

2016 年度 修士論文

地球外核最上部の安定成層における
MHD 赤道波

MHD equatorial waves at the top of the
Earth's outer core

九州大学 理学府 地球惑星科学専攻
地球内部ダイナミクス分野

中島 涼輔

2017 年 2 月 10 日 提出（初版）
2017 年 4 月 3 日 第 2 版

要旨

地球の外核最上部には安定成層が存在すると言われており、非常に注目されている。そこで流体運動は地表での地磁気変動をもたらし、それを説明する理論と観測との比較は、外核の情報を知る一つの手段である。本研究では、その安定成層領域の赤道域の流体波動に注目した。赤道域の内部起源磁場変動には、永年加速や西方移動など特徴的な変動があり、外核最上部での興味深い流体運動を示唆している。私たちは、大気や海洋の分野で研究されている「赤道波」を外核にも応用し、磁場が存在する場合の赤道域の波動について調べた。

数値的及び、解析的な結果から、一様な東西方向の磁場は、ゆっくりとした変動を赤道から逃がすはたらきがあることがわかった。また、磁場の強さに緯度依存性があると、共鳴が起こり、より複雑になる。この共鳴については、さらなる研究が必要である。

A number of studies show the existence of a stably stratified layer at the top of the Earth's outer core, in which many researchers are interested. The fluid motion within this layer induces geomagnetic variation on the Earth's surface. It is one of the methods to obtain information of the Earth's outer core that the comparison of geomagnetic observation with the theory of flow at the top of the Earth's outer core. In this study, we focused on equatorial waves within the stratified layer. The geomagnetic variations of internal origin in the equatorial region include characteristic fluctuations such as secular acceleration and westward drift. We applied "equatorial wave" theory of meteorology and physical oceanography to waves at the top of the core, and investigated "MHD (magnetohydrodynamic) equatorial waves".

Numerical and analytical results show that imposed uniform toroidal (east-west) magnetic field make it impossible for slow waves to trap close to the equator. If the strength of the imposed field depends on latitude, it can cause resonances. Further studies are needed in order to help physical understand of this resonances.

第2版のまえがき

第2版は、修論提出締め切り後に、指導教員等からの指摘を修正・加筆したものである。初版では、時間の都合上、付録Gが未完であったことをここにお詫びする。

また、現在でも(i)付録Fの最終節の「磁場勾配がある場合」の周波数に虚部が現れること、(ii)付録Gの一様な東西磁場がある場合は、周波数が虚部を持てば、赤道トラップされる解が存在するかもしれないこと、に関しては、どのように理解・計算すれば良いのかわからず中途半端な状態になっている。このこともお詫び申し上げたい。

以下に、本文中では引用していないが、本修士論文に関係するであろう（初版完成後に発見した）論文を挙げておく。（著者がちゃんと目を通してないものも含む。）

- Zaqrashvili et al.(2009)[55]

球座標系でのMHD浅水波方程式系の波は、Zaqrashvili et al.(2007)[56]で初めて計算されたが、この論文では、背景のトロイダル磁場は、あまり現実的なものではなく、また、Lambパラメータが0の極限の場合（これは、2次元非発散の場合に対応する）でしか計算されていない。そこで、Zaqrashvili et al.(2009)では、より現実的な赤道反対称の背景トロイダル磁場を仮定して計算した。この背景磁場プロファイルでは、本修士論文で示したように特異点が現れるが、近似によって、特異点が現れないようにしている。

- Mak et al.(2016)[38]

MHD浅水波方程式系のシアー不安定。磁場勾配やトポグラフィー変化まで考慮した不安定の条件が示してある。また、簡単なシアープロファイルでの計算（磁場とトポグラフィーは一定）も示してある。

- Márquez-Artavia et al.(2017)[39]

球座標系でのMHD浅水波方程式系の波（Zaqrashvili et al., 2007[56]）を数値的な方法などで詳しく調べたもの。不安定なRossby波が存在するらしいが、まだちゃんと読んでいないのでよく分からぬ。

この修士論文のPDF版は、九州大学理学府地球惑星科学専攻 地球内部ダイナミクス分野ホームページ内の個人ページ (<http://dyna.geo.kyushu-u.ac.jp/HomePage/nakashima/index.html>) にアップロードしている。

目次

1	はじめに	1
1.1	地磁気観測	1
1.1.1	赤道域の永年加速	1
1.1.2	西方移動	4
1.1.3	地磁気モデルによる流れ場の推定	6
1.2	地球外核最上部の安定成層	8
1.2.1	地震波観測	8
1.2.2	熱的な成層	10
1.3	背景磁場の仮定に関して	13
2	方法	15
2.1	座標系	15
2.2	基礎方程式	15
2.3	基礎方程式の変形	16
2.4	変数分離	17
2.5	鉛直構造方程式	18
2.5.1	無次元化	18
2.5.2	境界条件	19
2.5.3	全領域で $N^2 > 0$ の場合	21
2.5.4	下側境界付近で、 N^2 が小さくなる場合	25
2.6	水平構造方程式	28
2.6.1	無次元化	29
2.6.2	離散化	31
2.6.3	境界条件	32
2.6.4	水平構造方程式の行列化	33
2.6.5	行列の固有値問題	39
2.6.6	$\bar{\mathcal{V}}_0 = \bar{\mathcal{V}}_1 = 0$ (磁場なしの赤道波) の場合の結果の比較	39
2.6.7	修正境界条件	42
3	結果と考察	46
3.1	東西一様磁場の場合 ($\bar{\mathcal{V}}_0 \neq 0$ 、 $\bar{\mathcal{V}}_1 = 0$)	46
3.1.1	$\bar{\omega} > \bar{k}_x $ の場合	48
3.1.2	$\bar{\omega} < \bar{k}_x $ の場合	48
3.1.3	地球外核のパラメータでの分散関係	54

3.2	赤道反対称磁場の場合 ($\bar{\mathcal{V}}_0 = 0, \bar{\mathcal{V}}_1 \neq 0$)	58
3.2.1	<u>数値計算の結果</u>	58
3.2.2	<u>観測との比較</u>	70
4	議論と今後の課題	72
4.1	MHD 赤道波に関する他の研究	72
4.2	東西一様磁場の場合 ($\bar{\mathcal{V}}_0 \neq 0, \bar{\mathcal{V}}_1 = 0$)	72
4.3	赤道反対称磁場の場合 ($\bar{\mathcal{V}}_0 = 0, \bar{\mathcal{V}}_1 \neq 0$)	73
4.3.1	<u>解析解への準備</u>	73
4.3.2	<u>微小散逸項の導入</u>	74
5	結論	76
	謝辞	76
	参考文献	81
付録 A	本文の補足	82
A.1	様々な成層での鉛直構造の固有値の例	82
A.1.1	<u>全領域で $N^2 > 0$ の場合</u>	82
A.1.2	<u>下側境界付近で、N^2 が小さくなる場合</u>	86
A.2	MHD 赤道波の固有関数	88
A.2.1	<u>$\bar{\mathcal{V}}_0 = \bar{\mathcal{V}}_1 = 0$ (磁場なしの赤道波) の場合の固有関数</u>	88
A.2.2	<u>$\bar{\mathcal{V}}_0 \neq 0, \bar{\mathcal{V}}_1 = 0$ (東西一様磁場) の場合の固有関数</u>	103
第 I 部	一様な安定成層をした電磁流体の、回転系での非散逸な波動	124
付録 B	磁場と回転が一様な無限空間	124
B.1	考える系	124
B.2	基礎方程式	125
B.3	基礎方程式の変形	127
B.4	独立な成分の選択	128
B.5	フーリエ変換	130
B.6	速度と磁場の水平成分を計算する場合	131
B.7	分散関係	133
B.7.1	<u>$f \cdot k = 0$ の場合</u>	133
B.7.2	<u>$f \cdot k \neq 0$ の場合</u>	136
B.7.3	<u>基本的な波の位相速度・群速度</u>	137

B.8	分散関係の極限的なふるまい	139
B.8.1	Alfvén 波周波数 ω_M が大きい場合	140
B.8.2	内部重力波周波数 ω_A が大きい場合	141
B.8.3	慣性波周波数 ω_C が大きい場合	141
B.8.4	慣性波周波数が大きい場合の遅い波 (MC 波、MAC 波)	142
B.8.5	分散関係のグラフ	142
B.8.6	分散関係の波数依存性	145
B.9	線形近似における波のエネルギー	149
B.10	「遅い波の近似」	151
B.10.1	分散関係	151
B.10.2	「遅い波の近似」の基礎方程式の上での意味	152
B.10.3	「遅い波」のエネルギー	152
B.10.4	$\omega_M \ll \omega_A$ の場合の「遅い波」	153
B.10.5	$\omega_M \ll \omega_A$ の場合の「遅い波」と Braginsky(1993) との関係性	154
B.10.6	「遅い波」の位相速度・群速度	156
B.10.7	位相速度に関する注意	157
B.11	流体粒子の変位を用いた「遅い波」の説明	158
B.11.1	$\delta r_z = 0$ の場合	159
B.11.2	$\delta r_z \neq 0$ の場合	161
B.12	magnetostrophic balance への遷移	165
B.12.1	$\frac{f}{2} \ll \frac{k_z B}{\sqrt{\rho_0 \mu}}$ の場合 (磁場が強い、または、波のスケールが小さい場合)	167
B.12.2	$\frac{f}{2} \gg \frac{k_z B}{\sqrt{\rho_0 \mu}}$ の場合 (回転が速い、または、波のスケールが大きい場合)	169
C	付録 C 鉛直方向に回転軸をもつ、無限平板にはざまれた薄い流体層	173
C.1	考える系	173
C.2	基礎方程式	173
C.3	鉛直モード展開	174
C.4	固有方程式の導出	175
C.5	速度と磁場の水平成分を計算する場合	176
C.6	境界条件の導出	176
C.6.1	散逸の有無と境界条件	176
C.6.2	壁内部の物理量	179
C.6.3	速度に関する境界条件	180
C.6.4	電磁気学的な境界条件	181
C.7	境界条件と固有値問題	182
C.7.1	$f = 0, B_z = 0$ の場合	183
C.7.2	$f = 0, B_z \neq 0$ の場合	185

