

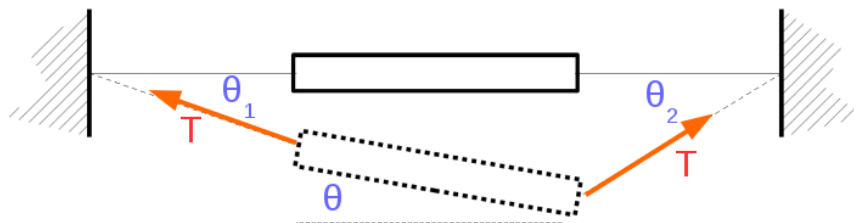
## 2017.2 Terceiro EE -- Turma MM

### Questão 1

Vamos considerar que o comprimento de cada fio é  $l$ . O corpo central tem comprimento  $b$ , os ângulos que os fios fazem com a horizontal à esquerda e à direita são  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , respectivamente, e que o ângulo que o corpo rígido faz com a horizontal é  $\theta$ .

É dado no enunciado que os ângulos de rotação são pequenos, e que o centro de gravidade do corpo pode ser considerado movendo-se apenas na vertical, e que a tração nos cabos é constante e igual a  $T$ .

Estas grandezas podem ser visualizadas na figura abaixo.



Da figura podemos retirar algumas relações geométricas importantes. Chamando de  $x_1$  o deslocamento vertical da extremidade esquerda do corpo, e  $x_2$  o deslocamento vertical da extremidade direita, e de  $x_c$  o deslocamento vertical do centro de gravidade do corpo central, obviamente

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

e o ângulo que o corpo faz com a horizontal é

$$\theta = \frac{x_2 - x_1}{l},$$

além disto,

$$x_1 = l\theta_1; \quad x_2 = l\theta_2.$$

Obviamente, as três últimas relações são válidas apenas quando os ângulos são pequenos.

## Equilíbrio de forças na direção vertical

O somatório de forças na direção vertical leva a

$$-T \sin \theta_1 + -T \sin \theta_2 = m\ddot{x}_c,$$

onde obviamente estamos tomando a direção positiva do deslocamento para baixo. Como os ângulos são pequenos, temos

$$m\ddot{x}_c + T(\theta_1 + \theta_2) = 0.$$

Somando agora as equações para  $x_1$  e  $x_2$ , temos  $x_1 + x_2 = l\theta_1 + l\theta_2$ , ou

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{x_1 + x_2}{l},$$

mas como  $x_1 + x_2 = 2x_c$ , temos que

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{2x_c}{l}.$$

A equação de movimento para a direção vertical é então,

$$m\ddot{x}_c + \frac{2T}{l}x_c = 0.$$

## Equilíbrio de momentos

Tomando  $\theta$  positivo no sentido horário, podemos escrever

$$T \sin \theta_1 \frac{b}{2} - T \sin \theta_2 \frac{b}{2} = J\ddot{\theta}.$$

Rearrmando,

$$J\ddot{\theta} + \frac{bT}{l}(\sin \theta_2 - \sin \theta_1) = 0,$$

mas como os ângulos são pequenos,

$$J\ddot{\theta} + \frac{bT}{l}(\theta_2 - \theta_1) = 0.$$

Subtraindo a expressão de  $x_1$  daquela para  $x_2$ , temos  $x_2 - x_1 = l\theta_2 - l\theta_1$ , ou, é claro,

$$\theta_2 - \theta_1 = \frac{x_2 - x_1}{l}.$$

Agora, como vimos acima,

$$\frac{x_2 - x_1}{l} = \theta,$$

então, a equação para a rotação torna-se

$$J\ddot{\theta} + \frac{bT}{l}\theta = 0.$$

## Equações de movimento

No sistema de coordenadas generalizadas escolhido, as equações de movimento são então:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c + \frac{2T}{l}x_c = 0 \\ J\ddot{\theta} + \frac{bT}{l}\theta = 0 \end{cases}$$

Podemos multiplicar todo mundo por  $l$  para ficar com as equações sem denominadores, o que economiza espaço na tipografia.

$$\begin{cases} ml\ddot{x}_c + 2Tx_c = 0 \\ Jl\ddot{\theta} + bT\theta = 0 \end{cases}$$

