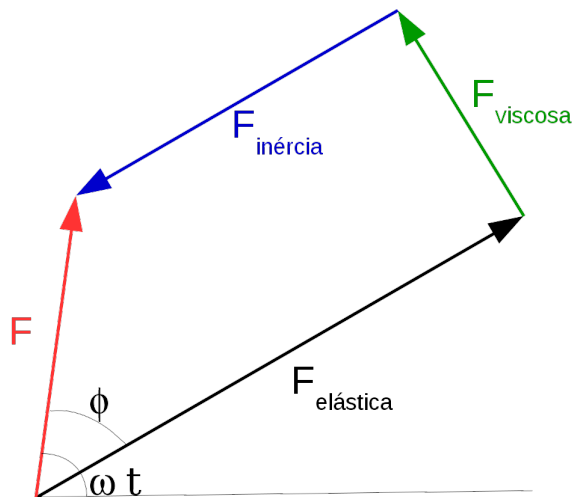


# Vibrações 2º EE 2015.2

## Questão 1

Esta questão é trivialmente resolvida se considerarmos o diagrama de forças para o equilíbrio dinâmico, tomando as forças como fasores, como mostrado abaixo.



Lembrando que se  $F = |F|e^{i\omega t}$ , a resposta é  $x(t) = Xe^{i(\omega t - \phi)}$ ,  $F_e = \kappa x = \kappa Xe^{i(\omega t - \phi)}$ ,  $F_v = c\dot{x} = i\omega cXe^{i(\omega t - \phi)}$ ,  $F_i = m\ddot{x} = -m\omega^2 Xe^{i(\omega t - \phi)}$ . Claramente temos que  $F_{visc} = F \sin \phi$  e  $F_{inerc} = F_{elast} - F \cos \phi$ . Neste caso particular temos

```
phi = N(55*pi/180)
Fe = 400
F = 150
Fv = F*sin(phi)
Fi = Fe - F*cos(phi)
Fv, Fi
```

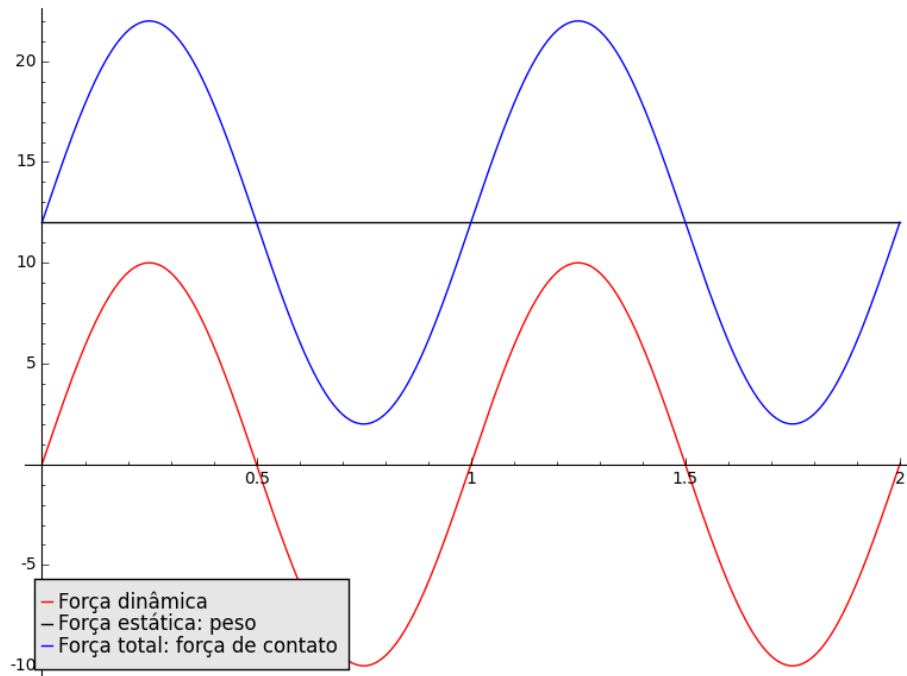
(122.872806643349, 313.963534547343)

Como o ângulo de fase é menor do que  $90^\circ$ , para um sistema excitado por forças, então o sistema está operando antes da ressonância, e a frequência de excitação é menor do que a frequência natural do sistema.

