

Questão 1

Como o cilindro gira sem deslizar, podemos imediatamente tomar a sua massa equivalente como 1,5 vezes a massa do cilindro, para incorporar o efeito da inércia rotativa.

Podemos obter este resultado simplesmente igualando a energia cinética total do cilindro com a energia cinética de translação, observado que $\dot{\theta}R = \dot{x}$, e que $J_0 = 1/2mR^2$, para o cilindro. Desta maneira, não é necessário sequer considerar a força de atrito na equação.

Quem preferir explicitar a força de atrito, o que eu realmente não recomendo, pode observar que:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \ddot{\theta}R \\ J_0\ddot{\theta} &= F_{\text{at}}R \\ \frac{J_0\ddot{x}}{R} &= F_{\text{at}}R \\ F_{\text{at}} &= \frac{J_0\ddot{x}}{R^2} \\ F_{\text{at}} &= \frac{1}{2}mR^2 \frac{\ddot{x}}{R^2} = \frac{1}{2}m\ddot{x}\end{aligned}$$

o que vai levar ao mesmo resultado. Desta forma, podemos escrever a equação de equilíbrio para a direção horizontal do cilindro

$$k(y - x) - c\dot{x} = m\ddot{x},$$

ou, rearrumando

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = ky.$$

Lembrando que x e y são funções do tempo, podemos tomar a transformada de Laplace dos dois lados da equação.

Lembrando que a Transformada de Laplace é linear, e que a função de transferências é definida como a razão entre as transformadas da saída e da entrada, para condições iniciais nulas, isto é, $T(s) = X(s)/Y(s)$, conforme dado no formulário, podemos escrever diretamente

$$\begin{aligned}(s^2m + sc + k)X(s) &= kY(s) \\ T(s) &= \frac{k}{ms^2 + cs + k}\end{aligned}$$

Estritamente, as duas últimas linhas são o que é necessário para resolver o problema. Apenas por boniteza, podemos colocar k em evidência no denominador,

$$T(s) = \frac{1}{\frac{k}{m}s^2 + \frac{c}{k}s + 1} = \frac{1}{\omega_n^2 s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}.$$

Questão 2

Como estamos falando de um oscilador harmônico linear, a resposta é a soma das respostas à cada excitação. Como as forças são harmônicas, podemos simplesmente usar o gráfico dado para calcular o fator de amplificação para cada força. Vamos calcular a frequência natural em rad/s, para podermos calcular $r = \omega/\omega_n$ para cada força.

```
In [1]: fn = 200 # Hz  
wn = 2*pi*fn # rad/s  
show(wn)
```

400π

As razões de frequência são então

```
In [2]: r1 = 800/wn  
r2 = 1250/wn  
r3 = 2300/wn  
show((r1, r2, r3))
```

$\left(\frac{2}{\pi}, \frac{25}{8\pi}, \frac{23}{4\pi}\right)$

Como vamos tirar valores do gráfico, é melhor termos estas grandezas como números reais.

```
In [3]: r1 = N(r1)  
r2 = N(r2)  
r3 = N(r3)  
show((r1, r2, r3))
```

$(0.636619772367581, 0.994718394324346, 1.83028184555680)$

Ops, percebemos que r_2 é próximo de 1, o que indica que esta componente está em ressonância.

Entrando no gráfico para cada um destes valores, tiramos os valores dos fatores de amplificação correspondentes, que são, aproximadamente

```
In [4]: M1=1.6  
M2=7.0  
M3=0.4
```

Para calcular o deslocamento correspondente à cada força, precisamos calcular o δ_{st} para cada força, mas para isto precisamos da rigidez, que, infelizmente, ficou faltando. Obviamente eu tinha escolhido um valor para dar uma deslocamento razoável com estes valores de forças, mas esqueci de colocar na prova. Vamos deixar o resultado em função da rigidez do sistema então.

```
In [5]: var('k')
F1 = 15000/k
F2 = 6000/k
F3 = 20000/k
X1 = M1*F1
X2 = M2*F2
X3 = M3*F3
show((X1, X2, X3))
```

$$\left(\frac{24000.0000000000}{k}, \frac{42000.0000000000}{k}, \frac{8000.0000000000}{k} \right)$$

As respostas são então

```
In [6]: var("t")
x1(t) = X1*cos(800*t)
x2(t) = X2*cos(1250*t)
x3(t) = X3*cos(2300*t)
show(x1(t))
show(x2(t))
show(x3(t))
```

$$\frac{24000.0000000000 \cos(800 t)}{k}$$

$$\frac{42000.0000000000 \cos(1250 t)}{k}$$

$$\frac{8000.0000000000 \cos(2300 t)}{k}$$

Como as frequências são diferentes, a resposta não é harmônica! Em princípio não podemos simplesmente somar as amplitudes, pois elas não tem uma relação de fase constante.

