

Vibrações Mecânicas

Aula 13: Vibração Forçada

Funções de Transferência

Ramiro Brito Willmersdorf
ramiro@willmersdorf.net

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco

2018.2

Introdução

- Baseada em Transformadas de Laplace;
- Técnica típica de Controle;
- Relaciona entrada e a saída de um sistema mecânico;
- Permite o tratamento isolado:
 - Entrada;
 - Sistema;
 - Saída;
- Converte o problema diferencial em um problema algébrico;
- Nunca vamos fazer transformadas “na mão”;

Definição

Função de Transferência

A **Função de Transferência** de uma equação diferencial linear e invariante no tempo é a razão entre as transformadas de Laplace da resposta e da função forçante, supondo condições iniciais nulas.

Transformada de Laplace

Supondo $f(t)$ definida para qualquer $t \geq 0$, definimos

Transformada de Laplace

A **Transformada de Laplace** é dada por

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

A variável s é uma variável auxiliar, geralmente complexa, chamada de Variável de Laplace, e e^{-st} é o núcleo da transformada.

Transformada Inversa

Para encontrar $f(t)$ a partir de uma transformada $F(s)$, aplicamos a

Transformada Inversa

A **Transformada Inversa de Laplace** é dada por

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{s=\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)e^{st} ds = f(t)u(t)$$

Onde

$$u(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

e σ é um valor à direita de todas as singularidades de $F(s)$.

Observação: Isto é muito raramente usado na prática.

Propriedades

Da linearidade da integração:

Linearidade

$$\mathcal{L} [\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 \mathcal{L} [f_1(t)] + \alpha_2 \mathcal{L} [f_2(t)]$$

Propriedades

Usando integração por partes:

Transformada de Derivadas

$$\mathcal{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = -f(0) + sF(s)$$

e

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right] = -\dot{f}(0) - sf(0) + s^2 F(s).$$

Propriedades

Teorema do Deslocamento

$$\mathcal{L} [f(t)e^{at}] = F(s - a)$$

Propriedades

Definindo a convolução de duas funções como

$$f(t) = f_1(t) \star f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau,$$

temos que a transformada da convolução é

Transformada da Convolução

$$\mathcal{L}[f_1(t) \star f_2(t)] = F_1(s)F_2(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] \mathcal{L}[f_2(t)]$$

Tabela

$$1. c_1 F(s) + c_2 G(s)$$

$$c_1 f(t) + c_2 g(t)$$

$$2. F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$$f(a \cdot t) a$$

$$3. F(s)G(s)$$

$$\int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

$$4. s^n F(s) - \sum_{j=1}^n s^{n-j} \frac{d^{j-1} f}{dt^{j-1}}(0)$$

$$\frac{d^n f}{dt^n}(t)$$

$$5. \frac{1}{s^n} F(s)$$

$$\underbrace{\int_0^t \cdots \int_0^t f(\tau) d\tau \cdots d\tau}_n$$

Tabela

6. $F(s + a)$

$e^{-at}f(t)$

7. $\frac{1}{s^{n+1}}$

$t^n; n = 1, 2, \dots, t$

8. $\frac{1}{s + a}$

e^{-at}

9. $\frac{1}{(s + a)^2}$

te^{-at}

10. $\frac{a}{s(s + a)}$

$1 - e^{-at}$

11. $\frac{s + a}{s^2}$

$1 + at$

Tabela

$$12. \frac{a^2}{s^2(s + a)}$$

$$13. \frac{s + b}{s(s + a)}$$

$$14. \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$15. \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$16. \frac{a^2}{s(s^2 + a^2)}$$

$$at - (1 - e^{-at})$$

$$\frac{b}{a} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{a}{b} \right) e^{-at} \right\}$$

$$\sin at$$

$$\cos at$$

$$1 - \cos at$$

Tabela

$$17. \frac{s}{s^2 - a^2}$$

 $\cosh at$

$$18. \frac{a}{s^2 - a^2}$$

 $\sinh at$

$$19. \frac{a(s^2 - a^2)}{(s^2 + a^2)^2}$$

 $at \cos at$

Tabela

20.	$\frac{2sa^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$at \sin at$
21.	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \cos bt$
22.	$\frac{b}{(s + a)^2 + b^2}$	$e^{-at} \sin bt$
23.	$\frac{1}{(s + a)(s + b)}$	$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{(b - a)}$

