Vibrações Mecânicas

Aula 15: Vibração Forçada
Excitação Geral

Ramiro Brito Willmersdorf
ramiro@willmersdorf.net

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco

2018.2

Forças não periódicas

Para forças não periódicas, temos várias alternativas.

- Transformada de Fourier;
- Integral de Convolução;
- Transformada de Laplace;
- Integração numérica direta;

Nenhuma é muito agradável de fazer “na mão”...

Impulso

É importante relembrar o conceito de Impulso.

- Forças não periódicas geralmente tem duração finita;
- Impactos, explosões, terremotos, etc.;
- Normalmente, uma força de grande intensidade, que age por um curto período;
- O efeito de um impulso mecânica é alterar a quantidade de movimento de uma partícula;

Da mecânica, sabemos que o impulso total é igual à variação da quantidade de movimento da partícula.

Impulso Unitário

Temos então que

$$\mathbf{F} = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt = m\dot{x}(t_2) - m\dot{x}(t_1).$$

Definimos um impulso unitário como um impulso de magnitude 1 que age, no tempo t, com uma duração infinitesimalmente curta:

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta\to 0} \int_{t}^{t+\Delta t} F(t)\,dt = F(t)dt = 1.$$

Impulso Unitário

Temos então que

$$\mathbf{F} = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,dt = m\dot{x}(t_2) - m\dot{x}(t_1).$$

Definimos um impulso unitário como um impulso de magnitude 1 que age, no tempo t, com uma duração infinitesimalmente curta:

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta \to 0} \int_{t}^{t+\Delta t} F(t)\,dt = F(t)dt = 1.$$

Função Delta de Dirac

A função Delta de Dirac é definida por

$$
\begin{aligned}
\delta(t-\tau) &= 0, \qquad \text{para } t \neq \tau; \\
\int_0^{-\infty} \delta(t-\tau)\, dt &= 1; \\
\int_0^{-\infty} \delta(t-\tau) F(t)\, dt &= F(\tau);
\end{aligned}
$$

para $0 < \tau < \infty$.

Impulso e Função Delta

Claramente, um impulso unitário agindo no tempo 0 pode ser descrito por

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}\delta(t) = \delta(t).$$

Um impulso arbitrário tem magnitude $\mathbf{F}$, e pode ser descrito por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\delta(t).$$

Impulso e Função Delta

Claramente, um impulso unitário agindo no tempo 0 pode ser descrito por

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}\delta(t) = \delta(t).$$

Um impulso arbitrário tem magnitude $\mathbf{F}$, e pode ser descrito por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\delta(t).$$

Resposta ao Impulso Unitário

Para um oscilador harmônico com 1GL, a equação de movimento é:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t).$$

Se $f(t) = \delta(t)$, então a força aplicada é nula para qualquer $t > 0$!
Isto implica que o sistema está em vibração livre para qualquer $t > 0$!
Neste caso, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = 0,$$

cuja solução é

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t\right].$$

Sujeita a condições iniciais adequadas.

Resposta ao Impulso Unitário

Para um oscilador harmônico com 1GL, a equação de movimento é:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t).$$

Se $f(t) = \delta(t)$, então a força aplicada é nula para qualquer $t > 0$!
Isto implica que o sistema está em vibração livre para qualquer $t > 0$!
Neste caso, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = 0,$$

cuja solução é

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0 \cos\omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right].$$

Sujeita a condições iniciais adequadas.

Resposta ao Impulso Unitário

Para um oscilador harmônico com 1GL, a equação de movimento é:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t).$$

Se $f(t) = \delta(t)$, então a força aplicada é nula para qualquer $t > 0$! Isto implica que o sistema está em vibração livre para qualquer $t > 0$!

Neste caso, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = 0,$$

cuja solução é

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0 \cos\omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right].$$

Sujeita a condições iniciais adequadas.