C.7.3	$f \neq 0, B_z = 0$ の場合	196
C.7.4	$f \neq 0, B_z \neq 0$ の場合	200
C.8	境界層と非散逸境界条件	202
C.8.1	Ekman 層	202
C.8.2	Hartmann 層	203
C.8.3	平行層	205
C.8.4	完全導体の壁のときの電場の境界条件	206
C.9	$B_z \neq 0$ の場合の境界条件の不足と「遅い波の近似」	207
C.9.1	Alfvén 波による磁場の接線成分の不連続の解消	207
C.9.2	$f = 0$ の場合	208
C.9.3	$f \neq 0$ の場合	208
C.10	境界条件のまとめ	216
C.11	無限空間中の波と、境界がある場合の波の固有モード	218
付録 D	静水圧 f 面近似を用いた無限空間	220
D.1	考える系と薄い安定成層領域の近似	220
D.2	伝統的近似 (traditional approximation)	222
D.3	静水圧 f 平面近似と磁場の摂動の鉛直成分	224
D.4	基礎方程式の変形	224
D.5	分散関係	225
D.5.1	静水圧近似の下での分散関係	225
D.5.2	「遅い波の近似」を用いた場合の分散関係	226
D.5.3	「遅い波」の群速度、位相速度	226
D.5.4	$\omega_M \ll \omega_A$ の場合の「遅い波」	227
D.6	変数分離	227
D.6.1	$\mathbf{B} = \mathbf{B}_H$ のとき	228
D.6.2	$\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ のとき	230
D.7	地衡流調節	232
D.7.1	一様でない方向の流れの摂動を初期に与えた場合	234
D.7.2	圧力の摂動を初期に与えた場合	234
D.7.3	一様な方向の流れの摂動を初期に与えた場合	236
D.8	背景磁場が水平成分のみの場合の地衡流調節	237
D.8.1	一様でない方向の流れの摂動を初期に与えた場合	240
D.8.2	圧力の摂動を初期に与えた場合	241
D.8.3	一様な方向の流れの摂動を初期に与えた場合	243
付録 E	静水圧 f 面近似を用いた薄い流体層	244

E.1	考える系と用いる方程式	244
E.1.1	背景磁場が水平成分のみの場合	244
E.1.2	背景磁場が鉛直成分のみの場合	245
E.2	鉛直構造方程式の境界条件	245
E.2.1	背景磁場が水平成分のみの場合	245
E.2.2	背景磁場が鉛直成分のみの場合	246
E.3	鉛直構造方程式の固有値問題	249
E.3.1	背景磁場が水平成分のみの場合	249
E.3.2	背景磁場が鉛直成分のみの場合	250
E.4	水平構造方程式の固有値問題（分散関係の導出）	253
E.4.1	背景磁場が水平成分のみの場合	253
E.4.2	背景磁場が鉛直成分のみの場合	256
付録 F	静水圧近似を用いた中緯度 β 平面	262
F.1	球座標系での摂動方程式	262
F.2	β 面近似	265
F.3	基礎方程式の変形	267
F.4	鉛直方向の電流と水平方向の電場	268
F.5	背景磁場が水平成分のみの場合	269
F.5.1	変数分離	269
F.5.2	鉛直構造方程式の境界条件	270
F.5.3	鉛直構造方程式の固有値問題	270
F.5.4	$B_y = 0$ のときの水平構造方程式	271
F.5.5	中緯度 β 面近似	274
F.5.6	分散関係 - (i) 磁場も回転もない場合	276
F.5.7	分散関係 - (ii) 磁場なしで、 f 面の場合	276
F.5.8	分散関係 - (iii) 回転なしで、背景磁場が一様な場合	277
F.5.9	分散関係 - (iv) 背景磁場が一様で、 f 面の場合	277
F.5.10	分散関係 - (v) 磁場なしの場合	277
F.5.11	分散関係 - (vi) 背景磁場が一様な場合	278
F.5.12	Rossby 波・MC Rossby 波の位相速度・群速度	290
F.5.13	Rossby 波の伝播メカニズム	293
F.5.14	「遅い波の近似」と MC Rossby 波の伝播メカニズム	295
F.5.15	磁場勾配がある場合	298
F.5.16	分散関係 - (vii) 回転はないが、磁場勾配がある場合	301
付録 G	静水圧近似を用いた赤道 β 平面	303

G.1	赤道 β 面近似	303
G.2	磁場なしの場合	304
G.2.1	磁場なし赤道波の微分方程式	304
G.2.2	微分方程式の局所漸近解析	305
G.2.3	微分方程式のべき級数解と固有関数	307
G.2.4	分散関係	311
G.2.5	$i_* = 0$ の場合（混合 Rossby 重力波）	313
G.2.6	$V(y) = 0$ の場合（赤道 Kelvin 波）	315
G.2.7	赤道波の安定性	318
G.2.8	変分法による分散関係の導出	320
G.3	一様な東西磁場がある場合	325
G.3.1	磁場の影響を受けた赤道波の微分方程式と局所漸近解析	325
G.3.2	$\omega_I = 0$ かつ $\omega_R^2 > V_{Ax0}^2 k_x^2$ の場合	328
G.3.3	無次元分散関係	329
G.3.4	$i_* = 0$ の場合（磁場の影響を受けた混合 Rossby 重力波）	330
G.3.5	$V(y) = 0$ の場合（磁場の影響を受けた赤道 Kelvin 波）	332
G.3.6	無次元分散関係のグラフ	333
G.3.7	混合 Rossby 重力波の周波数の近似解	337
	付録 H 静水圧近似を用いた薄い球殻（基礎方程式）	343

1 はじめに

地球の外核の最上部は、安定成層しているだろうと主張する研究は多くあり（1.2節参照）、古くから興味を持たれていたが（例えば、Gubbins et al.(1982)[23]、Braginsky(1987, 1993, 1998, 1999)[4, 5, 6, 7]、Bergman(1993)[3]など）、最近でもかなり注目されている（例えば、Helffrich(2012, 2014)[24, 25]、Balk(2014)[2]、Buffett(2014)[8]、Hernlund and McNamara(2015)[29]、Jault and Finlay(2015)[34]、Nakagawa(2015)[41]、Takehiro(2015)[51]、Vidal et al.(2015)[53]、Buffett et al.(2016)[9]など）。安定成層があると、鉛直方向の流れは抑制され、水平方向の流れが卓越することになる。また、成層が十分強ければ、地球外核最上部の安定成層領域と、より内部の領域の流体運動を別々に考えることが、近似的に行える（Takehiro and Lister(2001)[52]）^{*1}。そのため、地球の外核最上部の流れの様子は、磁場の効果などを無視すれば、大気や海洋と同じような方程式で表すことができ、同じようなふるまいをするだろう、ということが予想される。

さて、大気や海洋の分野では、赤道域の波動は「赤道波」として詳しく調べられている。本研究では、この理論を地球の外核最上部にも応用してみた。地磁気観測からも外核の赤道付近に局在する擾乱が見つかるなど（1.1節参照）、外核の赤道域の様子は、非常に興味深い。

今回は、特に、磁場の効果があると赤道波はどのように変更を受けるのか、に注目して研究を行った。

この節では、本研究に関する過去の研究について簡単な紹介を行う。2節では、基礎方程式と数値的に計算する方法について示し、3節では、その計算結果を示す。また、適宜、考察も行う。4節では、本研究の問題点について論じ、今後の課題を示す。5節は、本研究の結論である。

1.1 地磁気観測

この節では、地球外核の赤道域の様子に興味をかきたてる地磁気観測・データ解析の研究をいくつか紹介する。

1.1.1 赤道域の永年加速

Chulliat and Maus(2014)[11]、Chulliat et al.(2015)[12]、Ou et al.(2016)[44]などでは、赤道付近のパッチ状の地磁気の永年加速（地磁気の動径成分の時間に関する2階微分、secular acceleration、SA）に注目している。

^{*1} 内部の領域の対流が、安定成層に貫入する長さ δ_p は

$$\delta_p \sim \frac{2\Omega}{N} \frac{1}{k_H} \quad (1.0.1)$$

で表される（Takehiro and Lister(2001)[52]）。ここで、 Ω は自転角速度、 N は浮力振動数、 k_H は水平波数。一方、磁場が存在すると、Alfvén 波によって容易に貫入するという研究もある（Takehiro(2015)[51]）。

Chulliat and Maus(2014)[11] では、CHAMP (Challenging Minisatellite Payload) 衛星の 2001 年 1 月から 2010 年 9 月までの地磁気データを用いて解析を行った。6 次までの球面調和関数展開された永年加速の展開係数に対し、

$$w(n) = \frac{1 + \cos(n\pi/10)}{2} \quad (n \text{ は球面調和関数の次数}) \quad (1.1.1)$$

