Esercizi aggiuntivi settimane 1-2

Riccardo Marchesin, Marco Girardi

September 2020

Nota: Tutti gli esercizi in questo fogli sono da considerarsi completamente opzionali, e sono stati pensati per chi, avendo già risolto quelli ufficiali, volesse esercitarsi con qualcos'altro.

1 Esercizi dalle slides

Disclaimer: questi esercizi sono copiati (a mano) dalle slide del corso; non è escluso che ci siano errori in giro.

1. Ipotesi: $p \wedge (q \wedge r)$. Tesi: $r \wedge p$.
2. Ipotesi: $p \vee q$. Tesi: $q \vee p$.
3. Ipotesi: $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. Tesi: $p \wedge (q \vee r)$.
4. $(p \wedge q) \Rightarrow (q \wedge p)$
5. $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee p)$
6. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.
7. $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$
8. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$
9. $((p \vee q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$.
10. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
11. $\neg(p \wedge \neg p)$
12. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow ((\neg q) \Rightarrow (\neg p))$
13. $\neg\neg p \Leftrightarrow p$
14. $((\neg q) \Rightarrow (\neg p)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
15. $\neg(p \vee q) \iff (\neg p \wedge \neg q)$
16. $\neg(p \wedge q) \iff (\neg p \vee \neg q)$

17. $(p \Rightarrow q) \iff (\neg p \vee q)$

18. $\neg(p \Rightarrow q) \iff (p \wedge \neg q)$

19. $((p \wedge q) \vee r) \iff ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$.

20. $((p \vee q) \wedge r) \iff ((p \wedge r) \vee (q \wedge r))$

21. Mostrare che l'uguaglianza è una relazione transitiva (usando le sole regole di introduzione ed eliminazione).

22. $(\forall x.\ p(x)) \wedge q \Rightarrow (\forall x.\ p(x) \wedge q)$

23. $(\forall x.\ p(x) \Rightarrow p(f(x))) \Rightarrow (\forall x.\ p(x) \Rightarrow p(f(f(x))))$

    Nei prossimi tre esercizi si possono usare liberamente proprietà note dall'aritmetica, per x, y naturali.

24. $\forall x.\ \exists y.\ y > x$.

25. $\nexists y.\ \forall x.\ y > x$.

26. $\exists y.\ \forall x.\ (y = x) \vee (y < x)$

27. In un ipotetica dimostrazione di $(\forall x.\ p(x)) \Rightarrow (\forall y.\ q(y))$ come vengono "scelte" la x e la y? E in $(\exists x.\ p(x)) \Rightarrow (\exists y.\ q(y))$.

28. Dimostrare che la formula $\forall x, y, z.\ p(x, y) \wedge q(y, z) \Rightarrow r(x, y, z)$ si può riscrivere come $\forall x, y.\ p(x, y) \Rightarrow (\forall z.\ q(y, z) \Rightarrow r(x, y, z))$.

29. Se l'insieme Y appartiene alla famiglia $\mathcal{X}$, allora$\bigcap \mathcal{X} \subseteq Y \subseteq \bigcup \mathcal{X}$

30. Esprimere una biezione tra $A \times B$ e $B \times A$.

31. Esprimere una biezione tra $A \times (B \times C)$ e $(A \times B) \times C$

32. Esprimere una biezione tra $\mathcal{P}(A)$ e $(A \rightarrow \{0, 1\})$

33. Esprimere una biezione tra$(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$ e $(B \times \{0\}) \cup (A \times \{1\})$.

34. Esprimere una biezione tra $A \cup B$ e $(A \times \{0\}) \cup ((B \setminus A) \times \{1\})$

35. Sia $f \in (A \rightarrow B)$ arbitraria, e f^{-1} la relazione inversa di f. Mostrare che f è iniettiva se e solo se $f^{-1} \in (img(f) \rightarrow A)$

36. Definire una biezione f, e la sua inversa, tra $(A \cup B) \rightarrow C$ e $(A \rightarrow C) \times (B \rightarrow C)$, supponendo che $A \cap B = \emptyset$.

2 Complementi agli esercizi- Foglio 1

1. Vale l'implicazione $q \Rightarrow ((p \vee q) \wedge \neg p)$? Se si fornirne una dimostrazione, se no dare un controesempio (ovvero un'assegnazione di verità per p e q che rende falsa la proposizione).

2. Vale l'implicazione $\neg p \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge \neg q))$? Se si fornirne una dimostrazione, se no dare un controesempio (ovvero un'assegnazione di verità per p e q che rende falsa la proposizione).

3 Esercizi non da slides

1. Esprimere la tabella di verità delle proposizioni $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$.

2. Esprimere la tabella di verità delle proposizioni $p \vee (q \wedge r)$, $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$, $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$. Vale l'equivalenza tra $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ e $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$?

3. .In queste tabelle diamo il valore di 0 a proposizioni false, e di 1 a quelle vere. Trovare un'espressione delle formule F_i la cui tabella di verità è data da:

p	q	$F_1(p,q)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

p	q	r	$F_2(p,q,r)$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

p	$F_3(p)$
0	1
1	0

F_1 ed F_2 sono equivalenti? Ci sono altri modi equivalenti di esprimere F_3?

4. L'operazione definita dalla tabella di verità F_1 nell'esercizio precedente, è chiamata *xor* (dall'inglese *exclusive or*, o "o esclusivo"). E' indicata con $p \oplus q$, o con $p \not\Leftrightarrow q$ (ma anche con altri simboli, vedi wikipedia). Dare una formula che esprime $p \vee q$ usando solo le operazioni $\wedge$ (and) e $\oplus$ (xor)

5. (Impegnativo) Date delle regole di introduzione ed eliminazione per $\oplus$

6. Quante sono le possibili formule logiche non equivalenti con 2 variabili? Quante con 3? Quante con n?

7. Sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X. Mostrare che $\bigcup \mathcal{P}(X) = X$ e che $\bigcap \mathcal{P}(X) = \emptyset$