Блочный метод Жордана решения линейной системы с выбором главного элемента по столбцу. MPI реализация

Роман Каспари 310

1. Разделение данных

Допустим у нас p процессов Т.к. мы переставляем строчки, то нам удобнее разделить данные по столбцам, а именно: i-ому процессу принадлежат столбцы под номером i, i + p, i + 2p и т.д.

2. Действия в алгоритме

Допустим мы находимся на k-ом шаге алгоритма (Пусть в строчке для удобства s столбцов, размер блока - m, n = ms - размер матрицы, шаги для удобства нумеруем с нуля)

1. Надо выбрать главный элемент в k-ом столбце, столбец разсылается равномерно по процессам, чтобы вычисления происходили в разных процессах. Начинаем с k + 1 строчки

2. Домножаем эту строчку на обратную матрицу. Так как память поделена на столбцы, в одной строчке все блоки домножатся в разных процессах

3. Меняем местами строку с максимальным элементов и k-ую строку. Так как память поделена на столбцы, в каждом столбце поменяются местами элементы а разных процессах, и посылать ничего не придётся

4. Теперь нужно отнять нашу строчку, домноженную на k-ый в столбце элемент, с верхних k - 1 строк, и с нижних s - k - 1 строк, аналогично, всё легко считается в разных процессах

3. Формулы на один процесс

Пусть n делится для удобства на p, находимся на k-ом шаге

1. Один процесс считает норму обратной матрицы для оставшихся (s - k) / p матриц

2. Один процесс умножает в строчке (s - k) / p матриц на обратную:

$$A^{k+1}_{main,indLoc} = (A^{k}_{main,kGlob})^{-1} A^{k}_{main,indLoc}$$

(main - индекс строчки, в которой находится главный элемент, элемент с глобальным индексом рассылается всем процессам)

3. Меняются k и main строчки местами, то есть (s - k) / p блоков $A^{k}_{k,indLoc}$ и $A^{k+1}_{main,indLoc}$

4. Со всех блоков индексом меньше k и больше k надо отнять k-ую строчку, домноженную на соответствующий элемент, вычитаем с домножением только у (s - k) / p блоков в одном процессе:

$$A^{k+1}_{i,jLoc} = A^{k}_{i,jLoc} - A^{k}_{i,kGlob} A^{k+1}_{k,jLoc}$$

(kGlob - это индекс с того столбца, в котором лежит главный элемент, этот столбец посылается остальным процессам)

4. Оценка числа точек коммуникации

На k-ом шаге нужно отослать k-ый столбец всем остальным процессам (без учета первых k - 1 блоков), для сдедующих целей:

1. найти главный элемент в столбце
2. домножить строчку на обратный
3. вычитать домноженные строчки

Всего шагов n/m

Число обменов:

$$3 * n/m$$

Т.к. у нас n/m столбцов и 3 точки синхронизации (после выбора главного, после домножения на обратную, и после смены строк и вычитаний, используем broadcast)

Объём обменов равен $n^2/2$:

$$(n * m + (n - m) * m + ...m * m) = m * (n + (n - m) + (n - 2m) + ...m) =$$

$$= m * (m + n) * 0.5 * n/m = 0.5(m + n) * n = n^2/2 + mn/2$$

5. Оценка сложности арифметических операций на процесс и сумма по всем процессам

Сначала посчитаем для одного процесса на k-ом шаге Распишем сложность для каждого шага, потом сложим

1. $((s - k)/p) * (8/3m^3 + m^2)$
2. $((s - k)/p) * m^3$
3. $((s - k)/p) * m^2$
4. $((s - k)/p) * (m^2 + m^3) * (s - 1)$

Получим общую формулу для одного процесса

$$\sum_{k=0}^{s-1}((s - k)/p) * (8/3m^3 + m^2 + m^3 + m^2 + (m^2 + m^3) * (s - 1)) =$$

$$= ((8/3 + s)m^3 + (s + 1)m^2)/p * \sum_{k=0}^{s-1}(s - k) =$$

$$= ((8/3 + s)m^3 + (s + 1)m^2)/p * (s^2 - (s - 1)s/2) =$$

$$= ((8/3 + s)m^3 + (s + 1)m^2) * (s^2/2 + s/2)/p$$

Подставляем s = n / m

$$1/p * ((8/3 + n/m)m^3 + (n/m + 1)m^2) * ((n/m)^2/2 + n/2m) =$$

$$= 1/p * (8/3m^3 + nm^2 + nm + m^2) * (n^2/2m^2 + n/2m) =$$

$$= 1/p * (n^3/2 + 11/6n^2m + 4/3nm^2 + n^3/2m + n^2/2 + mn/2)$$

Для всех процессов получаем

$$(n^3/2 + 11/6n^2m + 4/3nm^2 + n^3/2m + n^2/2 + mn/2)$$

Проверим формулу при p = 1, m = 1

$$n^3/2 + 11/6n^2 + 4/3n + n^3/2 + n^2/2 + n/2 =$$

$$= n^3 + O(n^2)$$

Теперь при p = 1, m = n

$$n^3/2 + 11/6n^3 + 4/3n^3 + n^2/2 + n^2/2 + n^2/2 =$$

$$= n^3(1/2 + 11/6 + 4/3) + 3/2n^2 = 11/3n^3 + O(n^2)$$

Получили правильные оценки: $n^3 + O(n^2)$ и $11/3n^3 + O(n^2)$