Vibrações Mecânicas

Aula06 – Vibração Livre: sistemas com 1 GL

Ramiro Brito Willmersdorf
ramiro@willmersdorf.net

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco

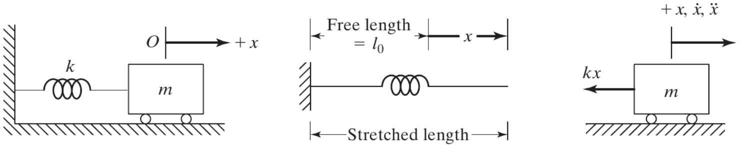
2018.2

Modelo 1 GL – Vibração Livre Não Amortecida

- Uma única coordenada generalizada é suficiente para descrever a configuração do sistema;
- Não há ação de forças externas;
- Não há dissipação de energia mecânica, energia total permanece constante;
- A amplitude de movimento é portanto constante ao longo do tempo;

Modelo 1 GL

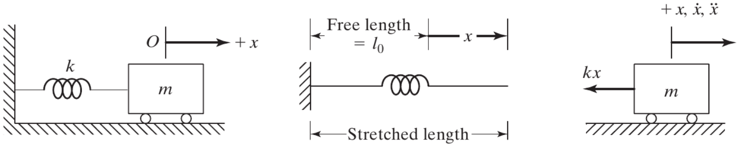
Modelo representativo de todos os sistemas com 1 GL.



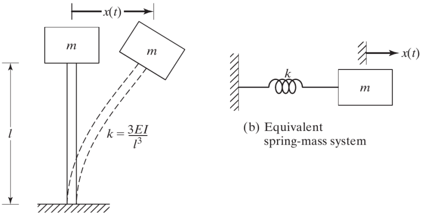
(a) (b) (c)

Modelo 1 GL

Modelo representativo de todos os sistemas com 1 GL.



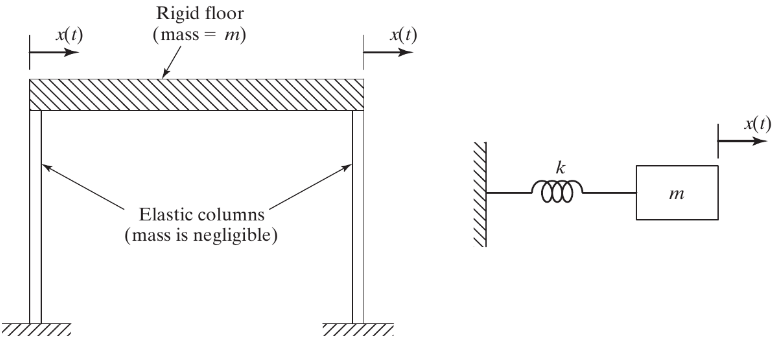
(a)
(b)
(c)



(a) Idealization of the tall structure

(b) Equivalent spring-mass system

Modelo 1 GL



(a) Building frame

(b) Equivalent spring-mass system

Modelo 1 GL

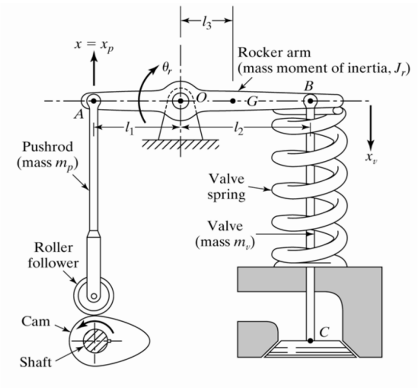


Figure 1.32

Cam-follower system.

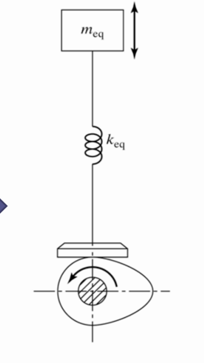
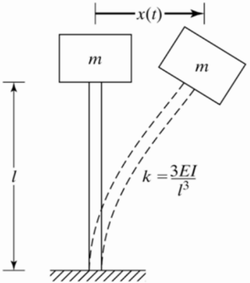


Figure 2.2

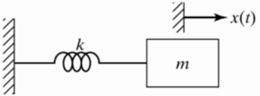
Equivalent spring-mass system for the camfollower system of Fig. 1.32.

Modelo 1 GL

Figure 2.3
The space needle (structure).



