Esercizi aggiuntivi informatica foglio 4

Riccardo Marchesin, Marco Girardi

October 2020

ATTENZIONE: QUESTI ESERCIZI SONO COMPLETAMENTE OPZIONALI, pensati per chi avesse già risolto quelli ufficiali e volesse esercitarsi con qualcosì'altro. Non sono stati proposti dal prof, ma da noi tutor.

Riflessioni sugli insiemi verticali (Fare riferimento al foglio di esercizi numero 4)

1. Dare una definizione di insieme *orizzontale*

2. Sia $\mathcal{X}$ la famiglia degli insiemi verticali e $\mathcal{Y}$ quella degli insiemi orizzontali. Dimostrare o trovare un controesempio per la seguente affermazione

$$\forall\, A \in \mathcal{X}.\, \forall\, B \in \mathcal{Y}. \quad A \cap B \text{ è un insieme finito.}$$

3. Descrivere tutti gli insiemi che sono sia verticali che orizzontali

4. E' possibile trovare una famiglia finita di insiemi non verticali la cui unione sia un insieme verticale? E una famiglia infinita?

5. E' possibile trovare una famiglia finita di insiemi non verticali la cui intersezione sia un insieme verticale? E una famiglia infinita?

Gli insiemi semidiagonali Definiamo ora la famiglia di insiemi *semidiagonali.*
Diremo che $A \subseteq [0,1] \times [0,1]$ è *semidiagonale* se rispetta le seguenti condizioni

$$(x,y) \in A \Rightarrow (x,x) \in A. \tag{1}$$
$$(x,y) \in A \Rightarrow (y,y) \notin A. \tag{2}$$

1. La famiglia di insiemi semidiagonali ammette minimo? E massimo?

2. Mostrare che intersezione e unioni di insiemi semidiagonali sono ancora semidiagonali.

3. Mostrare che se A è semidiagonale allora $[0,1] \times [0,1] \setminus A$ non è semidiagonale

Indizio: Nonostante sia possibile risolvere questo esercizio usando solo la definizione, il tutto diventa molto più immediato una volta che uno ha capito come sono fatti tutti gli insiemi semidiagonali.
Attenzione: Il termine semidiagonale è stato appositamente inventato per dare un nome a questo esercizio. NON USATELO, nè aspettatevi di trovarlo in libri o altre risorse.

Punti prefissi Sia $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ un funzione. f si dice monotona se, per ogni $A, B \subseteq X$ si ha

$$A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$$

Inoltre, un insieme $A \subseteq X$ si dice essere un *punto prefisso* di f se $f(A) \subseteq A$.

Si dimostri che se f è monotona, esiste un minimo punto prefisso di f.

Indizio: considerate la famiglia $\mathcal{F}$ dei punti prefissi di f.