2016-1ºEE-Turma_B

Questão 1

Temos conhecida a massa equivalente, $m_{\text{eq}} = 2.0$, rigidez equivalente $k_{\text{eq}} = 2500$, e coeficiente de amortecimento $c = 212$.

```
meq = 2
keq = 2500
c = 212
```

A frequência natural do sistema e razão de amortecimento são

```
wn = N(sqrt(keq/meq))
cc = 2*meq*wn
zeta = c/cc
show(wn)
show(zeta)
```

35.3553390593274

1.49906637611548

Obviamente, o sistema é **superamortecido**. **Não há vibração**! A massa volta à posição inicial exponencialmente, e, teoricamente, leva um tempo infinito para retornar ao repouso. Temos então que definir um critério adequado para definir que a massa "parou".

Para um sistema super amortecido, a resposta é dada por

$$x(t) = C_1 e^{(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t} + C_2 e^{(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})\omega_n t}$$

com

$$C_1 = \frac{x_0\omega_n(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})+\dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}, \qquad C_2 = \frac{-x_0\omega_n(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1})-\dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$

Estas fórmulas são bem assustadoras, mas percebam que o deslocamento inicial é nulo, o que simplifica bem as expressões.

$$C_1 = \frac{\dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}, \qquad C_2 = \frac{-\dot{x}_0}{2\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}$$

Obviamente, $C_1 = -C_2$.

O termo $\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$ aparece muito nas fórmulas então vamos pré calculá-lo.

```
sqz = sqrt(zeta^2 - 1)
show(sqz)
```

1.11678108866510

Assim,

```
x0d = 1.0
C1 = x0d/(2*wn*sqz)
C2 = -C1
show(C1)
show(C2)
```

0.0126633014896726

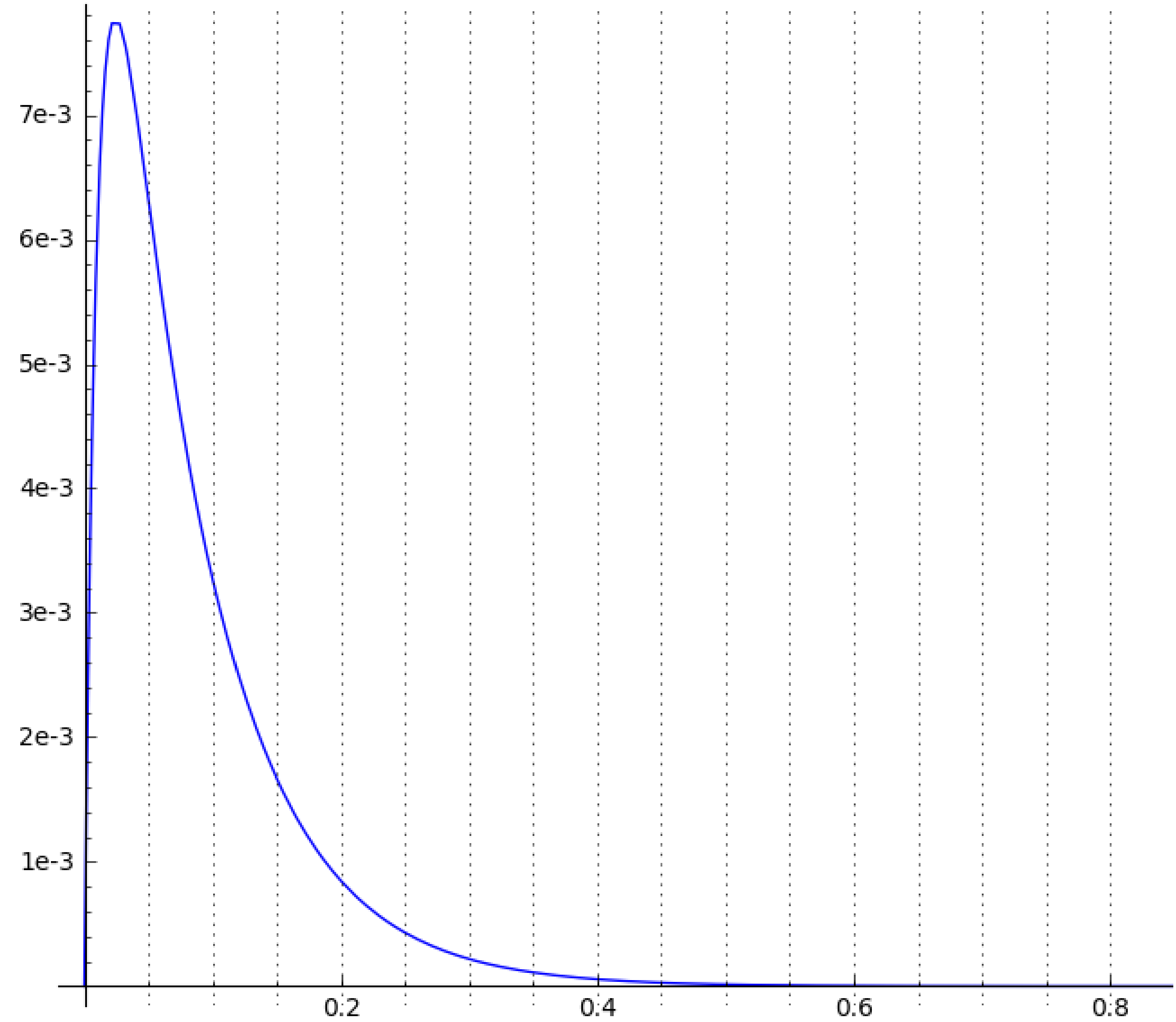
-0.0126633014896726

O deslocamento é então (o plot é só para ilustrar, não é necessário na prova, é claro.)

