Блочный метод Жордана решения линейной системы с выбором главного элемента по столбцу. Параллельная реализация

Роман Каспари 310

1. Разделение данных

Допустим у нас p потоков. Т.к. мы переставляем строчки, то нам удобнее разделить данные по столбцам, а именно: i-ому потоку принадлежат столбцы под номером i, i + p, i + 2p и т.д.

2. Действия в алгоритме

Допустим мы находимся на k-ом шаге алгоритма (Пусть в строчке для удобства s столбцов, размер блока - m, n = ms - размер матрицы, шаги для удобства нумеруем с нуля)

1. Надо выбрать главный элемент в k-ом столбце, столбец тоже придётся разделить по потокам, чтобы параллельно выбрать главный элемент. Начинаем с k + 1 строчки

2. Домножаем эту строчку на обратную матрицу. Так как память поделена на столбцы, в одной строчке все блоки домножатся параллельно

3. Меняем местами строку с максимальным элементов и k-ую строку. Так как память поделена на столбцы, в каждом столбце поменяются местами элементы

4. Теперь нужно отнять нашу строчку, домноженную на k-ый в столбце элемент, с верхних k - 1 строк, и с нижних s - k - 1 строк

3. Формулы на один поток

Пусть n делится для удобства на p, находимся на k-ом шаге

1. Один поток считает норму обратной матрицы для оставшихся (s - k) / p матриц

2. Один поток умножает в строчке (s - k) / p матриц на обратную:

$$A^{k+1}_{main,ind} = (A^{k}_{main,k})^{-1} A^{k}_{main,ind}$$

(main - индекс строчки, в которой находится главный элемент)

3. Меняются k и main строчки местами, то есть (s - k) / p блоков $A^{k}_{k,ind}$ и $A^{k+1}_{main,ind}$

4. Со всех блоков индексом меньше k и больше k надо отнять k-ую строчку, домноженную на соответствующий элемент, вычитаем с домножением только у (s - k) / p блоков на одном потоке:

$$A^{k+1}_{i,j} = A^{k}_{i,j} - A^{k}_{i,k} A^{k+1}_{k,j}$$

4. Оценка сложности на поток и сумма по всем потокам

Сначала посчитаем для одного потока на k-ом шаге Распишем сложность для каждого шага, потом сложим

1. $((s-k)/p)*(8/3m^3+m^2)$
2. $((s-k)/p)*m^3$
3. $((s-k)/p)*m^2$
4. $((s-k)/p)*(m^2+m^3)*(s-1)$

Получим общую формулу для одного потока

$$\sum_{k=0}^{s-1}((s-k)/p)*(8/3m^3+m^2+m^3+m^2+(m^2+m^3)*(s-1))=$$

$$=((8/3+s)m^3+(s+1)m^2)/p*\sum_{k=0}^{s-1}(s-k)=$$

$$=((8/3+s)m^3+(s+1)m^2)/p*(s^2-(s-1)s/2)=$$

$$=((8/3+s)m^3+(s+1)m^2)*(s^2/2+s/2)/p$$

Подставляем s = n / m

$$1/p*((8/3+n/m)m^3+(n/m+1)m^2)*((n/m)^2/2+n/2m)=$$

$$=1/p*(8/3m^3+nm^2+nm+m^2)*(n^2/2m^2+n/2m)=$$

$$=1/p*(n^3/2+11/6n^2m+4/3nm^2+n^3/2m+n^2/2+mn/2)$$

Для всех потоков получаем

$$(n^3/2+11/6n^2m+4/3nm^2+n^3/2m+n^2/2+mn/2)$$

Проверим формулу при p = 1, m = 1

$$n^3/2+11/6n^2+4/3n+n^3/2+n^2/2+n/2=$$

$$=n^3+O(n^2)$$

Теперь при p = 1, m = n

$$n^3/2+11/6n^3+4/3n^3+n^2/2+n^2/2+n^2/2=$$

$$=n^3(1/2+11/6+4/3)+3/2n^2=11/3n^3+O(n^2)$$

Получили правильные оценки: $n^3 + O(n^2)$ и $11/3n^3 + O(n^2)$

5. Оценка числа точек синхронизации

на k-ом шаге нужно сделать 4 точки синхронизации, тогда, когда мы проделываем следующие действия:

1. найти главный элемент в столбце
2. домножить строчку на обратный
3. поменять две строчки местами
4. вычитать домноженные строчки

всего шагов n/m, всего точек синхронизации 4n/m