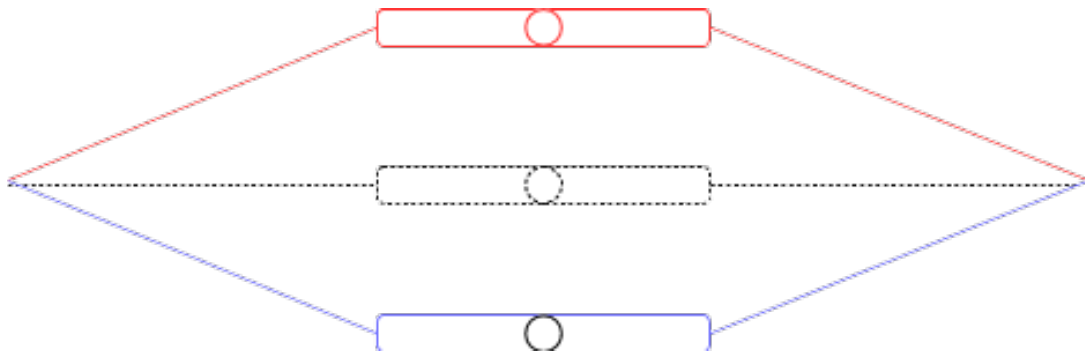
As equações de movimento podem ser reescritas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} ml & 0 \\ 0 & Jl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2T & 0 \\ 0 & bT \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

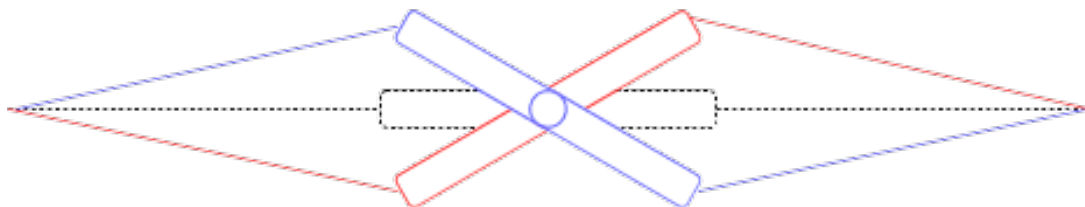
Obviamente, as equações são completamente desacopladas, não há acoplamento estático ou dinâmico, e as frequências naturais são extraídas diretamente de cada equação de movimento. Supondo que a frequência de vibração na direção vertical seja a menor (não há como saber isto sem valores numéricos), as frequências naturais são:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2T}{ml}}; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{bT}{Jl}}.$$

Também devido ao desacoplamento das equações, os modos normais são óbvios, e são como esquematizado abaixo.



Translação vertical



Rotação

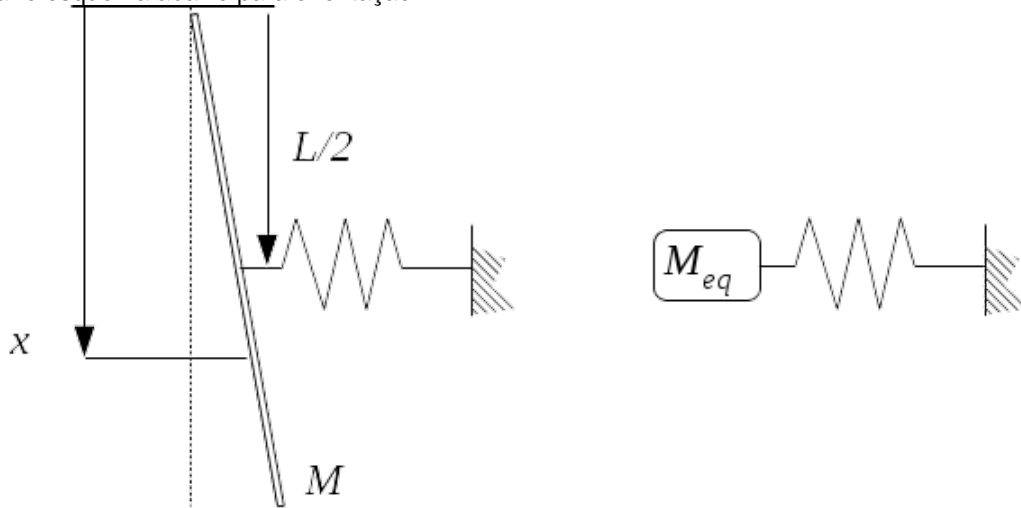
## Questão 2

Obviamente temos um sistema com um grau de liberdade, submetido a uma força periódica não harmônica. Temos que calcular, mesmo que aproximadamente, a amplitude máxima de movimento da placa devido ao impacto dos projéteis.