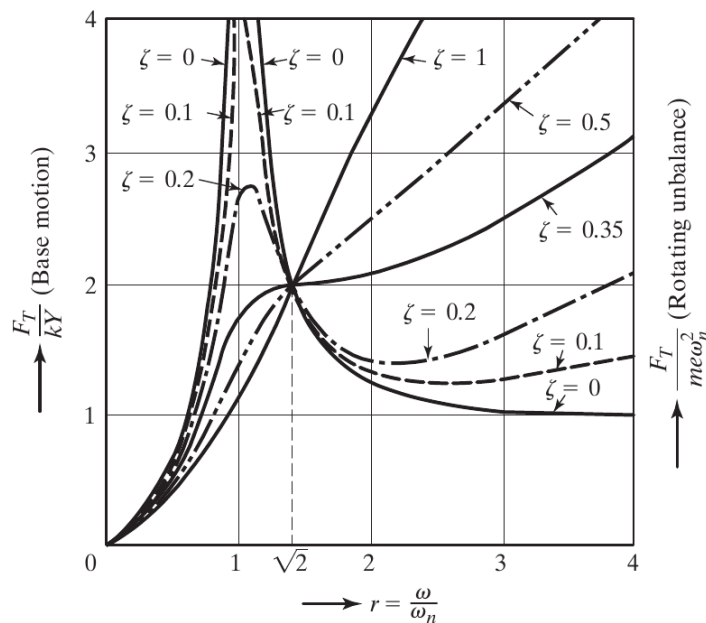
## Questão 2

Este é claramente um problema de vibração com excitação harmônica pela base. Como a força de contato total é a soma da reação ao peso do carro, que é uma força estática, com a força transmitida, que é uma força harmônica, portanto tem valores positivos e negativos. A figura abaixo ilustra isto. Em qualquer instante de tempo, a força de contato é a distância da linha azul ao eixo horizontal. O carro vai perder o contato com o solo quando o valor mínimo da força de

contato for nulo!



Precisamos encontrar as frequências para as quais a soma destas duas forças é nula, ou, em outras palavras, precisamos procurar as frequências para as quais o valor máximo da força transmitida é igual ao peso do carro. O "jeitão" da magnitude da força transmitida  $F_T$  é este aqui:



Podemos ver que para valores altos de amortecimento, a força cresce monotonamente, portanto devemos encontrar a velocidade na qual a amplitude da força transmitida é igual ao peso do carro, e a partir daí, a amplitude da força será maior do que isto e os pneus descolam do chão. Esta observação é simplesmente didática, não é necessária para resolver o problema.

A fórmula para a força transmitida é

$$\frac{F_T}{\kappa Y} = r^2 \left( \frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

No caso temos,

```
m = 1200
g = 9.8
W = m*g
k = 400000
z = 0.5
Y = 0.050
Ft = W
Ti = Ft/(k*Y)
Ti
```

0.5880000000000000

Vamos chamar o termo do lado esquerdo da equação de  $T$  para simplificar. Temos então o lado direito da equação como

```
var('T r zeta')
lde = r^2*sqrt((1+(2*zeta*r)^2)/((1-r^2)^2+(2*zeta*r)^2))
show(lde)
```

$$r^2 \sqrt{\frac{4r^2\zeta^2 + 1}{4r^2\zeta^2 + (r^2 - 1)^2}}$$

Elevando tudo ao quadrado

```
lde2 = lde^2
show(lde2)
```

$$\frac{(4r^2\zeta^2 + 1)r^4}{4r^2\zeta^2 + (r^2 - 1)^2}$$

Igualando a  $T^2$  e multiplicando o denominador

```
eq(r) = lde2.numerator() - T^2*lde2.denominator()
eq = eq.simplify()
show(eq)
```

