Блочный метод Жордана решения линейной системы с выбором главного элемента по столбцу.

Роман Каспари 310

1. Хранение матрицы

Будем хранить матрицу построчно. Допустим она размера N на N, тогда в памяти она будет храниться так:

$$[(a_{11}a_{12}...a_{1n})...(a_{i1}...a_{in})...(a_{n1}...a_{nn})]$$

2. Функции getBlock и setBlock

Функция getBlock возвращает указатель на начало блока с индексами i и j

```
//A - исходная матрица, n*n - размер матрицы, m*m - размер блока,
//i и j - индексы блока
double * getBlock(double * A, int n, int m, int i, int j)
{
   return A + n*m*i + m*j;
}
```

Функция setBlock кладёт в матрицу B блок A_ij

```
void setBlock(double * A, double * B, int n, int m, int i, int j)
{
   for (int h = 0; h < m; h++) //height
   {
      for (int w = 0; w < m; w++) //width
      {
         B[h*m + w] = A[n*(i*m+h) + j*m + w];
      }
   }

}
```

3. Алгоритм и формулы

Допустим у нас есть линейная система:

$$A * x = b$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Перепишем матрицу A и вектор b в блочный вид: Допустим

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} A_{11}^{m*m} & A_{12}^{m*m} & A_{13}^{m*m} & \dots & A_{1s}^{m*k} & B_1^m \\ A_{21}^{m*m} & A_{22}^{m*m} & A_{23}^{m*m} & \dots & A_{2s}^{m*k} & B_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1}^{k*m} & A_{s2}^{k*m} & A_{s3}^{k*m} & \dots & A_{ss}^{k*k} & B_s^k \end{array}\right)$$

где m - размер блока, k - остаток от деления n на m, s - верхняя целая часть при делении n на m, B_i^j - вектор столбец размера j

Нам понадобится норма матрицы и вектора-столбца, возьмём, например, следующую:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \qquad (1)$$

Она подчинена следующей векторной норме:

$$\|b\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \qquad (2)$$

1) Найдём в первом столбце блок, обратный к которому имеет наименьшую норму, допустим это i-ый блок в столбце, тогда пусть:

$$D = A_{i1}^{-1}$$

2) Домножим слева каждый блок матрицы с i-ой строчки на D (блок A_{i1} домножать не будем, просто положим его равным E). Помимо этого домножим ещё вектор столбец B_i

3) Поменяем местами первую и i-ую строчки в нашей блочной матрице

4) Вычтем первую строчку, домноженную на A_{i1} слева, из каждой i-ой строки (положим все блоки кроме первого в первом стобце равными нулю) :

$$A_{ij}^{new} = A_{ij} - A_{i1} * A_{1j}$$
$$B_i^{new} = B_i - A_{i1} * B_1$$

5) Повторяем действия 1-4 уже со вторым столбцом начиная со второй строчки, а также вычтем вторую строчку из первой, домножив так, чтобы $A_{12} = 0$

6) Аналогично поступаем дальше, напишем формулы для s-го шага: В s-ом столбце выбираем главный элемент в подматрице и домножаем строчку на него:

$$A_{sj} = (A_{ss}^{m*m})^{-1} A_{sj}$$

$$A_{ij} = A_{ij} - A_{is} A_{sj}$$

$$B_i = B_i - A_{is} B_s$$

(строчку с индексом max меняем с k-ой строчкой)

В итоге мы получим, что блочно единичная матрица равна блочному вектору-столбцу, что эквивалентно тому, что единичная матрица равна вектору, то есть решение будет найдено

4. Оценка количества действий

$$s = n/m$$

1. Обращение матрицы размером m на m занимает $(8/3)m^3$ действий, посчитать матричную норму - m^2 действий, умножить две квадратные матрицы - m^3, умножить матрицу на вектор - m^2 действий, умножить матрицу m*m на матрицу m*k - $m^2 k$ действий, присвоить матрице другую матрицу - m^2

2. Для нахождения главных элементов потребуется

$$\sum_{i=1}^{s} (s - i + 1) * ((8/3)m^3 + m^2) = (s * (s + 1)/2) * ((8/3)m^3 + m^2)$$

операций

3. Для вычисления новых блоков A_{ij} при делении на главный элемент потребуется

$$\sum_{i=1}^{s} (s - i) = s(s - 1)/2$$

домножений на обратную матрицу, то есть $(s(s - 1)/2)m^3$ операций.

4. Для вычисления новых блоков $A_i j$ при вычитании потребуется

$$\sum_{i=1}^{s} (s - i) * (s - 1) = (s - 1)^2 * s/2 = s^3/2 - s^2 + s/2$$

операций умножения, и столько же операций вычитания. Т.к. умножение происходит за куб, а вычитание за квадрат - получаем всего

$$s^3 m^3/2 - s^2 m^3 + s^2 m^3/2 + s^3 m^2/2 - s^2 m^2 + s m^2/2$$

операций.

5. Для вычисления новых B_i при делении на главный элемент потребуется s операций домножения на обратную матрицу, то есть $s * m^3$ операций

6. Для вычисления новых B_i при вычитании потребуется $s(s-1)$ операцийй вычитания, и столько же операций умножения на матрицу, то есть всего операций:

$$s(s-1) * m^2 + s(s-1)m$$

7. Сложим (2-6):

$$(s(s+1)/2)((8/3)m^3 + m^2) + (s(s-1)/2)m^3 + s^3m^3/2 - s^2m^3 + s^2m^3/2+$$

$$+s^3m^2/2 - s^2m^2 + sm^2/2+$$
$$+sm^3 + s(s-1)m^2 + s(s-1)m =$$
$$m^3((8/3)s^2/2 + (8/3)s/2 + s^2/2 - s/2 + s^3/2 - s^2 + s^2/2 + s)+$$
$$+m^2(s^2 + s/2 + s^3/2 - s^2 + s/2 + s^2 - s) + m * s(s-1) =$$
$$= m^3(s^3/2 + (4/3)s^2 + (11/6)s) + m^2(s^3/2 + s^2) + m(s^2 - s)$$

переходя от s к n/m получаем:

$$m^3(n^3/2m^3+(4/3)n^2/m^2+(11/6)n/m)+m^2(n^3/2m^3+n^2/m^2)+m(n^2/m^2-n/m) =$$

$$= n^3/2 + (4/3)n^2m + (11/6)nm^2 + n^3/2m + n^2 + n^2/m - n =$$
$$= n^3/2 + (4/3)n^2m + (11/6)nm^2 + n^3/2m + n^2/m + O(n^2)$$

5. Проверки формул

Если m = 1, получаем:

$$n^3/2 + (4/3)n^2 + (11/6)n + n^3/2 + n^2 + O(n^2) =$$

$$= n^3 + O(n^2)$$

При m = n:

$$n^3/2 + (4/3)n^3 + (11/6)n^3 + n^2/2 + n + O(n^2) = (11/3)n^3 + O(n^2)$$