theta)^2}$$

e

$$\tan(\phi) = \frac{A_2\sin(\theta)}{A_1 + A_2\cos(\theta)}$$

A soma de duas funções harmônicas de mesma frequência é uma função harmônica com a mesma frequência, defasada.

Adição via Trigonometria

Claramente,

$$A = \sqrt{(A_1 + A_2\cos(\theta))^2 + A_2\sin(\theta)^2}$$

e

$$\tan(\phi) = \frac{A_2\sin(\theta)}{A_1 + A_2\cos(\theta)}$$

A soma de duas funções harmônicas de mesma frequência é uma função harmônica com a mesma frequência, defasada.