Resposta ao Impulso Unitário

Para um oscilador harmônico com 1GL, a equação de movimento é:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = f(t).$$

Se $f(t) = \delta(t)$, então a força aplicada é nula para qualquer $t > 0$!
Isto implica que o sistema está em vibração livre para qualquer $t > 0$!
Neste caso, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = 0,$$

cuja solução é

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\left[x_0 \cos\omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right].$$

Sujeita a condições iniciais adequadas.

Resposta ao Impulso Unitário

Claramente, $x(0) = 0$, mas a massa tem velocidade inicial não nula devido ao impulso.
No caso,

$$\mathbf{f} = 1 = m\dot{x}(t=0) - m\dot{x}(t=0^-) = m\dot{x}_0.$$

As condições iniciais são então

$$x(t=0) = x_0 = 0,$$
$$\dot{x}_0(t=0) = \dot{x}_0 = \frac{1}{m}.$$

Introduzindo as condições iniciais na resposta, temos

$$x(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d}\sin\omega_d t.$$

Resposta ao Impulso Unitário

Claramente, $x(0) = 0$, mas a massa tem velocidade inicial não nula devido ao impulso.
No caso,

$$\mathbf{f} = 1 = m\dot{x}(t=0) - m\dot{x}(t=0^-) = m\dot{x}_0.$$

As condições iniciais são então

$$x(t=0) = x_0 = 0,$$
$$\dot{x}_0(t=0) = \dot{x}_0 = \frac{1}{m}.$$

Introduzindo as condições iniciais na resposta, temos

$$x(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t.$$

Resposta ao Impulso Unitário

Claramente, $x(0) = 0$, mas a massa tem velocidade inicial não nula devido ao impulso.
No caso,

$$\mathbf{f} = 1 = m\dot{x}(t = 0) - m\dot{x}(t = 0^{-}) = m\dot{x}_0.$$

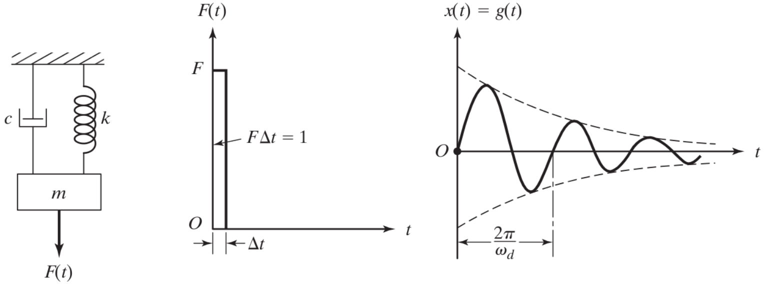
As condições iniciais são então

$$x(t = 0) = x_0 = 0,$$
$$\dot{x}_0(t = 0) = \dot{x}_0 = \frac{1}{m}.$$

Introduzindo as condições iniciais na resposta, temos

$$x(t) = g(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t.$$

Resposta ao Impulso Unitário



Resposta a Impulso de Magnitude Arbitrária

Se a magnitude do impulso é $\mathbf{F}$, a velocidade inicial é

$$\mathbf{F} = m\dot{x}(t=0) - m\dot{x}(t=0^-) = m\dot{x}_0$$

ou

$$\dot{x}_0 = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

Como tudo é linear, a resposta é

$$x(t) = \frac{\mathbf{F}e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d}\sin\omega_d t = \mathbf{F}g(t).$$

Resposta a Impulso de Magnitude Arbitrária

Se a magnitude do impulso é $\mathbf{F}$, a velocidade inicial é

$$\mathbf{F} = m\dot{x}(t = 0) - m\dot{x}(t = 0^-) = m\dot{x}_0$$

ou

$$\dot{x}_0 = \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

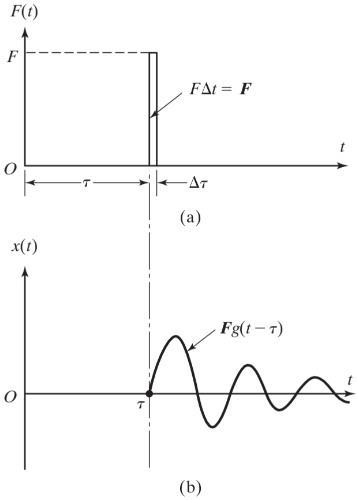
Como tudo é linear, a resposta é

$$x(t) = \frac{\mathbf{F}e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin \omega_d t = \mathbf{F}g(t).$$