と定義された Hann 窓と呼ばれるフィルターをかけ、それに対し主成分分析などを行った。

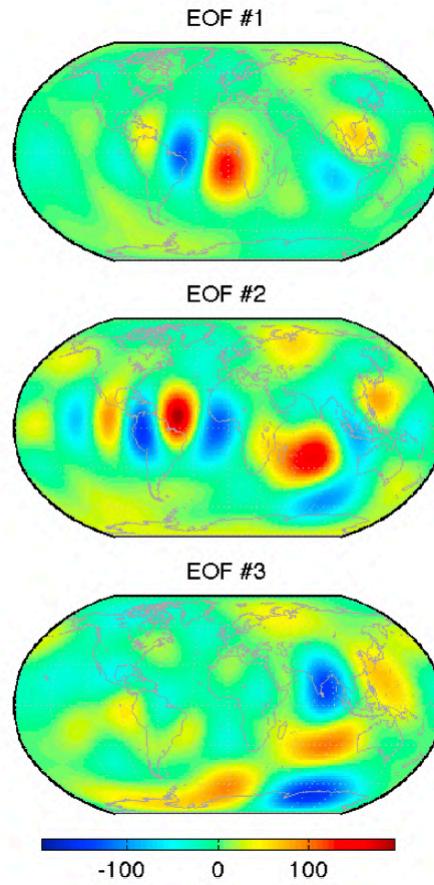


Fig.1 Chulliat and Maus(2014)[11] によるコア・マントル境界 (CMB) での永年加速の主成分分析の結果。最初の 3 つの経験的直交関数のみ示されている。最初の 2 つの経験的直交関数が赤道域のパッチ状の永年加速を表現している。

解析の結果、周期が 5~6 年の赤道域に局在する定在波的な永年加速が見つかった。また、この論文では、この定在波は zonal な流れをもつねじれ振動 (torsional oscillation) では説明できないことを示した。

Chulliat et al.(2015)[12] では、Chulliat and Maus(2014) と同様の解析を行っているが、異なるデータセットを用いている。1 つは、CHAMP 衛星と防衛気象衛星計画 (Defense Meteorological

Satellite Program、DMSP) の衛星の地磁気データを組み合わせたもの、もう一つは CHAOS-5 モデル [15] である。CHAOS-5 モデルは、CHAMP 衛星、Ørsted 衛星、SAC-C (Satelite de Aplicaciones Cientificas-C) 衛星、SWARM 衛星の地磁気データと地上の観測データを組み合わせてつくられた地球磁場モデルである。また、この論文では、永年加速を赤道対称成分と赤道反対称成分に分離し、周期や伝播の速さなど詳しく調べてある。

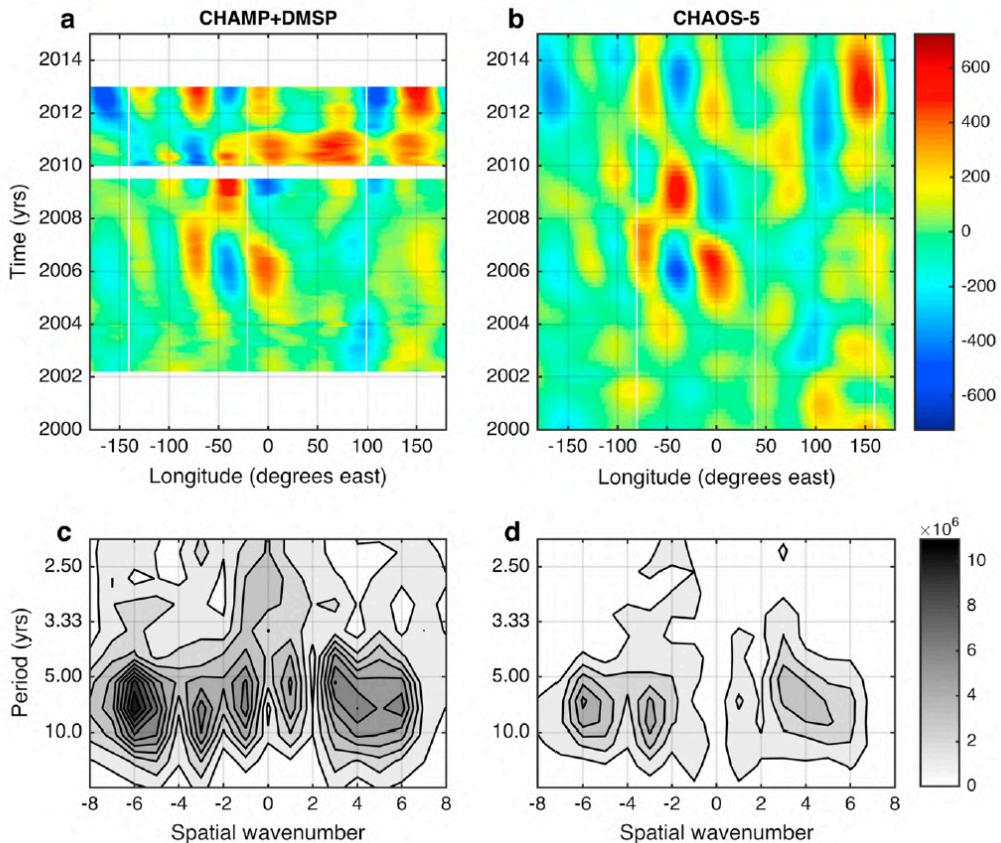


Fig.2 永年加速の赤道対称成分。左が CHAMP 衛星 +DMSP 衛星のデータ、右が CHAOS-5 モデルを用いた解析結果である。(a,b) 緯度 5 度の部分を切り出したホフメラー図。横軸が経度（東経が正）、縦軸が時間（下ほど過去）である。色の単位は nT/yr^2 。定在波的な変動がみられる。(c,d)FFT による周波数解析の結果。横軸が東西波数、縦軸が周期（単位は yr）である。東進成分と西進成分が両方あるために定在波的に見えるが、やや西進の方が強い。Chulliat et al.(2015)[12] より引用。

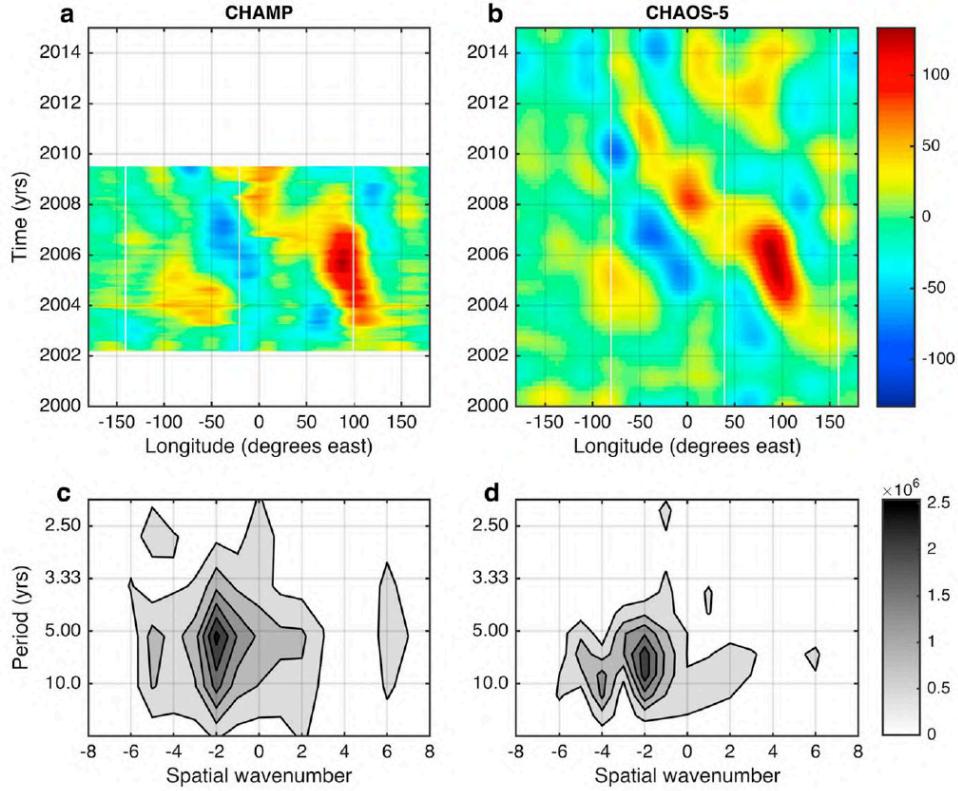


Fig.3 Fig.2と同じであるが、赤道反対称成分の解析の結果。ほとんど西進する成分のみ含まれる。Chulliat et al.(2015)[12]より引用。

さらに、Ou et al.(2016)[44]では、CHAOS-5 モデルの 1 つ前のバージョンである CHAOS-4 モデル [43] からも、Chulliat and Maus(2014) や Chulliat et al.(2015) と同じような定在的な変動を見つけていている。

1.1.2 西方移動

地球磁場の非軸対称成分が西に移動することは、昔からよく知られており、しかもその西方移動は低緯度で顕著である（例えば、Finlay and Jackson(2003)[14]、Yukutake and Shimizu(2015)[54]など）。

Finlay and Jackson(2003) と Yukutake and Shimizu(2015) は gufm-1 モデル [33] という過去 400 年間の地磁気モデルを用いて解析を行っている。

Finlay and Jackson(2003)[14] は、地磁気の非軸対称成分の周波数解析を行った。また、Radon 変換に基づく方法で、各緯度での伝播速度を計算し、赤道付近で西進成分が強いということを示した。