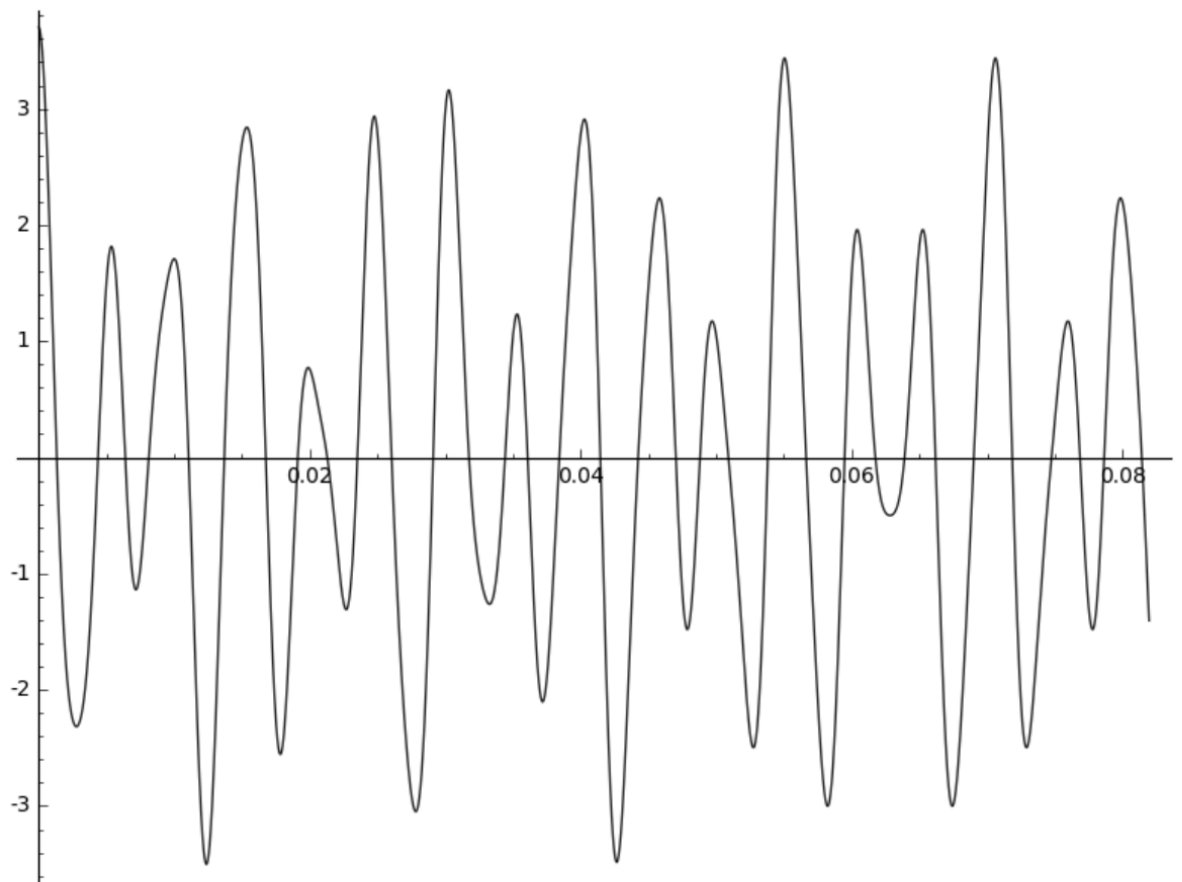
Vamos ver o jeitão da resposta, apenas para ilustração (não é necessário fazer isto na prova!!!!) Precisamos de uma rigidez para termos valores numéricos, vamos arbitrar um valor razoável.

```
In [7]: tau3 = 2*N(pi)/2300
show(tau3)
tf=30*tau3 # Só para garantir que dá para ver o jeitão
```

0.00273181969877373

```
In [8]: km = 20000
f1 = x1(k=km)
f2 = x2(k=km)
f3 = x3(k=km)
f = f1+f2+f3
plot(f, (t, 0, tf))
```

Out[8]:



Que parece bem mal comportada.