Resposta a Impulso em Tempo arbitrário

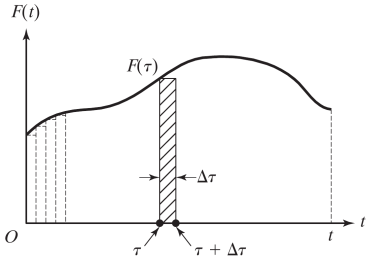
Se o impulso é aplicado em um tempo arbitrário $t = \tau$, a velocidade varia de $\mathbf{F}/m$ neste instante.
A solução então é idêntica à solução para o impulso arbitrário no tempo 0, deslocada para o tempo τ.
Temos então que

$$x(t) = \mathbf{F}g(t - \tau).$$



Resposta a Força Geral

Consideramos uma força arbitrária como uma sequência de impulsos.
A resposta em um tempo t é a soma das resposta de todos os impulsos que aconteceram até aquele instante.



A magnitude do impulso no tempo τ é

$$\mathbf{F}(\tau) = F(\tau)\Delta\tau.$$

O efeito no tempo t do impulso no tempo τ é

$$\Delta x(t) = \mathbf{F}(\tau)g(t-\tau),$$

Integral de Convolução ou Duhamel

A resposta total é a soma dos efeitos de todos os impulsos anteriores ao tempo t,

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^{t} \mathbf{F}(\tau) g(t-\tau) = \sum_{\tau=0}^{t} F(\tau) g(t-\tau) \Delta\tau.$$

Tomando o limite quando $\Delta\tau \to 0$,

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) g(t-\tau)\, d\tau.$$

Substituindo o valor da resposta ao impulso unitário,

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau.$$

Integral de Convolução ou Duhamel

A resposta total é a soma dos efeitos de todos os impulsos anteriores ao tempo t,

$$x(t) = \sum_{\tau=0}^{t} \mathbf{F}(\tau) g(t-\tau) = \sum_{\tau=0}^{t} F(\tau) g(t-\tau)\Delta\tau.$$

Tomando o limite quando $\Delta\tau \to 0$,

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) g(t-\tau)\, d\tau.$$

Substituindo o valor da resposta ao impulso unitário,

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)\, d\tau.$$

Resposta à Excitação da Base

Para um problema com 1GL, com excitação através do movimento da base, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0,$$

introduzindo o deslocamento relativo $z = x - y$, ficamos com

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y},$$

que é uma equação de vibração forçada amortecida, para o deslocamento relativo z, com a força igual a $-m\ddot{y}$.
Podemos usar a integral de Duhamel com esta força.

Resposta à Excitação da Base

Para um problema com 1GL, com excitação através do movimento da base, a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + \kappa(x - y) = 0,$$

introduzindo o deslocamento relativo $z = x - y$, ficamos com

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + \kappa z = -m\ddot{y},$$

que é uma equação de vibração forçada amortecida, para o deslocamento relativo z, com a força igual a $-m\ddot{y}$.
Podemos usar a integral de Duhamel com esta força.

Resposta à Excitação da Base

Introduzindo $F(\tau) = -m\ddot{y}(\tau)$ na integral de Duhamel, obtemos

$$z(t) = -\frac{1}{\omega_d} \int_0^t \ddot{y}(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin \omega_d (t-\tau)\, d\tau.$$

Obs: O movimento da massa pode ser calculado trivialmente, e lembramos que $y(t)$ é uma função conhecida!