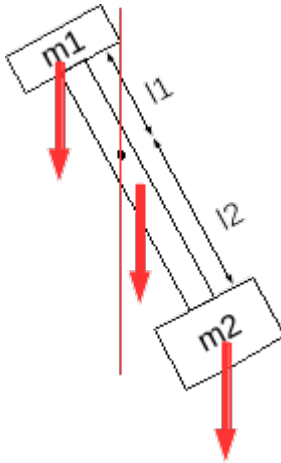


2016.2-Exame_final

Questão 1



Vamos considerar, é claro, pequenos deslocamentos e rotações, e para simplificar, considerar que as massas estão concentradas nas extremidades das das hastes do pêndulo. Na figura estão marcados os pesos de cada corpo, que são os responsáveis pela energia potencial, ou, em outras palavras, pela "rigidez" do sistema.

De acordo com o enunciado, precisamos igualar a energia cinética máxima com a energia potência máxima, considerando é claro movimento harmônico, $\theta(t) = \Theta \cos \omega t$.

A energia cinética total é a soma das energias cinéticas de todos os corpos, $T = T_{m_1} + T_{m_2} + T_b$. É claro que

$T_{m_1} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\theta} l_1)^2, T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 (\dot{\theta} l_2)^2$. A energia cinética do braço pode ser calculada de várias maneiras. A mais fácil me parece ser somar a energia cinética da translação do centro de massa com a energia cinética de rotação da barra, isto é $T_b = \frac{1}{2} m_b (e \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J_b \dot{\theta}^2$, onde e é a distância do centro de gravidade da barra ao ponto de apoio e J_b é o momento de inércia de massa da barra em relação ao centro de gravidade.

A energia cinética total é então $T = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_b e^2 + J_b\}$. A energia cinética máxima é $T_{\max} = \frac{1}{2} (\Theta \omega)^2 \{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_b e^2 + J_b\}$.

A energia potencial máxima, para uma rotação θ , é dada pelo aumento da energia potencial devido à elevação da massa m_2 e do centro de massa da barra, menos a dedução devida ao abaixamento da massa m_1 . A figura ao lado ajuda a calcular a variação da energia potencial. Suponha que o comprimento da barra seja l e que haja uma massa concentrada m em sua extremidade, e que a barra gira de um ângulo θ , pequeno é claro.

A extremidade da barra percorre um arco de círculo de comprimento $l\theta$, mas, com θ é pequeno, podemos aproximar o arco de círculo por uma linha reta. Fica claro então que a extremidade da barra eleva-se de uma altura igual a $l\theta \sin \theta$, mas como θ é pequeno, $\sin \theta \approx \theta$, então $\Delta h = l\theta^2$.

A variação da energia potencial para uma massa na extremidade da barra é então $mgl\theta^2$. Vamos aplicar isto a ambas as massas e ao centro de gravidade da barra. A

energia potencial para o sistema completo é então

$U = -m_1 g l_1 \theta^2 + m_2 g l_2 \theta^2 + m_b g e \theta^2$. A energia potencial máxima é então $U_{\max} = \Theta^2 (-m_1 g l_1 + m_2 g l_2 + m_b g e)$.

Igualando as energias máximas,

$$\frac{1}{2} \omega^2 \{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_b e^2 + J_b\} = -m_1 g l_1 + m_2 g l_2 + m_b g e,$$

ou

$$\omega = \left(\frac{2g(-m_1 l_1 + m_2 l_2 + m_b e)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_b e^2 + J_b} \right)^{\frac{1}{2}},$$

Podemos então colocar os valores numéricos,

```
g = 9.8
mb=3
m1=1
m2=2
l1=0.1
l2=0.25
lb=l1+l2
```

Precisamos calcular também e e J_b . O comprimento total da barra é $l = l_1 + l_2$ e a distância do centro de massa à uma extremidade é igual a $(l_1 + l_2)/2$. A distância e é então $(l_1 + l_2)/2 - l_1 = (l_2 - l_1)/2$.