Tabela

$$24. \frac{s + w}{(s + a)(s + b)}$$

$$25. \frac{1}{(s + a)(s + b)(s + c)}$$

$$26. \frac{s + w}{(s + a)(s + b)(s + c)}$$

$$\frac{\{(w - a)e^{-at} - (w - b)e^{-bt}\}}{(b - a)}$$

$$\frac{e^{-at}}{(b - a)(c - a)} + \frac{e^{-bt}}{(a - b)(c - b)} + \frac{e^{-ct}}{(a - c)(b - c)}$$

$$\frac{(w - a)e^{-at}}{(b - a)(c - a)} + \frac{(w - b)e^{-bt}}{(a - b)(c - b)} + \frac{(w - c)e^{-ct}}{(a - c)(b - c)}$$

Tabela

$$27.* \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$28. \frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$29.* \frac{s + 2\zeta\omega_n s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$30.* \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$31.* \frac{s + \zeta\omega_n}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

$$\frac{1}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_d t$$

$$-\frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t - \phi_1)$$

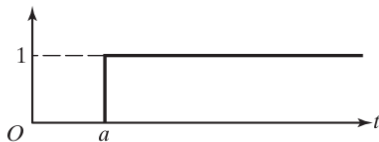
$$\frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi_1)$$

$$1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi_1)$$

$$e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi_1)$$

Tabela

32. 1

Unit impulse at $t = 0$ 33. $\frac{e^{-as}}{s}$ Unit step function at $t = a$

Caso Geral

Considerando uma equação diferencial linear, invariante no tempo, de ordem n ,

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) =$$
$$b_m \frac{d^m f(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} f(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 f(t),$$

tomamos a Transformada de Laplace de ambos os lados.

Caso Geral – Solução

A transformada é

$$\begin{aligned} a_n s^n X(s) + a_{n-1} s^{n-1} X(s) + \dots \\ + a_0 X(s) + \text{termos iniciais para } x(t) = \\ b_m s^m F(s) + b_{m-1} s^{m-1} F(s) + \dots \\ + b_0 F(s) + \text{termos iniciais para } x(t), \end{aligned}$$

que é uma expressão puramente algébrica na qual podemos colocar em evidência $X(s)$ e $F(s)$, para **condições iniciais nulas**.

Caso Geral – Função de Transferência

Colocando $X(s)$ e $F(s)$ em evidência,

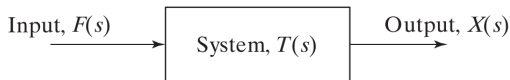
$$\{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots a_0\} X(s) = \{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0\} F(s),$$

ou

$$T(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots a_0}$$

Se a função de transferência de um sistema for conhecida, a saída pode ser calculada simplesmente como

$$X(s) = T(s)F(s)$$



Caso Geral – Função de Transferência

Colocando $X(s)$ e $F(s)$ em evidência,

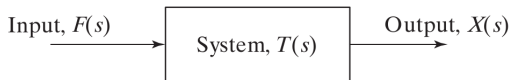
$$\{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots a_0\} X(s) = \{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0\} F(s),$$

ou

$$T(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots a_0}$$

Se a função de transferência de um sistema for conhecida, a saída pode ser calculada simplesmente como

$$X(s) = T(s)F(s)$$



Caso Geral – Função de Transferência

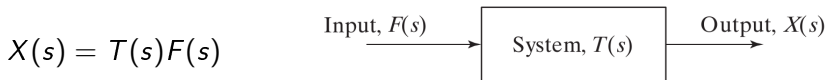
Colocando $X(s)$ e $F(s)$ em evidência,

$$\{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots a_0\} X(s) = \{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0\} F(s),$$

ou

$$T(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots a_0}$$

Se a função de transferência de um sistema for conhecida, a saída pode ser calculada simplesmente como