Dito isto, espera-se que o aluno saiba a forma geral do deslocamento para este sistema com estas condições iniciais.

```
from numpy import linspace
x(t) = C1*(exp((-zeta+sqz)*wn*t) - exp((-zeta-sqz)*wn*t))
plot(x, (t, 0, 1), gridlines=linspace(0,1,21))
```

```
/usr/lib/sagemath/local/lib/python2.7/site-packages/sage/plot/graphi
cs.py:2921: FutureWarning: elementwise comparison failed; returning
scalar instead, but in the future will perform elementwise
comparison
  if hgridlines=='minor':
/usr/lib/sagemath/local/lib/python2.7/site-packages/sage/plot/graphi
cs.py:2923: FutureWarning: elementwise comparison failed; returning
scalar instead, but in the future will perform elementwise
comparison
  if vgridlines=='minor':
```



Do gráfico podemos ver que o sistema "para" por entre 0.4 e 0.6 segundos, dentro de qualquer critério razoável. Uma possibilidade é calcular o deslocamento máximo, e assumir que o sistema para quando o deslocamento é uma parcela muito pequena, algo como 0.5%, deste valor.

Para calcular o deslocamento máximo, derivamos a expressão do deslocamento e igualamos a zero. Vamos resscrever a expressão do deslocamento como

$$x(t) = C_1(e^{a\omega_n t} - e^{b\omega_n t})$$

com $a = -\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$ e $b = -\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}$.

Derivando esta equação em relação ao tempo, ficamos com

$$\frac{dx}{dt} = C_1(a\omega_n e^{a\omega_n t} - b\omega_n e^{b\omega_n t})$$

Igualando a zero, obtemos

$$a\omega_n e^{a\omega_n t} = b\omega_n e^{b\omega_n t}$$

Obviamente,

$$ae^{a\omega_n t} = be^{b\omega_n t}$$

ou

$$e^{a\omega_n t} = \frac{b}{a} e^{b\omega_n t}$$

Tomando o logaritmo de ambos os lados da equação,

$$a\omega_n t = \ln \frac{b}{a} + b\omega_n t,$$

ou

$$(a-b)\omega_n t = \ln \frac{b}{a},$$

E, finalmente,

$$t_{\max} = \frac{1}{(a-b)\omega_n} \ln \frac{b}{a}.$$

Neste casio, temos

```
a = -zeta+sqz
b = -zeta-sqz
tmax = 1.0/((a-b)*wn)*log(b/a)
show((a, b, tmax))
```

$(-0.382285287450383, -2.61584746478058, 0.0243537606291016)$

Vamos resolver também com o solver numérico, só para ver o que dá.

```
v(t) = x.diff(t)
show(v)
from scipy.optimize import fsolve
fsolve(lambda y: v(float(y)), 0.01)
```

$t \mapsto -0.171154978952650\, e^{(-13.5158259552007\, t)} + 1.17115497895265\, e^{(-92.4841740447993\, t)}$

```
array([ 0.02435376])
```

Felizmente deu a mesma resposta, que, olhando no gráfico acima, está bem dentro do esperado. O que precisamos agora é do valor máximo, que é o deslocamento para este tempo.

```
xmax = x(t=tmax)
show(xmax)
```

0.00778000165170414

que é aproximadamente 7,8 mm, o que também bate bem com o que temos no gráfico. Tomando 0.5% disto, temos,

```
xlim = 0.005*xmax
show(xlim)
```

0.0000389000082585207

Vamos então encontrar o tempo que leva para chegar a este deslocamento resolvendo a equação

$$x_{\text{lim}} = C_1(e^{a\omega_n t} - e^{b\omega_n t})$$

Infelizmente, esta equação não tem solução anaítica fácil, mas podemos tentar alguns valores acima do tempo para o deslocamento máximo, é claro.

```
show(x(t=0.025))
show(x(t=0.050))
show(x(t=0.150))
show(x(t=0.5))
show(x(t=0.4))
```

0.00777801661943044

0.00631825638992437

0.00166750266675250

0.0000147103373139014

0.0000568339046669093

Então, claramente, com para 0.5 segundos, o sistema está "parado".

Só para ilustrar, podemos calcular o valor exato, o que não tem realmente sentido já que o deslocamento limite foi chutado de qualquer jeito!