$$r \mapsto (4r^2\zeta^2 + 1)r^4 - (r^4 + 4r^2\zeta^2 - 2r^2 + 1)T^2$$

Substituindo os valores conhecidos

```
eq2(r) = eq(zeta=z, T=Ti)
```

```
eq2(r) = eq2.expand()
show(eq2)
```

$$r \mapsto r^6 + 0.6542560000000000 r^4 + 0.3457440000000000 r^2 - 0.3457440000000000$$

Derivando em relação a  $r$

```
deq2(r) = eq2.diff(r)
deq2(r) = deq2.simplify()
show(deq2)
```

$$r \mapsto 6r^5 + 2.617024r^3 + 0.691488r$$

```
nr(r) = r - eq2(r)/deq2(r)
show(nr)
```

$$r \mapsto r - \frac{r^6 + 0.6542560000000000 r^4 + 0.3457440000000000 r^2 - 0.3457440000000000}{6r^5 + 2.617024r^3 + 0.691488r}$$

```
r1 = nr(0.5)
r2 = nr(r1)
r3 = nr(r2)
r3, r2, r1
```

$$(0.654464356936272, 0.668322484667785, 0.735702696043107)$$

Como  $r = \omega/\omega_n$ , a frequência de excitação problemática é

```
wn = N(sqrt(k/m))
wp = r1*wn
print(wp)
```

$$13.4320320746725$$

A frequência que corresponde a esta frequência circular é

```
fp = N(wp/2*pi)
print(fp)
```

$$21.0989866442869$$

Temos então 21.09 comprimentos de onda do piso em um segundo. Como cada comprimento de onda tem 11 metros:

```
lbd = 11
vp = lbd*fp
print(vp)
```

$$232.088853087156$$

Em km/hora a velocidade é

```
vkm = vp*60/1000
print(vkm)
```

13.9253311852293

Que é obviamente muito baixo, mas fizemos algumas hipóteses questionáveis sobre a operação do amortecedor que não se aplicam na realidade.

Só para ilustrar (obviamente não era para fazer isto na prova, é claro!!!!), vamos resolver esta equação analiticamente para ver o que aparece. Lembre-se que vamos ter 6 raízes!

```
eqn=lde2(zeta=z)==Ti^2
show(eqn)
```

$$\frac{(1.0000000000000000 r^2 + 1) r^4}{(r^2 - 1)^2 + 1.0000000000000000 r^2} = 0.3457440000000000$$

```
s=solve(eqn,r)
show(s)
```

$$\left[ r = -\frac{1}{187500} \sqrt{35156250000 \left( \frac{49}{23437500000} \sqrt{3080253823608587} \sqrt{3} + \frac{1319680}{6591796} \right)} \right]$$

A expressão é enorme e não cabe na página, vamos transformar tudo em valores numéricos para facilitar. Não é necessário entender isto.

```
rs = [N(root.rhs()) for root in s]
print(rs)
```

```
[-0.653961484421463, 0.653961484421463, -0.423187139119641 -
0.848556519195762*I, 0.423187139119641 + 0.848556519195762*I,
-0.423187139119641 + 0.848556519195762*I, 0.423187139119641 -
0.848556519195762*I]
```

Como esperado, temos um par de raízes reais, só que uma é negativa, e como isto é uma razão de frequências, não faz sentido físico. Depois temos dois pares de raízes complexas conjugadas. A única raiz real positiva é a segunda portanto!

```
print(rs[1])
```

0.653961484421463

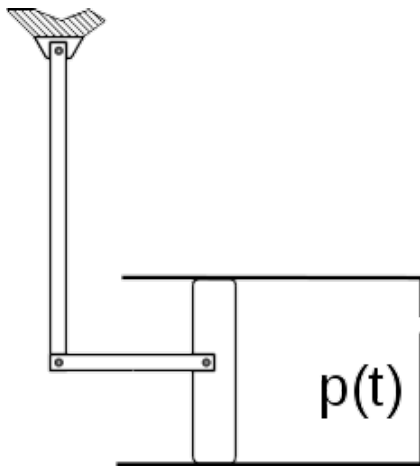
A terceira interação de NR já está bem próxima, como podemos ver, com um erro na terceira casa decimal, totalmente aceitável em engenharia.

