Vibrações Mecânicas

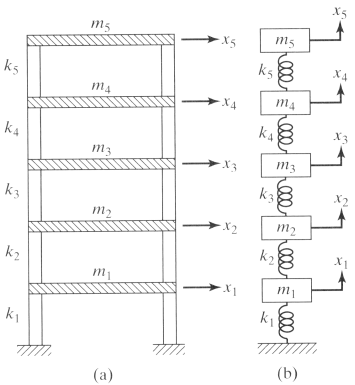
Elementos Físicos – Massas e Amortecedores

Ramiro Brito Willmersdorf
ramiro@willmersdorf.net

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco

2018.2

Massas

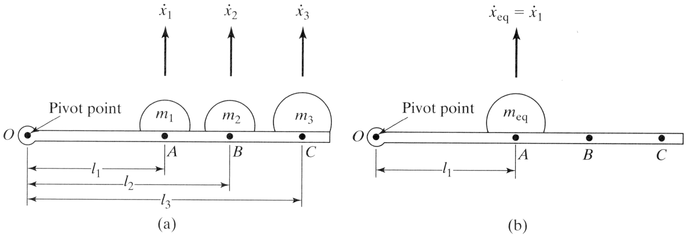


- Consideradas corpos rígidos, $F = ma$.
- O trabalho aplicado sobre uma massa é armazenado na forma de energia cinética.
- Normalmente podem ser consideradas *concentradas*.

Combinação de massas

Princípio geral: determinar um sistema equivalente com a mesma energia cinética.

Exemplo 1: Determinar uma massa equivalente localizada em m_1.



Combinação de massas

Continuação...
Para pequenos deslocamentos,

$$\dot{x}_2 = \frac{l_2}{l_1}\dot{x}_1, \quad \dot{x}_3 = \frac{l_3}{l_1}\dot{x}_1, \quad \text{e} \quad \dot{x}_{eq} = \dot{x}_1.$$

Igualando as energias cinéticas

$$\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}_{eq}^2,$$

assim

$$m_{eq} = m_1 + m_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 + m_3\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2$$

Combinação de massas

Continuação...
Para pequenos deslocamentos,

$$\dot{x}_2 = \frac{l_2}{l_1}\dot{x}_1, \quad \dot{x}_3 = \frac{l_3}{l_1}\dot{x}_1, \quad \text{e} \quad \dot{x}_{eq} = \dot{x}_1.$$

Igualando as energias cinéticas

$$\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}_{eq}^2,$$

assim

$$m_{eq} = m_1 + m_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 + m_3\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2$$

Combinação de massas

Continuação...
Para pequenos deslocamentos,

$$\dot{x}_2 = \frac{l_2}{l_1}\dot{x}_1, \quad \dot{x}_3 = \frac{l_3}{l_1}\dot{x}_1, \quad \text{e} \quad \dot{x}_{eq} = \dot{x}_1.$$

Igualando as energias cinéticas

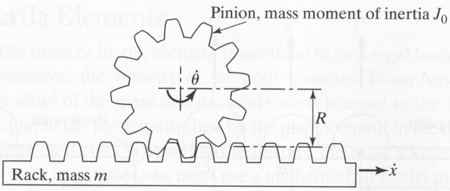
$$\frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 = \frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}_{eq}^2,$$

assim

$$m_{eq} = m_1 + m_2\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 + m_3\left(\frac{l_3}{l_1}\right)^2$$

Combinação de massas

Exemplo 2: Acoplamento de inércia rotacional e translacional.

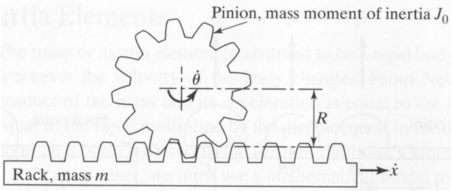


A energia cinética do sistema é

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2.$$

Combinação de massas

Exemplo 2: Acoplamento de inércia rotacional e translacional.



A energia cinética do sistema é

$$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2.$$

Combinação de massas

Continuando...

Massa equivalente translacional

A energia cinética é

$$T_{\text{eq}} = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{x}_{\text{eq}}^2,$$

sabendo que

$$\dot{x}_{\text{eq}} = \dot{x}, \quad \text{e} \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R},$$

igualando as energias cinéticas temos que

$$\frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2,$$

portanto

$$m_{\text{eq}} = m + \frac{J_0}{R^2}.$$

Combinação de massas

Continuando...

Massa equivalente translacional

A energia cinética é

$$T_{\text{eq}} = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{x}_{\text{eq}}^2,$$

sabendo que

$$\dot{x}_{\text{eq}} = \dot{x}, \quad \text{e} \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R},$$

igualando as energias cinéticas temos que

$$\frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2,$$

portanto

$$m_{\text{eq}} = m + \frac{J_0}{R^2}.$$

Combinação de massas

Continuando...

