Vibrações Mecânicas

Aula07 – Vibração Livre não Amortecida

Ramiro Brito Willmersdorf
ramiro@willmersdorf.net

Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco

2018.2

Forma Alternativa

Conforme vimos anteriormente, fazendo

$$A_1 = A\cos\phi, \qquad A_2 = A\sin\phi,$$

escrevemos a soma das duas harmônicas como

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi),$$

com a amplitude

$$A = (A_1 + A_2)^{\frac{1}{2}} = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

e ângulo de fase

$$\phi = \arctan\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{x_0\omega_n}\right).$$

Outra Alternativa

Fazendo

$$A_1 = A_0 \sin \phi_0, \qquad A_2 = A_0 \cos \phi_0,$$

escrevemos a soma das duas harmônicas como

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_n t + \phi_0),$$

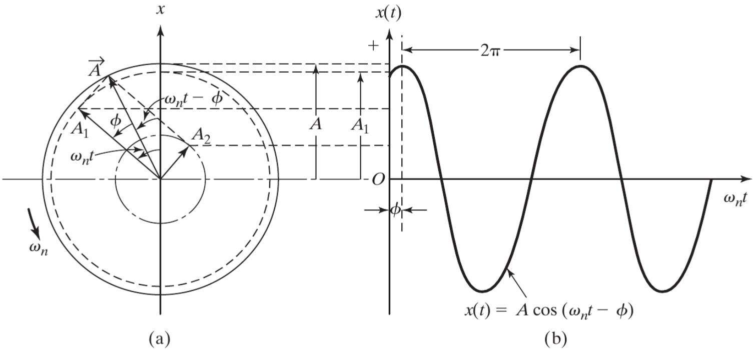
com a amplitude

$$A_0 = A = \left[x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

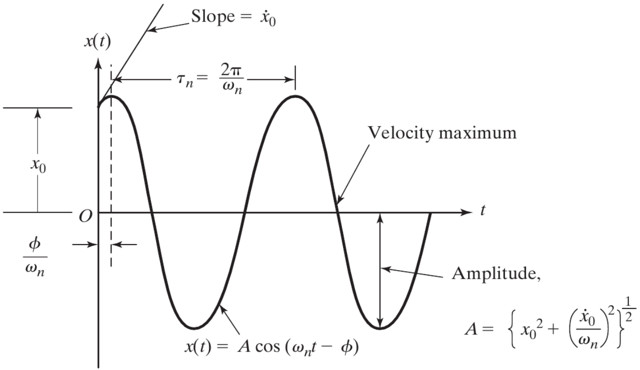
e ângulo de fase

$$\phi_0 = \arctan \left(\frac{A_1}{A_2} \right) = \arctan \left(\frac{x_0 \omega_n}{\dot{x}_0} \right).$$

Interpretação Gráfica



Interpretação Gráfica



Aspectos Interessantes

Para um sistema massa mola vertical,

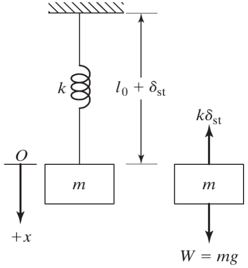
$$\omega_n = \sqrt{\frac{\kappa}{m}},$$

mas,

$$\kappa = \frac{W}{\delta_{st}} = \frac{mg}{\delta_{st}},$$

assim

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$$



A frequência e o período naturais são

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{g}{\delta_{st}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \tau_n = \frac{1}{f_n} = 2\pi\left(\frac{\delta_{st}}{g}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aspectos Interessantes

O deslocamento é

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi),$$

então a velocidade é

$$\dot{x}(t) = -\omega_n A \sin(\omega_n t - \phi) = \omega_n A \cos\left(\omega_n t - \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

e a aceleração

$$\ddot{x}(t) = -\omega_n^2 A \cos(\omega_n t - \phi) = \omega_n^2 A \cos\left(\omega_n t - \phi + \pi\right)$$

O que não deveria ser nenhuma supresa já que o deslocamento é harmônico.

