Vibrações Mecânicas

Aula11: Vibração Forçada Sistemas Amortecidos

Ramiro Brito Willmersdorf
ramiro@willmersdorf.net

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco

2015.1

Força Harmônica

Se $F(t) = F_0 \cos\omega t$, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = F_0 \cos\omega t.$$

Introduzindo uma solução particular harmônica,

$$x_p(t) = X\cos(\omega t - \phi),$$

na equação de movimento, temos

$$-m\omega^2 X\cos(\omega t - \phi) - c\omega X\sin(\omega t - \phi) + \kappa X\cos(\omega t - \phi) = F_0 \cos\omega t,$$

ou

$$X\left[(\kappa - m\omega)\cos(\omega t - \phi) - c\omega\sin(\omega t - \phi)\right] = F_0 \cos\omega t.$$

Força Harmônica

Se $F(t) = F_0 \cos \omega t$, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = F_0 \cos \omega t.$$

Introduzindo uma solução particular harmônica,

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi),$$

na equação de movimento, temos

$$-m\omega^2 X \cos(\omega t - \phi) - c\omega X \sin(\omega t - \phi) + \kappa X \cos(\omega t - \phi) = F_0 \cos \omega t,$$

ou

$$X\left[(\kappa - m\omega)\cos(\omega t - \phi) - c\omega \sin(\omega t - \phi)\right] = F_0 \cos \omega t.$$

Força Harmônica

Se $F(t) = F_0 \cos \omega t$, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = F_0 \cos \omega t.$$

Introduzindo uma solução particular harmônica,

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi),$$

na equação de movimento, temos

$$-m\omega^2 X \cos(\omega t - \phi) - c\omega X \sin(\omega t - \phi) + \kappa X \cos(\omega t - \phi) = F_0 \cos \omega t,$$

ou

$$X\left[(\kappa - m\omega)\cos(\omega t - \phi) - c\omega \sin(\omega t - \phi)\right] = F_0 \cos \omega t.$$

Solução Particular

Repetindo,

$$X\left[(\kappa - m\omega)\cos(\omega t - \phi) - c\omega\sin(\omega t - \phi)\right] = F_0\cos\omega t.$$

Expandindo as diferenças, temos

$$X\left[(\kappa - m\omega^2)(\cos\omega t\cos\phi + \sin\omega t\sin\phi) - c\omega(\sin\omega t\cos\phi - \cos\omega t\sin\phi)\right] = F_0\cos\omega t$$

e rearrumando

$$X\left[(\kappa - m\omega^2)\cos\phi + c\omega\sin\phi\right]\cos\omega t + X\left[(\kappa - m\omega^2)\sin\phi - c\omega\cos\phi\right]\sin\omega t = F_0\cos\omega t.$$

Solução Particular

Repetindo,

$$X\left[(\kappa - m\omega)\cos(\omega t - \phi) - c\omega \sin(\omega t - \phi)\right] = F_0 \cos \omega t.$$

Expandindo as diferenças, temos

$$X\Big[(\kappa - m\omega^2)(\cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi) \\ - c\omega(\sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi)\Big] = F_0 \cos \omega t$$

e rearrumando

$$X\left[(\kappa - m\omega^2)\cos \phi + c\omega \sin \phi\right] \cos \omega t + \\ X\left[(\kappa - m\omega^2)\sin \phi - c\omega \cos \phi\right] \sin \omega t = F_0 \cos \omega t.$$

Solução Particular

Repetindo,

$$X\left[(\kappa - m\omega)\cos(\omega t - \phi) - c\omega\sin(\omega t - \phi)\right] = F_0\cos\omega t.$$

Expandindo as diferenças, temos

$$\begin{aligned} X\Big[(\kappa - m\omega^2)&(\cos\omega t\cos\phi + \sin\omega t\sin\phi) \\ &- c\omega(\sin\omega t\cos\phi - \cos\omega t\sin\phi)\Big] = F_0\cos\omega t \end{aligned}$$

e rearrumando

$$\begin{aligned} X\Big[(\kappa - m\omega^2)\cos\phi + c\omega\sin\phi\Big]&\cos\omega t + \\ X\Big[(\kappa - m\omega^2)\sin\phi - c\omega\cos\phi\Big]&\sin\omega t = F_0\cos\omega t. \end{aligned}$$

Solução Particular

Igualando os termos em ωt,

$$\begin{cases} X\left[(\kappa - m\omega^2)\cos\phi + c\omega\sin\phi\right]\cos\omega t = F_0\cos\omega t \\ X\left[(\kappa - m\omega^2)\sin\phi - c\omega\cos\phi\right]\sin\omega t = 0 \end{cases}$$