O momento de inércia da barra em relação ao seu centro de massa é $J_b = m_b l_b^2 / 12$.

```
e = (l2-l1)/2
Jb = mb*lb^2/12.0
show((e, Jb))
```

[\(0.0750000000000000, 0.0306250000000000\)](#)

```
num=2*g*(-m1*l1+m2*l2+mb*e)
den=m1*l1^2 + m2*l2+ mb*e^2 + Jb
wn = sqrt(num/den)
show(wn)
```

[4.68754671127698](#)

A frequência natural e o período são então

```
fn = wn/(2*N(pi))  
taun = 1/fn  
show((taun, fn))
```

(1.34039950835347, 0.746046230073888)

Questão 2

Como a frequência fundamental de vibração transversal é muito menor do que a frequência natural de vibração longitudinal, vamos nos preocupar apenas com a vibração transversal. De acordo com a tabela dada no formulário, que vale tanto para vibração transversal de fios, vibração longitudinal de barras e vibração em torção de eixos, que para um fio com as duas extremidades fixas, as frequências naturais são dadas por

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

onde c , para um fio em tração em vibração transversal é dado por (também do formulário $c = \sqrt{P/\rho}$, e ρ é a densidade **linear** do fio).

A densidade linear do fio pode ser calculada como $\rho = A\rho_v$, onde A é a área da seção transversal e ρ_v é a densidade volumétrica, que é dada no enunciado. Obviamente, a frequência natural cresce com o aumento da tração no fio, e esta vai ser limitada pelo limite de escoamento do fio. Usando um fator de segurança f , a força máxima admissível será então $P_{\max} = \sigma_y A / f$.

No caso então,

```
d = 0.00005  
A = N(pi)*d^2/4  
f = 2.0  
sy = 660e6  
Pmax = sy*A/f  
show((Pmax, A))
```

(0.647953484802895, 1.96349540849362 × 10⁻⁹)

A densidade linear e a velocidade do som no fio são

```
rhov = 7700  
rho = A*rhov  
c = sqrt(Pmax/rho)
```

```
show(c)
```

207.019667802706

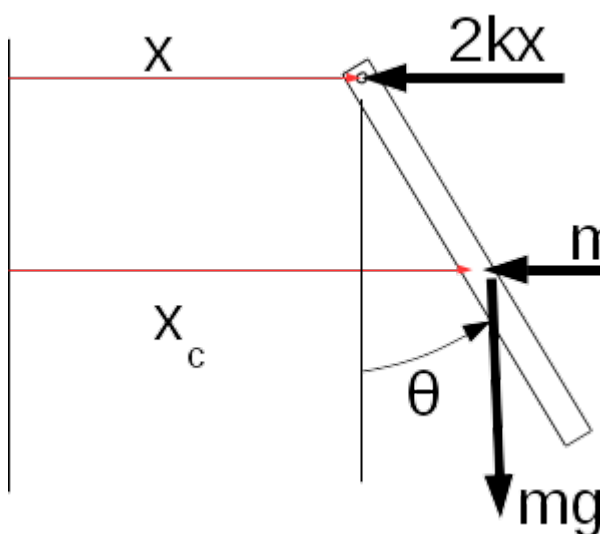
A frequência fundamental correspondente é então

```
l = 0.030  
w1 = N(pi)*c/l  
f1 = w1/(N(pi)*2)  
show((f1, w1))
```

(3450.32779671177, 21679.0489172527)

Aproximadamente 3,45 kilohertz.

Questão 3



Vamos como sempre considerar pequenos deslocamentos e rotações. (obs: acabei de ver que esqueci de colocar a reação vertical no pino, que é igual ao peso; como vamos tomar o equilíbrio de momentos em relação ao pino, isto não causa problema na resolução).