Mesmo não podendo somar as amplitudes diretamente, é claro que uma aproximação razoável de engenharia, que erra (talvez) pelo lado da segurança, é sim somar as amplitudes, poranto o deslocamento máximo (aproximado) é

```
In [9]: U = X1 + X2 + X3
show(U)
```

$$\frac{74000.00000000000}{k}$$

Questão 3

Para a situação mostrada na figura, considerando que a vibração seja axial somente, temos que a solução é, conforme dado no formulário,

$$u(x, t) = \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c} \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t),$$

da figura, podemos determinar as condições de contorno. A mais fácil é obviamente a da extremidade direita, $u(L, t) = 0$, e, para a extremidade esquerda, podemos fazer o equilíbrio de forças para a massa M e escrever

$$P(t) = ku + m\ddot{u},$$

onde $P(t)$ é a força aplicada pela barra à massa concentrada, no caso,

$$P(t) = E\bar{A} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t),$$

assim, a condição de contorno é,

$$E\bar{A} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = ku(0, t) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t).$$

\bar{A} é a áreas, a barrinha é só para não confundir com a constante A .

Aplicando a condição de contorno da extremidade direita,

$$u(L, t) = \left(A \cos \frac{\omega L}{c} + B \sin \frac{\omega L}{c} \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t) = 0,$$

Chegamos à conclusão que

$$A \cos \frac{\omega L}{c} + B \sin \frac{\omega L}{c} = 0$$

,
pois o outro termo não pode ser identicamente nulo. Para aplicar a outra condição, precisamos das derivadas em relação à posição e ao tempo.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{\omega}{c} \left(-A \sin \frac{\omega x}{c} + B \cos \frac{\omega x}{c} \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = -\omega^2 \left(A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c} \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t).$$

Aplicando estas fórmulas na expressão para a condição de contorno, e tomando $x = 0$, ficamos com,

$$E\bar{A}\frac{\omega}{c}B(C \cos \omega t + D \sin \omega t) = kA(C \cos \omega t + D \sin \omega t) - m\omega^2 A(C \cos \omega t + D \sin \omega t),$$

eliminando o termo comum em t ,

$$E\bar{A}\frac{\omega}{c}B = kA - m\omega^2 A,$$

$$E\bar{A}\frac{\omega}{c}B = A(k - m\omega^2),$$

ou

$$B = A \frac{(k - m\omega^2) c}{E\bar{A}\omega}$$

Podemos colocar isto na condição de contorno para a outra extremidade,

$$A \cos \frac{\omega L}{c} + A \frac{(k - m\omega^2) c}{E\bar{A}\omega} \sin \frac{\omega L}{c} = 0,$$

ou, colocando A em evidência,

$$\cos \frac{\omega L}{c} + \frac{(k - m\omega^2) c}{E\bar{A}\omega} \sin \frac{\omega L}{c} = 0,$$

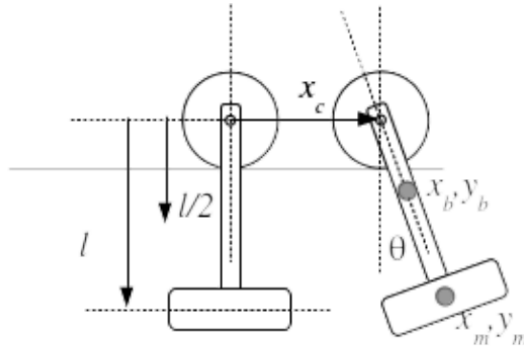
ou ainda

$$\frac{(k - m\omega^2) c}{E\bar{A}\omega} \tan \frac{\omega L}{c} = -1,$$

e boa sorte para quem for resolver isto. (Para ser bem sincero não estou 100% gostando da cara desta fórmula, quem encontrar algum erro me avise por favor!)