Massa equivalente translacional

A energia cinética é

$$T_{\text{eq}} = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{x}_{\text{eq}}^2,$$

sabendo que

$$\dot{x}_{\text{eq}} = \dot{x}, \quad \text{e} \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R},$$

igualando as energias cinéticas temos que

$$\frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2,$$

portanto

$$m_{\text{eq}} = m + \frac{J_0}{R^2}.$$

Combinação de massas

Continuando...

Massa equivalente translacional

A energia cinética é

$$T_{\text{eq}} = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{x}_{\text{eq}}^2,$$

sabendo que

$$\dot{x}_{\text{eq}} = \dot{x}, \quad \text{e} \quad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R},$$

igualando as energias cinéticas temos que

$$\frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2,$$

portanto

$$m_{\text{eq}} = m + \frac{J_0}{R^2}.$$

Combinação de massas

Continuando...

Massa equivalente rotacional

A energia cinética é

$$T_{\text{eq}} = \frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}_{\text{eq}}^2,$$

sabendo que

$$\dot{\theta}_{\text{eq}} = \dot{\theta}, \quad \text{e} \quad \dot{x} = R\dot{\theta},$$

igualando as energias cinéticas temos que

$$\frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}_{\text{eq}}^2 = \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2,$$

portanto

$$J_{\text{eq}} = J_0 + mR^2.$$

Combinação de massas

Continuando...

Massa equivalente rotacional

A energia cinética é

$$T_{\text{eq}} = \frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}_{\text{eq}}^2,$$

sabendo que

$$\dot{\theta}_{\text{eq}} = \dot{\theta}, \quad \text{e} \quad \dot{x} = R\dot{\theta},$$

igualando as energias cinéticas temos que

$$\frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}_{\text{eq}}^2 = \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2,$$

portanto

$$J_{\text{eq}} = J_0 + mR^2.$$

Combinação de massas

Continuando...

Massa equivalente rotacional

A energia cinética é

$$T_{\text{eq}} = \frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}_{\text{eq}}^2,$$

sabendo que

$$\dot{\theta}_{\text{eq}} = \dot{\theta}, \quad \text{e} \quad \dot{x} = R\dot{\theta},$$

igualando as energias cinéticas temos que

$$\frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}_{\text{eq}}^2 = \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2,$$

portanto

$$J_{\text{eq}} = J_0 + mR^2.$$

Combinação de massas

Continuando...

Massa equivalente rotacional

A energia cinética é

$$T_{\text{eq}} = \frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}_{\text{eq}}^2,$$

sabendo que

$$\dot{\theta}_{\text{eq}} = \dot{\theta}, \quad \text{e} \quad \dot{x} = R\dot{\theta},$$

igualando as energias cinéticas temos que

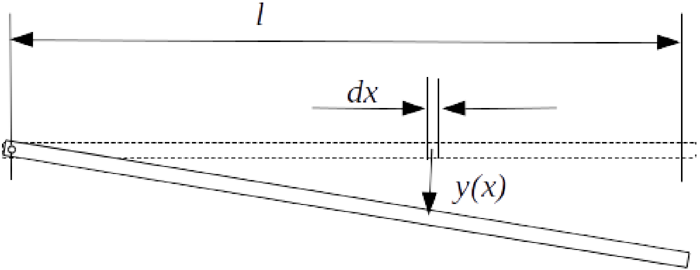
$$\frac{1}{2} J_{\text{eq}} \dot{\theta}_{\text{eq}}^2 = \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2,$$

portanto

$$J_{\text{eq}} = J_0 + mR^2.$$

Massa distribuída

Se a massa for distribuída, aplicamos o mesmo raciocínio, com uma hipótese sobre a deformação da estrutura, caso seja flexível.
Normalmente, consideramos a deformação sob uma carga estática, concentrada ou distribuída.
Exemplo:



Massa distribuída

Considerando uma massa equivalente concentrada na extremidade livre da barra:

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} (l\dot{\theta})^2.$$

Para um elemento infinitesimal de comprimento dx, a energia cinética é $dT = 1/2\, dm\, \dot{y}^2$.
Supondo que a barra seja uniforme, $dm = \rho dx = m/l\, dx$.
A energia cinética é então

$$dT = \frac{1}{2} \frac{m}{l} \dot{y}^2 dx,$$

e a energia cinética total da barra é

$$T = \int_0^l dT = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{m}{l} \dot{y}^2\, dx,$$

Massa distribuída

Considerando uma massa equivalente concentrada na extremidade livre da barra:

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} (l\dot{\theta})^2.$$

Para um elemento infinitesimal de comprimento dx, a energia cinética é $dT = 1/2\, dm\, \dot{y}^2$.