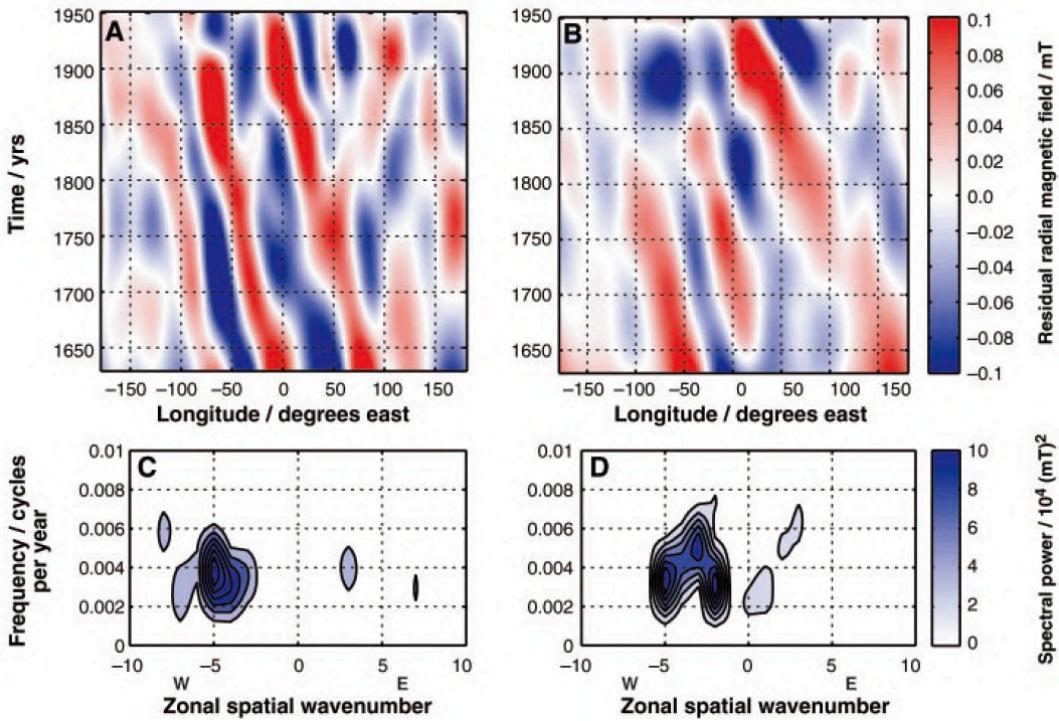


Fig.4 (A) 赤道でのホフメラー図。横軸が経度（東経が正）、縦軸が時間（単位は年、下ほど過去）である。(B) 南緯 40 度でのホフメラー図。(C) 赤道での周波数解析の結果。横軸が東西波数（東が正）、縦軸が周波数である（単位は 1/年）。東西波数 5 の西進成分が強いことがわかる。(D) 南緯 40 度での周波数解析の結果。Finlay and Jackson(2003)[14] より引用。

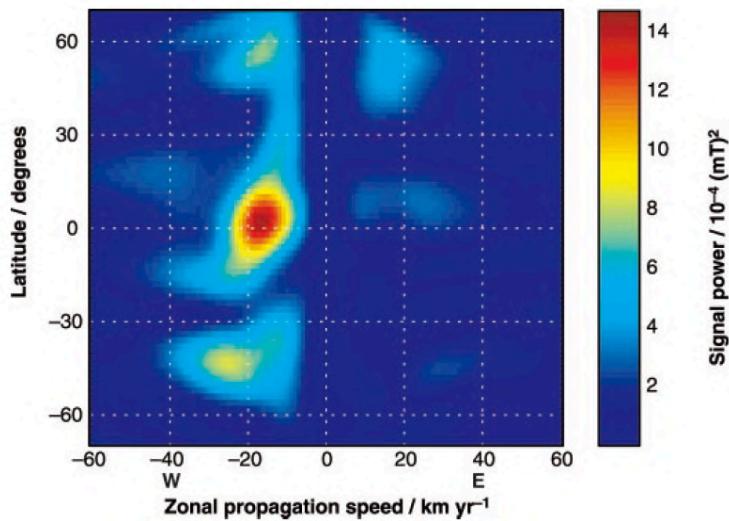


Fig.5 各緯度での地磁気の非軸対称成分の東西伝播速度。縦軸が緯度（北緯が正）、横軸が東西伝播速度（東向きが正、単位は km/year）である。赤道付近で西進成分が強いことがわかる。Finlay and Jackson(2003)[14] より引用。

Yukutake and Shimizu(2015)[54] では、Gauss 係数（地磁気を球面調和関数展開したときの展開係数）を定在成分とドリフト成分に分離して解析した。その結果、Gauss 係数の sectorial 成分（展開係数の $n = m$ のもの）で西方移動が顕著であることがわかった。sectorial 成分だということは、低緯度で寄与が大きいということを意味している。

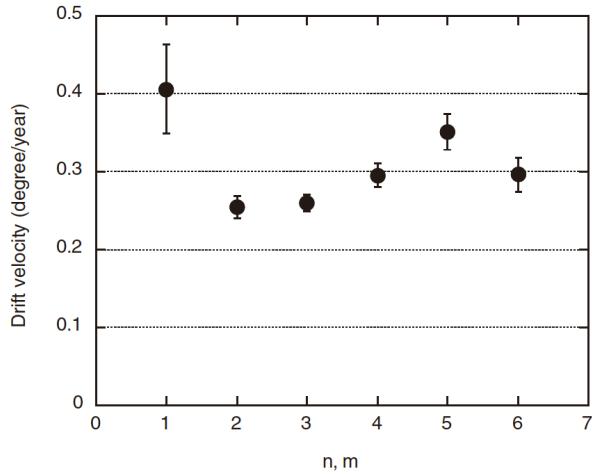


Fig.6 各 sectorial 成分の西向きのドリフト速度。横軸は次数 n ($n = m$)、縦軸は西向き ドリフト速度である。Yukutake and Shimizu(2015)[54] より引用。

1.1.3 地磁気モデルによる流れ場の推定

Gillet et al.(2015)[16] は、COV-OBS モデル [18] という地磁気モデルを用いて、統計的に CMB 直下の流れ場を推定した。この論文では、流れ場を推定するときに、非圧縮・赤道対称・準地衡流 (quasi-geostrophic, QG) を仮定している。準地衡流の場合、回転軸に沿ったコラム状の流れになり、

$$\nabla_H \cdot (\mathbf{u}_H \cos^2 \theta) = 0 \quad (1.1.2)$$

を満たす。ここで、 $\nabla_H \cdot$ は水平発散、 \mathbf{u}_H コア表面流、 θ は余緯度である。得られた流れ場の帯状 (zonal) 成分に対し、4 年から 9.5 年周期のバンドパスフィルターをかけると、いわゆる数年周期の速いねじれ波 (torsional wave)^{*2}[17] を見つけることができる (Fig.7)。この流れの推定から、回転軸に対する円筒座標の動径方向の磁場の大きさは、内核付近で 1.9mT、赤道付近で 0.6mT であると見積もることができる。また、内核側から赤道に向かって、ねじれ波が伝播しているが、赤道では反射していないこと、緯度 10 度あたりで流れが弱くなっていることがわかる。

^{*2} 最近では、ねじれ振動 (torsional oscillation, TO) をねじれ波 (torsional wave) と呼ぶ論文が多い。これは赤道で反射していないという研究 (例えば、Gillet et al.(2010, 2015)[17, 16]) がいくつかあるからかもしれない。

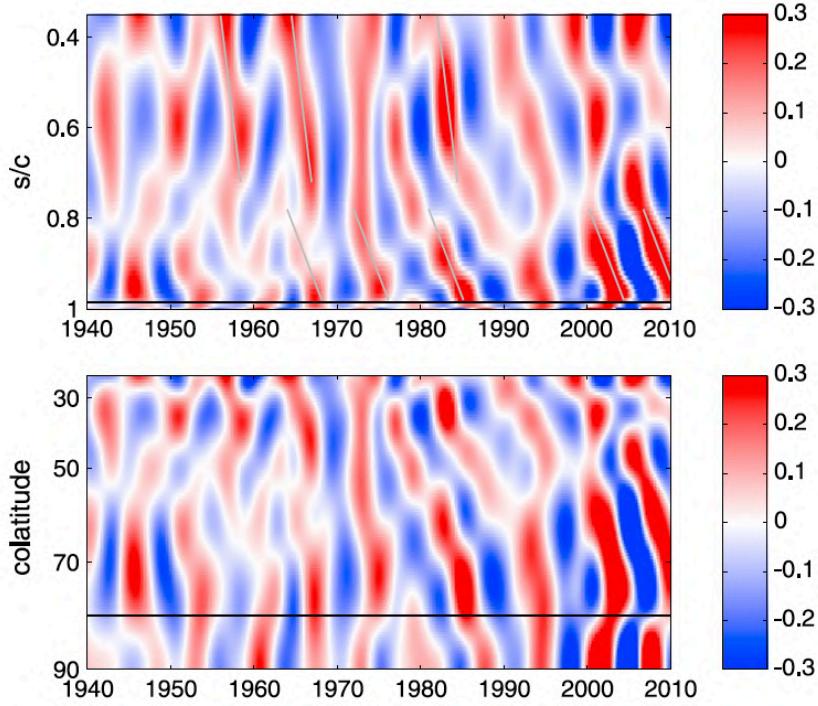


Fig.7 推定された流れ場の帯状成分に対し、4年から9.5年周期のバンドパスフィルターをかけたもの。色の単位はkm/yr。(上図) 横軸は時間(西暦)、縦軸は回転軸に対する円筒座標の動径座標 s をコア半径 c で規格化したもの($s/c = 1$ で赤道)。黒の線は緯度10度の位置を表す。(下図) 横軸は上図と同じだが、縦軸は余緯度。上図とは $s/c = \cos \theta$ の関係性がある。Gillet et al.(2015)[16]より引用。

この、赤道でねじれ波が反射しないという問題について、原因の解明を試みようとしている研究がすでにいくつかある(例えば、Schaeffer et al.(2012)[48]、Schaeffer and Jault(2016)[47]など)。

