

Esercizi aggiuntivi Tutorato 0

Riccardo Marchesin & Cesare Straffelini

21 Settembre 2022

Tabelle di verità ed un nuovo connettivo

1. Esprimere la tabella di verità delle proposizioni $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \Rightarrow q$.
2. Esprimere la tabella di verità delle proposizioni $p \vee (q \wedge r)$, $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$, $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$. Vale l'equivalenza tra $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ e $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$?
3. In queste tabelle diamo il valore di 0 a proposizioni false, e di 1 a quelle vere. Trovare un'espressione delle formule F_i la cui tabella di verità è data da:

p	q	$F_1(p, q)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

p	q	r	$F_2(p, q, r)$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

p	$F_3(p)$
0	1
1	0

F_1 ed F_2 sono equivalenti? Ci sono altri modi equivalenti di esprimere F_3 ?

4. (Impegnativo) L'operazione definita dalla tabella di verità F_1 nell'esercizio precedente, è chiamata *xor* (dall'inglese *exclusive or*, o "o esclusivo"). E' indicata con $p \oplus q$, o con $p \nleftrightarrow q$ (ma anche con altri simboli, vedi wikipedia). Dare una formula equivalente a $p \vee q$ che usi solo le operazioni \wedge (and) e \oplus (xor)

Tautologie o teoremi?

5. Esprimere la tabella di verità della proposizione $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$.
6. Dimostrare, usando le regole di introduzione e di eliminazione, che

$$(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q).$$

7. Notiamo che, nell'esercizio 5, abbiamo mostrato che la proposizione $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q)$, che d'ora in poi chiameremo per brevità ψ , è *sempre vera*, cioè la sua tabella di verità è formata da una colonna di tutti 1. Una proposizione sempre vera è detta anche TAUTOLOGIA. Il concetto di essere una tautologia è un concetto *semantico*, cioè legato al significato della formula. Nel 6 invece, abbiamo *dimostrato* ψ , e dunque abbiamo provato che ψ è un TEOREMA. Il concetto di teorema è *sintattico*: abbiamo usato dei passaggi logici formali per dimostrare ψ .

La domanda di questo esercizio è: *secondo voi*, c'è un legame tra sintassi e semantica? Possiamo dire che ogni teorema è una tautologia, cioè che tutto ciò che si può dimostrare è vero? Viceversa, possiamo dire che ogni tautologia è un teorema, cioè che tutto ciò che è vero si può dimostrare?

Le leggi di de Morgan

8. Sia Ω un insieme, A e B sottoinsiemi di Ω . Provare le leggi di De Morgan:
- (a) $\Omega \setminus (A \cap B) = (\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)$.
 - (b) $\Omega \setminus (A \cup B) = (\Omega \setminus A) \cap (\Omega \setminus B)$.
9. Dimostrare (con tabelle di verità o intro/elim, a scelta):
- (a) $\neg(p \wedge q) = (\neg p) \vee (\neg q)$.
 - (b) $\neg(p \vee q) = (\neg p) \wedge (\neg q)$.
10. Come si spiega la somiglianza tra l'esercizio 8 e l'esercizio 9?

Innumerevoli formule

11. Quante sono le possibili formule logiche non equivalenti con 2 variabili? Quante con 3? Quante con n ?

Insiemistica

12. Sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X . Mostrare che $\bigcup \mathcal{P}(X) = X$ e che $\bigcap \mathcal{P}(X) = \emptyset$

Quanti connettivi servono davvero?

14. (Impegnativo) A lezione avete visto sei connettivi (\vee , \wedge , \rightarrow , \leftrightarrow , \neg , **falso**). Tuttavia non tutti questi connettivi sono necessari: ad esempio sapete già dalle slides che $\neg p$ si può esprimere come $p \rightarrow \mathbf{falso}$. Un altro esempio che già conoscete è che $p \leftrightarrow q$ è equivalente a $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Spiegate cosa significa "*è equivalente*" in questo contesto, e dimostrate che bastano due connettivi (l'implicazione \rightarrow , ed il **falso**) per esprimere tutti gli altri sei.
Suggerimento: iniziate con il dimostrare che $(p \rightarrow q)$ equivale a $(\neg p \vee q)$ e sfruttate le leggi di de Morgan.

15. (Impegnativo) In realtà si può fare di meglio: basta UN connettivo, la barra di Sheffer, indicata con $|$ e definita da $p|q := \neg(p \wedge q)$. Se volete, provate a provarlo.