Sistemas com 1 GL

Especializando para 1 GL,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t)$$

Tomando a transformada da equação,

$$m\mathcal{L}[\ddot{x}] + c\mathcal{L}[\dot{x}] + \kappa\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[f(t)]$$

ou

$$m\{s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + c\{sX(s) - x(0)\} + \kappa X(s) = F(s)$$

ou ainda,

$$(ms^2 + cs + \kappa) X(s) - (msx(0) + m\dot{x}(0) + sx(0)) = F(s)$$

Sistemas com 1 GL

Especializando para 1 GL,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t)$$

Tomando a transformada da equação,

$$m\mathcal{L}[\ddot{x}] + c\mathcal{L}[\dot{x}] + \kappa\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[f(t)]$$

ou

$$m\{s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + c\{sX(s) - x(0)\} + \kappa X(s) = F(s)$$

ou ainda,

$$(ms^2 + cs + \kappa) X(s) - (msx(0) + m\dot{x}(0) + sx(0)) = F(s)$$

Sistemas com 1 GL

Especializando para 1 GL,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t)$$

Tomando a transformada da equação,

$$m\mathcal{L}[\ddot{x}] + c\mathcal{L}[\dot{x}] + \kappa\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[f(t)]$$

ou

$$m\{s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + c\{sX(s) - x(0)\} + \kappa X(s) = F(s)$$

ou ainda,

$$(ms^2 + cs + \kappa) X(s) - (msx(0) + m\dot{x}(0) + sx(0)) = F(s)$$

Sistemas com 1 GL

Especializando para 1 GL,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t)$$

Tomando a transformada da equação,

$$m\mathcal{L}[\ddot{x}] + c\mathcal{L}[\dot{x}] + \kappa\mathcal{L}[x] = \mathcal{L}[f(t)]$$

ou

$$m\{s^2 X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)\} + c\{sX(s) - x(0)\} + \kappa X(s) = F(s)$$

ou ainda,

$$(ms^2 + cs + \kappa) X(s) - (msx(0) + m\dot{x}(0) + sx(0)) = F(s)$$

Sistemas com 1 GL – Função de Transferência

Para condições iniciais nulas,

$$T(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{saída}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]} = \frac{X(s)}{F(s)}$$

$$T(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + \kappa}$$

Propriedades da Função de Transferência

- Não usamos o fato de $f(t)$ ser periódica!
- $T(s)$ é uma propriedade do sistema, independe das funções de entrada e saída.
- Sistemas físicos diferentes podem ter a mesma função de transferência.
- É **relativamente** mais fácil medir a função de transferência do que medir os parâmetros físicos diretamente.
- Em vibrações pode ser interessante medir a função de transferência da aceleração, $s^2 X(s)/F(s)$.
- A função de transferência é uma função complexa! (s é uma variável complexa.)

Resposta Usando Funções de Transferência

Para condições iniciais nulas,

$$X(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + cs + \kappa} = \frac{F(s)}{m\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{\kappa}{m}\right)}$$

ou

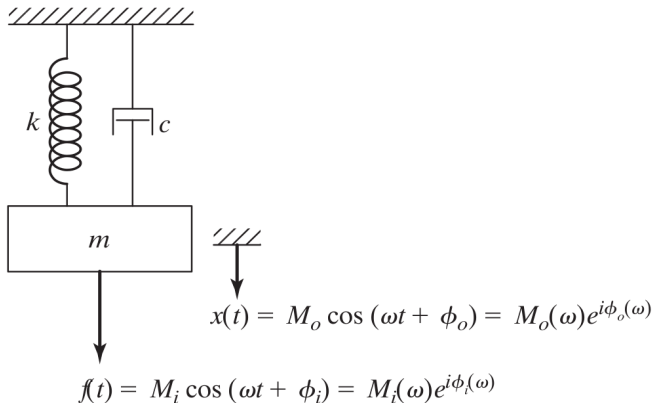
$$X(s) = \frac{F(s)}{m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Podemos resolver isto analiticamente, conforme o livro, mas eu prefiro uma coisa diferente.

