

# Vibrações 1º EE 2015.2

## Questão 1

O sistema claramente tem um grau de liberdade, e é mais facilmente tratável, na minha opinião, considerado como um sistema rotativo. A coordenada generalizada empregada será então o ângulo  $\theta$  que o eixo de simetria horizontal da barra faz com um eixo horizontal.

Para um sistema vibratório rotativo amortecido com 1 GL, a equação de movimento é:

$$J_{eq} \ddot{\theta} + c_{eq} \dot{\theta} + \kappa_{eq} \theta = 0.$$

Precisamos então, antes de mais nada, calcular as grandezas equivalentes.

### Momento de Inércia

Em primeiro lugar vamos calcular o momento de inércia equivalente, que nada mais é que o momento de inércia total do sistema em relação ao centro de rotação. Apesar de ser possível calculá-lo usando os momentos de inércia de barras retangulares e triangulares e o teorema dos eixos paralelos, isto não é necessário aqui, basta usar diretamente a equivalência de energias cinéticas.

Considerando que as rotações são muito pequenas, como usual, podemos dizer que a velocidade de translação vertical de um ponto a uma distância  $x$  do centro de rotação é dada por  $\dot{\theta} x$ . A energia cinética de *cada lado* da barra será então a integral de 0 até o comprimento de cada lado desta velocidade vezes a massa do elemento de massa nesta posição.

Vamos chamar de  $h_0$  a altura da base menor do trapézio, que está exatamente sobre o centro de rotação, e de  $h_e$  a altura da base na extremidade da barra. O comprimento de *um lado* da barra será denominado  $L$ . A altura de um elemento de massa na posição  $x$  da barra é dada então por  $h(x) = h_0 + x(h_e - h_0)/L$ .

Chamando de  $t$  a espessura da chapa, a massa de um elemento infinitesimal na posição  $x$  é portanto  $dm = \rho dV = \rho t dA = \rho t h(x) dx = \rho t (h_0 + x(h_e - h_0)/L) dx$ .

A energia cinética deste elemento de massa é  $dT = 1/2 dm \dot{y}^2$ , onde  $\dot{y}$  é a velocidade vertical do elemento. No caso temos então  $dT = 1/2 \rho t (h_0 + x(h_e - h_0)/L) dx \dot{y}^2$ , ou, introduzindo a velocidade de rotação,  $dT = 1/2 \rho t (h_0 + x(h_e - h_0)/L) \dot{\theta}^2 x^2 dx$ . É importante notar que nesta expressão tudo é constante menos  $x$ ! A energia cinética total de cada lado da barra é a integral ao longo de todo o comprimento da energia dos elementos de massa, isto é

$$T = \int_0^L dT = \int_0^L \frac{1}{2} \rho t \left( h_0 + x \frac{(h_e - h_0)}{L} \right) \dot{\theta}^2 x^2 dx.$$

Lembrando que tudo aqui é constante menos  $x^2$  e  $x^3$ , as integrais são triviais. A energia de cada braço é então

$$T = \frac{1}{2} \rho t \left( h_0 \frac{x^3}{3} + \frac{(h_e - h_0)}{L} \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^L \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \rho t \left( h_0 \frac{L^3}{3} + (h_e - h_0) \frac{L^3}{4} \right) \dot{\theta}^2,$$

ou

$$T = \frac{1}{2} \rho t \left( \frac{h_0}{3} + \frac{h_e - h_0}{4} \right) L^3 \dot{\theta}^2.$$

Como são dois braços idênticos e simétricos, a energia cinética total é

$$T = \rho t \left( \frac{h_0}{3} + \frac{h_e - h_0}{4} \right) L^3 \dot{\theta}^2.$$

Para um sistema rotativo, a energia cinética é  $1/2 J_{eq} \dot{\theta}^2$ . Igualando esta energia com aquela calculada acima, temos

$$\frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 = \rho t \left( \frac{h_0}{3} + \frac{h_e - h_0}{4} \right) L^3 \dot{\theta}^2.$$

Eliminando o  $\dot{\theta}^2$ , o momento de inércia equivalente é, claramente,

$$J_{eq} = 2\rho t \left( \frac{h_0}{3} + \frac{h_e - h_0}{4} \right) L^3.$$

Incrivelmente, conferindo este valor com o momento de inércia de massa de um trapezóide em relação à sua base, verificamos que o valor está correto.

Neste caso particular temos

```
rho = 7800
t = 0.005
h_0 = 0.08
h_e = 0.25
L = 0.4
Jeq = 2*rho*t*(h_0/3 + (h_e - h_0)/4)*L^3
Jeq
```

0.3452800000000000

## Rigidez em Torção

Como vamos usar um sistema em torção, precisamos calcular a rigidez equivalente das molas. Podemos fazer isto de várias formas, mas a minha preferida é através da equivalência de energias potências elásticas.

A energia potencial elástica armazenada em uma mola linear é  $U = 1/2 \kappa y^2$ , onde  $\kappa$  é a rigidez da mola e  $y$  é quanto ela foi comprimida. A energia potencial elástica armazenada em uma mola comprimida é  $U = 1/2 \kappa_t \theta^2$ , onde  $\kappa_t$  é a rigidez á torção e  $\theta$  é quanto a mola foi *rotacionada*.

