

# Vibrações 2º EE

## Segundo EE Vibrações

1º Semestre 2015, 01/07/2015

### Questão 1

Como o problema possui inércia de rotação e translação, é conveniente antes de mais nada calcularmos a massa equivalente do sistema.

O tubo que se move em uma trajetória circular, claramente é análogo a um pêndulo composto. . Vamos tomar como coordenada generalizada o ângulo que uma reta radial que passa pelo centro do cilindro móvel faz com a vertical, tomado positivo no sentido antihorário.

Vamos observar que o tubo móvel percorre uma trajetória circular de raio igual ao raio do tubo fixo menos o raio externo do tubo móvel.

Os raios correspondentes são (tudo em metros)

Para um deslocamento positivo  $\theta$ , a força de restauração é  $mg \sin \theta$ , onde  $m$  é a massa do tubo móvel. Considerando que o ângulo  $\theta$  é pequeno, a força de restauração é

```
var('m, g, theta, R, r_o, r_i')  
F_r = m*g*theta  
show(F_r)
```

$$gm\theta$$

A rotação do tubo interno e translação de seu centro de gravidade estão acopladas pela condição de não deslizamento, isto é  $(R - r_o)\dot{\theta} = r_o\dot{\theta}_t$ , onde  $\dot{\theta}_t$  é a velocidade angular do tubo móvel, **em relação ao seu próprio eixo!**

A massa equivalente pode ser calculada pela equivalência de energias cinéticas:

$$\frac{1}{2} m_{\text{eq}} v_{\text{eq}}^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}_t^2$$

No caso,  $v$  é a velocidade de translação do centro do tubo móvel e  $v = (R - r_o)\dot{\theta}$ ;  $J_0$  é o momento de inércia de massa do tubo em relação ao seu eixo; e a velocidade equivalente que interessa é a própria velocidade do centro de gravidade do tubo, isto é  $v_{\text{eq}} = v = (R - r_o)\dot{\theta}$ .

Para facilitar a notação, vou chamar  $\dot{\theta}$  de  $\omega$  e  $\dot{\theta}_t$  de  $\omega_t$ .

Temos então

```
var('m_eq, v_eq, v, l, omega_t, omega, J_0')
exp = m_eq * v_eq^2 == m * v^2 + J_0 * omega_t^2
show(exp)
exp=exp.subs(v_eq=v)
show(exp)
exp=exp.subs(v=omega*(R-r_o))
exp=exp.subs(omega_t = omega*(R-r_o)/r_o)
show(exp)
s=solve(exp, m_eq)
m_eq=s[0].rhs()
show(m_eq.expand())
```

$$m_{eq}v_{eq}^2 = J_0\omega_t^2 + mv^2$$

$$m_{eq}v^2 = J_0\omega_t^2 + mv^2$$

$$(R - r_o)^2 m_{eq} \omega^2 = (R - r_o)^2 m \omega^2 + \frac{J_0 (R - r_o)^2 \omega^2}{r_o^2}$$

$$m + \frac{J_0}{r_o^2}$$

Para um cilindro oco,

```
var('r, J, rho, h')
A = pi*r^2
V = A*h
show(V)
```

$$\pi h r^2$$

Considerando a aceleração tangencial do tubo interno, a equação de movimento fica

$$m_{eq}(R - r_o)\ddot{\theta} + c_{eq}(R - r_o)\dot{\theta} + mg\theta = 0$$

Dividindo tudo pelo raio da trajetória

$$m_{eq}\ddot{\theta} + c_{eq}\dot{\theta} + \frac{mg\theta}{R - r_o} = 0$$

Claramente,

$$k_{eq} = \frac{mg}{R - r_o}$$

```
k_eq = (m*g)/(R-r_o)
show(k_eq)
```

$$\frac{gm}{R - r_o}$$

Para um cilindro maciço,

```
rho=7800
h=0.15
ro=0.15/2
R=2
g=9.8
ri=0.14/2
V_o = N(V(r=ro, h=h))
V_i = N(V(r=ri, h=h))
V_t = V_o-V_i
show([V_o, V_i, V_t])
m_o=rho*V_o
m_i=rho*V_i
m_t=m_o-m_i
show(m_t)
```

[0.00265071880146639, 0.00230907060038850, 0.000341648201077890]

2.66485596840754

O momento de inércia do tubo interno é

```
J=0.5*m*r^2
show(J)
J_o=J(r=ro, m=m_o)
J_i=J(r=ri, m=m_i)
J_0=J_o-J_i
show([J_o, J_i, J_0])
```

0.5000000000000000  $mr^2$

[0.0581501437071689, 0.0441263391734242, 0.0140238045337447]

A massa equivalente é então

```
show(m_eq)
```

$$\frac{mr_o^2 + J_0}{r_o^2}$$

```
m_ex = m_eq(m=m_t, J_0=J_0, r_o=ro)
show(m_ex)
```