Funções de Transferência em Frequência

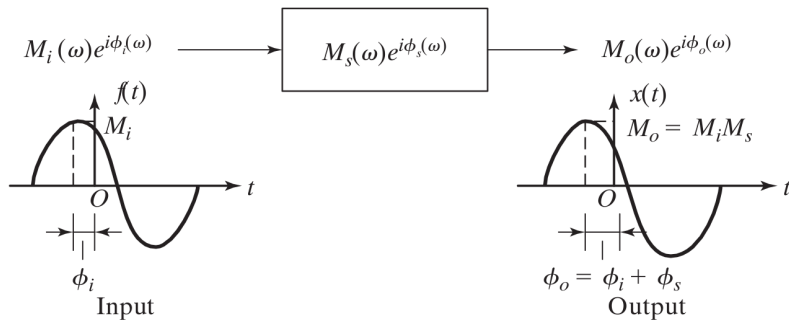
- A resposta no regime permanente para uma excitação harmônica é um deslocamento harmônico.
- A resposta tem amplitude (é claro) e fase diferentes da excitação.
- Tanto a amplitude quanto a fase são funções da frequência de excitação.
- Vamos representar todas as funções harmônicas por fasores.
- O fasor de entrada é $M_i \sin(\omega t + \phi_i)$, ou **simplificadamente**, $M_i(\omega)e^{i\phi_i}$, onde a frequência fica **subentendida!**.
- Como a saída é também um fasor, vamos considerar que o sistema é uma função que transforma o fasor de entrada em um fasor de saída $M_o(\omega)e^{i\phi_o}$.

Sistema Físico



(a) Physical system

Diagrama de Blocos



(b) Block diagram

Funções de Transferência em Frequência

- Multiplicar um fasor por outro de mesma frequência altera sua fase e amplitude, mas não a frequência.
- O efeito do sistema pode então ser representado pela multiplicação por um fasor.

Assim,

$$M_o(\omega)e^{i\phi_o(\omega)} = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)}M_i(\omega)e^{i\phi_i(\omega)}$$

ou

$$M_o(\omega)e^{i\phi_o(\omega)} = M_s(\omega)M_i(\omega)e^{i\{\phi_s(\omega)+\phi_i(\omega)\}}$$

É claro então que:

$$M_s(\omega) = \frac{M_o(\omega)}{M_i(\omega)} \quad \text{e} \quad \phi_s(\omega) = \phi_o(\omega) - \phi_i(\omega).$$

Funções de Transferência em Frequência

- Multiplicar um fasor por outro de mesma frequência altera sua fase e amplitude, mas não a frequência.
- O efeito do sistema pode então ser representado pela multiplicação por um fasor.

Assim,

$$M_o(\omega)e^{i\phi_o(\omega)} = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)}M_i(\omega)e^{i\phi_i(\omega)}$$

ou

$$M_o(\omega)e^{i\phi_o(\omega)} = M_s(\omega)M_i(\omega)e^{i\{\phi_s(\omega)+\phi_i(\omega)\}}$$

É claro então que:

$$M_s(\omega) = \frac{M_o(\omega)}{M_i(\omega)} \quad \text{e} \quad \phi_s(\omega) = \phi_o(\omega) - \phi_i(\omega).$$

Funções de Transferência em Frequência

- Multiplicar um fasor por outro de mesma frequência altera sua fase e amplitude, mas não a frequência.
- O efeito do sistema pode então ser representado pela multiplicação por um fasor.