Aspectos Interessantes

Como

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t,$$

se o deslocamento inicial é nulo, $x_0 = 0$,

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \cos\left(\omega_n t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t,$$

e se a velocidade inicial é nula, $\dot{x}_0 = 0$,

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t.$$

Plano de fase

Temos que

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi), \quad \text{ou} \quad \cos(\omega_n t - \phi) = \frac{x}{A},$$

e

$$\dot{x}(t) = -A\omega_n \sin(\omega_n t - \phi), \quad \text{ou} \quad \sin(\omega_n t - \phi) = -\frac{\dot{x}}{A\omega_n} = -\frac{y}{A}.$$

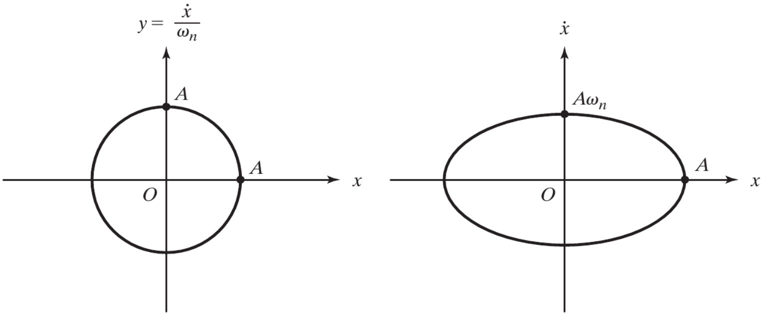
Elevando ao quadrado e somando

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2} = 1,$$

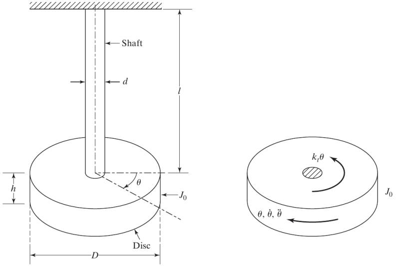
que é obviamente a equação de um círculo de raio A.

Plano de fase

Graficamente



Modelo



Da mecânica dos sólidos,

$$M_t = \frac{GI_0}{l}\theta.$$

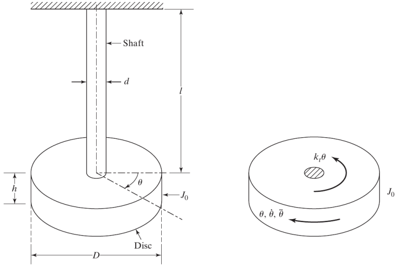
O momento polar de inércia é

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

e a rigidez em torção é portanto

$$\kappa_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GI_0}{l} = \frac{\pi G d^4}{32 l}$$

Modelo



Da mecânica dos sólidos,

$$M_t = \frac{GI_0}{l}\theta.$$

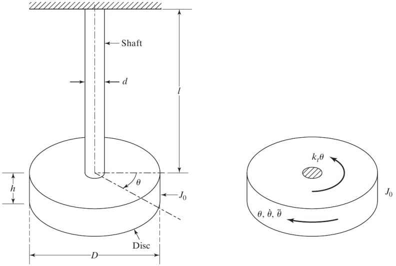
O momento polar de inércia é

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

e a rigidez em torção é portanto

$$\kappa_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GI_0}{l} = \frac{\pi G d^4}{32 l}$$

Modelo



Da mecânica dos sólidos,

$$M_t = \frac{GI_0}{l}\theta.$$

O momento polar de inércia é

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

e a rigidez em torção é portanto

$$\kappa_t = \frac{M_t}{\theta} = \frac{GI_0}{l} = \frac{\pi G d^4}{32 l}$$

Equação de Movimento

Repetindo o procedimento usado para sistemas translacionais, a equação de movimento é

$$J_0\ddot{\theta} + \kappa_t\theta = 0.$$

Por analogia,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\kappa_t}{J_0}}$$

e a frequência e o período naturais são

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa_t}{J_0}}, \qquad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{\kappa_t}}.$$

Equação de Movimento

Repetindo o procedimento usado para sistemas translacionais, a equação de movimento é

$$J_0\ddot{\theta} + \kappa_t\theta = 0.$$

Por analogia,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\kappa_t}{J_0}}$$

e a frequência e o período naturais são

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa_t}{J_0}}, \qquad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{\kappa_t}}.$$

Equação de Movimento

Repetindo o procedimento usado para sistemas translacionais, a equação de movimento é

$$J_0\ddot{\theta} + \kappa_t\theta = 0.$$

Por analogia,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\kappa_t}{J_0}}$$

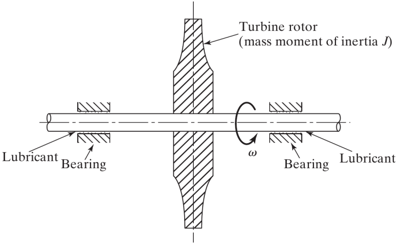
e a frequência e o período naturais são

$$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\kappa_t}{J_0}}, \qquad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{\kappa_t}}.$$

