# Esercizi aggiuntivi Tutorato 0

Riccardo Marchesin & Cesare Straffelini

21 Settembre 2022

### Tabelle di verità ed un nuovo connettivo

1. Esprimere la tabella di verità delle proposizioni $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$.

2. Esprimere la tabella di verità delle proposizioni $p \vee (q \wedge r)$, $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$, $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$. Vale l'equivalenza tra $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ e $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$?

3. In queste tabelle diamo il valore di 0 a proposizioni false, e di 1 a quelle vere. Trovare un'espressione delle formule $F_i$ la cui tabella di verità è data da:

| $p$ | $q$ | $F_1(p,q)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| $p$ | $q$ | $r$ | $F_2(p,q,r)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

| $p$ | $F_3(p)$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

$F_1$ ed $F_2$ sono equivalenti? Ci sono altri modi equivalenti di esprimere $F_3$?

4. L'operazione definita dalla tabella di verità $F_1$ nell'esercizio precedente, è chiamata *xor* (dall'inglese *exclusive or*, o "o esclusivo"). E' indicata con $p \oplus q$, o con $p \not\leftrightarrow q$ (ma anche con altri simboli, vedi wikipedia). Dare una formula equivalente a $p \vee q$ che usi solo le operazioni $\wedge$ (and) e $\oplus$ (xor)

### Tautologie o teoremi?

5. Esprimere la tabella di verità della proposizione $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$.

6. Dimostrare, usando le regole di introduzione e di eliminazione, che

$$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q).$$

7. Notiamo che, nel'esercizio 5, abbiamo mostrato che la proposizione $(\neg p \vee \neg q) \to \neg(p \wedge q)$, che d'ora in poi chiameremo per brevità $\psi$, è *sempre vera*, cioè la sua tabella di verità è formata da una colonna di tutti 1. Una proposizione sempre vera è detta anche TAUTOLOGIA. Il concetto di essere una tautologia è un concetto *semantico*, cioè legato al significato della formula. Nel 6 invece, abbiamo *dimostrato* $\psi$, e dunque abbiamo provato che $\psi$ è un TEOREMA. Il concetto di teorema è *sintattico*: abbiamo usato dei passaggi logici formali per dimostrare $\psi$.

   La domanda di questo esercizio è: *secondo voi*, c'è un legame tra sintassi e semantica? Possiamo dire che ogni teorema è una tautologia, cioè che tutto ciò che si può dimostrare è vero? Viceversa, possiamo dire che ogni tautologia è un teorema, cioè che tutto ciò che è vero si può dimostrare?

**Le leggi di de Morgan**

8. Sia $\Omega$ un insieme, $A$ e $B$ sottoinsiemi di $\Omega$. Provare le leggi di De Morgan:
   (a) $\Omega \setminus (A \cap B) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$.
   (b) $\Omega \setminus (A \cup B) = (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)$.

9. Dimostrare (con tabelle di verità o intro/elim, a scelta):
   (a) $\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$.
   (b) $\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$.

10. Come si spiega la somiglianza tra l'esercizio 8 e l'esercizio 9?

**Innumerevoli formule**

11. Quante sono le possibili formule logiche non equivalenti con 2 variabili? Quante con 3? Quante con $n$?

**Insiemistica**

12. Sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di $X$. Mostrare che $\bigcup \mathcal{P}(X) = X$ e che $\bigcap \mathcal{P}(X) = \emptyset$

**Ridurre il numero di connettivi**

14. A lezione avete visto sei connettivi ($\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\neg$, `falso`). Tuttavia non tutti questi connettivi sono necessari: ad esempio sapete già dalle slides che $\neg p$ si può esprimere come $p \to$ `falso`. Un altro esempio che già conoscete è che $p \leftrightarrow q$ è equivalente a $(p \to q) \wedge (q \to p)$.
    Spiegate cosa significa *"è equivalente"* in questo contesto, e dimostrate che bastano due connettivi (l'implicazione $\to$, ed il `falso`) per esprimere tutti gli altri sei.
    *Suggerimento*: iniziate con il dimostrare che $(p \to q)$ equivale a $(\neg p \vee q)$.

15. In realtà si può fare di meglio: basta UN connettivo, la barra di Sheffer, indicata con $|$ e definita da $p|q := \neg(p \wedge q)$. Se volete, provate a provarlo.