Assim,

$$M_o(\omega)e^{i\phi_o(\omega)} = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)}M_i(\omega)e^{i\phi_i(\omega)}$$

ou

$$M_o(\omega)e^{i\phi_o(\omega)} = M_s(\omega)M_i(\omega)e^{i\{\phi_s(\omega)+\phi_i(\omega)\}}$$

É claro então que:

$$M_s(\omega) = \frac{M_o(\omega)}{M_i(\omega)} \quad \text{e} \quad \phi_s(\omega) = \phi_o(\omega) - \phi_i(\omega).$$

Funções de Transferência em Frequência

- Multiplicar um fasor por outro de mesma frequência altera sua fase e amplitude, mas não a frequência.
- O efeito do sistema pode então ser representado pela multiplicação por um fasor.

Assim,

$$M_o(\omega)e^{i\phi_o(\omega)} = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)}M_i(\omega)e^{i\phi_i(\omega)}$$

ou

$$M_o(\omega)e^{i\phi_o(\omega)} = M_s(\omega)M_i(\omega)e^{i\{\phi_s(\omega)+\phi_i(\omega)\}}$$

É claro então que:

$$M_s(\omega) = \frac{M_o(\omega)}{M_i(\omega)} \quad \text{e} \quad \phi_s(\omega) = \phi_o(\omega) - \phi_i(\omega).$$

Função de Transferência em Frequência

Por conveniência notacional, definimos a **função de transferência em frequência**,

$$T(i\omega) = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)}.$$

Podemos obter a função de transferência em frequência a partir da função de transferência para um sistema m, c, k ,

$$T(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + \kappa},$$

simplesmente fazendo $s = i\omega$,

$$T(i\omega) = \frac{1}{\kappa - m\omega^2 + i\omega c}.$$

Função de Transferência em Frequência

Por conveniência notacional, definimos a **função de transferência em frequência**,

$$T(i\omega) = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)}.$$

Podemos obter a função de transferência em frequência a partir da função de transferência para um sistema m, c, k ,

$$T(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + \kappa},$$

simplesmente fazendo $s = i\omega$,

$$T(i\omega) = \frac{1}{\kappa - m\omega^2 + i\omega c}.$$

Função de Transferência em Frequência

Igualando a expressão anterior à função de transferência em frequência,

$$T(i\omega) = \frac{1}{\kappa - m\omega^2 + i\omega c} = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)} = \frac{M_o(\omega)e^{i\phi_o(\omega)}}{M_i(\omega)e^{i\phi_i(\omega)}},$$

isto ocorre quando

$$M_o(\omega) = 1, \quad \phi_o(\omega) = 0,$$

$$M_i(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

$$\phi_i(\omega) = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right)$$

Função de Transferência em Frequência

Igualando a expressão anterior à função de transferência em frequência,

$$T(i\omega) = \frac{1}{\kappa - m\omega^2 + i\omega c} = M_s(\omega)e^{i\phi_s(\omega)} = \frac{M_o(\omega)e^{i\phi_o(\omega)}}{M_i(\omega)e^{i\phi_i(\omega)}},$$

isto ocorre quando

$$M_o(\omega) = 1, \quad \phi_o(\omega) = 0,$$

$$M_i(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

$$\phi_i(\omega) = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right)$$

Função de Transferência em Frequência

Observamos facilmente que a magnitude de $T(i\omega)$ é,

$$M_s(s) = |T(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

e o ângulo de fase é

$$\phi_s(\omega) = \arctan\left(\frac{c\omega}{m\omega^2 - \kappa}\right)$$

Observação: Apesar de feito para um oscilador harmônico amortecido, o procedimento é válido para qualquer equação diferencial linear, invariante no tempo, de ordem n .

Função de Transferência em Frequência

Observamos facilmente que a magnitude de $T(i\omega)$ é,

$$M_s(s) = |T(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\kappa - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

e o ângulo de fase é

$$\phi_s(\omega) = \arctan\left(\frac{c\omega}{m\omega^2 - \kappa}\right)$$

Observação: Apesar de feito para um oscilador harmônico amortecido, o procedimento é válido para qualquer equação diferencial linear, invariante no tempo, de ordem n .