É claro, no entanto, que eu escolhi uma estimativa inicial próxima desta raiz pois eu resolvi anaticamente antes de aplicar Newton Raphson, pois eu queria um iteração que convergissem rapidamente na prova.

No mundo real raramente temos este tipo de luxo.

## Questão 3

Em primeiro lugar temos que escolher um sistema de coordenadas generalizadas adequado para solução deste problema. O sistema obviamente só tem um grau de liberdade. Me parece que o mais óbvio e natural, e provavelmente mais fácil de usar, considera o deslocamento horizontal do pistão como coordenada generalizada. Vamos adotar é claro que a posição de equilíbrio é aquela na qual a manivela é vertical.



Precisamos é claro calcular a massa e rigidez equivalentes neste sistema de coordenadas. O amortecimento já é dado na forma de razão, então podemos usá-lo diretamente.

Considerando a translação horizontal e pequenas rotações (é claro), a massa equivalente total é a massa do pistão, mais a massa da biela (a barra horizontal) mais a massa equivalente, transformada da inércia rotacional, da manivela (a barra vertical). Não é necessária nenhuma transformação para o pistão e a biela pois eles se movem (para pequenas rotações é claro) diretamente na coordenada generalizada considerada.

Precisamos então calcular a massa generalizada da manivela. Como a manivela é rígida, e, para pequenas rotações, o deslocamento horizontal será linear ao longo da barra, e a esta altura do campeonato esperar-se-ia que isto fosse reconhecido imediatamente e que a massa generalizada na extremidade fosse tomada como  $1/3$  da massa total. Podemos calcular isto, é claro, pela equivalência das energias cinéticas.

A energia cinética de um elemento de barra é  $1/2 \rho A \dot{v}(y)^2 dy$ , onde  $\rho$  e  $A$  são a massa específica e a área da seção transversal da barra,  $dl$  é um elemento infinitesimal de comprimento e  $v$  é a velocidade horizontal deste elemento de comprimento da barra.

Como a velocidade varia linearmente ao longo do comprimento da barra,  $v(y) = \dot{v}_l y/l$ , onde  $v_l$  é a velocidade na extremidade da barra. A energia cinética total da barra é então

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \dot{v}(y)^2 dy = \frac{\rho A}{2} \int_0^l \left( \frac{\dot{v}_l y}{l} \right)^2 dy = \frac{\rho A}{2l^2} \dot{v}_l^2 \frac{y^3}{3} \Big|_0^l = \frac{\rho A}{2l^2} \dot{v}_l^2 \frac{l^3}{3} = \frac{1}{2} \frac{\rho A l}{3} \dot{v}_l^2$$

Como  $\rho A l$  é a massa total da barra,  $m_l$ , temos que

$$T = \frac{1}{2} \frac{m_l \dot{v}_l^2}{3}$$

Igualando isto à energia cinética da massa equivalente, temos

$$T = \frac{1}{2} \frac{m_l \dot{v}_l^2}{3} = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{v}_l^2$$

Daí é claro que  $m_{eq} = m_l/3$ .

Neste caso particular, a massa equivalente total é:

```
m_l=1.40
meq_l=m_l/3
m_p=0.30
m_h=0.25
meq_t=meq_l+m_p+m_h
print(meq_t)
```

1.01666666666667

Precisamos também é claro calcular a rigidez equivalente. Como este problema é muito simples, podemos fazer por equilíbrio direto, ou, de forma mais geral, através da equivalência de energias potenciais. Em primeiro lugar, no entanto, precisamos calcular a rigidez à torção. É um dado do problema que para girar a barra de  $1^\circ$  é necessário aplicar um torque de 1500 Nm. Lembre-se que é claro para que haja consistência de unidades, a rigidez à torção deve ser dada em Nm/rad!