Como os projéteis atingem a placa à sua meia altura, exatamente sobre a mola, é muito natural representar o sistema por um sistema com um grau de liberdade com a massa da placa concentrada na mesma posição de fixação da mola. O primeiro passo então é calcular a massa equivalente da placa neste ponto.

As dimensões da placa são  $0.5 \times 0.004 \times 0.2$  em metros, para o comprimento ( $L$ ), espessura ( $t$ ) e largura ( $b$ ). Já calculamos massas equivalentes para este tipo de configuração diversas vezes, mas vamos fazer mais uma para deixar mais claro ainda. Vamos chamar a área da seção transversal, perpendicular ao comprimento  $L$ ,  $A$ , e obviamente,  $A = bt$ .

Vamos usar o esquema abaixo para orientação.



Podemos calcular a massa equivalente pela igualdade de energias cinéticas. Para o sistema equivalente,

$$T = \frac{1}{2} M_{eq} \dot{x}_{eq}^2,$$

onde  $x_{eq}$  é a coordenada generalizada escolhida para descrever o sistema, que é o deslocamento na direção horizontal do centro da placa (esqueci de indicar na figura e estou com preguiça de refazê-la.)

Para calcular a energia cinética da placa, integramos a energia de elementos infinitesimais de comprimento  $dx$  e área  $A$  ao longo do comprimento da placa, isto é,

$$T = \int_0^L dT,$$

onde

$$dT = \frac{1}{2} \rho A v(x)^2 dx.$$

No caso,  $v(x)$  é a velocidade de translação na direção horizontal do elemento de massa, que é  $\dot{\theta}x$ , onde  $\theta$  é o ângulo de rotação da placa. Assim, a energia cinética da placa torna-se

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A (\dot{\theta}x)^2 dx.$$

Tirando tudo o que é constante de dentro da integral, e integrando, temos

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A (\dot{\theta}x)^2 dx = \frac{1}{2} \rho A \dot{\theta}^2 \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{2} \rho A \dot{\theta}^2 \frac{L^3}{3}.$$

mas como  $\rho AL = M$ , temos

$$T = \frac{1}{2} \frac{ML^2}{3} \dot{\theta}^2.$$

No sistema de coordenadas equivalente,  $x_{eq} = \dot{\theta}L/2$ , portanto a energia cinética equivalente é

$$T = \frac{1}{2} \frac{L^2}{4} M_{eq} \dot{\theta}^2.$$

Igualando as duas expressões anteriores, e eliminando os termos que aparecem em ambos os lados, ficamos com

$$\frac{M}{3} = \frac{M_{eq}}{4},$$

portanto a massa equivalente é

$$M_{eq} = \frac{4}{3}M.$$

A massa total da placa é facilmente calculável,

```
In [2]: rho = 7700 # kg/m³
        L = 0.5    # m
        t = 0.004  # m
        b = 0.2    # m
        A = b*t
        V = A*L
        M = rho*V
        (M, V, A)
```

```
Out[2]: (3.08, 0.0004, 0.0008)
```

A massa equivalente é então,

```
In [3]: Meq = 4.0*M/3.0
        Meq
```

```
Out[3]: 4.1066666666666665
```

Como a rigidez é conhecida, podemos calcular diretamente a frequência natural do sistema

```
In [4]: from math import sqrt, pi
        k = 40000 # N/m
        wn = sqrt(k/Meq)
        f = wn/(2.0*pi)
        wn, f
```

```
Out[4]: (98.69275424396535, 15.707439685280718)
```

A frequência natural é então mais ou menos 16 Hz. O período natural é,

```
In [5]: Tn = 1.0/f
        Tn
```

```
Out[5]: 0.06366409930811893
```

Isto é, aproximadamente 64 milissegundos.