Observações

- Eixos de seção não circular devem ter seu momentos polares considerados corretametne!
- Para um disco circular com diâmetro D, altura h, e densidade mássica ρ,
$$J_0 = \frac{\rho h \pi D^4}{32} = \frac{mD^2}{8}.$$

Sistemas de 1ª Ordem



Os mancais de deslizamento causam atrito viscoso. A equação de movimento é

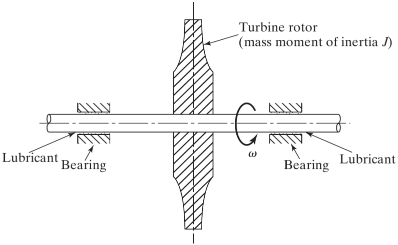
$$J\ddot{\theta} + c_t\dot{\theta} = 0,$$

ou

$$J\dot{\omega} + c_t\omega = 0.$$

Isto é uma EDO de ordem 1! Considerando uma velocidade inicial ω_0, podemos calcular o comportamento do sistema, que não é vibratório.

Sistemas de 1ª Ordem



Os mancais de deslizamento causam atrito viscoso. A equação de movimento é

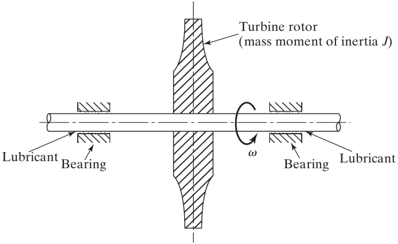
$$J\ddot{\theta} + c_t\dot{\theta} = 0,$$

ou

$$J\dot{\omega} + c_t\omega = 0.$$

Isto é uma EDO de ordem 1! Considerando uma velocidade inicial ω_0, podemos calcular o comportamento do sistema, que não é vibratório.

Sistemas de 1ª Ordem



Rotor in bearings

Os mancais de deslizamento causam atrito viscoso. A equação de movimento é

$$J\ddot{\theta} + c_t\dot{\theta} = 0,$$

ou

$$J\dot{\omega} + c_t\omega = 0.$$

Isto é uma EDO de ordem 1! Considerando uma velocidade inicial ω_0, podemos calcular o comportamento do sistema, que não é vibratório.

Solução

Supondo que a resposta seja

$$\omega(t) = Ae^{st},$$

para $t = 0$ temos

$$A = \omega(t = 0) = \omega_0,$$

e a solução proposta torna-se

$$\omega(t) = \omega_0 e^{st}.$$

Substituindo na equação de movimento ficamos com

$$\omega_0 e^{st}(Js + c_t) = 0.$$

Solução

Supondo que a resposta seja

$$\omega(t) = Ae^{st},$$

para $t = 0$ temos

$$A = \omega(t = 0) = \omega_0,$$

e a solução proposta torna-se

$$\omega(t) = \omega_0 e^{st}.$$

Substituindo na equação de movimento ficamos com

$$\omega_0 e^{st}(Js + c_t) = 0.$$

Solução

Supondo que a resposta seja

$$\omega(t) = Ae^{st},$$

para $t = 0$ temos

$$A = \omega(t = 0) = \omega_0,$$

e a solução proposta torna-se

$$\omega(t) = \omega_0 e^{st}.$$

Substituindo na equação de movimento ficamos com

$$\omega_0 e^{st}(Js + c_t) = 0.$$

Solução

Supondo que a resposta seja

$$\omega(t) = Ae^{st},$$

para $t = 0$ temos

$$A = \omega(t = 0) = \omega_0,$$

e a solução proposta torna-se

$$\omega(t) = \omega_0 e^{st}.$$

Substituindo na equação de movimento ficamos com

$$\omega_0 e^{st}(Js + c_t) = 0.$$

Solução

A equação característica do sistema é

$$Js + c_t = 0$$

cuja única raiz é

$$s = -\frac{c_t}{J},$$

e a solução da equação original é então

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{c_t}{J}t}.$$

Solução

A equação característica do sistema é

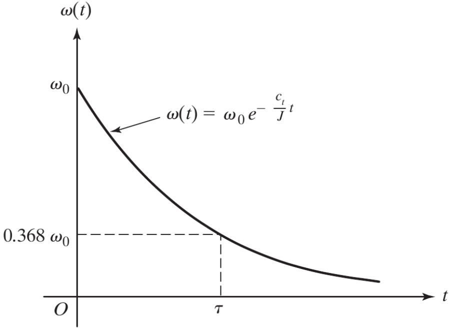
$$Js + c_t = 0$$

cuja única raiz é

$$s = -\frac{c_t}{J},$$

e a solução da equação original é então

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{c_t}{J}t}.$$



Variation of angular velocity

Constante Temporal

A constante temporal τ é definida como o valor do tempo para o qual o expoente da equação anterior é -1, ou