Questão 4

Vamos usar os subscritos c , b e m para nos referir ao cilindro, barra e massa na extremidade da barra, respectivamente. Vamos usar as coordenadas x e θ como coordenadas generalizadas deste sistema com dois graus de liberdade, como mostrado na figura abaixo.



x_b, y_b e x_m, y_m são as coordenadas do centro de gravidade da barra e da massa na extremidade. Para encurtar um pouco as expressões, consideramos que a altura da massa na extremidade é desprezível em relação ao comprimento da barra, portanto seu centro de gravidade dista l do centro do cilindro, caso contrário, ficaríamos carregando um termo $h/2$ em todas as fórmulas ou teríamos que definir um outro comprimento, nenhuma das duas opções ensina algo útil.

Em primeiro lugar, podemos observar imediatamente que este sistema é semi-definido, pois ao movermos todo o sistema horizontalmente como um corpo rígido, a energia potencial do sistema não muda! Devemos então encontrar uma frequência natural nula.

Como o sistema só possui dois graus de liberdade e temos até aqui 6 coordenadas generalizadas, podemos expressar quatro delas em função das coordenadas x e θ ,

$$x_b = x_c + \frac{l}{2} \sin \theta, \quad y_b = \frac{l}{2} \cos \theta, \quad x_m = x_c + l \sin \theta, \quad y_m = l \cos \theta.$$

A maneira mais fácil de encontrar as equações de movimento deste sistema é através das equações de Euler-Lagrange, portanto temos que escrever expressões para a energia cinética e potencial do sistema em função das coordenadas generalizadas.

Como a energia é uma grandeza escalar, podemos escrever uma expressão para corpo e depois somar tudo (separadamente para potencial e cinética é claro!)

Para o cilindro, temos

$$T_c = \frac{1}{2} m_c \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}_c^2.$$

$\dot{\theta}_c$ é a velocidade de rotação do cilindro devido ao não deslizamento, é *completamente* independente da velocidade de rotação da barra, $\dot{\theta}$, e é dada pela condição de não deslizamento como $\dot{x}_c = \dot{\theta}_c R$, e lembrando que o momento de inércia de massa de um cilindro é $1/2 m R^2$, ficamos com a energia cinética do cilindro igual a

$$T_c = \frac{1}{2} \frac{3}{2} m_c \dot{x}_c^2.$$

A posição vertical do centro de massa do cilindro não se altera, então sua energia potencial não se altera, podemos tomá-la então como uma constante qualquer, já que só usamos a derivada da energia potencial (e cinética, a propósito.)

$$V_c = \text{cte.}$$

Para a barra vertical, temos um movimento de translação e rotação combinados, então a energia cinética total é a soma da energia cinética associada à velocidade de translação do centro de massa, mais a energia associada à rotação em torno do próprio centro de massa.

As componentes da velocidade do centro de massa são

$$\begin{aligned}\dot{x}_b &= \dot{x}_c + \frac{l}{2} \cos \theta \dot{\theta} \\ \dot{y}_b &= -\frac{l}{2} \sin \theta \dot{\theta}\end{aligned}$$

A magnitude da velocidade, ao quadrado (que é o que é necessário para a energia cinética) é

$$\begin{aligned}v_b^2 &= \left(\dot{x}_c + \frac{l}{2} \cos \theta \dot{\theta} \right)^2 + \left(\frac{l}{2} \sin \theta \dot{\theta} \right)^2, \\ v_b^2 &= \dot{x}_c^2 + 2 \frac{l}{2} \dot{x}_c \cos \theta \dot{\theta} + \frac{l^2}{4} \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{4} \sin^2 \theta \dot{\theta}^2, \\ v_b^2 &= \dot{x}_c^2 + 2 \frac{l}{2} \dot{x}_c \cos \theta \dot{\theta} + \frac{l^2}{4} \dot{\theta}^2,\end{aligned}$$

e a energia cinética devida à translação do centro de gravidade é

$$\frac{1}{2} m_b v_b^2 = \frac{1}{2} m_b \left(\dot{x}_c^2 + 2 \frac{l}{2} \dot{x}_c \cos \theta \dot{\theta} + \frac{l^2}{4} \dot{\theta}^2 \right),$$

A energia cinética devida à rotação em torno do centro de gravidade é

$$\frac{1}{2} J_b \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_b l^2}{12} \dot{\theta}^2,$$

e somando as duas temos a energia cinética total da barra,

$$\begin{aligned}T_b &= \frac{1}{2} m_b \left(\dot{x}_c^2 + 2 \frac{l}{2} \dot{x}_c \cos \theta \dot{\theta} + \frac{l^2}{4} \dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{12} \dot{\theta}^2 \right), \\ T_b &= \frac{1}{2} m_b \left(\dot{x}_c^2 + l \dot{x}_c \cos \theta \dot{\theta} + \frac{l^2}{3} \dot{\theta}^2 \right).\end{aligned}$$