(a) Idealization of the tall structure



(b) Equivalent spring-mass system

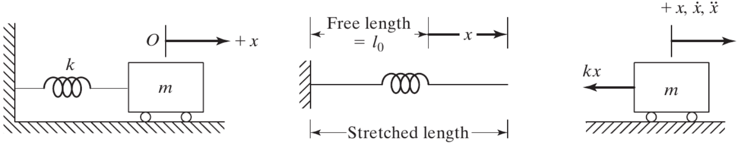
Equação de Movimento

Aplicação da segunda lei de Newton:

- Escolher a coordenada generalizada que descreve o sistema;
- Determinar a configuração de equilíbrio estático do sistema, tomar esta posição como origem da coordenada generalizada;
- Desenhar um DCL para a massa quando o sistema tem um deslocamento e velocidades positivas;
- Aplicar a segunda lei de Newton;

Equação de Movimento

Usando a 2ª Lei de Newton



(a) (b) (c)

$$-\kappa x = m\ddot{x},$$

ou

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Equação de Movimento

Usando o princípio de D'Alembert

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

ou

$$\sum \vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}$$

ou

$$\sum \vec{F} + \vec{F}_i = \vec{0}$$

No caso,

$$-\kappa x - m\ddot{x} = 0$$

ou

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0$$

Equação de Movimento

Usando o princípio de D'Alembert

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

ou

$$\sum \vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}$$

ou

$$\sum \vec{F} + \vec{F}_i = \vec{0}$$

No caso,

$$-\kappa x - m\ddot{x} = 0$$

ou

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0$$

Princípio dos Trabalhos Virtuais

Princípio dos Trabalhos Virtuais

Se um sistema que está em equilíbrio sob à ação de um conjunto de forças é submetido a um deslocamento virtual, o trabalho virtual total realizado por estas forças é nulo.

Deslocamento Virtual

Um deslocamento virtual é um deslocamento infinitesimal, imaginário, compatível com as restrições cinemáticas do problema.

Princípio dos Trabalhos Virtuais

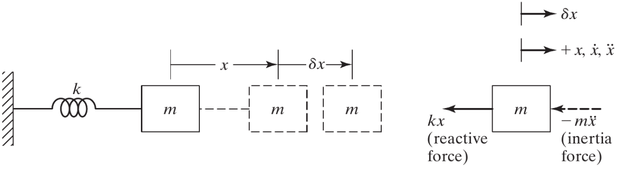
Princípio dos Trabalhos Virtuais

Se um sistema que está em equilíbrio sob à ação de um conjunto de forças é submetido a um deslocamento virtual, o trabalho virtual total realizado por estas forças é nulo.

Deslocamento Virtual

Um deslocamento virtual é um deslocamento infinitesimal, imaginário, compatível com as restrições cinemáticas do problema.

Princípio dos Trabalhos Virtuais



(a) Mass under a displacement x

(b) Free-body diagram

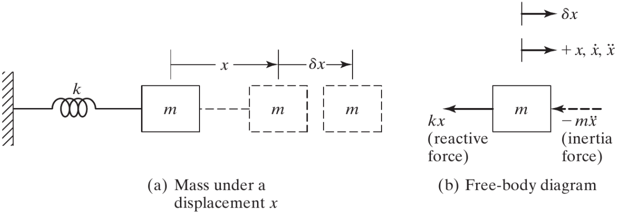
Trabalho virtual da força da mola: $\delta W_s = -\kappa x \delta x$
Trabalho virtual da força de inércia: $\delta W_i = -m\ddot{x}\delta x$
Igualando o trabalho virtual total a zero, temos

$$-\kappa x \delta x - m\ddot{x}\delta x = 0$$

o que leva a

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Princípio dos Trabalhos Virtuais



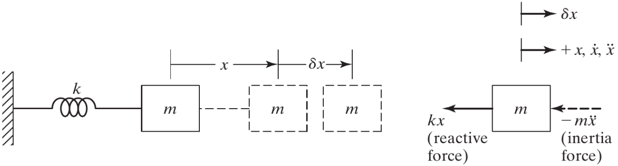
Trabalho virtual da força da mola: $\delta W_s = -\kappa x \delta x$
Trabalho virtual da força de inércia: $\delta W_i = -m\ddot{x}\delta x$
Igualando o trabalho virtual total a zero, temos

$$-\kappa x \delta x - m\ddot{x}\delta x = 0$$

o que leva a

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Princípio dos Trabalhos Virtuais



(a) Mass under a displacement x

(b) Free-body diagram

Trabalho virtual da força da mola: $\delta W_s = -\kappa x \delta x$
Trabalho virtual da força de inércia: $\delta W_i = -m\ddot{x}\delta x$
Igualando o trabalho virtual total a zero, temos

$$-\kappa x \delta x - m\ddot{x}\delta x = 0$$

o que leva a

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Conservação de Energia

Usando a conservação da energia mecânica

$$T + U = \mathrm{cte},$$

o que implica em

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

mas,

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad \text{e} \qquad U = \frac{1}{2}\kappa x^2$$

portanto,

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Conservação de Energia

Usando a conservação da energia mecânica

$$T + U = \text{cte},$$

o que implica em

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

mas,

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \qquad \text{e} \qquad U = \frac{1}{2} \kappa x^2$$