Neste caso particular, a compressão da mola é dada pela rotação da barra, isto é,  $y = \theta L$ , para

pequenas rotações é claro. Assim, lembrando que temos duas molas, podemos escrever

$$\frac{1}{2} \kappa_t \theta^2 = 2 \frac{1}{2} \kappa y^2 = \kappa \theta^2 L^2,$$

ou, eliminando  $\theta$ ,

$$\kappa_t = 2\kappa L^2.$$

Para um sistema rotativo, a frequência natural é dada por  $\omega_n = \sqrt{\kappa_t / J_{eq}}$ . Neste problema a frequência natural é dada, então podemos calcular imediatamente a rigidez à torção e depois a rigidez de cada mola. Temos que  $\kappa_t = \omega_n^2 J_{eq}$ , então

```
fn = 25
omega_n = N(2*pi*fn)
kt = omega_n^2*Jeq
kt, omega_n
```

(8519.44251902034, 157.079632679490)

A rigidez de cada mola é então

```
k = kt/(2*L^2)
k
```

26623.2578719385

## Amortecimento

Sabemos que após 100 ciclos, a amplitude de vibração é 15% da amplitude inicial. Podemos usar a fórmula do decremento logarítmico para calcular o amortecimento. Sabemos que

$$\delta = \frac{1}{n} \log \frac{x_1}{x_{n+1}},$$

onde o  $\log$  é o logaritmo neperiano. No caso temos

```
x1 = 1
xn = 0.15
n = 100
delta = 1/n*log(x1/xn)
delta
```

0.0189711998488588

O decremento logarítmico e a razão de amortecimento estão relacionadas por

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}},$$

ou, masi convenientemente

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}.$$

Também é perfeitamente aceitável usar a fórmula simplificada  $\delta = 2\pi\zeta$ . No caso, temos

```
zeta = N(delta/sqrt(4*pi^2+delta^2))
zeta
```

0.00301934646937075

Para um problema em torção, a razão de amortecimento é dada por  $\zeta = c_t/c_{t_{crit}}$ , com  $c_{t_{crit}} = 2J_{eq}\omega_n$ . Assim, temos

```
ctcrit = 2*Jeq*omega_n
ct = zeta*ctcrit
ct
```

0.327517301282433

## Tempo até 1%

Para calcular o tempo até que amplitude de vibração seja menor do que 1% da amplitude original, podemos novamente usar o decremento logarítmico para contar quantos ciclos são necessários, e depois multiplicar o número de ciclos pelo período de vibração amortecida. O número de ciclos é dado por

$$n = \frac{1}{\delta} \log \frac{x_1}{x_{n+1}}$$

Claramente, como estamos contando ciclos, temos que tomar um valor inteiro (a função ceiling abaixo arredonda sempre para cima). Assim,

```
xn=0.01
n1 = 1/delta*log(x1/xn)
n1 = ceil(n1)
n1
```

243

A frequência de vibração amortecida é dada por  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ . O período correspondente é  $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ . Assim,

```
omega_d = omega_n * sqrt(1-zeta^2)
tau_d = N((2*pi)/omega_d)
tau_d, omega_d
```

(0.0400001823303087, 157.078916673305)

Obviamente, como o amortecimento é muito baixo, o período amortecido é praticamente igual ao período da vibração livre não amortecida.

O tempo total decorrido é então

```
t1 = n1 * tau_d
t1
```

9.72004430626501

## Questão 2

Como o enunciado diz que o sistema não deve oscilar e deve retornar o mais rapidamente possível para a posição de repouso, devemos considerar que o sistema seja *criticamente amortecido*, ou *muito próximo* disto. Desta forma, o amortecimento do sistema já está definido, deve ser tal que  $\zeta \approx 1$ . A massa do problema já está definida, precisamos portanto encontrar uma rigidez apropriada para o sistema.

Para um sistema criticamente amortecido, o deslocamento em função do tempo é dado por  $x(t) = [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_n x_0)t]e^{-\omega_n t}$ . Pelo enunciado do problema, podemos tomar o deslocamento inicial como 0, e velocidade inicial como a velocidade do impacto. Neste caso, o deslocamento em função do tempo é dado por  $x(t) = \dot{x}_0 t e^{-\omega_n t}$ .

Podemos encontrar o tempo no qual o deslocamento é máximo derivando esta expressão e igualando a zero, assim

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}_0 \frac{d}{dt} (te^{-\omega_n t}) = e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} = (1 - \omega_n t)e^{-\omega_n t} = 0,$$

ou

$$1 - \omega_n t = 0, \quad \text{ou} \quad t = \frac{1}{\omega_n}.$$

O deslocamento máximo correspondente é

$$x_{\max} = x\left(\frac{1}{\omega_n}\right) = \dot{x}_0 \frac{1}{\omega_n} e^{-\omega_n \frac{1}{\omega_n}} = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} e^{-1} = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n e}.$$

Do enunciado, o deslocamento máximo é igual a 0,35 metros, e a velocidade de impacto é igual a 100 km/h. Podemos então calcular a frequência natural do sistema.

```
xmax = 0.35
v0 = 100.0*1000/3600
wn = N(v0/(xmax*e))
wn
```

29.1967810453526

Como  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  e a massa é conhecida, podemos calcular a rigidez necessária como

```
m = 300
k = wn^2*m
k
```

255735.607023078

O amortecimento necessário é o amortecimento crítico, já que  $\zeta = 1$ . Assim,  
 $c = c_{\text{crit}} = 2m\omega_n$ .

```
c = 2*m*wn
c
```

17518.0686272115

Não seria uma má ideia usar um amortecimento levemente menor do que o amortecimento crítico, para permitir que o sistema chega-se de volta à posição de equilíbrio, já que no modelo ideal o tempo que isto leva para ocorrer é infinito. Assim, dando uma "engenheirada", vamos tomar como valor final para o amortecimento 98% do amortecimento crítico, ou

$$c_f = 0.98 * c$$

17167.7072546673

Não é estritamente necessário fazer esta última consideração na prova, mas ajuda.

Se vocês prestarem atenção, esta questão é **absurdamente simples e fácil** para valer 5 pontos.