

Tutorato Informatica - 4

Scrivete nome, cognome e matricola sul foglio che consegnate ai tutor.

1. Sia A un sottoinsieme di $[0, 1] \times [0, 1]$, ovvero

$$A \subseteq [0, 1] \times [0, 1] = \{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 1 \}$$

Diciamo che un tale A è *verticale* se, per ogni punto $\langle x_0, y_0 \rangle \in A$, si ha $\langle x_0, y \rangle \in A$ per qualunque $y \in [0, 1]$.

Indichiamo quindi con \mathcal{X} la famiglia degli insiemi verticali.

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \{ A \in \mathcal{P}([0, 1] \times [0, 1]) \mid A \text{ è verticale} \} \\ &= \{ A \in \mathcal{P}([0, 1] \times [0, 1]) \mid \forall \langle x_0, y_0 \rangle \in A. \forall y \in [0, 1]. \langle x_0, y \rangle \in A \} \end{aligned}$$

Si dimostri che per ogni $A, B \in \mathcal{X}$ valgono tutte le seguenti:

- $A \cup B \in \mathcal{X}$
- $A \cap B \in \mathcal{X}$,
- $([0, 1] \times [0, 1]) \setminus A \in \mathcal{X}$.

2. Si determini se esiste il più piccolo insieme verticale.
3. Si determini se esiste il più piccolo insieme *non* verticale, ovvero il più piccolo insieme della famiglia complementare $\mathcal{P}([0, 1] \times [0, 1]) \setminus \mathcal{X}$.