Vamos tomar como coordenadas generalizadas x e θ . As equações de movimento são então, $\sum F_x = ma$,

$$m\ddot{x}_c = -2kx,$$

onde x_c é a posição horizontal do centro de gravidade, e $\sum M_0 = J_0\ddot{\theta}$,

$$-m\ddot{x}_c \frac{l}{2} - mg \frac{l}{2} \sin \theta = J_0 \ddot{\theta} = \left(J_{cg} + m \frac{l^2}{4} \right) \ddot{\theta},$$

onde O é o pino da barra, e usamos o teorema dos eixos paralelos no lado direito da equação.

Claramente, $x_c = x + \frac{l}{2} \theta$, e, para pequenos ângulos, $\sin \theta \approx \theta$, então temos,

$$m(\ddot{x} + \frac{l}{2}\ddot{\theta}) + 2kx = 0$$

e

$$m(\ddot{x} + \frac{l}{2}\ddot{\theta})\frac{l}{2} + mg\frac{l}{2}\theta + m\frac{l^2}{4}\ddot{\theta} + J_{cg}\ddot{\theta} = 0.$$

Reorganizando as equações,

$$m\ddot{x} + m\frac{l}{2}\ddot{\theta} + 2kx = 0,$$

e

$$m\frac{l}{2}\ddot{x} + m\frac{l^2}{4}\ddot{\theta} + mg\frac{l}{2}\theta + m\frac{l^2}{4}\ddot{\theta} + J_{cg}\ddot{\theta} = 0.$$

que pode ser mais rearrumando na forma de um sistema de equações,

$$\begin{cases} m\ddot{x} + m\frac{l}{2}\ddot{\theta} + 2kx = 0 \\ m\frac{l}{2}\ddot{x} + (m\frac{l^2}{2} + J_{cg})\ddot{\theta} + mg\frac{l}{2}\theta = 0 \end{cases}$$

Para uma barra homogênea de seção constante, $J_{cg} = ml^2/12$, então

$$\begin{cases} m\ddot{x} + m\frac{l}{2}\ddot{\theta} + 2kx = 0 \\ m\frac{l}{2}\ddot{x} + (m\frac{l^2}{2} + m\frac{l^2}{12})\ddot{\theta} + mg\frac{l}{2}\theta = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} m\ddot{x} + m\frac{l}{2}\ddot{\theta} + 2kx = 0 \\ m\frac{l}{2}\ddot{x} + m\frac{7l^2}{12}\ddot{\theta} + mg\frac{l}{2}\theta = 0 \end{cases}$$

Percebam que na equação de momentos, a massa é irrelevante, como para um pêndulo simples! Temos então

$$\begin{cases} m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + 2kx = 0 \\ \frac{l}{2}\ddot{x} + \frac{7l^2}{12}\ddot{\theta} + \frac{gl}{2}\theta = 0 \end{cases}$$

Percebam que o sistema tem acoplamento dinâmico, mas não tem acoplamento elástico! Na forma matricial, e eliminando um l da segunda equação, temos

$$\begin{bmatrix} m & ml \\ 1/2 & 7l/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & g/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nesta última equação também podemos eliminar a constante $1/2$.

$$\begin{bmatrix} m & ml \\ 1 & 7l/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Supondo que as soluções sejam harmônicas e em fase, $x(t) = X \cos \omega t + \phi$, e $\theta(t) = \Theta \cos \omega t + \phi$, ficamos com

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} m & ml \\ 1 & 7l/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou

$$\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -\omega^2 ml \\ -\omega^2 & g - \omega^2 7l/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Que representa um sistema homogêneo, que tem solução não trivial apenas quando o determinante do sistema é nulo,

$$(2k - \omega^2 m)(g - \omega^2 7l/6) - \omega^2(\omega^2 ml) = 0,$$

ou

$$2kg - 14k\omega^2 l/6 - \omega^2 mg + 7\omega^4 ml/6 - \omega^4 ml = 0,$$

ou

$$\omega^4 ml/6 - \omega^2(mg + 7l/6) + 2kg,$$

que é uma equação biquadrática cujas raízes são

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(mg + 7l/6) \pm \sqrt{(mg + 7l/6)^2 - 4(ml/6)(2kg)}}{ml/3}$$