Resolvendo para X,

$$X = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

e da segunda equação,

$$\phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right).$$

Solução Particular

Igualando os termos em ωt,

$$\begin{cases} X\left[(\kappa - m\omega^2)\cos\phi + c\omega\sin\phi\right]\cos\omega t = F_0\cos\omega t \\ X\left[(\kappa - m\omega^2)\sin\phi - c\omega\cos\phi\right]\sin\omega t = 0 \end{cases}$$

Resolvendo para X,

$$X = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

e da segunda equação,

$$\phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right).$$

Solução Particular

Igualando os termos em ωt,

$$\begin{cases} X\left[(\kappa - m\omega^2)\cos\phi + c\omega\sin\phi\right]\cos\omega t = F_0\cos\omega t \\ X\left[(\kappa - m\omega^2)\sin\phi - c\omega\cos\phi\right]\sin\omega t = 0 \end{cases}$$

Resolvendo para X,

$$X = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

e da segunda equação,

$$\phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right).$$

Solução Particular

Resumindo, a solução particular é

$$x_p(t) = X\cos(\omega t - \phi),$$

com

$$X = \frac{F_0}{\left[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

e

$$\phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right).$$

Solução Particular

Resumindo, a solução particular é

$$x_p(t) = X\cos(\omega t - \phi),$$

com

$$X = \frac{F_0}{[(\kappa - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}}$$

e

$$\phi = \arctan\left(\frac{c\omega}{\kappa - m\omega^2}\right).$$

Solução Particular – Forma adimensional

Introduzindo as variáveis

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\kappa}{m}},$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{mk}}; \qquad \frac{c}{m} = 2\zeta\omega_n,$$

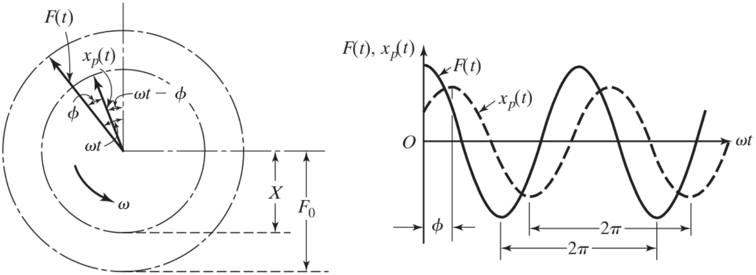
$$\delta_{\mathrm{st}} = \frac{F_0}{k}, \quad \text{e}$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n},$$

obtemos

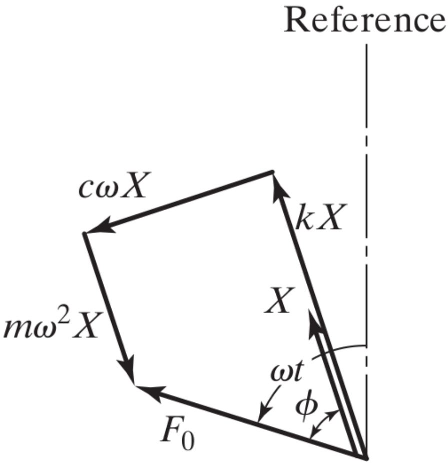
$$M = \frac{X}{\delta_{\mathrm{st}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \qquad \text{e} \qquad \phi = \arctan\left(\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

Solução Particular – Representação Gráfica

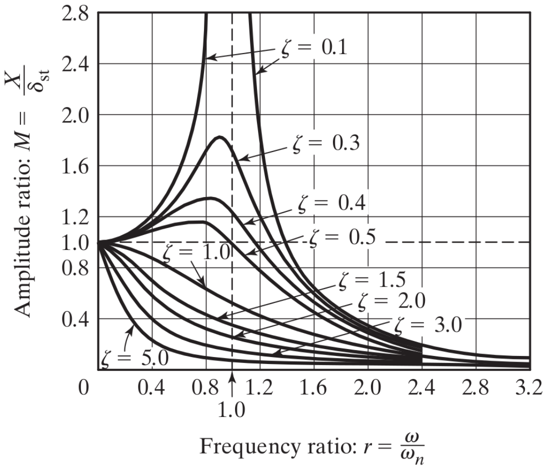


(a) Graphical representation

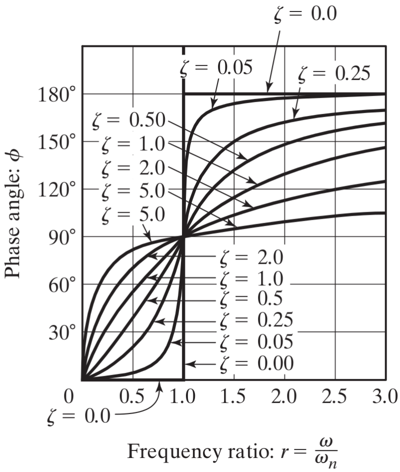
Solução Particular – Representação Vetorial