Representação Gráfica

- Para forçantes harmônicos, a resposta é harmônica;
- Pode ser representada pela amplitude e fase;
- Ambos variam com a frequência de excitação;
- É conveniente mostrar ambas grandezas em função da frequência de excitação;
- Isto descreve completamente a dinâmica de um oscilador harmônico, **para o regime permanente apenas!**
- Gráficos padrão são usados na indústria;
- Como a escala de variação de amplitudes e frequências pode ser muito grande, naturalmente usa-se escalas logarítmicas.

Diagrama de Bode

A maneira mais clássica de representar a resposta de um sistema é através do **Diagrama de Bode**.

- 2 gráficos: $T(i\omega) \times \omega$ e $\phi \times \omega$;
- Ambas as escalas são logarítmicas para os dois gráficos;
- Usa-se **decibel** como unidade;
- O decibel é sempre uma medida relativa;
- A função de transferência mede a relação entre amplitudes;

$$m = 10 \log_{10}(M^2) = 20 \log_{10} M \text{ dB}$$

Value of N	0.001	0.01	0.1	0.5	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	10	100	1000
dB Value	-60	-40	-20	-6	-2	0	3	6	20	40	60

Exemplo

Para um sistema com função de transferência

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (1)$$

podemos obter a função de transferência em frequência substituindo s por $i\omega$,

$$T(i\omega) = \frac{\omega_n^2}{(i\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(i\omega) + \omega_n^2}, \quad (2)$$

ou, alternativamente

$$T(i\omega) = \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r}. \quad (3)$$

Exemplo

A magnitude da função de transferência é

$$M = |T(i\omega)| = \left| \frac{1}{1 - r^2 + i2\zeta r} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}. \quad (4)$$

O ângulo de fase é

$$\phi = \arctan \frac{2\zeta r}{1 - r^2}. \quad (5)$$

Plotando o log das funções acima em função da frequência, temos,

Diagrama de Bode – Frequência

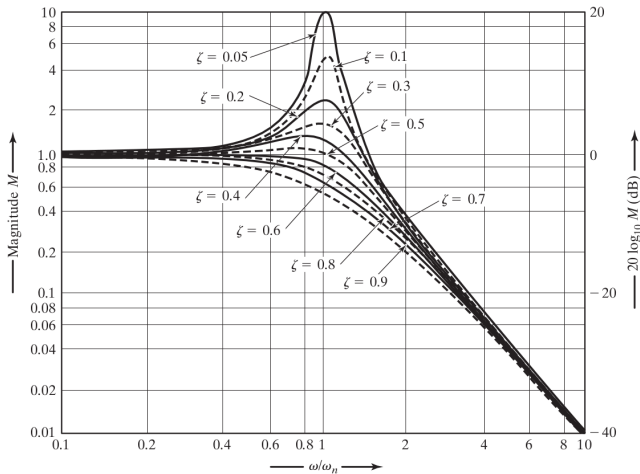
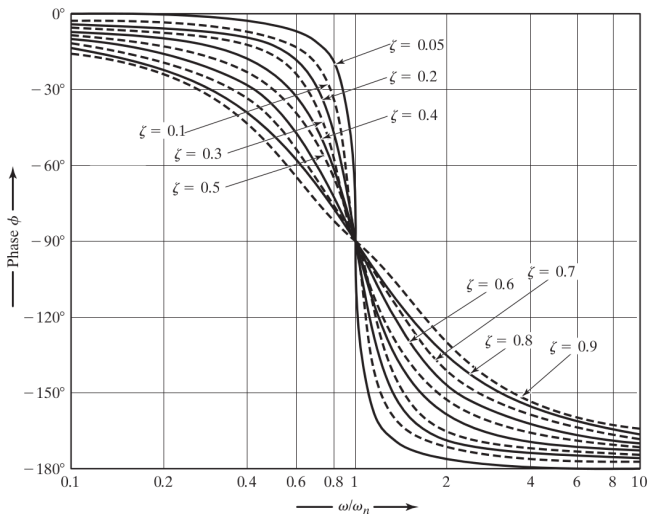


Diagrama de Bode – Frequência



(b) Phase