Vibrações Mecânicas

Aula10: Vibração Forçada Sistemas não Amortecidos

Ramiro Brito Willmersdorf
ramiro@willmersdorf.net

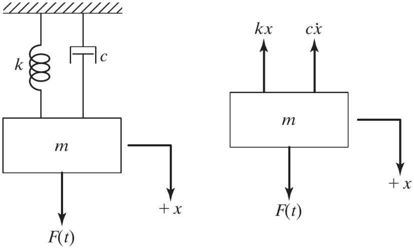
Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Pernambuco

2015.1

Introdução

- Na vibração forçada energia é adicionada ao sistema;
- Tanto força quanto deslocamentos podem ser impostos;
- Tipos de excitação:
  - Harmônica;
  - Periódica não harmônica;
  - Não periódica;
  - Aleatória;
- Pode ocorrer ressonância;
- A resposta harmônica é o fundamento de todo o estudo.

Equação de Movimento



Do DCL,

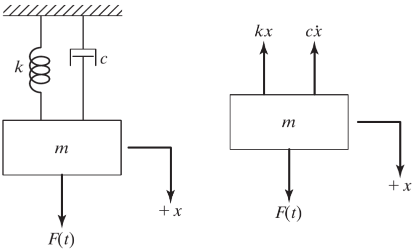
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = F(t),$$

a solução desta EDO é a solução $x_h(t)$ da equação homogênea

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = 0$$

somada com a solução particular $x_p(t)$.

Equação de Movimento



Do DCL,

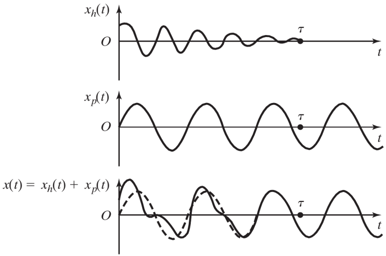
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = F(t),$$

a solução desta EDO é a solução $x_h(t)$ da equação homogênea

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \kappa x = 0$$

somada com a solução particular $x_p(t)$.

Regimes Transiente e Permanente



- Sempre que há amortecimento, $x_h(t) \to 0$!
- A solução $x(t)$ portanto torna-se $x_p(t)$ apenas;
- A solução total é uma combinação dos regimes transiente permanente;
- Muitas vezes na engenharia consideramos apenas o regime permanente.

Solução Homogênea

Considerando que o amortecimento é nulo, sob uma força harmônica

$$F(t) = F_0 \cos \omega t,$$

a equação de movimento é

$$m\ddot{x} + \kappa x = F_0 \cos \omega t,$$

cuja solução da equação homogênea é, obviamente,

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t$$

Solução Particular

Supondo que a solução particular seja

$$x_p(t) = X \cos \omega t,$$

substituímos esta solução na equação particular, obtendo

$$-m\omega^2 X \cos \omega t + \kappa X \cos \omega t = F_0 \cos \omega t.$$

Claramente

$$(-m\omega^2 + \kappa)X = F_0,$$

ou

$$X = \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} = \frac{\delta_{\mathrm{st}}}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

Solução Geral

A solução geral é então

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} \cos \omega t.$$

Aplicando as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, temos

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2}, \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n},$$

e, finalmente,

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} \cos \omega t.$$

Solução Geral

A solução geral é então

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} \cos \omega t.$$

Aplicando as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, temos

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2}, \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n},$$

e, finalmente,

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} \cos \omega t.$$

Solução Geral

A solução geral é então

$$x(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sin \omega_n t + \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} \cos \omega t.$$

Aplicando as condições iniciais $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, temos

$$C_1 = x_0 - \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2}, \qquad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n},$$

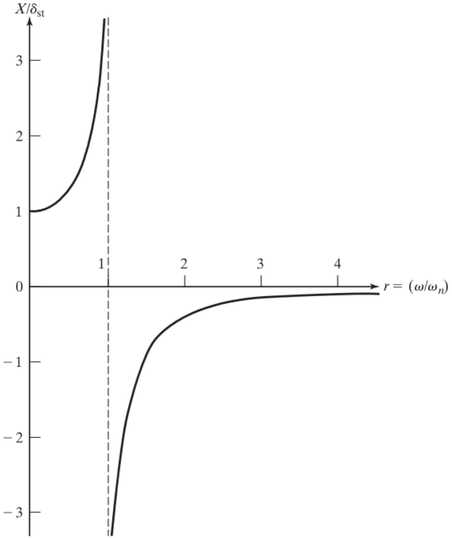
e, finalmente,

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} \right) \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2} \cos \omega t.$$