5.15797677440659

A rigidez equivalente é

```
show(k_eq)
k_ex=k_eq(R=R, g=g, m=m_t, r_o=ro)
show(k_ex)
```

$$\frac{gm}{R - r_o}$$

13.5665394755293

A frequência natural é

```
omega_n=sqrt(k_ex/m_ex)
show(omega_n)
```

1.62179086669035

O amortecimento crítico é

```
c_c = 2*m_ex*omega_n
show(c_c)
```

16.7303192466671

Do enunciado, sabemos que o decremento logarítmico após dez ciclos completos é

```
delta_11=1/10*ln(5/3.8)
show(delta_11)
```

0.0274436845701760

Podemos então aproximar a razão de amortecimento por

```
zeta=delta_11/(2*N(pi))  
show(zeta)
```

0.00436779805599829

Desta forma, o coeficiente de amortecimento equivalente do sistema é

```
c_eq = zeta*c_c  
show(c_eq)
```

0.0730746558818235

Como resolvemos tudo no sistema SI, a unidade do coeficiente de amortecimento é kg/s.

Da fórmula do decremento logarítmico de novo,

```
n=ln(5/0.001)/delta_11  
n=ceil(n)  
show(n)
```

311

Então são necessários pelo menos 311 ciclos completos para que o movimento "cesse". A frequência (circular) de vibração amortecida é (como o amortecimento é muito baixo, se usássemos a frequência natural não estaríamos cometendo nenhuma atrocidade.)

```
omega_d = omega_n*sqrt(1-zeta^2)  
show(omega_d)
```

1.62177539662931

A frequência e o período de vibração amortecidos são então

```
f_d = omega_d/N(2*pi)  
tau_d = 1/f_d  
show([tau_d, f_d])
```

[3.87426355106788, 0.258113570958374]

O tempo total até a parada é portanto

```
n*tau_d
```

1204.89596438211

Derivando a fórmula do deslocamento em vibração livre amortecida em relação ao tempo, temos

```
var('phi, X, w_n, w_d, z')
y(t)=X*e^(-z*w_n*t)*cos(w_d*t-phi)
v(t)=y.diff(t)
show(y)
show(v)
```

$$t \mapsto X \cos(tw_d - \phi) e^{(-tw_n z)}$$

$$t \mapsto -Xw_n z \cos(tw_d - \phi) e^{(-tw_n z)} - Xw_d e^{(-tw_n z)} \sin(tw_d - \phi)$$

A parte mais baixa da trajetória vai ocorrer na metade do 11º ciclo. O tempo decorrido é então

```
t_f=10.5*tau_d
show(t_f)
```

40.6797672862127

A amplitude  $X$  é dada por, considerando que a velocidade inicial é nula

```
x0 = 5
X = x0*omega_n/omega_d
show(X)
```

5.00004769483207

Que claramente tem que ser muito próxima do deslocamento inicial já que o amortecimento é tão baixo. O ângulo de fase é

```
phi=arctan(zeta*omega_n/omega_d)
show(phi)
```

0.00436781194401180

Que é praticamente zero, novamente devido ao amortecimento baixo e a inexistência de velocidade inicial. Assim, vamos aproximar para

```
v_c=v(X=5, phi=0, w_n=omega_n, w_d=omega_d, z=zeta)
show(v_c)
```

$$-0.0354182749738295 \cos(1.62177539662931 t) e^{(-0.00708365499476591 t)} - 8.1$$

A velocidade é então

$v_c(t=t_f)$

0.0265509755902537

Em graus por segundo.

# Vibrações 2ºEE Questão 02

## 1º Semestre 2015, 01/07/2015

### Questão 2

Do enunciado, a rigidez da cadeira e a frequência natural do sistema cadeira operador são

```
m=80
g=9.8
delta_st=0.001
k=m*g/delta_st
show(k)
omega_n=sqrt(k/m)
show(omega_n)
```

784000.000000000

98.9949493661167

O período da função dente de serra dada no enunciado é

```
T=0.125
```

Temos também que a razão de amortecimento é dada como (para facilitar, considerada constante para todas as frequências.)

```
var('zeta')
zeta=0.05
```

A série de Fourier para a função dada tem a forma



$$f(t) = 0.5 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \left( \frac{n\pi t}{T} \right) \right)$$

As frequências de excitação então são claramente dadas por

```
var('n')
omega_f(n)=n*N(pi)/T
show(omega_f)
```

$$n \mapsto 25.1327412287183 n$$

As oito primeiras frequências de excitação são

```
o1=[omega_f(n+1) for n in range(8)]
show(o1)
```

$$[25.1327412287183, 50.2654824574367, 75.3982236861550, 100.5309649148$$

A quarta frequência está bem próxima da frequência natural do sistema! Possivelmente teremos um problema de ressonância aí!