$$-\frac{c_t}{J}\tau = -1,$$

e assim

$$\tau = \frac{J}{c_t}.$$

Para $t = \tau$,

$$\omega(t) = \omega_0 e^{-\frac{c_t}{J}\tau} = \omega_0 e^{-1} = 0.368\omega_0$$

Método de Rayleigh da Energia

Para um sistema em vibração livre não amortecida, a energia mecânica total é conservada.
Em dois tempos distintos então,

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2.$$

Escolhendo os tempos onde a energia cinética e potencial são máximas,

$$T_1 + 0 = 0 + U_2,$$

ou

$$T_{max} = U_{max}.$$

Esta simples equação permite o cálculo direto da frequência natural do sistema.

Método de Rayleigh da Energia

Para um sistema em vibração livre não amortecida, a energia mecânica total é conservada.
Em dois tempos distintos então,

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2.$$

Escolhendo os tempos onde a energia cinética e potencial são máximas,

$$T_1 + 0 = 0 + U_2,$$

ou

$$T_{\text{max}} = U_{\text{max}}.$$

Esta simples equação permite o cálculo direto da frequência natural do sistema.

Método de Rayleigh da Energia

Para um sistema em vibração livre não amortecida, a energia mecânica total é conservada.
Em dois tempos distintos então,

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2.$$

Escolhendo os tempos onde a energia cinética e potencial são máximas,

$$T_1 + 0 = 0 + U_2,$$

ou

$$T_{\max} = U_{\max}.$$

Esta simples equação permite o cálculo direto da frequência natural do sistema.

Exemplo

Supondo que um oscilador harmônico vibre com uma frequência ω,

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi), \quad \dot{x}(t) = -\omega A\sin(\omega t - \phi),$$

O deslocamento máximo é A, e a velocidade máxima é ωA. As máximas energias potencial e cinética são, respectivamente,

$$U_{\max} = \frac{1}{2}kA^2, \quad T_{\max} = \frac{1}{2}m(\omega A)^2,$$

igualando as energias máximas, temos $kA^2 = m\omega^2 A^2$, ou

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

que é, claramente, a frequência natural do sistema.

Exemplo

Supondo que um oscilador harmônico vibre com uma frequência ω,

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi), \quad \dot{x}(t) = -\omega A\sin(\omega t - \phi),$$

O deslocamento máximo é A, e a velocidade máxima é ωA. As máximas energias potencial e cinética são, respectivamente,

$$U_{\max} = \frac{1}{2}kA^2, \quad T_{\max} = \frac{1}{2}m(\omega A)^2,$$

igualando as energias máximas, temos $kA^2 = m\omega^2 A^2$, ou

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

que é, claramente, a frequência natural do sistema.

Exemplo

Supondo que um oscilador harmônico vibre com uma frequência ω,

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi), \quad \dot{x}(t) = -\omega A\sin(\omega t - \phi),$$

O deslocamento máximo é A, e a velocidade máxima é ωA. As máximas energias potencial e cinética são, respectivamente,

$$U_{\text{max}} = \frac{1}{2}kA^2, \quad T_{\text{max}} = \frac{1}{2}m(\omega A)^2,$$

igualando as energias máximas, temos $kA^2 = m\omega^2A^2$, ou

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

que é, claramente, a frequência natural do sistema.

Exemplo

Supondo que um oscilador harmônico vibre com uma frequência ω,

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi), \quad \dot{x}(t) = -\omega A\sin(\omega t - \phi),$$

O deslocamento máximo é A, e a velocidade máxima é ωA. As máximas energias potencial e cinética são, respectivamente,

$$U_{\text{max}} = \frac{1}{2}kA^2, \quad T_{\text{max}} = \frac{1}{2}m(\omega A)^2,$$

igualando as energias máximas, temos $kA^2 = m\omega^2 A^2$, ou

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

que é, claramente, a frequência natural do sistema.