Fator de Amplificação



Ângulo de Fase



Fator de amplificação

Principais características:

- O comportamento de reduz ao de um sistema não amortecido para $\zeta = 0$.
- *Qualquer* valor de amortecimento diminui o fator de amplificação para todas as frequências.
- Para um dada frequência, aumentar o amortecimento reduz a amplificação.
- Para uma força constante, $r \to 0$, $M \to 1$.
- A redução de amplitude é muito importante próxima da ressonância.
- Para frequências altas, a amplitude diminui com o aumento da frequência, e $M \to 0$ quando $r \to \infty$.

Fator de amplificação – Valores Especiais

- Para $0 < \zeta < 1/\sqrt{2}$, o máximo de M ocorre para

$$r = \sqrt{(1 - 2\zeta^2)} \qquad \text{ou} \qquad \omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

- O valor máximo de M, para $r = \sqrt{(1 - 2\zeta^2)}$, é

$$M_{\max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

- Para $r = 1$,

$$M = \frac{1}{2\zeta}$$

- Para $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{dM}{dr} = 0$ para $r = 0$. Se $r > 0$, M decresce monotonamente.

Ângulo de Fase

- Para $\zeta = 0$, a resposta está em fase para $\omega < \omega_n$ e 180° fora de fase para $\omega > \omega_n$.
- Para $\zeta > 0$ e $0 < r < 1$, $0 < \phi < 90^\circ$, isto é, a resposta está atrasada em em relação à excitação.
- Para $\zeta > 0$ e $r > 1$, $90^\circ < \phi < 180^\circ$, isto é, a resposta está adiantada em em relação à excitação.
- Para $\zeta > 0$ e $r = 1$, $\phi = 90^\circ$, a resposta é ortogonal à excitação.
- para $\zeta > 0$ e $r \to \infty$, $\phi \to 180^\circ$ e a resposta tende a ficar em oposição de fase com a excitação.

Resposta Total

A solução total é dada por

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

no caso, para um sistema subamortecido,

$$\begin{aligned} x(t) &= X_0 e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi_0) + X\cos(\omega_n t - \phi), \\ \omega_d &= \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n, \end{aligned}$$

com X_0 e ϕ_0 determinados a partir das condições iniciais, usando esta equação!.

Condições Iniciais

O deslocamento é

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi_0) + X\cos(\omega_n t - \phi),$$

e a velocidade,

$$\dot{x}(t) = -X_0\left[\zeta\omega_n e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi_0) + \omega_d e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t - \phi_0)\right] + \\ - \omega_n X\sin(\omega_n t - \phi).$$

Tomando $x(t=0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0$, temos que

$$\begin{aligned} x_0 &= X_0\cos\phi_0 + X\cos\phi, \\ \dot{x}_0 &= -\zeta\omega_n X_0\cos\phi_0 + \omega_d X_0\sin\phi_0 + \omega X\sin\phi, \end{aligned}$$

e, resolvendo para X_0 e ϕ_0,

Condições Iniciais

temos

$$X_0 = \left[(x_0 - X\cos\phi)^2 + \frac{1}{\omega_d^2}(\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0 - \zeta\omega_n X\cos\phi - \omega X\sin\phi)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

e

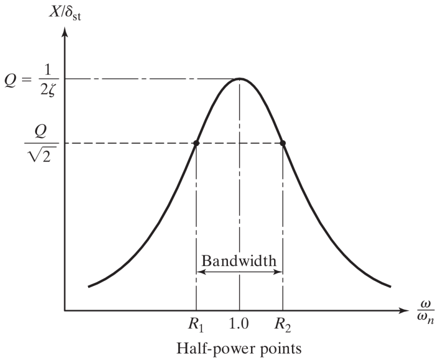
$$\phi_0 = \arctan\frac{\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0 - \zeta\omega_n X\cos\phi - \omega X\sin\phi}{\omega_d(x_0 - X\cos\phi)}$$