Schaeffer et al.(2012)[48]では、絶縁体壁の場合のAlfvén波の反射について調べた。このときの反射係数 R は、磁気プランドル数 $Pm = \frac{\nu}{\eta}$ (ν は動粘性係数、 η は磁気拡散率)を用いて、

$$R = \frac{1 - \sqrt{Pm}}{1 + \sqrt{Pm}} \quad (1.1.3)$$

と表される。この場合、 $Pm = 1$ であれば、反射は起こらない。

続いて、Schaeffer and Jault(2016)[47]では、マントル最下部のように、小さな電気伝導度を持った層が存在する場合のAlfvén波の反射について調べた。このときの反射係数 R は、マントルのコンダクタンス(電気抵抗の逆数) G と壁に垂直な磁場強度 B 、透磁率 μ_0 、液体の密度 ρ を用いて

$$R = \frac{1 - Q - \sqrt{Pm}}{1 + Q + \sqrt{Pm}} \quad (1.1.4)$$

となる。ここで、

$$Q = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} GB \quad (1.1.5)$$

である。地球外核の場合は、 $G \simeq 1.3 \times 10^8 \text{ S}$ のとき、Alfvén 波は完全に壁に吸収されるだろう、ということがわかった。ただし、 G がこれより大きかったり小さかったりすれば、反射が起こる。

1.2 地球外核最上部の安定成層

1.2.1 地震波観測

Helffrich and Kaneshima(2010)[26]、Kaneshima and Helffrich(2013)[35]、Kaneshima and Matsuzawa(2015)[36] などでは、外核最上部を通過する地震波を用いて、外核最上部の地震波を調べた。それ以前にも、同様の研究が行われており、例えば、Hernlund and McNamara(2015)[29] で多くの研究が挙げられている。

それらの研究では、SmKS 波 ($m = 1, 2, \dots$) という地震波を用いる (Fig.8)。SmKS 波は、マントル内は S 波、外核に入ると P 波に変換され、CMB で $m - 1$ 回反射したのち、再び S 波でマントルへ抜けていく波である。反射の回数 (m) の違いにより、波が到達する深さが異なるので、そのことを用いて、地震波速度 (P 波速度) の深さ分布を調べる。

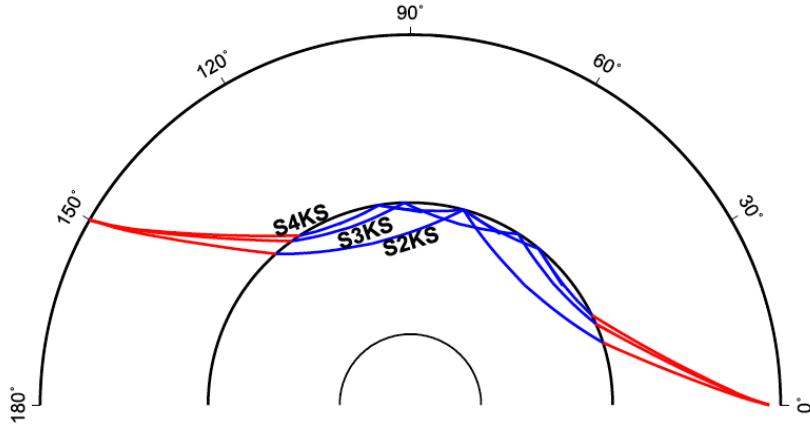


Fig.8 SmKS 波の経路。Kaneshima and Matsuzawa(2015)[36] より引用。

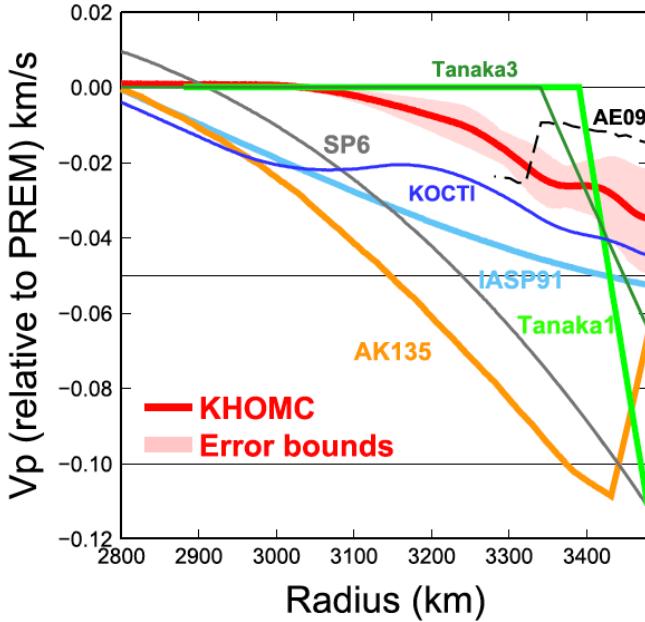


Fig.9 P 波速度の深さ分布。横軸は地球中心からの距離（一番右が CMB）、縦軸は P 波速度の PREM からのずれである。ここで、PREM の外核の P 波速度は断熱温度勾配から求められている。様々な研究の結果の違いは、色の違う線で表してある。Kaneshima and Matsuzawa(2015)[36] より引用。

いくつかの研究で得られた、P 波速度の深さ分布がまとめられたグラフを Fig.9 に示す。これらの研究はすべて、外核最上部で P 波速度が断熱温度勾配よりも遅くなることを示している。ここで、P 波速度は

$$V_p = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \quad (1.2.1)$$

で表される。 K は体積弾性率、 μ は剛性率、 ρ は密度である。液体の場合、 $\mu = 0$ なので、外核内部の P 波速度は

$$V_p = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (1.2.2)$$

となる。ここで、外核最上部が安定成層しているとすると、 ρ は断熱温度勾配での値よりも小さくなる。単純に考えると、安定成層では、P 波速度は断熱温度勾配よりも速くなってしまう。逆に密度を大きくすれば、P 波速度を遅くできるが、そのような密度分布は重力的に不安定なので、そのような密度分布が保たれているとは考え難い。すなわち、安定成層が存在し、かつ、観測を説明するには、密度の小ささを上回るほど、 K が小さくならなければならない。この条件を満たすには、熱的な成層では説明できず、組成的な成層を必要とする (Hernlund and McNamara, 2015[29])。

1.2.2 热的な成層

安定成層の原因として、様々なメカニズムが提案されているが^{*3}、ここでは、熱的な成層について紹介する。

Pozzo et al.(2012)[45]、Gomi et al.(2013)[21]、Ohta et al.(2016)[42] などは、第一原理計算やダイヤモンド・アンビル・セル (DAC) による高圧実験により、外核の熱伝導度として、かつての見積もりよりも高い値を得た。

高圧実験で熱伝導度を求めるには、まず高温高圧下で電気伝導度の測定をする。それは、高温高圧下での熱伝導度の直接測定が難しいからである^{*4}。電気伝導度 ρ が得られたら、Wiedemann-Franz 則

$$\kappa = \frac{LT}{\rho} \quad (1.2.3)$$

によって、熱伝導度 κ に変換する。ここで、 T は温度、 L は Lorenz 数である。ここで、電気伝導度の温度依存性は、一般に、Bloch-Grüneisen 則

$$\rho_{BG}(V, T) = D(V) \left(\frac{T}{\Theta_D(V)} \right)^n \int_0^{\frac{\Theta_D(V)}{T}} dz \frac{z^n}{(e^z - 1)(1 - e^{-z})} \quad (1.2.4)$$

を満たす。ここで、 Θ_D は Debye 温度、 V は体積、 D と n は圧力に依存する定数である。ただし、Ohta et al.(2016)[42] などの研究によると、外核の環境のような高温高圧下では、Bloch-Grüneisen 則からずれて、電気抵抗がそれほど大きくならなくなる (Fig.10)。これを resistivity saturation (抵抗飽和) という。この効果を加えると、真の電気伝導度は、

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_{BG}} + \frac{1}{\rho_{saturation}} \quad (1.2.5)$$

となり、熱伝導度は Wiedemann-Franz 則より、

$$\kappa = \kappa_{BG} + \kappa_{saturation} \quad (1.2.6)$$

となる。この効果により、熱伝導度はかつての見積もりよりも高い値になる。

^{*3} 組成的な成層についての研究も多い。

^{*4} Konôpková et al.(2016)[37] では、パルス状の加熱を与えて、高温高圧下での熱伝導度の直接測定を試みている。

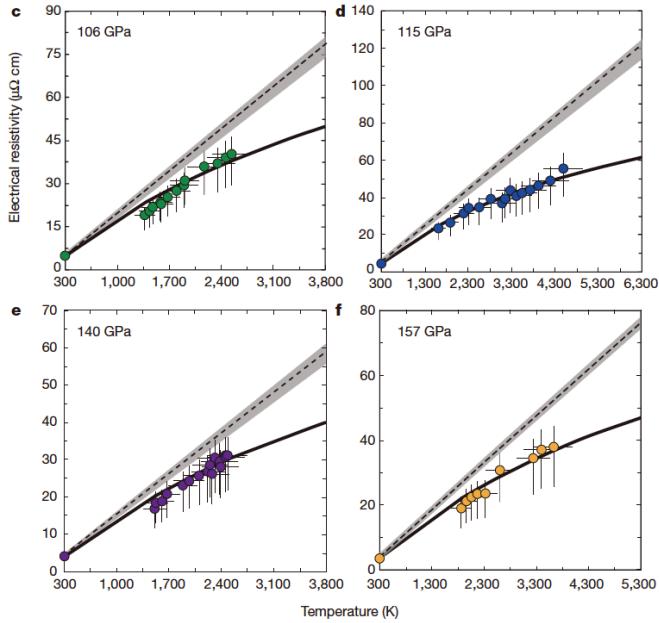


Fig.10 電気抵抗の温度圧力依存性。縦軸が電気抵抗（単位は $\mu\Omega\text{cm}$ ）、横軸が温度（単位は K）。それぞれのグラフで圧力が異なり、106GPa、115GPa、140GPa、157GPa の場合が示してある。点線が Bloch-Grüneisen 則から計算される電気伝導度、点は実験値。Ohta et al.(2016) より引用。