Fator de Amplificação

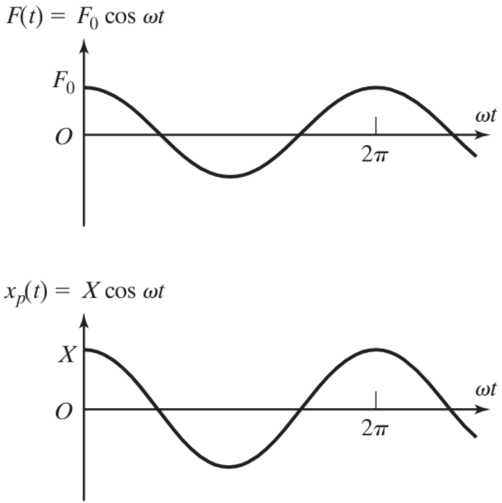
Para a solução *particular*, temos:

$$\frac{X}{\delta_{\text{st}}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



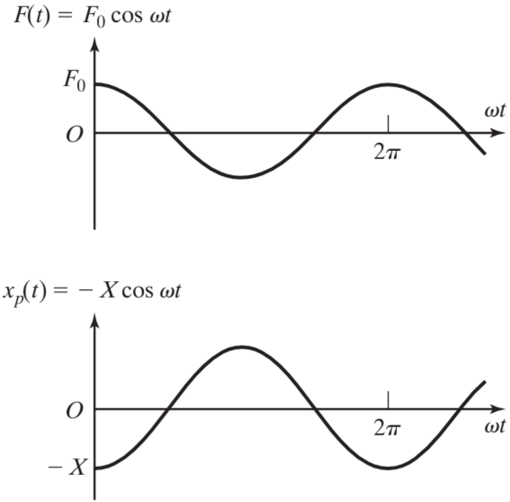
Resposta para $0 < \omega/\omega_n < 1$

O fator de amplificação é positivo e a resposta é em fase com a excitação.



Resposta para $\omega/\omega_n > 1$

O fator de amplificação é negativo e a resposta está em oposição de fase à excitação.



Resposta para $\omega/\omega_n = 1$

Isto é, $\omega = \omega_n$, ressonância!

A resposta total pode ser reescrita como:

$$x(t) = x_0 \cos\omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t + \delta_{\rm st}\left(\frac{\cos\omega t - \cos\omega_n t}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

O último termo tende para infinito, mas isto ocorre instantaneamente?

Resposta para $\omega/\omega_n = 1$

Isto é, $\omega = \omega_n$, ressonância!
A resposta total pode ser reescrita como:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \delta_{\mathrm{st}} \left(\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2} \right)$$

O último termo tende para infinito, mas isto ocorre instantaneamente?

Resposta para $\omega/\omega_n = 1$

Isto é, $\omega = \omega_n$, ressonância!
A resposta total pode ser reescrita como:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \delta_{\mathrm{st}} \left(\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right)$$

O último termo tende para infinito, mas isto ocorre instantaneamente?

Resposta para $\omega/\omega_n = 1$

Aplicando a regra de L'Hospital,

$$\lim_{\omega \to \omega_n} \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] = \lim_{\omega \to \omega_n} \left[\frac{\frac{d}{d\omega}(\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\frac{d}{d\omega}\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)} \right],$$

o que dá

$$\lim_{\omega \to \omega_n} \left[\frac{t \sin \omega t}{2\frac{\omega}{\omega_n^2}} \right] = \frac{\omega_n t}{2} \sin \omega_n t$$

Resposta para $\omega/\omega_n = 1$

Aplicando a regra de L'Hospital,

$$\lim_{\omega \to \omega_n} \left[\frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right] = \lim_{\omega \to \omega_n} \left[\frac{\frac{d}{d\omega}(\cos \omega t - \cos \omega_n t)}{\frac{d}{d\omega}\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)} \right],$$

o que dá

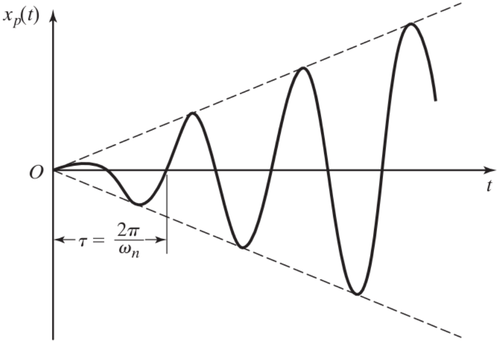
$$\lim_{\omega \to \omega_n} \left[\frac{t \sin \omega t}{2\frac{\omega}{\omega_n^2}} \right] = \frac{\omega_n t}{2} \sin \omega_n t$$