Sabemos também, do enunciado, que a razão de amortecimento é 1%.

```
In [6]: zeta = 0.01
```

É dito no enunciado que o efeito do impacto dos projéteis pode ser considerado como uma força constante, que age por 20ms. Como são disparados 9 projéteis por segundo, a frequência com que os projéteis atingem a placa, que é, claramente, a frequência fundamental da força de excitação, é,

```
In [7]: ff = 9.0    # Hz
```

e o período correspondente é

```
In [8]: Tf = 1.0/ff
        Tf
```

```
Out[8]: 0.1111111111111111
```

Aproximadamente 111 ms, o que é próximo ao dobro do período natural.

Precisamos calcular o efeito dos projéteis sobre a placa, vamos usar o fato de que este efeito pode ser considerado como um trem de pulsos de força. Como este trem é periódico, mas não harmônico, podemos usar a decomposição em série de Fouries para calcular a resposta.

Conforme dado no enunciado, a série de Fourier para um trem de pulsos é

$$f(t) = \frac{\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \cos \frac{2n\pi t}{T},$$

onde  $T$  é o período fundamental e  $\tau$  é a duração do pulso. Além disto, lembramos que  $\omega = 2\pi/T$ , portanto a fórmula acima torna-se

$$f(t) = \frac{\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T} \cos n\omega t,$$

Lembrando que esta fórmula vale para um pulso de amplitude unitária, como está explicitado no enunciado e mostrado no gráfico, então, devemos multiplicar todos os termos pela amplitude do pulso, que chamaremos de  $A_p$ . Percebam que esta é uma série em cossenos apenas, os termos em senos são coeficientes numéricos.

A resposta para uma força descrita como uma série de Fourier, considerando apenas os termos em cosseno, é

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n/k}{\sqrt{(1 - n^2 r^2)^2 - (2\zeta n r)^2}} \cos(n\omega t - \phi_n),$$

onde  $j$  for trocado por  $n$  para ficar compatível com a fórmula da força. Os ângulos de fase são dados por

$$\phi_n = \arctan \frac{2\zeta n r}{1 - n^2 r^2}.$$

Vamos calcular os coeficientes da série para a força. Como estou fazendo em um computador, vou calcular vários, mas na prova, obviamente, só é necessário calcular uns dois ou três. É dado no enunciado que a duração do pulso é 20ms, portanto

In [9]: **import numpy as np**

```
tau = 0.020      # s
tT = tau/Tf      # esta razão é o que aparece na série.
tT
```

Out[9]: 0.18000000000000002

Efetivamente o coeficiente de cada termo na série (sem contar o termo constante) é

$$\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T}.$$

```
In [10]: nt = 10 # Vamos usar 10 termos, só para ver como fica
          ens = np.linspace(1.0, nt, nt)
          ens
```

Out[10]: array([ 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9., 10.]  
)

```
In [11]: an = 2.0*np.sin(ens*pi*tT)/(pi*ens)
         an
```

```
Out[11]: array([ 0.34111793,  0.2880154 ,  0.21053328,  0.12263099,  0.0393
4527,
               -0.02638682, -0.06629655, -0.07816794, -0.06576823, -0.0374
1957])
```

Examinando a magnitude dos coeficientes, podemos ver que a partir do quinto, a magnitude é muito pequena, então teríamos uma representação razoável usando apenas os primeiros 4 termos.

O fator  $r$  que aparece na resposta é a razão entre a frequência fundamental da força e a frequência natural do sistema, então

```
In [12]: wf = 2*pi*ff
         r = wf/wn
         r, wf
```

```
Out[12]: (0.5729768937730704, 56.548667764616276)
```

Calculando primeiro o termo

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{(1 - n^2 r^2)^2 - (2\zeta n r)^2}},$$

```
In [13]: vn = 1.0/np.sqrt((1.0-ens**2*r**2)**2-(2*zeta*ens*r)**2)
         vn
```

```
Out[13]: array([ 1.48898216,  3.20132757,  0.51166066,  0.23515063,  0.1387
4753,
               0.09243278,  0.06628394,  0.04997214,  0.03907426,  0.0314
1686])
```

Os termos da série da resposta são então,

```
In [14]: cn = an/(k*vn)
         cn
```

```
Out[14]: array([ 5.72736769e-06,  2.24918717e-06,  1.02867631e-05,
               1.30374933e-05,  7.08936303e-06, -7.13675801e-06,
               -2.50047548e-05, -3.91057598e-05, -4.20790026e-05,
               -2.97766667e-05])
```

Temos também o termo constante,

```
In [15]: v0 = tT/(2*k)
```

Lembrem-se que todos estes termos são para uma amplitude de força unitária, o que não é o caso aqui.