Supondo que a barra seja uniforme, $dm = \rho dx = m/l\, dx$.

A energia cinética é então

$$dT = \frac{1}{2} \frac{m}{l} \dot{y}^2 dx,$$

e a energia cinética total da barra é

$$T = \int_0^l dT = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{m}{l} \dot{y}^2\, dx,$$

Massa distribuída

Considerando uma massa equivalente concentrada na extremidade livre da barra:

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} (l\dot{\theta})^2.$$

Para um elemento infinitesimal de comprimento dx, a energia cinética é $dT = 1/2\, dm\, \dot{y}^2$.
Supondo que a barra seja uniforme, $dm = \rho dx = m/l\, dx$.
A energia cinética é então

$$dT = \frac{1}{2} \frac{m}{l} \dot{y}^2 dx,$$

e a energia cinética total da barra é

$$T = \int_0^l dT = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{m}{l} \dot{y}^2\, dx,$$

Massa distribuída

Considerando uma massa equivalente concentrada na extremidade livre da barra:

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m_{\text{eq}} (l\dot{\theta})^2.$$

Para um elemento infinitesimal de comprimento dx, a energia cinética é $dT = 1/2\, dm\, \dot{y}^2$.

Supondo que a barra seja uniforme, $dm = \rho dx = m/l\, dx$.

A energia cinética é então

$$dT = \frac{1}{2} \frac{m}{l} \dot{y}^2 dx,$$

e a energia cinética total da barra é

$$T = \int_0^l dT = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{m}{l} \dot{y}^2\, dx,$$

Massa distribuída

Considerando uma massa equivalente concentrada na extremidade livre da barra:

$$T = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m_{eq} (l\dot{\theta})^2.$$

Para um elemento infinitesimal de comprimento dx, a energia cinética é $dT = 1/2 \, dm \, \dot{y}^2$.
Supondo que a barra seja uniforme, $dm = \rho dx = m/l \, dx$.
A energia cinética é então

$$dT = \frac{1}{2} \frac{m}{l} \dot{y}^2 dx,$$

e a energia cinética total da barra é

$$T = \int_0^l dT = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{m}{l} \dot{y}^2 \, dx,$$

Massa distribuída

Para um ponto x, $\dot{y} = x\dot{\theta}$, assim

$$T = \int_0^l \frac{1}{2}\frac{m}{l}\dot{y}^2\,dx = \frac{1}{2}\frac{m}{l}\int_0^l (x\dot{\theta})^2\,dx.$$

Integrando,

$$T = \frac{1}{2}\frac{m}{l}\dot{\theta}^2 \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^l = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\frac{l^2}{3}.$$

Igualando a $T = \frac{1}{2}m_{eq}(l\dot{\theta})^2$, temos que

$$m_{eq} = \frac{m}{3}.$$

Massa distribuída

Para um ponto x, $\dot{y} = x\dot{\theta}$, assim

$$T = \int_0^l \frac{1}{2}\frac{m}{l}\dot{y}^2\,dx = \frac{1}{2}\frac{m}{l}\int_0^l (x\dot{\theta})^2\,dx.$$

Integrando,

$$T = \frac{1}{2}\frac{m}{l}\dot{\theta}^2 \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^l = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\frac{l^2}{3}.$$

Igualando a $T = \frac{1}{2}m_{eq}(l\dot{\theta})^2$, temos que

$$m_{eq} = \frac{m}{3}.$$

Massa distribuída

Para um ponto x, $\dot{y} = x\dot{\theta}$, assim

$$T = \int_0^l \frac{1}{2}\frac{m}{l}\dot{y}^2\,dx = \frac{1}{2}\frac{m}{l}\int_0^l (x\dot{\theta})^2\,dx.$$

Integrando,

$$T = \frac{1}{2}\frac{m}{l}\dot{\theta}^2 \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^l = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2\frac{l^2}{3}.$$

Igualando a $T = \frac{1}{2}m_{\text{eq}}(l\dot{\theta})^2$, temos que

$$m_{\text{eq}} = \frac{m}{3}.$$

Amortecimento

- Nos sistemas vibratórios reais, a energia mecânica é transformada em calor ou som.
- As amplitudes de vibração diminuem progressivamente, no caso de vibração livre.
- O efeito do amortecimento é particularmente importante próximo à ressonância, pois é o fenômeno que limita a amplitude.
- Nos modelos simplificados, os amortecedores não tem massa nem elasticidade.
- Só existe amortecimento quando há velocidade relativa entre as extremidades do amortecedor.
- Três tipos: *viscoso*, *seco* ou de *material*.

