Esercizi aggiuntivi informatica settimana 5-6

Riccardo Marchesin, Marco Girardi

October 2020

Induzione su insiemi **ATTENZIONE**: QUESTI ESERCIZI SONO COMPLETAMENTE OPZIONALI, pensati per chi avesse già risolto quelli ufficiali e volesse esercitarsi con qualcosì'altro. Non sono stati proposti dal prof, ma da noi tutor.

1. Si può descrivere induttivamente un insieme finito?

2. Cosa definisce (intuitivamente) il seguente insieme di regole?

$$\frac{}{\epsilon} \quad \frac{l}{1 :: l}$$

3. Sia $\mathcal{S}$ l'insieme definito dalle precedenti regole. Dare la definizione induttiva della relazione $\sqsubseteq$ su $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ che intuitivamente significa "$r \sqsubseteq s$ se e solo se la sequenza r è più corta o uguale alla sequenza s" (per esempio, $1 :: \epsilon \sqsubseteq 1 :: 1 :: \epsilon$).

4. Dare la definizione della relazione $L \subset \mathcal{S} \times \mathbb{N}$ che intuitivamente deve essere la funzione "lunghezza" della sequenza.
Per esempio: $(\epsilon)\ L\ 0$, $\quad (1 :: 1 :: \epsilon)\ L\ 2$.

5. Dimostrare che L è una funzione. (Lungo. Seguite la traccia fatta sulle slide per il fattoriale sui naturali)

6. Questa formula induttiva descrive una famiglia di alberi, descrivete intuitivamente quali sono

$$\frac{}{n}[n \in \mathbb{N}] \qquad \frac{t}{(n\ \ t)}[n \in \mathbb{N}]$$

7. Dimostrare *induttivamente* che il minimo punto fisso di questa definizione induttiva (chiamiamolo Y) è contenuto nel minimo punto fisso della definizione data sopra (chiamiamolo X)

$$\frac{}{1}[Y1] \qquad \frac{t}{(1\ \ t)}[Y2]$$

Suggerimento: Riscrivete in formula cosa vuol dire che $Y \subseteq X$, e ricavate da questa formula una qualche proprietà che riuscite a dimostrare per induzione.

8. Qual è la definizione induttiva di altezza di un albero?

9. Dare la definizione induttiva degli "alberi bilanciati", ovvero gli alberi A tali che ogni nodo di A ha tante foglie tra i discendenti a destra quante quelle che ha tra i discendenti a sinistra.
Suggerimento: per risolverlo pensate intuitivamente a come è fatto un albero bilanciato di una certa altezza fissata. Per formalizzarlo occorrerà la definizione induttiva di altezza.

10. Sia l'insieme $A = \{\text{rosso, giallo, blu}\}$. Si consideri l'insieme $A+\mathbb{N}$ definito dalle seguenti regole

$$\frac{}{\mathsf{inl}(a)}[a \in A] \qquad \frac{}{\mathsf{inr}(n)}[n \in \mathbb{N}]$$

- Si tratta di un insieme finito?
- $42 \in A + \mathbb{N}$?
- $\mathsf{inl}(4) \in A + \mathbb{N}$?
- $\mathsf{inl}(\text{rosso}) \in A + \mathbb{N}$?
- Descrivere intuitivamente quali sono gli elementi di $A + \mathbb{N}$
- Mostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\mathsf{inr}(n) \in A+\mathbb{N} \Rightarrow \mathsf{inr}(n+2) \in A+\mathbb{N}$

Relazioni e Funzioni negli interi

1. Date un esempio di relazione che non sia una funzione.

2. Sia $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $R = \emptyset$. Dimostrare che R è una funzione da $\emptyset$ in $\mathbb{Z}$. R è ancora una una funzione da $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$?

3. Date la definizione induttiva della relazione di divisibilità $k|n$. Ci sono varie maniere di risolvere questo esercizio, alcune suppongono di aver già definito la somma, altre la moltiplicazione.

4. Fissato un $\overline{n} \in \mathbb{Z}$ dimostrare che $\overline{n} \mid 0$ (per esempio dandone una derivazione).

5. Sia $X \subseteq \mathbb{Z}$ l'insieme definito induttivamente da

$$\frac{x}{x+3}[X1]$$

Mostare *induttivamente* la seguente proposizione $\forall x \in X.\ 3|x$.
HINT: ci sono varie regole possibili per definire la relazione $|$. Un insieme di regole che è anche comodo per svolgere questo esercizio è

$$\frac{}{n|n} \qquad \frac{k|n}{k|(n+k)} \qquad \frac{k|n}{k|(n-k)}$$

Si può anche dimostrare usando le regole induttive di $|$?

6. Mostrare che l'insieme X definito al punto precedente è diverso dall'insieme $\{x \in \mathbb{Z} \text{ tali che } 3|x\}$.

7. Dare una definizione induttiva della moltiplicazione tra naturali (supponete di aver già definito la somma).