A rigidez à torção é então:

```
kt=1500*180
print(kt)
```

270000

Lembre-se que este valor acima é em Nm/rad!

Considerando um deslocamento horizontal  $x$  na extremidade da barra, pelo simples equilíbrio de momentos temos que  $k_{eq}xl = k_t\theta$ . Para pequenas rotações,  $\theta = xl$ , assim

$$k_{eq}xl = k_t\theta = k_t \frac{x}{l}$$

Assim,  $k_{eq} = k_t/l^2$ .

Neste caso específico,

```
l = 1
keq = kt/l^2
```

```
print(keq)
```

270000

È claro que o valor numérico é igual, já que o comprimento da barra é unitário, mas, se você acertou por coincidência e nem mesmo mencionou a necessidade de transformar a rigidez, a questão não está completamete correta.

Com os dados acima já podemos calcular a frequência circular natural do sistema (em rad/s)

```
wn=sqrt(keq/meqt)
print(wn)
```

515.338500882481

Obviamente, a resposta do sistema é função da **força** aplicada no pistão! O gráfico mostra a pressão na câmara, para tranformá-la em força precisamos multiplicá-la pela área do pistão. No caso temos

```
dp = 0.1
Ap = N(pi*dp^2/4)
print(Ap)
```

0.00785398163397448

O valor máximo da força, que ocorrem em pulsos constantes de duração igual a 0,015 segundos, é então

```
pmax=50000
Fmax=pmax*Ap
print(Fmax)
```

392.699081698724

A frequência de ocorrência dos pulsos é 20Hz, portanto o período de ocorrência dos pulsos é

```
fp=20
taup = N(1/fp)
print(taup)
```

0.050000000000000000

A frequência circular de ocorrência dos pulsos é

```
wp = N(2*pi*fp)
print(wp)
```

125.663706143592

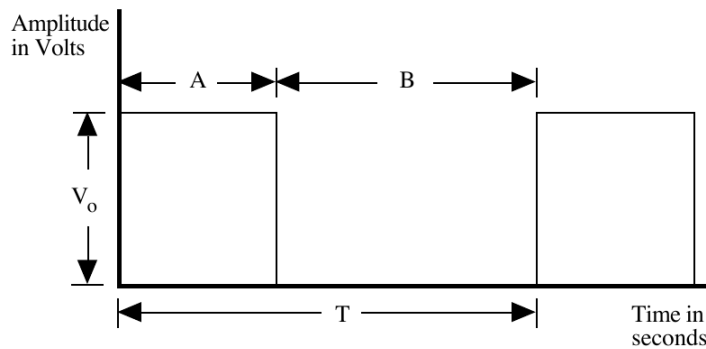
As coeficientes da série de Fourier do trem de pulsos são

$$a_0 = \frac{2AV_0}{A+B}, \quad a_n = \frac{V_0}{n\pi} \sin(n\omega_0 A), \quad b_n = \frac{V_0}{n\pi} [1 - \cos(n\omega_0 A)]$$

No enunciado da prova as fórmulas estava erradas, eu corriji no quadro, mas, se alguém fez contas com a fórmula errada, não tem problemas, será considerado igualmente. Da firtura do



trem de pulsos podemos encontrar a relação entre  $A$ ,  $B$  e o período de repetição  $T$ .