portanto,

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Conservação de Energia

Usando a conservação da energia mecânica

$$T + U = \mathrm{cte},$$

o que implica em

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

mas,

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad \text{e} \qquad U = \frac{1}{2}\kappa x^2$$

portanto,

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Conservação de Energia

Usando a conservação da energia mecânica

$$T + U = \mathrm{cte},$$

o que implica em

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

mas,

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \qquad \text{e} \qquad U = \frac{1}{2}\kappa x^2$$

portanto,

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0.$$

Sistemas Rotativos

Quando a inércia é rotacional, a segunda lei de Newton é

$$\sum \vec{M} = J\ddot{\vec{\theta}}$$

A equação de movimento, em termos do ângulo de rotação a partir de um eixo tomado como origem, é

$$J\ddot{\theta} + \kappa_t \theta = 0$$

Sistemas Rotativos

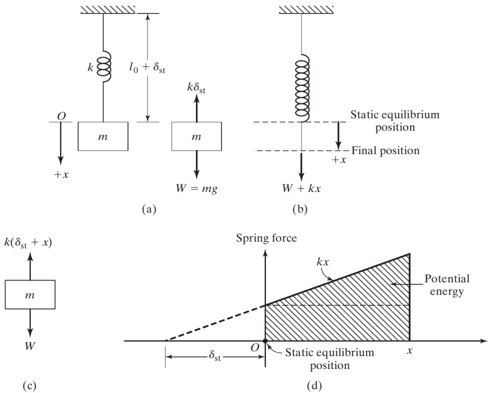
Quando a inércia é rotacional, a segunda lei de Newton é

$$\sum \vec{M} = J\ddot{\vec{\theta}}$$

A equação de movimento, em termos do ângulo de rotação a partir de um eixo tomado como origem, é

$$J\ddot{\theta} + \kappa_t \theta = 0$$

Efeito do Peso



O peso é

$$W = mg = \kappa\delta_{st}.$$

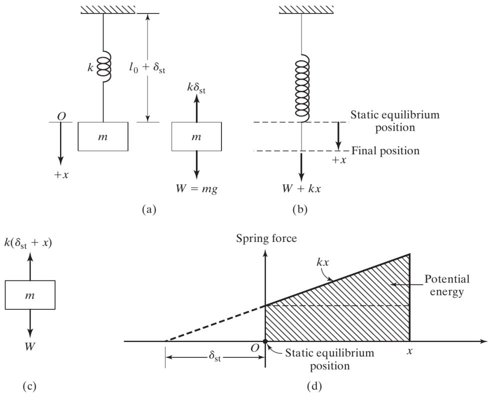
Para um deslocamento x, a partir da posição de equilíbrio,

$$m\ddot{x} = -\kappa(x + \delta_{st}) + W.$$

Como $W = \kappa\delta_{st}$,

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0$$

Efeito do Peso



O peso é

$$W = mg = \kappa\delta_{\text{st}}.$$

Para um deslocamento x, a partir da posição de equilíbrio,

$$m\ddot{x} = -\kappa(x + \delta_{\text{st}}) + W.$$

Como $W = \kappa\delta_{\text{st}}$,

$$m\ddot{x} + \kappa x = 0$$

Solução de $m\ddot{x} + \kappa x = 0$

Supondo que a solução seja da forma:

$$x(t) = Ce^{st},$$

temos

$$C(ms^2 + \kappa)e^{st} = 0.$$

Assim,

$$ms^2 + \kappa = 0,$$

o que leva a

$$s = \pm\left(-\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm i\omega_n.$$

onde

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Solução de $m\ddot{x} + \kappa x = 0$

Supondo que a solução seja da forma:

$$x(t) = Ce^{st},$$

temos

$$C(ms^2 + \kappa)e^{st} = 0.$$

Assim,

$$ms^2 + \kappa = 0,$$

o que leva a

$$s = \pm\left(-\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm i\omega_n.$$

onde

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Solução de $m\ddot{x} + \kappa x = 0$

Supondo que a solução seja da forma:

$$x(t) = Ce^{st},$$

temos

$$C(ms^2 + \kappa)e^{st} = 0.$$

Assim,

$$ms^2 + \kappa = 0,$$

o que leva a

$$s = \pm\left(-\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = \pm i\omega_n.$$

onde

$$\omega_n = \left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Solução de $m\ddot{x} + \kappa x = 0$

A equação

$$ms^2 + \kappa = 0$$

é a equação característica da equação diferencial de movimento.

As raízes desta equação,

$$s_1 = i\omega_n, \quad s_2 = -i\omega_n, \quad \text{com} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

são os autovalores ou valores característicos do problema.