Gomi et al.(2013)[21] は、得られた熱伝導度を用いて、外核内部の伝導による熱流を計算した (Fig.11)。熱伝導度は深さとともに増加するが、断熱温度勾配は深さとともに減少するため、伝導による熱流は途中の深さで最大になる。その付近では、伝導によって熱輸送がまかなえる可能性がある。すなわち、その近くでは、対流が発生せず安定成層ができる。さらに、Gomi et al.(2013) では、外核内部のエネルギーバランスを考え、対流による熱流が負になる深さを求めた。その結果、地球中心から 2800km のところで最も安定成層しやすく、CMB での熱流が 11TW を下回ると安定成層ができる、ということがわかった。

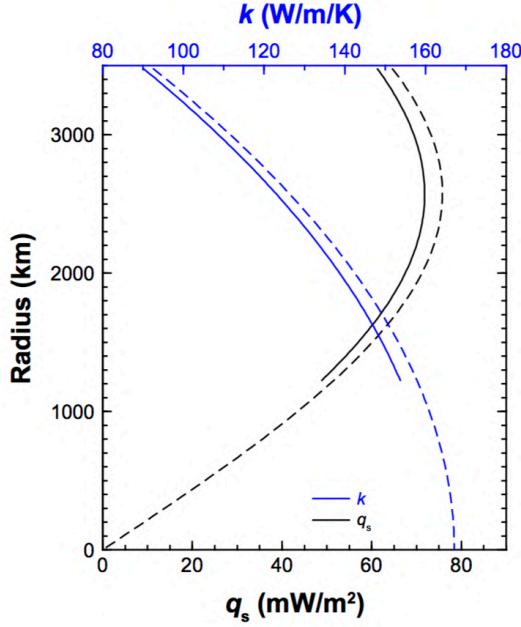


Fig.11 热伝導度と伝導による熱流の鉛直分布。縦軸が地球中心からの距離（上がCMB）、横軸が熱伝導度（青線、単位はW/m/K）と熱流（黒線、単位はmW/m²）の大きさである。また、実線は現在の値、点線は内核が固化し始めた時の値。Gomi et al.(2013)より引用。

また、Pozzo et al.(2012)[45]では、Schwarzschildの判定条件（例えば、Gubbins and Roberts(1987)[22]を参照）によって安定成層の厚さを求めている。このSchwarzschildの判定条件より、ある地球中心からの距離 r での浮力振動数 N は

$$N(r) = \sqrt{g\alpha_T \left\{ \frac{dT}{dr} - \left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad} + \frac{\alpha_c}{\alpha_T} \frac{dc}{dr} \right\}} \quad (1.2.7)$$

となる。ここで、 g は重力加速度、 T は温度、 $\left(\frac{dT}{dr} \right)_{ad}$ は断熱温度勾配、 c は鉄より軽い元素の濃度であり、

$$\alpha_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p,c} \quad (1.2.8)$$

$$\alpha_c = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial c} \right)_{p,T} \quad (1.2.9)$$

は、熱、または組成による膨張係数である。また、 ρ は密度、 p は圧力である。 $N^2 > 0$ となる領域では安定成層ができる。Pozzo et al.(2012)は、いくつかのモデルについて安定成層の厚さを計算し、モデルにもよるが、CMBから約1000kmの厚さを持つ安定成層がありそうだということを示した。

1.3 背景磁場の仮定について

地球の外核内部の背景磁場は、以下では東西成分のみを持つと仮定する。これは、外核内部では、トロイダル磁場 B_T の方がポロイダル磁場 B_P よりも強い、という主張に基づいている。トロイダル磁場は地表では観測することができないが、その強さを見積もる研究は多くある。それらは、Hide and Roberts(1979)[31] で整理されている。その見積もりの仕方をいくつか紹介しよう。

- 地球磁場は主に Ω 効果^{*5}によって作られているとすると、トロイダル磁場とポロイダル磁場の間には、

$$B_T \approx B_P \frac{UL}{\eta} \quad (1.3.1)$$

という関係がある。ここで、 U は典型的な速度スケール、 L は長さスケール、 η は磁気拡散率である。 U を地磁気の西方移動から約 3×10^{-4} m/s と見積もり、 $L \sim 1000$ km、 $\eta \sim 2$ m²/s とすると、トロイダル磁場の方がポロイダル磁場よりも約 100 倍大きいことがわかる。

- 地磁気の西方移動は、西向きの背景流が原因であると一般的に言われているが、波が原因の可能性もあり、まだ決定したわけではない（例えば、Finlay and Jackson(2003)[14]、Hori et al.(2015)[32] など）。そこで、西進する地形性の MC Rossby 波^{*6}の伝播によって、西方移動が説明できると仮定すると、トロイダル磁場の大きさは 10^{-2} T と見積もられる。これは、地表面で観測できるポロイダル磁場を CMB へ下方接続した強さに比べ非常に大きい。

ただし、最近のダイナモ計算では、トロイダル磁場とポロイダル磁場のエネルギーは同程度になるという研究もある（例えば、Christensen(2011)[10]）。

また、マントルが絶縁体であると、トロイダル磁場は CMB で 0 にならなければならない。そのため、トロイダル磁場が 0 になる鉛直方向の長さスケールについて、本当は考察しなければならない。もし、この長さスケールが、安定成層の厚さに比べ十分小さければ、このことは問題にならない。

最後に、数学的な側面について簡単に述べておく^{*7}。背景磁場に鉛直成分 B_z があると、運動方程式の水平成分に $B_z \frac{\partial}{\partial z}$ という項が現れる。このことが原因で、鉛直磁場がある場合とない場合では、微分方程式を変数分離で解くときに同じように扱うことができない（付録 D を参照）。特に鉛直磁場が現れると、容易に変数分離できなくなる^{*8}。また、南北磁場があっても東西磁場のみの場合と同様に変数分離することができるが、南北微分が多く現れ、解析的な計算は難しくなる。MHD 赤道波の研究はほとんど例がなく、基本となる物理的な理解が重要であると考え、本研究では、簡単のため、背景磁場は東西成分のみであるとする。

^{*5} 外核内部の流体の差動回転によってポロイダル磁場からトロイダル磁場をつくる効果。

^{*6} 付録 F で登場する MC Rossby 波は、球面上の MC Rossby 波であり、背景渦度場の勾配が逆向きなので、波の伝播の向きが逆になる。

^{*7} あまり大声で言えないが、本研究で東西成分のみの背景磁場を考える本当の理由は、このことによる。

^{*8} この妥協策として、Heng and Spitkovsky(2009)[27] では、背景磁場が水平成分のみの場合に変数分離して得られる方程式（MHD 浅水波方程式）に対して、 $B_z \frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{B_z}{H}$ と近似している。ここで、 H は安定成層の厚さ。

ただし、その東西成分のみの背景磁場 B_x には、南北方向 (y) 依存性があつても良いことにする。最も簡単な背景磁場は、

$$B_x = \text{const.} \quad (1.3.2)$$

である。ただし、この背景磁場はあまり現実的ではない。しかし、この場合は、解析的に分散関係を求めることができ（付録 G 参照）、簡単なので、物理的な理解のためには重要である。

背景磁場の南北依存性がある場合、簡単なものとして、

$$B_x = \text{const.} \times y \quad (y = 0 ; \text{赤道}) \quad (1.3.3)$$

がある。これは、赤道で符号を変える背景磁場であり、ダイナモ計算とも調和的で（例えば、Christensen(2011)[10] など）、より現実に近いモデルである。

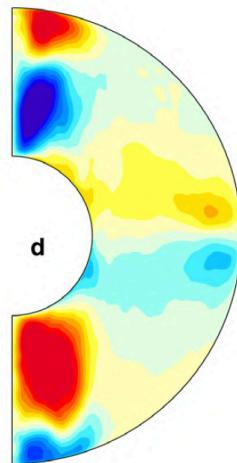


Fig.12 ダイナモ計算により得られた、経度・時間平均した東西磁場。赤が紙面奥向き、青が紙面手前向きである。Christensen(2011) より引用。

ただし、背景磁場が勾配を持つ場合、注意が必要である。非散逸で回転と成層はないが、磁場の勾配がある場合は Alfvén 波は連続スペクトルになることがプラズマ物理などの分野で知られている（例えば、Goedbloed and Poedts(2004)[20] など）。これは、Alfvén 波が磁力線方向にしか伝播できないことに起因しているようである^{*9}。このような状況に回転が加わると、どのように波の性質が変化するか、という問題は、地球物理学的にも興味深いテーマかもしれない。

^{*9} シアーフローがあると連続スペクトルになるのも、波を背景流が一方向に移流（伝播）させるからである。

2 方法

2.1 座標系

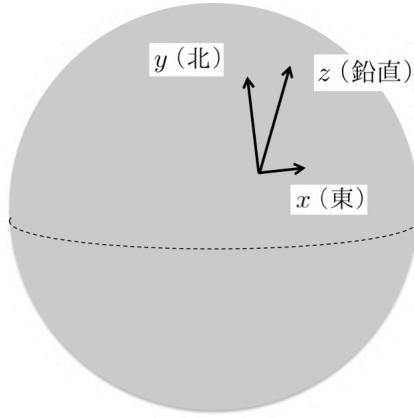


Fig.13 局所デカルト座標

考える領域は、球面の狭い範囲に限り、局所デカルト座標を用いる。 x 軸方向を東向き、 y 軸方向を北向き、 z 軸方向を鉛直上向きにとる。 y は球座標での余緯度 θ と逆向きなので、注意すること。

2.2 基礎方程式

外核最上部の安定成層領域での波を調べるために、以下の方程式を用いる。式の導出や波の基本的な内容に興味のある読者は付録を参照せよ。ここで、簡単のため、背景磁場は、南北方向には大きさが変化しても良いが東西方向成分のみを持つ、すなわち、

$$\mathbf{B} = B_x(y)\hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.2.1)$$