Fator de Qualidade

Para amortecimentos muito pequenos, ($\zeta < 0.05$),

$$\left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\max} \approx \left(\frac{X}{\delta_{st}}\right)_{\max} = \frac{1}{2\zeta} = Q$$

R_1, R_2, são os *pontos de meia potência*. ($\Delta W = \pi c \omega X^2$)
$R_2 - R_1$: largura de banda (*bandwidth*)



Cálculo das Raízes

Para R_1 e R_2,

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\zeta}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

o que leva a

$$r^4 - r^2(2-4\zeta^2) + (1-8\zeta^2) = 0.$$

Resolvendo para r_1^2 e r_2^2, temos

$$r_{(1,2)}^2 = 1 - 2\zeta^2 \pm 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}.$$

Para baixo amortecimento,

$$r_1^2 = R_1^2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)^2 \approx 1 - 2\zeta \qquad \text{e} \qquad r_2^2 = R_2^2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_n}\right)^2 \approx 1 + 2\zeta.$$

Cálculo das Raízes

Para R_1 e R_2,

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \frac{Q}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\zeta}\frac{1}{\sqrt{2}},$$

o que leva a

$$r^4 - r^2(2 - 4\zeta^2) + (1 - 8\zeta^2) = 0.$$

Resolvendo para r_1^2 e r_2^2, temos

$$r_{(1,2)}^2 = 1 - 2\zeta^2 \pm 2\zeta\sqrt{1+\zeta^2}.$$

Para baixo amortecimento, e definindo $\omega_1 = \omega|_{R_1}$ e $\omega_2 = \omega|_{R_2}$, temos

$$r_1^2 = R_1^2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right)^2 \approx 1 - 2\zeta \qquad \text{e} \qquad r_2^2 = R_2^2 = \left(\frac{\omega_2}{\omega_n}\right)^2 \approx 1 + 2\zeta.$$

Relação com ζ

Da definição,

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (R_2^2 - R_1^2)\omega_n^2 = 4\zeta\omega_n^2,$$

mas, é claro que

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1),$$

e da "simetria",

$$\omega_2 + \omega_1 = 2\omega_n,$$

então

$$2\omega_n(\omega_2 - \omega_1) = 4\zeta\omega_n^2,$$

o que leva a

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\zeta\omega_n, \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2\zeta} = Q = \frac{\omega_n}{\Delta\omega} = \frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Relação com ζ

Da definição,

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (R_2^2 - R_1^2)\omega_n^2 = 4\zeta\omega_n^2,$$

mas, é claro que

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1),$$

e da "simetria",

$$\omega_2 + \omega_1 = 2\omega_n,$$

então

$$2\omega_n(\omega_2 - \omega_1) = 4\zeta\omega_n^2,$$

o que leva a

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\zeta\omega_n, \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2\zeta} = Q = \frac{\omega_n}{\Delta\omega} = \frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Relação com ζ

Da definição,

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (R_2^2 - R_1^2)\omega_n^2 = 4\zeta\omega_n^2,$$

mas, é claro que

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1),$$

e da "simetria",

$$\omega_2 + \omega_1 = 2\omega_n,$$

então

$$2\omega_n(\omega_2 - \omega_1) = 4\zeta\omega_n^2,$$

o que leva a

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\zeta\omega_n, \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2\zeta} = Q = \frac{\omega_n}{\Delta\omega} = \frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Relação com ζ

Da definição,

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (R_2^2 - R_1^2)\omega_n^2 = 4\zeta\omega_n^2,$$

mas, é claro que

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1),$$

e da "simetria",

$$\omega_2 + \omega_1 = 2\omega_n,$$

então

$$2\omega_n(\omega_2 - \omega_1) = 4\zeta\omega_n^2,$$

o que leva a

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\zeta\omega_n, \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2\zeta} = Q = \frac{\omega_n}{\Delta\omega} = \frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Relação com ζ

Da definição,

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (R_2^2 - R_1^2)\omega_n^2 = 4\zeta\omega_n^2,$$

mas, é claro que

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1),$$

e da "simetria",

$$\omega_2 + \omega_1 = 2\omega_n,$$

então

$$2\omega_n(\omega_2 - \omega_1) = 4\zeta\omega_n^2,$$

o que leva a

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\zeta\omega_n, \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{2\zeta} = Q = \frac{\omega_n}{\Delta\omega} = \frac{\omega_n}{\omega_2 - \omega_1}.$$