Solução de $m\ddot{x} + \kappa x = 0$

A equação

$$ms^2 + \kappa = 0$$

é a equação característica da equação diferencial de movimento.

As raízes desta equação,

$$s_1 = i\omega_n, \quad s_2 = -i\omega_n, \quad \text{com} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

são os autovalores ou valores característicos do problema.

Solução Geral

As duas raízes satisfazem a equação, portanto a solução geral é:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t}.$$

onde C_1 e C_2 são constantes complexas (e conjugadas)!
Reescrevendo,

$$x(t) = (a + bi)e^{i\omega_n t} + (a - bi)e^{-i\omega_n t}.$$

Como a equação é de 2ª ordem, temos duas constantes a determinar a partir das condições iniciais.

Solução Geral

As duas raízes satisfazem a equação, portanto a solução geral é:

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_n t} + C_2 e^{-i\omega_n t}.$$

onde C_1 e C_2 são constantes complexas (e conjugadas)!
Reescrevendo,

$$x(t) = (a + bi)e^{i\omega_n t} + (a - bi)e^{-i\omega_n t}.$$

Como a equação é de 2ª ordem, temos duas constantes a determinar a partir das condições iniciais.

Desenvolvendo

Lembrando que

$$e^{\pm i\omega_n t} = \cos\omega_n t \pm i\sin\omega_n t$$

A solução geral torna-se

$$x(t) = (a+bi)(\cos\omega_n t + i\sin\omega_n t) + (a-bi)(\cos\omega_n t - i\sin\omega_n t),$$

que pode ser reescrito para

$$x(t) = A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t,$$

com

$$A_1 = 2a, \qquad A_2 = -2b.$$

A_1 e A_2 são as constantes a determinar.

Desenvolvendo

Lembrando que

$$e^{\pm i\omega_n t} = \cos\omega_n t \pm i\sin\omega_n t$$

A solução geral torna-se

$$x(t) = (a + bi)(\cos\omega_n t + i\sin\omega_n t) + (a - bi)(\cos\omega_n t - i\sin\omega_n t),$$

que pode ser reescrito para

$$x(t) = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t,$$

com

$$A_1 = 2a, \qquad A_2 = -2b.$$

A_1 e A_2 são as constantes a determinar.

Desenvolvendo

Lembrando que

$$e^{\pm i\omega_n t} = \cos\omega_n t \pm i\sin\omega_n t$$

A solução geral torna-se

$$x(t) = (a+bi)(\cos\omega_n t + i\sin\omega_n t) + (a-bi)(\cos\omega_n t - i\sin\omega_n t),$$

que pode ser reescrito para

$$x(t) = A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t,$$

com

$$A_1 = 2a, \qquad A_2 = -2b.$$

A_1 e A_2 são as constantes a determinar.

Condições Iniciais

As constantes A_1 e A_2 devem ser determinadas a partir das condições iniciais do problema.
Para $t = 0$,

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Inserindo em

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t,$$

e

$$\dot{x}(t) = -A_1 \omega_n \sin \omega_n t + A_2 \omega_n \cos \omega_n t,$$

temos

$$A_1 = x_0, \qquad A_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}.$$

Condições Iniciais

As constantes A_1 e A_2 devem ser determinadas a partir das condições iniciais do problema.
Para $t = 0$,

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Inserindo em

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t,$$

e

$$\dot{x}(t) = -A_1 \omega_n \sin \omega_n t + A_2 \omega_n \cos \omega_n t,$$

temos

$$A_1 = x_0, \qquad A_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}.$$

Condições Iniciais

As constantes A_1 e A_2 devem ser determinadas a partir das condições iniciais do problema.
Para $t = 0$,

$$x(0) = x_0, \qquad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

Inserindo em

$$x(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t,$$

e

$$\dot{x}(t) = -A_1 \omega_n \sin \omega_n t + A_2 \omega_n \cos \omega_n t,$$

temos

$$A_1 = x_0, \qquad A_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}.$$

Solução para Vibração Livre Não Amortecida

A solução é então

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t,$$

para todo e qualquer sistema linear não amortecido com 1 GL, agora e para todo o sempre.

Se o sistema for rotativo,

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{\kappa_t}{J}}.$$

Solução para Vibração Livre Não Amortecida

A solução é então

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t,$$

para todo e qualquer sistema linear não amortecido com 1 GL, agora e para todo o sempre.

Se o sistema for rotativo,

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{\kappa_t}{J}}.$$

Solução para Vibração Livre Não Amortecida

O deslocamento (generalizado) da massa (generalizada),

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t,$$

é claramente dado pela soma de duas funções harmônicas de mesma frequência.
É portanto também uma função harmônica, com frequência angular

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\kappa}{m}},$$

que é denominada frequência natural do sistema.
Este sistema é chamado de oscilador harmônico.