Mesmo assim,

```
fsolve(lambda y: x(float(y))-xlim, 0.05)
```

```
array([ 0.42805146])
```

O tempo exato é 0.42 segundos, repetindo que isto não faz muito sentido.

Questão 2

A potência dissipada no amortecedor em um determinado instante de tempo é dada por $E = F\dot{x} = c\dot{x}^2$.

No caso então, a energia total dissipada é

$$E = \int_0^{t_{\text{lim}}/2} c\dot{x}^2 \, dt = \int_0^{t_{\text{lim}}/2} cC_1^2 \left(a\omega_n e^{a\omega_n t} - b\omega_n e^{b\omega_n t}\right)^2 dt$$

Não é necessário calcular esta integral já que ela é nao trivial, e a resposta esperada termina aqui!

Novamente, para ilustração apenas, podemos calcular esta integral numericamente.

```
def I(y):
    return c*(C1*(a*wn*exp(a*wn*y)-b*wn*exp(b*wn*y)))
```

```
numerical_integral(I, 0, 0.21)
```

(0.15711388509810054, 3.483552322780764e-14)

São dissipados portanto aproximadamente 0.157 Joules.

Questão 3

Do enunciado do problema,

```
m = 80
rpm = 1800
w = 1800*2*N(pi)/60
l = 5
b = 0.3
h = 0.080
rho = 7700
show(w)
```

188.495559215388

Para o cálculo da rigidez da viga, precisamos do seu momento de inércia.

```
I = b*h^3/12.0
show(I)
```

0.0000128000000000000

A deflexão estática no centro da viga é dada por $y_m = PL^3/48EI$, assim, a rigidez correspondente é

$$k = \frac{P}{y_m} = \frac{48EI}{L^3}.$$

No caso,

```
E = 210e9
k = 48*E*I/l^3
show(k)
```

$1.03219200000000 \times 10^6$

A frequência natural e a razão de frequências são então,

```
wn = sqrt(k/m)
show(wn)
r = w/wn
show(r)
```

113.588731835513

1.65945649862829

O sistema opea acima da ressonância.

A força de desbalanceamento é claro que é uma força harmônica, com frequência igual à frequência do motor. Podemos então usar diretamente a resposta para uma força harmônica, dada no formulário,

$$\frac{X}{\delta_{\text{st}}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

No caso,

```
F0 = 3770
dst = F0/k
show(dst)
```

0.00365242125496032

```
zeta = 0.001
Mag=1.0/sqrt((1-r^2)^2+(2*zeta*r)^2)
show(Mag)
```

0.570190765077536

```
X = Mag*dst
show(X)
```

0.00208257686975128

Ou, aproximadamente, 2.1 milímetros.

Questão 4

Este problema é semelhante ao anterior, mas precisamos acrescentar a massa equivalente da viga. Para isto, vamos usar a equivalência de energias potenciais, considerando que a deformação da viga é uma meia senoide, conforme descrito no enunciado. A forma da viga é então,

$$y(x) = y_{\text{max}} \sin \frac{\pi x}{L}$$

Vamos considerar que todos os pontos da viga se movimentam em fase, com a mesma frequência, isto é, $y(x,t) = y_{\text{max}} \sin \frac{\pi x}{L} \sin \omega t$. A velocidade é então

$$\dot{y}(x,t) = \omega y_{\text{max}} \sin \frac{\pi x}{L} \cos \omega t.$$

É claro então que os valores máximos de velocidade ocorrem para $\cos \omega t$ igual a 1, e são iguais a

$$\dot{y}_{\text{max}}(x) = y_{\text{max}} \omega \sin \frac{\pi x}{L}.$$

A energia cinëtica da viga é dada por

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} \rho A \dot{y}^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A y_{\text{max}}^2 \omega^2 \sin^2 \frac{\pi x}{L} \, dx = \frac{1}{2} \rho A y_{\text{max}}^2 \omega^2 \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} \, dx.$$

A última integral é igual a $L/2$, assim,

$$T = \frac{1}{2}\rho A y_{\max}^2 \omega^2 \frac{L}{2}$$

Comparamos isto com a energia cinética de uma massa concentrada no centro da viga, que vibre na mesma frequência com o mesmo deslocamento,

$$T = \frac{1}{2} m_{\mathrm{eq}} y_{\max}^2 \omega^2,$$

e fica claro que a massa equivalente é

$$m_{\mathrm{eq}} = \frac{\rho A L}{2} = \frac{M}{2},$$

onde M é a massa total da viga. No caso temos então,

```
A = b*h
M = rho*A*l
meq = M/2
show(meq)
```

462.000000000000

A nova frequência natural e razão de frequências são,

```
wn = sqrt(k/(m+meq))
r = w/wn
show((r, wn))
```

(4.31937113767024, 43.6395839133789)

O sistema agora opera muito acima da frequência natural! Esperamos que a amplitude de vibração seja bem baixa. O fator de amplificação é

```
Mag=1.0/sqrt((1-r^2)^2+(2*zeta*r)^2)
show(Mag)
```

0.0566348614064277

E a nova amplitude de vibração,

```
X = Mag*dst
show(X)
```

0.000206854371572568

```
```