Os ângulos de fase (que não serão usados no cálculo final, isto é só para a ilustração) são



```
In [16]: phin = np.arctan2(2*zeta*ens*r, 1.0 - ens**2*r**2)
          phin
Out[16]: array([ 0.01705891,  3.06854807,  3.124007 ,  3.13081483,  3.1336
                4316,
                3.13523745,  3.1362757 ,  3.13701147,  3.13756275,  3.1379
                9247])
```

Vamos plotar a resposta, para ver mais ou menos como é o jeitão.

```
In [39]: nn = wf*ens

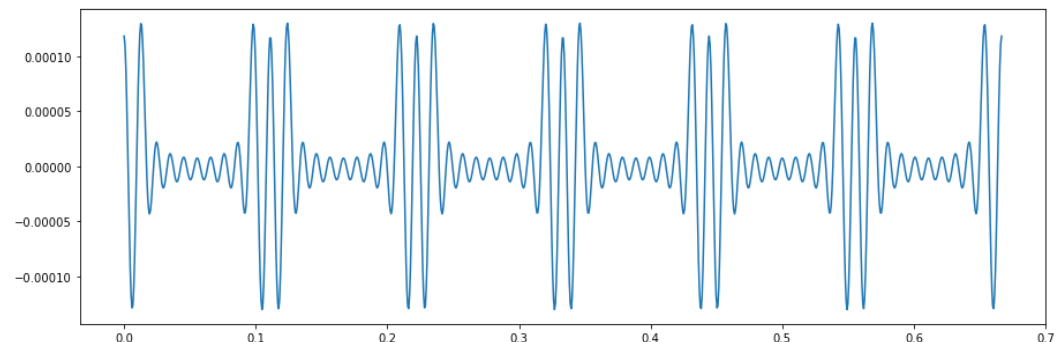
          times = np.linspace(0, 6*Tf, 1000)
          xt = np.zeros_like(times)
          for c, w, phi in zip(cn, nn, phin):
              xt += c*np.cos(w*times-phi)

          xt += v0
```

```
In [41]: %matplotlib inline
          import matplotlib.pyplot as plt

          fig_size = [15, 5]
          plt.rcParams["figure.figsize"] = fig_size
          plt.plot(times, xt)
```

```
Out[41]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fb640390c50>]
```



É claro que poderíamos pegar a amplitude máxima de vibração deste gráfico, mas estamos imaginando que um aluno não teria o gráfico da solução disponível na prova.

Em princípio, não podemos simplesmente somar as amplitudes de cada harmônico diretamente, pois eles tem *frequências diferentes*. No entanto, como uma solução razoável de engenharia, podemos fazer isto, como mencionado em sala de aula, pois estaremos errando para o lado da segurança, superestimando a amplitude da resposta.

Então, somando os quatro primeiros termos e o termo constante, temos

```
In [38]: Amp = v0 + cn[:4].sum()
          Amp
```

```
Out[38]: 3.3550811234678678e-05
```

Esta amplitude de resposta foi calculada para uma amplitude de força unitária!

Sabemos, no entanto, devido ao enunciado que a amplitude da força é  $m_p A$ , com  $A$  sendo uma constante dada, que não tem nenhuma relação com a área da placa, igual a  $2.5 \times 10^5 \text{ m/s}^2$ . Como o problema é linear, a amplitude do deslocamento é proporcional à amplitude da força aplicada, então a amplitude máxima calculada acima deve ser multiplicada por este valor.

Se o deslocamento máximo na borda inferior da placa é 10mm, a meia altura será, por semelhança de triângulos, 5mm, portanto temos a seguinte equação,

$$0.005 = m_p \times A \times \text{Amp},$$

onde Amp é a amplitude para força unitária calculada acima.

Obviamente a maior massa do projeto pode ser calculada diretamente desta equação,

```
In [42]: A = 2.5e5  
         mp = 0.005 / (A*Amp)  
         mp
```

```
Out[42]: 0.00059611077240742444
```

Isto é, aproximadamente 6 gramas. Obviamente projéteis são tipicamente muito mais pesados do que isto e alguma coisa que eu chutei em algum lugar não está muito coerente com a realidade balística.