Hypothèse remise en cause : "Une régression triviale entre deux lois normales n'est pas identifiable"

18 février 2014

soient 2 variables aléatoires (X_1, X_2) avec

$$X_{2|X_1} = X_1 + \varepsilon_2 \text{ avec } \varepsilon_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2_{X_2}) \quad (1)$$
$$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2_1) \quad (2)$$

On en déduit que

$$X_{2|X_1} \sim \mathcal{N}(X_1, \sigma^2_{X_2}) \text{ et} \quad (3)$$
$$X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2_{X_2} + \sigma^2_1) \quad (4)$$

On a donc 2 lois normales corrélées via une régression et on constate que :

$$\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2_1 < \mathrm{Var}(X_2) = \sigma^2_{X_2} + \sigma^2_1 \quad (5)$$

du simple fait de l'ordre de la régression. Donc déjà on sait qu'écrire la régression à l'envers serait en contradiction avec cette réalité. Donc le modèle est identifiable quand on regarde les lois marginales.

Le problème est que nous ne regardons pas les lois marginales. Donc si on avait deux structures avec le même BIC, il suffirait (après coup) de comparer les rapports entre les variances empiriques aux rapports attendus au regard du sens des sous-régression. Cela revient à comparer la cohérence entre chaque modèle et la réalité (celui qui est incohérent est considéré comme n'étant pas le meilleur modèle).Donc il n'y a pas de problème à l'utilisation de CorReg, même avec des lois normales et des régressions triviales (les mélanges gaussiens restent indispensables pour mieux coller aux données industrielles).

Il reste quand-même à savoir si on a identifiabilité juste en regardant la loi jointe (ce que fait CorReg actuellement).

$$P(X) = P(X_1, X_2) = P(X_2|X_1)P(X_1) \quad (6)$$
$$= P(X_1|X_2)P(X_2) \quad (7)$$

le modèle permuté S' affirme :

$$\begin{aligned}
X_{1|X_2} &= X_2+\varepsilon_1 \text{ avec } \varepsilon_1 \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2_{X_1}) & (8)\\
X_2 &\sim \mathcal{N}(\mu_2,\sigma^2_2) \text{ et donc} & (9)\\
X_{1|X_2} &\sim \mathcal{N}(X_2,\sigma^2_{X_1}) \text{ et} & (10)\\
X_1 &\sim \mathcal{N}(\mu_2,\sigma^2_{X_1}+\sigma^2_2) & (11)
\end{aligned}$$

On connaît $P(X_2|X_1), P(X_1)$ et $P(X_2)$ donc on peut par un simple produit en croix en déduire $P(X_1|X_2)$. Le problème est de bien dissocier les notations : $P_S(X_1|X_2)$ qui n'est pas connu directement (n'a pas de raison a priori de former une régression) et que l'on va calculer et $P_{S'}(X_1|X_2)$ qui est donné en (10).

$$\begin{aligned}
P_{S'}(X_1=x_1|X_2=x_2) &= \frac{1}{\sigma_{X_1}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-x_2}{\sigma_{X_1}}\right)^2\right) & (12)\\
P_S(X_1=x_1|X_2=x_2) &= \frac{P_S(X_2=x_2|X_1=x_1)P_S(X_1=x_1)}{P_S(X_2=x_2)} & (13)\\
&= \frac{\frac{1}{\sigma_{X_2}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-x_1}{\sigma_{X_2}}\right)^2\right)\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right)}{\frac{1}{\sqrt{\sigma^2_{X_2}+\sigma^2_1}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_1}{\sqrt{\sigma^2_{X_2}+\sigma^2_1}}\right)^2\right)} & (14)\\
&= \frac{\sqrt{\sigma^2_{X_2}+\sigma^2_1}}{\sigma_{X_2}\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x_2-x_1}{\sigma_{X_2}}\right)^2+\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-\left(\frac{x_2-\mu_1}{\sqrt{\sigma^2_{X_2}+\sigma^2_1}}\right)^2\right) & (15)\\
&= \frac{1}{\frac{\sigma_{X_2}\sigma_1}{\sqrt{\sigma^2_{X_2}+\sigma^2_1}}\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_2-x_1)^2}{\sigma^2_{X_2}}+\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma^2_1}-\frac{(x_2-\mu_1)^2}{\sigma^2_{X_2}+\sigma^2_1}\right) & (16)\\
&= \frac{1}{\frac{\sigma_{X_2}\sigma_1}{\sqrt{\sigma^2_{X_2}+\sigma^2_1}}\sqrt{2\pi}}\exp-\frac{1}{2}\left(\frac{(x_2^2-2x_1x_2+x_1^2)\sigma_1^2(\sigma^2_{X_2}+\sigma^2_1)+(x_1^2-2\mu_1x_1+\mu_1^2)\sigma^2_X(\sigma^2_{X_2}+\sigma^2_1)-(x_2^2-2\mu_1x_2+\mu_1^2)\sigma^2_{X_2}\sigma^2_1}{\sigma^2_{X_2}\sigma^2_1(\sigma^2_{X_2}+\sigma^2_1)}\right) & (17)\\
&\neq P_{S'}(X_1=x_1|X_2=x_2) \text{ pas de simplification pour les } \mu_1 \text{ qui n'apparaissent pourtant pas dans (12).} & (18)
\end{aligned}$$