A energia potencial da barra é

$$V_b = m_b g \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \theta \right) = m_b g \frac{l}{2} (1 - \cos \theta).$$

Para a massa na extremidade, o procedimento é praticamente o mesmo, e mais, podemos notar que a velocidade angular é a mesma, $\dot{\theta}$. A única diferença é que o comprimento da massa, neste caso, é l_m , que deve ser usado para calcular seu momento de inércia de massa, enquanto que a distância do centro de massa ao centro de rotação é l , assim, a energia cinética de translação é

$$\frac{1}{2}m_m v_m^2 = \frac{1}{2}m_m \left(\dot{x}_c^2 + 2l\dot{x}_c \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2 \right),$$

e energia cinética de rotação é

$$\frac{1}{2}J_m \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_m l_m^2}{12} \dot{\theta}^2,$$

e somando as duas temos a energia cinética total da barra,

$$T_m = \frac{1}{2}m_m \left(\dot{x}_c^2 + 2l\dot{x}_c \cos \theta \dot{\theta} + l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{l_m^2}{12} \dot{\theta}^2 \right),$$

$$T_m = \frac{1}{2}m_m \left(\dot{x}_c^2 + 2l\dot{x}_c \cos \theta \dot{\theta} + \left[l^2 + \frac{l_m^2}{12} \right] \dot{\theta}^2 \right).$$

A energia portencia é, analogamente,

$$V_m = m_m g (l - l \cos \theta) = m_b g l (1 - \cos \theta).$$

Assim, podemos computar as energias cinética e potencial totais para o sistema,

$$T = T_c + T_b + T_m, \quad V = V_c + V_b + V_m,$$

e, explicitando,

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} m_c \dot{x}_c^2 + m_b \left(\dot{x}_c^2 + l \dot{x}_c \cos \theta \dot{\theta} + \frac{l^2}{3} \dot{\theta}^2 \right) + m_m \left(\dot{x}_c^2 + 2l \dot{x}_c \cos \theta \dot{\theta} + \left[l^2 + \frac{l_m^2}{12} \right] \dot{\theta}^2 \right) \right]$$

$$V = \text{cte} + m_b g \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) + m_m g l (1 - \cos \theta).$$

Com esta duas belezinhas podemos empregar diretamente as equações de EL, que são

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j,$$

com $q_1 = x$, $q_2 = \theta$ e $Q_j = 0$, pois não há forças não conservativas agindo.

Calculando,

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_c} &= \frac{1}{2} \left[3m_c \dot{x}_c + m_b l \dot{x}_c + m_b l \cos \theta \dot{\theta} + 2m_m \dot{x}_c + 2m_m l \cos \theta \dot{\theta} \right] \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_c} &= \frac{1}{2} \left[(3m_c + m_b l + 2m_m) \dot{x}_c + (m_b + 2m_m) l \cos \theta \dot{\theta} \right] \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_c} &= \frac{1}{2} \left[(3m_c + m_b l + 2m_m) \ddot{x}_c + (m_b + 2m_m) (-l \sin \theta \dot{\theta} + l \cos \theta \ddot{\theta}) \right].\end{aligned}$$

Esta equação é claramente não linear, e só terei esperança em resolvê-la se considerarmos $\theta \rightarrow 0$, com consequências $\sin \theta \rightarrow 0$, e $\cos \theta \rightarrow 1$, assim,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_c} = \frac{1}{2} \left[(3m_c + m_b l + 2m_m) \ddot{x}_c + l(m_b + 2m_m) \ddot{\theta} \right].$$