とする。ここで、 $\hat{\mathbf{e}}_i$ は i 方向の単位ベクトルである。

まずは、Boussinesq 近似と MHD(MagnetoHydroDynamics) 近似を用いた非粘性流体の運動方程式である。さらに、静水圧近似と β 面近似を用いて簡単化した。

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} - (f + \beta y)u_y = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{B_x(y)}{\rho_0 \mu} \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{b_y}{\rho_0 \mu} \frac{dB_x(y)}{dy} \quad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + (f + \beta y)u_x = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{B_x(y)}{\rho_0 \mu} \frac{\partial b_y}{\partial x} \quad (2.2.3)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g \quad (2.2.4)$$

ここで、 t は時間、 $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ は速度場の摂動、 $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ は磁場の摂動、 $\Delta\rho$ は密度場の摂動、 P は磁気圧を含めた圧力の摂動である。また、 $f + \beta y$ はコリオリパラメータ、 ρ_0 は流体の密度（一定）、 μ は透磁率（一定）、 g は重力加速度（一定）である。

次は、完全導体の場合の誘導方程式である。

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = B_x(y) \frac{\partial u_x}{\partial x} - u_y \frac{dB_x(y)}{dy} \quad (2.2.5)$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = B_x(y) \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.2.6)$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = B_x(y) \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (b_z \text{を求めるだけの式}) \quad (2.2.7)$$

ただし、基礎方程式の関係性から、鉛直方向の磁場の摂動 b_z は、鉛直流 u_z から受身的に決まるので、(2.2.7) 式は b_z を計算するときに用いる。

そして、密度場の移流の式である。

$$\frac{\partial \Delta\rho}{\partial t} = \frac{\rho_0 N^2(z)}{g} u_z \quad (2.2.8)$$

ここで、 $N(z)$ は浮力振動数であり、 z の関数である。

最後は、速度場と磁場のソレノイダル条件（非圧縮流体における連続の式、磁場に関するガウスの法則）である。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{b_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{b_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_z}{b_z} \right) = 0 \quad (2.2.9)$$

2.3 基礎方程式の変形

付録では、解析的に解くために、様々な式変形を行っているが、数値的に問題を解く場合は、それほど式変形をする必要はない。

まず、(2.2.4) 式を時間で微分して、(2.2.8) 式を代入すると、

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial t} = -N^2(z) u_z \quad (2.3.1)$$

となる。 $N^2 = 0$ のところでは、静水圧近似が成り立たないので、 $N^2 \neq 0$ の領域だけ考えるとして、

$$\frac{1}{N^2(z)} \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial t} = -u_z \quad (2.3.2)$$

とし、 z で微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{N^2(z)} \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial t} \right) = -\frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.3.3)$$

を得る。さらに、連続の式 (2.2.9) を用いれば、

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{N^2(z)} \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial t} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.3.4)$$

となる。結局、用いる式は、

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} - (f + \beta y) u_y = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{B_x(y)}{\rho_0 \mu} \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{b_y}{\rho_0 \mu} \frac{dB_x(y)}{dy} \quad (2.3.5)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + (f + \beta y) u_x = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{B_x(y)}{\rho_0 \mu} \frac{\partial b_y}{\partial x} \quad (2.3.6)$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = B_x(y) \frac{\partial u_x}{\partial x} - u_y \frac{dB_x(y)}{dy} \quad (2.3.7)$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = B_x(y) \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{N^2(z)} \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial t} \right) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.3.9)$$

の 5 つになる。この中で、 z 微分を含むのは、(2.3.9) 式の左辺のみである。そのため、次節では、流速や圧力、磁場などを鉛直 (z) 依存部分と水平 (x, y) 依存部分に変数分離する。

2.4 変数分離

流速や圧力、磁場が以下のように変数分離できるとする。

$$\begin{pmatrix} u_x(x, y, z, t) \\ u_y(x, y, z, t) \\ P(x, y, z, t) \\ b_x(x, y, z, t) / \sqrt{\rho_0 \mu} \\ b_y(x, y, z, t) / \sqrt{\rho_0 \mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(x, y, t) \\ V(x, y, t) \\ g\Pi(x, y, t) \\ M_x(x, y, t) \\ M_y(x, y, t) \end{pmatrix} D(z) \quad (2.4.1)$$

すると、(2.3.5)~(2.3.9) 式は、

$$\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} - (f + \beta y) V(x, y, t) = -g \frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial x} + \frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \frac{\partial M_x(x, y, t)}{\partial x} + M_y(x, y, t) \frac{d}{dy} \left(\frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \right) \quad (2.4.2)$$

$$\frac{\partial V(x, y, t)}{\partial t} + (f + \beta y) U(x, y, t) = -g \frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial y} + \frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \frac{\partial M_y(x, y, t)}{\partial x} \quad (2.4.3)$$

$$\frac{\partial M_x(x, y, t)}{\partial t} = \frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} - V(x, y, t) \frac{d}{dy} \left(\frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \right) \quad (2.4.4)$$

$$\frac{\partial M_y(x, y, t)}{\partial t} = \frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial x} \quad (2.4.5)$$

$$g \frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{N^2(z)} \frac{\partial D(z)}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial y} \right) D(z) \quad (2.4.6)$$

ただし、 $D(z) \neq 0$ とした。ここで、(2.4.6) 式を $g \frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial t} D(z)$ で割ると、

$$\frac{1}{D(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{N^2(z)} \frac{\partial D(z)}{\partial z} \right) = \frac{1}{g \frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial t}} \left(\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial y} \right) \quad (2.4.7)$$

となる。ここで、左辺は z のみの式、右辺は x, y, t の式であるので、両辺は定数でなければならぬ。すなわち、定数 h を用いて、

$$\frac{1}{D(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{N^2(z)} \frac{\partial D(z)}{\partial z} \right) = \frac{1}{g \frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial t}} \left(\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial y} \right) = -\frac{1}{gh} \quad (2.4.8)$$

とならなければならない。ゆえに、 z のみの式

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{N^2(z)} \frac{dD(z)}{dz} \right) = -\frac{1}{gh} D(z) \quad (2.4.9)$$

と、 x, y, t の式

$$\frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial t} + h \left(\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.4.10)$$

を得る。ここで、(2.4.9) 式を鉛直構造方程式と呼び、 $D(z)$ は鉛直構造関数、 h は鉛直構造方程式の固有値に関する定数である。一方、残りの 5 つの式

$$\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} - (f + \beta y)V(x, y, t) = -g \frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial x} + \frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \frac{\partial M_x(x, y, t)}{\partial x} + M_y(x, y, t) \frac{d}{dy} \left(\frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \right) \quad (2.4.11)$$

$$\frac{\partial V(x, y, t)}{\partial t} + (f + \beta y)U(x, y, t) = -g \frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial y} + \frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \frac{\partial M_y(x, y, t)}{\partial x} \quad (2.4.12)$$

$$\frac{\partial M_x(x, y, t)}{\partial t} = \frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} - V(x, y, t) \frac{d}{dy} \left(\frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \right) \quad (2.4.13)$$

$$\frac{\partial M_y(x, y, t)}{\partial t} = \frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial x} \quad (2.4.14)$$

$$\frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial t} = -h \left(\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial y} \right) \quad (2.4.15)$$

を水平構造方程式と呼ぶ。

2.5 鉛直構造方程式

2.5.1 無次元化

鉛直方向の長さスケールと、密度成層の構造を

$$z = Hz_* \quad (2.5.1)$$

$$N^2(z) = N_0^2 N_*^2(z_*) \quad (2.5.2)$$

と無次元化する。ここで、 H は流体層の厚さであり、 $0 \leq z_* \leq 1$ である。また $N_*^2(z_*)$ は $0 \leq z_* \leq 1$ で定義される関数で、0 から 1 までの大きさをとりうる。ただし、 $N_*^2(z_*) = 0$ となるのは、 $z_* = 0$ のみに限る。このとき、鉛直構造方程式は、

$$\frac{d}{dz_*} \left(\frac{1}{N_*^2(z_*)} \frac{dD(z_*)}{dz_*} \right) = -\frac{N_0^2 H^2}{gh} D(z_*) \quad (2.5.3)$$

となる。ここで、鉛直構造方程式の固有値を

$$\lambda = \frac{N_0^2 H^2}{gh} \quad (2.5.4)$$

とおけば、

$$\frac{d}{dz_*} \left(\frac{1}{N_*^2(z_*)} \frac{dD(z_*)}{dz_*} \right) = -\lambda D(z_*) \quad (2.5.5)$$

となる。

2.5.2 境界条件

鉛直構造方程式 (2.5.5) は、Sturm-Liouville 型の微分方程式になっており、境界条件の形は

$$C_{01}D(z_* = 0) + C_{02} \frac{dD}{dz} \Big|_{z_*=0} = 0 \quad (2.5.6)$$

$$C_{11}D(z_* = 1) + C_{12} \frac{dD}{dz} \Big|_{z_*=1} = 0 \quad (2.5.7)$$

となる。ここで、 C_{0i} 、 C_{1i} ($i = 0, 1$) は定数である。この条件の特別な場合として、

$$D(z_* = 0 \text{ and/or } 1) = 0 \quad (2.5.8)$$

というのは、

$$\begin{pmatrix} u_x(x, y, z_* = 0 \text{ and/or } 1, t) \\ u_y(x, y, z_* = 0 \text{ and/or } 1, t) \\ P(x, y, z_* = 0 \text{ and/or } 1, t) \\ b_x(x, y, z_* = 0 \text{ and/or } 1, t) / \sqrt{\rho_0 \mu} \\ b_y(x, y, z_* = 0 \text{ and/or } 1, t) / \sqrt{\rho_0 \mu} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.5.9)$$

