

On a un modèle génératif M complexe qui se décompose en trois morceaux $M = (M_1, M_2, M_3)$ comme suit :

$$M_1 : Y|X^{I_1}, X^{I_2}, Z \sim X^{I_1} A_{I_1} + X^{I_2} A_{I_2} + \varepsilon \quad (1)$$

$$M_2 : X^{I_2}|X^{I_1}, Z \sim X^{I_1} B_{I_1}^{I_2} + \varepsilon_{X^{I_2}} \quad (2)$$

$$M_3 : X^{I_1}|Z \sim GM(\alpha) \quad (3)$$

On pose $\theta = (\alpha, \Sigma, \Sigma_{X^{I_2}}, B_{I_1}^{I_2}, A_{I_1}, A_{I_2})$ Pour un Z donné on a donc

$$P_{M,Z}(Y, X^{I_1}, X^{I_2}|\theta) = P_{M,Z}(X^{I_1}|\theta)P_{M,Z}(X^{I_2}|X^{I_1};\theta)P_{M,Z}(Y|X^{I_2}, X^{I_1};\theta) \quad (4)$$

$$= P_{M_3,Z}(X^{I_1}|\alpha)P_{M_1,M_2,Z}(X^{I_2}|X^{I_1};\Sigma, \Sigma_{X^{I_2}}, B_{I_1}^{I_2}, A_{I_1}, A_{I_2})P_{M_1,M_2,Z}(Y|X^{I_2}, X^{I_1};\Sigma, \Sigma_{X^{I_2}}, B_{I_1}^{I_2}, A_{I_1}, A_{I_2}) \quad (5)$$

$P_{M_3,Z}(X^{I_1}|\alpha)$ vit tout seul et est estimé par Mixmod. On sait également que

$$P_{M_2,Z}(X^{I_2}|X^{I_1};\Sigma, \Sigma_{X^{I_2}}, B_{I_1}^{I_2}, A_{I_1}, A_{I_2}) = P_{M_2,Z}(X^{I_2}|X^{I_1};\Sigma_{X^{I_2}}, B_{I_1}^{I_2}) \text{ et} \quad (6)$$

$$P_{M_1,Z}(Y|X^{I_2}, X^{I_1};\Sigma, \Sigma_{X^{I_2}}, B_{I_1}^{I_2}, A_{I_1}, A_{I_2}) = P_{M_1,Z}(Y|X^{I_2}, X^{I_1};\Sigma, A_{I_1}, A_{I_2}) \quad (7)$$

De manière générale les gens s'arrêtent là, et obtiennent le modèle complet... qui ne tient pas compte de la structure. Mais nous, nous ne sommes pas juste sous M_2 pour les sous-régression ni juste sous M_1 pour Y . Donc la dépendance persiste (c'est ce qui permet que la contrainte aie une utilité, sinon elle serait inutile).

Du coup, il faut définir proprement $P_{M_1,M_2,Z}(X^{I_2}|X^{I_1};\Sigma, \Sigma_{X^{I_2}}, B_{I_1}^{I_2}, A_{I_1}, A_{I_2})$ et $P_{M_1,M_2,Z}(Y|X^{I_2}, X^{I_1};\Sigma, \Sigma_{X^{I_2}}, B_{I_1}^{I_2}, A_{I_1}, A_{I_2})$. Or il semble que ces vraisemblances ne soient pas explicites.

Vu que $P_{M_1,M_2,Z}(X^{I_2}|X^{I_1};\theta) \neq P_{M_2,Z}(X^{I_2}|X^{I_1};\theta)$ et $P_{M_1,M_2,Z}(Y|X^{I_2}, X^{I_1};\theta) \neq P_{M_1,Z}(Y|X^{I_2}, X^{I_1};\theta)$, on se limite donc à une décomposition partielle de la vraisemblance et on obtient :

$$P_{M,Z}(Y, X^{I_1}, X^{I_2}|\theta) = P_{M_3,Z}(X^{I_1}|\alpha)P_{M_1,M_2,Z}(Y, X^{I_2}|X^{I_1};\Sigma, A_{I_1}, A_{I_2}, \Sigma_{X^{I_2}}, B_{I_1}^{I_2}) \quad (8)$$

Le second membre suit une loi normale multivariée :

$$\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} X^{I_1}(A_{I_1} + B_{I_1}^{I_2}A_{I_2}) \\ X_{I_1}B_{I_1}^{I_2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma_Y^2 + \sum_{i \in I_2}(\sigma_i^2 a_i^2) & \dots & a_j \sigma_j^2 & \dots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ a_j \sigma_j^2 & 0 & \sigma_j^2 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} X^{I_1}(A_{I_1} + B_{I_1}^{I_2}A_{I_2}) \\ X_{I_1}B_{I_1}^{I_2} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma_Y^2 + \sum_{i \in I_2}(\sigma_i^2 a_i^2) & \dots & a_j \sigma_j^2 & \dots \\ \vdots & & & \\ a_j \sigma_j^2 & & \Sigma_X^{I_2} & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}\right) \quad (9)$$