Vamos precisar também da razão de frequências do primeiro harmônico,

```
r=o1[0]/omega_n
show(r)
```

$$0.253879025037621$$

Como eu só estou preocupado com a amplitude de vibração, o termo  $a_o/(2\kappa)$  da resposta não interessa. Além disto, temos uma série apenas em senos, de forma que a parte da resposta que interessa são os coeficientes dos termos em senos. Vamos verificar a amplitude da resposta a cada harmônico forçante.

É importante lembrar que a fórmula dada para a resposta para uma série de Fourier foi obtida com a aplicação de uma *força*! No caso, temos um

problema com deslocamento da base. Um problema com deslocamento na base de amplitude  $Y$  corresponde a um problema de força com amplitude  $Y\sqrt{k^2 + c^2\omega^2}$ .

Isto pode ser visto comparando as fórmulas dadas para a transmissibilidade de deslocamento e fator de amplificação. Temos que trocar o deslocamento estático  $b_j/\kappa$  pela amplitude de deslocamento  $Y_j\sqrt{1 + (2\zeta jr)^2}$ .

A fórmula dos coeficientes da série da resposta é então

```
var('Y_j')
c(j) = Y_j*sqrt( (1+(2*zeta*j*r)^2) / ((1-j^2*r^2)^2+
(2*zeta*j*r)^2))
show(c)
```

$$j \mapsto Y_j \sqrt{\frac{0.000644545593540529 j^2 + 1}{(-0.0644545593540529 j^2 + 1)^2 + 0.000644545593540529 j^2}}$$

Os oito primeiros coeficientes da série de Fourier da resposta, em função da amplitude de deslocamento do harmônico correspondente, são então

```
cs=[c(j+1) for j in range(8)]
show(cs)
```

$$[1.06884610147927 Y_j, 1.34596838164302 Y_j, 2.35002177096083 Y_j, 9.45947 Y_j, \dots]$$

Dá para perceber claramente o efeito da ressonância no quarto harmônico!

As amplitudes de deslocamento são (em milímetros)

```
Y(n)=0.5/(N(pi)*n)
Ys=[Y(n+1) for n in range(8)]
show(Ys)
```

$$[0.159154943091895, 0.0795774715459477, 0.0530516476972984, 0.0397887 Y_j, \dots]$$

Substituindo estes valores na série de deslocamentos na resposta, temos as amplitudes de vibração correspondentes a cada harmônico.

```
As=[cs[i].substitute(Y_j=Ys[i]) for i in range(8)]  
show(As)
```

[\[0.170112140454927, 0.107108760591943, 0.124672527073996, 0.376380488](#)

Todas as amplitudes estão abaixo de 0.5 mm então em princípio não há problema de vibração. É claro que como a soma das amplitudes das respostas dos primeiros harmônicos está muito próxima do limite, este problema mereceria uma investigação mais cuidadosa.

## Observação

Este problema exige uma certa flexibilidade intelectual e um pouco de contas numéricas. É obvio que eu não espero que ninguém faça conta com 8 harmônicos na hora da prova. A nota será dada considerando o quão consistente e razoável foi a resolução do problema.

# Vibrações 2º EE Questão 03

1º Semestre de 2015, 01/07/2015

## Questão 3

É dado no enunciado que o sistema está em ressonância, e os dados numéricos são os seguintes.

```
M=300
m=15
k=6500
z=0.04
```

A frequência natural é

```
omega_n=N(sqrt(k/M))
show(omega_n)
```

4.65474668125631

Na ressonância,  $r = 1$ , e o módulo da função resposta de frequência complexa é

```
var('zeta, r')
Hiw = 1/sqrt((1-r^2)^2+(2*zeta*r)^2)
show(Hiw)
```

$$\frac{1}{\sqrt{4r^2\zeta^2 + (r^2 - 1)^2}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2}}$$

No caso

```
H=Hiw(r=1, zeta=z)
show(H)
```

12.50000000000000

Da fórmula do desbalanceamento, para  $r = 1$

```
var('e, x')
eq= (M * x)/(m*e)==H
show(eq)
s=solve(eq,e)
show(s)
e=s[0].rhs()
show(e)
```

$$\frac{20x}{e} = 12.50000000000000$$

$$\left[ e = \frac{8}{5} x \right]$$

$$\frac{8}{5} x$$

A excentricidade é então

```
ex= e(x=0.05)
show(ex)
```

0.0800000000000000

A amplitude de vibração é proporcional ao produto  $me$ , então qualquer combinação de massa e excentricidade, colocada diametralmente oposta

à massa desbalanceada, cujo produto seja igual a

0.6000000000000000

diminui a amplitude à metade.