Resposta para $\omega/\omega_n = 1$

A resposta total, na ressonância, é então

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t + \delta_{\mathrm{st}} \frac{\omega_n t}{2} \sin \omega_n t.$$

A forma da solução particular é:



Resposta Total

Podemos escrever a resposta total para $\omega/\omega_n < 1$ como

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi) + \frac{\delta_{\mathrm{st}}}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\cos\omega t,$$

e, para $\omega > \omega_n$,

$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi) - \frac{\delta_{\mathrm{st}}}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\cos\omega t,$$

Claramente, temos a soma de duas funções harmônicas de frequências *distintas*.

Resposta Total

Podemos escrever a resposta total para $\omega/\omega_n < 1$ como

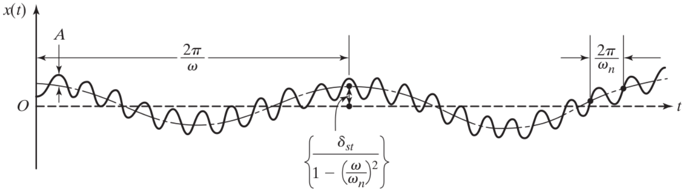
$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi) + \frac{\delta_{\mathrm{st}}}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\cos\omega t,$$

e, para $\omega > \omega_n$,

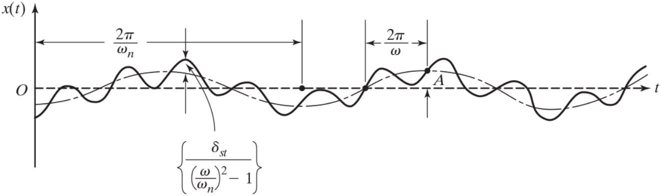
$$x(t) = A\cos(\omega_n t - \phi) - \frac{\delta_{\mathrm{st}}}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\cos\omega t,$$

Claramente, temos a soma de duas funções harmônicas de frequências *distintas*.

Resposta Total



(a) $\frac{\omega}{\omega_n} < 1$



(b) $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$

Batimento

Se a frequência natural e a frequência de excitação são próximas, pode ocorrer batimento.
Para $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$, a resposta total é

$$x(t) = -\frac{F_0}{\kappa - m\omega^2}\cos\omega_n t + \frac{F_0}{\kappa - m\omega^2}\cos\omega t,$$

ou

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2}(\cos\omega t - \cos\omega_n t),$$

ou ainda,

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2}\left[2\sin\frac{\omega + \omega_n}{2}t\sin\frac{\omega - \omega_n}{2}t\right]$$

Batimento

Supondo que

$$\omega_n - \omega = 2\epsilon, \qquad \epsilon \ll 1,$$

então $\omega \approx \omega_n$ e

$$\omega + \omega_n \approx 2\omega.$$

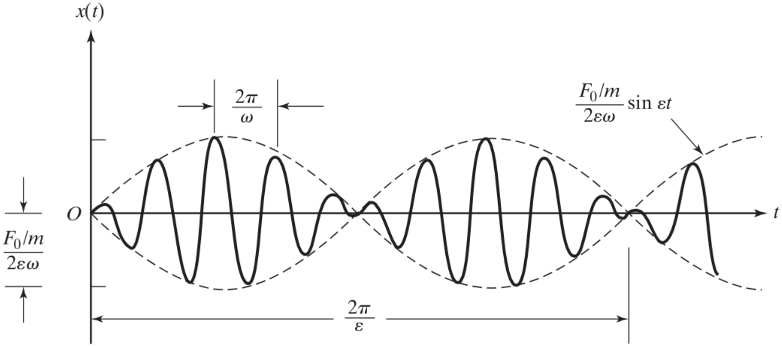
Multiplicando estas duas equações,

$$\omega_n^2 - \omega^2 = 4\epsilon\omega,$$

e a resposta total torna-se

$$x(t) = \left[\frac{F_0/m}{2\epsilon\omega}\sin\epsilon t\right]\sin\omega t$$

Batimento



$$\tau_b = \frac{2\pi}{\epsilon} = \frac{2\pi}{\omega_n - \omega} \qquad \omega_b = 2\epsilon = \omega_n - \omega$$