La non-identifiabilité s'écrit :

$$\exists(\mu_1,\sigma_1,\sigma_{X_2})\in\mathcal{R}^3, \forall(x_1,x_2)\in\mathcal{R}^2 : P_S(X_1=x_1|X_2=x_2)=P_{S'}(X_1=x_1|X_2=x_2) \qquad (19)$$

On cherche donc un jeu de paramètre valable pour toutes les valeurs des X. Si un tel jeu existe, on a nécessairement :

$$\sigma_{X_1} = \frac{\sigma_{X_2}\sigma_1}{\sqrt{\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2}} \tag{20}$$

et donc $\forall(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x_1 - x_2}{\sigma_{X_1}}\right)^2 &= \left(\frac{(x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2)\sigma_1^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2) + (x_1^2 - 2\mu_1x_1 + \mu_1^2)\sigma_X^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2) - (x_2^2 - 2\mu_1x_2 + \mu_1^2)\sigma_{X_2}^2\sigma_1^2}{\sigma_{X_2}^2\sigma_1^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2)}\right) && (21)\\
\frac{(x_1 - x_2)^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2)}{\sigma_{X_2}^2\sigma_1^2} &= \frac{(x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2)\sigma_1^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2) + (x_1^2 - 2\mu_1x_1 + \mu_1^2)\sigma_X^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2) - (x_2^2 - 2\mu_1x_2 + \mu_1^2)\sigma_{X_2}^2\sigma_1^2}{\sigma_{X_2}^2\sigma_1^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2)} && (22)\\
(x_1 - x_2)^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2) &= \frac{(x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2)\sigma_1^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2) + (x_1^2 - 2\mu_1x_1 + \mu_1^2)\sigma_X^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2) - (x_2^2 - 2\mu_1x_2 + \mu_1^2)\sigma_{X_2}^2\sigma_1^2}{(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2)} && (23)\\
(x_1 - x_2)^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2)^2 &= (x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2)\sigma_1^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2) + (x_1^2 - 2\mu_1x_1 + \mu_1^2)\sigma_X^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2) - (x_2^2 - 2\mu_1x_2 + \mu_1^2)\sigma_{X_2}^2\sigma_1^2 && (24)\\
0 &= (x_2 - x_1)^2\left[\sigma_1^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2) - (\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2)^2\right] + (x_1^2 - 2\mu_1x_1 + \mu_1^2)\sigma_X^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2) - (x_2^2 - 2\mu_1x_2 + \mu_1^2)\sigma_{X_2}^2\sigma_1^2 && (25)\\
0 &= (x_2 - x_1)^2\left[-\sigma_{X_2}^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2)\right] + (x_1^2 - 2\mu_1x_1 + \mu_1^2)\sigma_X^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2) - (x_2^2 - 2\mu_1x_2 + \mu_1^2)\sigma_{X_2}^2\sigma_1^2 && (26)\\
0 &= \sigma_X^2(\sigma_{X_2}^2 + \sigma_1^2)\left[(x_1 - \mu_1)^2 - (x_2 - x_1)^2\right] - (x_2^2 - 2\mu_1x_2 + \mu_1^2)\sigma_{X_2}^2\sigma_1^2 && (27)\\
& && (28)
\end{aligned}$$