Mecanismos de Amortecimento

- Viscoso
  - Mecanismo mais comum na análise de vibrações.
  - Cisalhamento entre camadas fluidas adjacentes.
  - Normalmente a força resistente é tomada como proporcional à velocidade relativa.
- Seco
  - Ou *Mohr-Coulomb*.
  - Força de atrito constante.
  - Mecanismo não linear e complexo.
- de Material
  - Ou *Sólido* ou *Amortecimento Histerético*.
  - Resulta do não retorno de toda a energia elástica armazenada na compressão de um material
  - Mecanismo não linear e complexo.
  - Caracterizado por um *laço de histerese*.

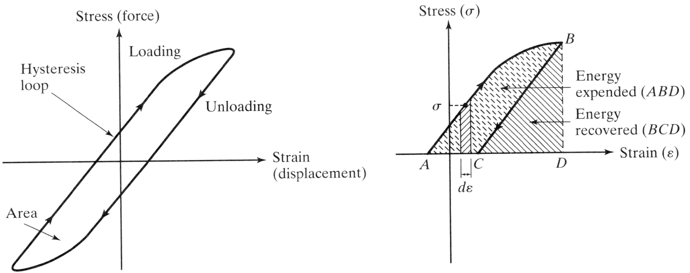
Mecanismos de Amortecimento

- Viscoso
  - Mecanismo mais comum na análise de vibrações.
  - Cisalhamento entre camadas fluidas adjacentes.
  - Normalmente a força resistente é tomada como proporcional à velocidade relativa.
- Seco
  - Ou *Mohr-Coulomb*.
  - Força de atrito constante.
  - Mecanismo não linear e complexo.
- de Material
  - Ou *Sólido* ou *Amortecimento Histerético*.
  - Resulta do não retorno de toda a energia elástica armazenada na compressão de um material
  - Mecanismo não linear e complexo.
  - Caracterizado por um *laço de histerese*.

Mecanismos de Amortecimento

- Viscoso
  - Mecanismo mais comum na análise de vibrações.
  - Cisalhamento entre camadas fluidas adjacentes.
  - Normalmente a força resistente é tomada como proporcional à velocidade relativa.
- Seco
  - Ou *Mohr-Coulomb*.
  - Força de atrito constante.
  - Mecanismo não linear e complexo.
- de Material
  - Ou *Sólido* ou *Amortecimento Histerético*.
  - Resulta do não retorno de toda a energia elástica armazenada na compressão de um material
  - Mecanismo não linear e complexo.
  - Caracterizado por um *laço de histerese*.

Laço de Histerese



(a) (b)

Combinação de Amortecedores

- Procedimento análogo à combinação de molas.
- Para pequenos deslocamentos (problemas lineares) as relações são as mesmas.
- Amortecedores em paralelo:

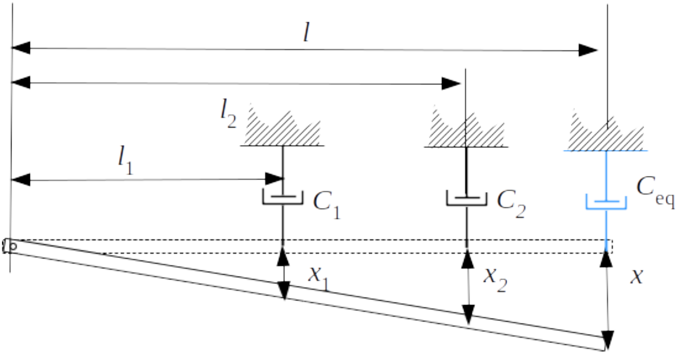
$$c_{\mathrm{eq}} = c_1 + c_2$$

- Amortecedores em série:

$$\frac{1}{c_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$$

Equivalência de Potências Dissipadas

Para problemas mais complexos, admitimos que a potência (instantânea) dissipada no sistema equivalente tem que ser igual à potencia dissipada no sistema original.



Equivalência de Potências Dissipadas

A potência dissipada no sistema equivalente é:

$$H = F_v \dot{x} = c_{\text{eq}} \dot{x} \dot{x} = c_{\text{eq}} \dot{x}^2.$$

No sistema original é:

$$H = H_1 + H_2 = c_1 \dot{x}_1^2 + c_2 \dot{x}_2^2.$$

Para pequenos ângulos de rotação,

$$\dot{x} = l\dot{\theta}, \quad \dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}, \quad \dot{x}_2 = l_2 \dot{\theta},$$

Igualando e substituindo,

$$c_{\text{eq}} (l\dot{\theta})^2 = c_1 (l_1 \dot{\theta})^2 + c_2 (l_2 \dot{\theta})^2$$

ou

$$c_{\text{eq}} = c_1 \left(\frac{l_1}{l} \right)^2 + c_2 \left(\frac{l_2}{l} \right)^2.$$