Não dá para simplificar isto a menos que exista uma relação entre k , m , l ou g . Só para deixar o último termo do discriminante mais bonitinho,

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(mg + 7l/6) \pm \sqrt{(mg + 7l/6)^2 - 4mlkg/3}}{ml/3}.$$

Os modos normais podem ser calculados a partir do sistema de equações, substituindo

ω_1^2 e ω_2^2 na primeira ou na segunda equação do sistema,

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{\Theta^{(1)}}{X^{(1)}} = \frac{2k - \omega_1^2 m}{\omega_1^2 m l}$$

e

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{\Theta^{(2)}}{X^{(2)}} = \frac{2k - \omega_2^2 m}{\omega_2^2 m l}.$$

Questão 4

Este é claramente um problema de vibração forçada com deslocamento da base. O movimento da base é dado em termos da aceleração, como é típico em aplicações sísmicas, mas a fórmula que temos no formulário é aplicável para um deslocamento harmônico dado. Felizmente, como a aceleração é harmônica, $\ddot{x}(t) = A \sin \omega t$, o deslocamento pode ser calculado facilmente, integrando duas vezes a aceleração e admitindo as condições iniciais nulas para o deslocamento e velocidade, o que é muito razoável já que estamos interessados apenas no regime permanente.

O deslocamento da base é então

$$x(t) = -\frac{A}{\omega^2} \sin \omega t,$$

e, como estamos interessados no regime permanente e a função é harmônica, podemos considerar

$$x(t) = \frac{A}{\omega^2} \sin \omega t.$$

Para calcular a resposta, vamos precisar do amortecimento, e vamos usar a fórmula do decremento logarítmico para calcular a razão de amortecimento.

Do formulário,

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{x_1}{x_{n+1}}.$$

```
n = 100.0
x1 = 1.0
xn = 0.2
delta = 1/n*ln(x1/xn)
```

```
show(delta)
```

0.0160943791243410

Do formulários, $\delta = 2\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}$, ou

$$\zeta = \sqrt{\frac{\delta^2}{4\pi^2 + \delta^2}},$$

no caso,

```
zeta = sqrt(delta^2/(4*N(pi)^2+delta^2))  
show(zeta)
```

0.00256149159031305

Como ζ é tão pequeno, poderíamos ter usado a fórmula simplificada, $\zeta = \delta/(2\pi)$,

```
show(delta/(2.0*N(pi)))
```

0.00256149999363388

Percebam que a diferença é completamente desprezível em termos de engenharia. Para o sistema dado, temos que

```
k = 0.1e6  
m = 2000  
wn = sqrt(k/m)  
show(wn)
```

7.07106781186548

A frequência de excitação é dada no enunciado, então a razão de frequências é

```
w = 25  
r = w/wn  
show(r)
```

3.53553390593274

Como esta razão é bem alta, esperamos uma amplitude de vibração baixa. A amplitude

do deslocamento da base é A/ω^2 , onde A é a amplitude da aceleração.

```
A = 0.100  
X = A/w^2  
show(X)
```

0.000160000000000000

A transmissibilidade de deslocamento é dada por

$$T_d = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

```
num = 1.0+(2*zeta*r)^2  
den = (1.0-r^2)^2 + (2*zeta*r)^2  
Td = sqrt(num/den)  
show(Td)
```

0.0869706762623757

A amplitude de deslocamento é então

```
Y = X*Td  
show(Y)
```

0.0000139153082019801

O ângulo de fase é dado por

$$\phi = \frac{2\zeta r}{1 - r^2},$$

então, no caso,

```
phi = (2.0*zeta*r)/(1.0-r^2)  
show(phi)
```

−0.00157499832475015

A fórmula do deslocamento é, portanto,

$$y(t) = 1.39 \times 10^{-6} \sin(25t - 1.57 \times 10^{-3}).$$

--