É claro que  $A + B = T$ , onde  $T$  é o período de repetição do pulso. No caso, então,

```
A=0.015
T=taup
B=T-A
V0=Fmax
a0=(2*A*V0)/(A+B)
print(a0)
```

235.619449019234

```
w0=wp
an(n) = (V0/n*pi)*sin(n*w0*A)
bn(n) = (V0/n*pi)*(1-cos(n*w0*A))
print(an)
print(bn)
```

```
n |--> 392.699081698724*pi*sin(1.88495559215388*n)/n
n |--> -392.699081698724*pi*(cos(1.88495559215388*n) - 1)/n
```

Para a prova só é necessário calcular os dois primeiros termos, aqui vou calcular um monte pois não custa nada.

```
anc = [N(an(n)) for n in range(1,16)]
bnc = [N(bn(n)) for n in range(1,16)]
print(anc)
print(bnc)
```

```
[1173.31894736392, -362.575494557576, -241.716996371717,
293.329736840980, 9.06508457898353e-14, -195.553157893987,
103.592998445022, 90.6438736393940, -130.368771929324,
-9.06508457898353e-14, 106.665358851265, -60.4292490929292,
-55.7808453165502, 83.8084962402800, 9.06508457898353e-14]
[1614.93498609797, 1115.89263058303, 78.5386130354289,
213.116528543593, 493.480220054468, 142.077685695729,
33.6594055866123, 278.973157645757, 179.437220677552,
-0.0000000000000000, 146.812271463452, 185.982105097171,
18.1242953158683, 60.8904367267407, 164.493406684823]
```

Os termos da resposta são calculados por

```
t1=a0/(2*keq)
print(t1)
zeta=0.15
r=wp/wn
print(r)
```

```
0.000436332312998582
0.243846919895178
```

```
tn(j) = (1/sqrt((1-j^2*r^2)^2+(2*zeta*j*r)^2))
print(tn)
```

```
j |--> 1/sqrt((-0.0594613203423655*j^2 + 1)^2 +
0.00535151883081289*j^2)
```

Calculando tos termos:

```
tnc=[tn(j) for j in range(1,16)]
print(tnc)
```

```
[1.06001900510757, 1.28854222683160, 1.94533591405787,
3.37122733274288, 1.64287500741611, 0.818233017241615,
0.504811871721829, 0.348928783458672, 0.258214988188742,
0.200002504114299, 0.160080289452940, 0.131350637327779,
0.109904616669097, 0.0934271286704891, 0.0804677613051440]
```

É interessante aqui observar que as maiores magnitudes na resposta são devidas aos harmônicos 3, 4 e 5!

Os ângulos de fase são dados por

```
phin(j) = arctan((2*zeta*j*r)/(1-j^2*r^2))
print(phin)
```

```
j |--> arctan(0.0731540759685535*j/(-0.0594613203423655*j^2 + 1))
```

Calculando um monte de termos:

```
phinc = [ phin(j) for j in range(1, 16)]
print(phinc)
```

```
[0.0776226369541021, 0.189659215201056, 0.441092612634666,
1.40614814725130, -0.644645369413546, -0.367348911530335,
-0.261472541597746, -0.205651016791124, -0.170835057321368,
-0.146837077394130, -0.129174719844624, -0.115563062997205,
-0.104710861940752, -0.0958306634931087, -0.0884133123816235]
```

A resposta total, considerando apenas os dois primeiros termos, é então

```
xp(t) = t1 + anc[0]/keq*tnc[0]*cos(w0*t-phinc[0]) +
bnc[0]/keq*tnc[0]*sin(w0*t-phinc[0]) +
anc[1]/keq*tnc[1]*cos(w0*t-phinc[1]) + bnc[1]/keq*tnc[1]*sin(w0*t-
phinc[1])
print(xp)
```

```
t |--> 0.00460644586392059*cos(125.663706143592*t -
0.0776226369541021) - 0.00173034753759921*cos(125.663706143592*t -
0.189659215201056) + 0.00634022880472952*sin(125.663706143592*t -
0.0776226369541021) + 0.00532546213006082*sin(125.663706143592*t -
0.189659215201056) + 0.000436332312998582
```

Para ilustração:

```
plot(xp,(t, 0, 4*T))
```