Temos também que

$$\frac{\partial T}{\partial x_c} = 0,$$

e

$$\frac{\partial V}{\partial x_c} = 0.$$

Para $\dot{\theta}$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{2} \left[\left(l m_b \dot{x}_c \cos \theta + m_b \frac{2l^2}{3} \dot{\theta} \right) + \left(2l m_m \dot{x}_c \cos \theta + 2m_m \left[l^2 + \frac{l_m^2}{12} \right] \dot{\theta} \right) \right] \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{2} \left[(m_b + 2m_m) l \dot{x}_c \cos \theta + \left(m_b \frac{2l^2}{3} + 2m_m \left[l^2 + \frac{l_m^2}{12} \right] \right) \dot{\theta} \right] \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{1}{2} \left[(m_b + 2m_m) (l \ddot{x}_c \cos \theta - l \dot{x}_c \sin \theta \dot{\theta}) + \left(m_b \frac{2l^2}{3} + 2m_m \left[l^2 + \frac{l_m^2}{12} \right] \right) \ddot{\theta} \right]\end{aligned}$$

Que é uma bela equação, que novamente temos que linearizar ou não vamos para a frente, assim, ficamos com

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} \left[(m_b + 2m_m) l \ddot{x}_c + \left(m_b \frac{2l^2}{3} + 2m_m \left[l^2 + \frac{l_m^2}{12} \right] \right) \ddot{\theta} \right]$$

Temos ainda que

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} \left[-l m_b \dot{x}_c \sin \theta \dot{\theta} - 2l m_m \dot{x}_c \sin \theta \dot{\theta} \right],$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = -\frac{1}{2} [m_b + 2l m_m] l \dot{x}_c \sin \theta \dot{\theta},$$

mas quando linearizamos este termo desaparece, e

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = m_b g \frac{l}{2} \sin \theta + m_b g l \sin \theta,$$

que linearizamos para

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = l g \left(\frac{m_b}{2} + m_m \right) \theta,$$

Montando a equação completa para cada coordenada generalizada, ficamos com

$$\frac{1}{2} \left[(3m_c + m_b l + 2m_m) \ddot{x}_c + l(m_b + 2m_m) \ddot{\theta} \right] = 0$$

$$+ \frac{1}{2} (m_b + 2m_m) l \ddot{x}_c + \frac{1}{2} \left(m_b \frac{l^2}{3} + 2m_m \left[l^2 + \frac{l_m^2}{12} \right] \right) \ddot{\theta} + l g \left(\frac{m_b}{2} + m_m \right) \theta = 0$$

$$+ l g \left(\frac{m_b}{2} + m_m \right) \theta = 0$$

que pode ser posta na forma matricial,

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (3m_c + m_b l + 2m_m) & l(m_b + 2m_m) \\ l(m_b + 2m_m) & m_b \frac{l^2}{3} + 2m_m \left[l^2 + \frac{l_m^2}{12} \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l g \left(\frac{m_b}{2} + m_m \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos definir novas variáveis para diminuir o tamanho,

$$m_{11} = (3m_c + m_b l + 2m_m) \quad m_{12} = m_{21} = l(m_b + 2m_m) \quad m_{22} = m_b \frac{l^2}{3} + 2m_m \left[l^2 + \frac{l_m^2}{12} \right],$$

$$k_{22} = l g \left(\frac{m_b}{2} + m_m \right),$$

Ficamos com,

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Admitindo que as respostas tenham a mesma frequência e sejam em fase

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} \cos \omega t,$$

ficamos com

$$-\omega^2 \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} \cos \omega t + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} \cos \omega t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -m_{11}\omega^2/2 & -m_{12}\omega^2/2 \\ -m_{21}\omega^2/2 & k_{22} - m_{22}\omega^2/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que é um sistema homogêneo que para ter solução não trivial precisa que seu determinante seja não nulo, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{k_{22} - m_{22}\omega^2}{2} \frac{-m_{11}\omega^2}{2} - \frac{(m_{12}\omega^2)^2}{4} &= 0, \\ \frac{-k_{22}m_{11}\omega^2 + m_{11}m_{22}\omega^4 - m_{12}^2\omega^4}{4} &= 0, \\ (m_{11}m_{22} - m_{12}^2)\omega^4 - k_{22}m_{11}\omega^2 &= 0, \\ \omega^2 [(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)\omega^2 - k_{22}m_{11}] &= 0, \end{aligned}$$

De onde, claramente, $\omega_1^2 = 0$ e

$$\omega_2^2 = \frac{k_{22}m_{11}}{m_{11}m_{22} - m_{12}^2}.$$

Eu não morro de paixão por esta fórmula também, porque diz que há uma combinação de fatores para o qual a frequência natural é infinita, o que corresponderia a um sistema rígido, o que eu não vejo muito como pode acontecer...