に対応し、

$$\frac{dD}{dz} \Big|_{z_*=0 \text{ and/or } 1} = 0 \quad (2.5.10)$$

というのは、(2.3.2) 式より、

$$g \frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial t} \frac{1}{N^2(z)} \frac{dD(z)}{dz} = -u_z(x, y, z, t) \quad (2.5.11)$$

であるので、

$$u_z(x, y, z_* = 0 \text{ and/or } 1, t) = 0 \quad (2.5.12)$$

に対応する。

今、地球の外核最上部について考えているので、上側境界はコア・マントル境界 (CMB) に対応し、

$$u_z(z_* = 1) = 0 \quad (2.5.13)$$

すなわち、

$$\frac{dD}{dz} \Big|_{z_*=1} = 0 \quad (2.5.14)$$

とする。

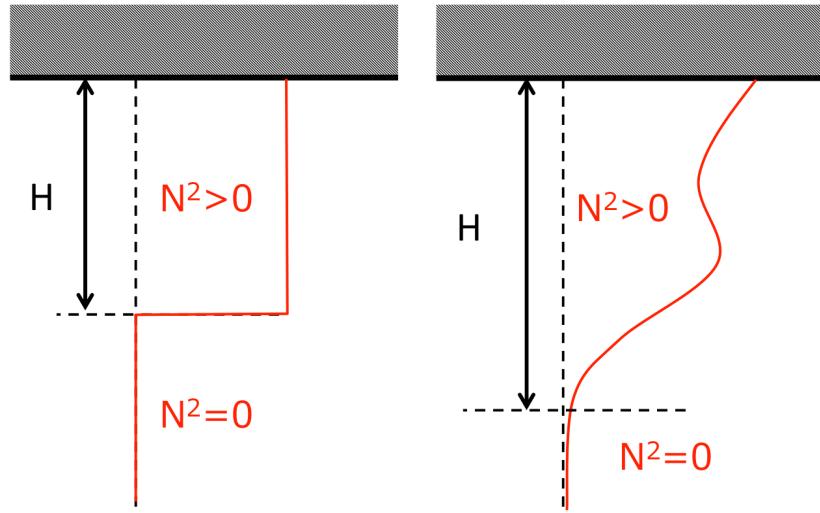


Fig.14 N^2 の鉛直分布の例。(左図) 考える領域全体で $N^2 > 0$ になっている場合。(右図) 下側境界で N^2 がほとんど 0 になっている場合。

一方、下側境界の条件は、

$$D(z_* = 0) = 0 \quad (2.5.15)$$

か

$$\frac{dD}{dz} \Big|_{z_*=0} = 0 \quad (2.5.16)$$

のいずれかを採用する。ここで、注意すべきことは、 $z_* = 0$ で $N^2(z_*) = 0$ を許す場合である。このとき、(2.5.11) 式より、 u_z が発散しないとすると、常に

$$\frac{dD}{dz} \Big|_{z_*=0} = 0 \quad (2.5.17)$$

を満たしていることになる。そこで、下側境界付近で、 N^2 が小さくなる場合は、

$$D(z_* = 0) = 0 \quad (2.5.18)$$

の境界条件を与えることにする。このようにすると、鉛直流は成層の弱い下側の領域で振幅が大きくなり、逆に水平流は上側の領域ほど振幅が大きくなる。

また、下側境界でもなお $N^2 > 0$ という状況は、 $z_* = 0$ で密度ジャンプがある、または、固体の壁があることを意味するので、鉛直流が非常に小さい、または、0 であることから

$$\frac{dD}{dz} \Big|_{z_*=0} = 0 \quad (2.5.19)$$

を用いる。

2.5.3 全領域で $N^2 > 0$ の場合

考える領域全体で N^2 が 0 に近づかない時は、固有関数を新たに、

$$W(z_*) = \frac{1}{N_*^2(z_*)} \frac{dD(z_*)}{dz_*} \quad (2.5.20)$$

とおくと、鉛直構造方程式 (2.5.5) は、より簡単なものになる。(2.5.5) 式を z で微分すると、

$$\frac{d^2}{dz_*^2} \left(\frac{1}{N_*^2(z_*)} \frac{dD(z_*)}{dz_*} \right) = -\lambda \frac{dD(z_*)}{dz_*} \quad (2.5.21)$$

となるので、 $W(z_*)$ で表した鉛直構造方程式は、

$$\frac{d^2W(z_*)}{dz_*^2} = -\lambda N^2(z_*) W(z_*) \quad (2.5.22)$$

であり、境界条件は、

$$W(z_* = 0, 1) = \frac{dD}{dz} \Big|_{z_*=0,1} = 0 \quad (2.5.23)$$

である。

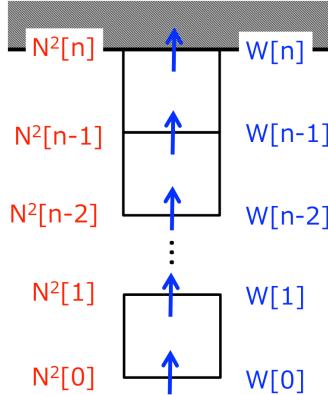


Fig.15 (2.5.22) 式の離散化の仕方

(2.5.22) 式を離散化すると、

$$\frac{W[i+1] + W[i-1] - 2W[i]}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} = -\lambda N^2[i] W[i] \quad (2.5.24)$$

となる。ただし、 n は自然数 (Fig.15 の箱の数、格子点の数は $n+1$ 個) i は 0 から n である。変形すれば、

$$W[i-1] = \left(2 - \lambda \left(\frac{1}{n} \right)^2 N^2[i] \right) W[i] - W[i+1] \quad (2.5.25)$$

となる。 i に実際の値を入れれば、

$$\begin{aligned} W[n-2] &= \left(2 - \lambda\left(\frac{1}{n}\right)^2 N^2[n-1]\right)W[n-1] - W[n] \\ W[n-3] &= \left(2 - \lambda\left(\frac{1}{n}\right)^2 N^2[n-2]\right)W[n-2] - W[n-1] \\ &\vdots \\ W[1] &= \left(2 - \lambda\left(\frac{1}{n}\right)^2 N^2[n-2]\right)W[2] - W[3] \\ W[0] &= \left(2 - \lambda\left(\frac{1}{n}\right)^2 N^2[n-2]\right)W[1] - W[2] \end{aligned}$$

となり、 $W[n]$ と $W[n-1]$ 、そして、 N^2 と λ を与えれば、 $W[0]$ を計算することができる。

しかし、今は、 N^2 と境界条件 $W[0]$ 、 $W[n]$ が与えられており、 λ の値を求めたい状況である。ここで、

$$W[0] = 0 \quad (2.5.26)$$

$$W[n] = 0 \quad (2.5.27)$$

である。

この場合の固有値 λ を求める一つの方法は、 $W[n]$ から計算を始めるが、 $W[n-1]$ を仮に

$$W[n-1] = 1 \quad (2.5.28)$$

など自由に与えて、 λ を少しづつ変えながら

$$W[0] = 0 \quad (2.5.29)$$

を満たす λ を探す、というものである。ここで、 $W[n-1]$ を自由に与えていい理由は、線形の微分方程式であり、 W の振幅の大きさは λ に影響しないからである。 W の大きさは必要に応じて規格化する。また、数値的には、厳密に $W[0] = 0$ とならないので、 λ を 0 から少しづつ増やしていく、 λ_a と λ_b で $W[0]$ の符号が変化すれば、 λ_a と λ_b の間に正しい λ が存在する、ということを利用して、真の λ に近い固有値を求める。この方法を shooting 法という。

また、 $D(z_*)$ が必要な場合は、

$$\frac{dD(z_*)}{dz_*} = N_*^2(z_*)W(z_*) \quad (2.5.30)$$

を離散化して、

$$\frac{D[i+1/2] - D[i-1+1/2]}{\left(\frac{1}{n}\right)} = N^2[i]W[i] \quad (2.5.31)$$

すなわち、

$$(D[i-1+1/2] - D[n-1+1/2]) = (D[i+1/2] - D[n-1+1/2]) - \left(\frac{1}{n}\right)N^2[i]W[i] \quad (2.5.32)$$

より、 D を求める。 i に実際の値を入れれば、

$$(D[n - 2 + 1/2] - D[n - 1 + 1/2]) = -\left(\frac{1}{n}\right)N^2[n - 1]W[n - 1]$$

$$(D[n - 3 + 1/2] - D[n - 1 + 1/2]) = (D[i + 1/2] - D[n - 1 + 1/2]) - \left(\frac{1}{n}\right)N^2[n - 2]W[n - 2]$$

$$\vdots$$

$$(D[1/2] - D[n - 1 + 1/2]) = (D[1 + 1/2] - D[n - 1 + 1/2]) - \left(\frac{1}{n}\right)N^2[1]W[1]$$

となる。

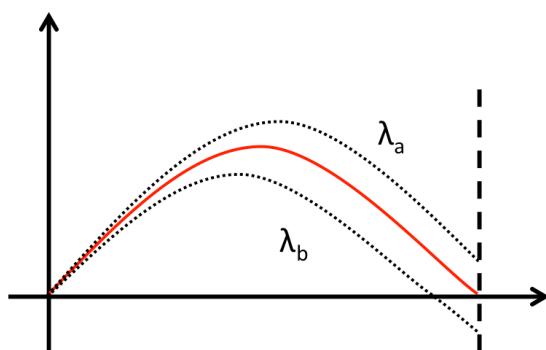


Fig.16 shooting 法のイメージ。すべての λ で、スタートの傾きは同じだが、 λ の大きさによって、途中の変化の仕方が変わる。

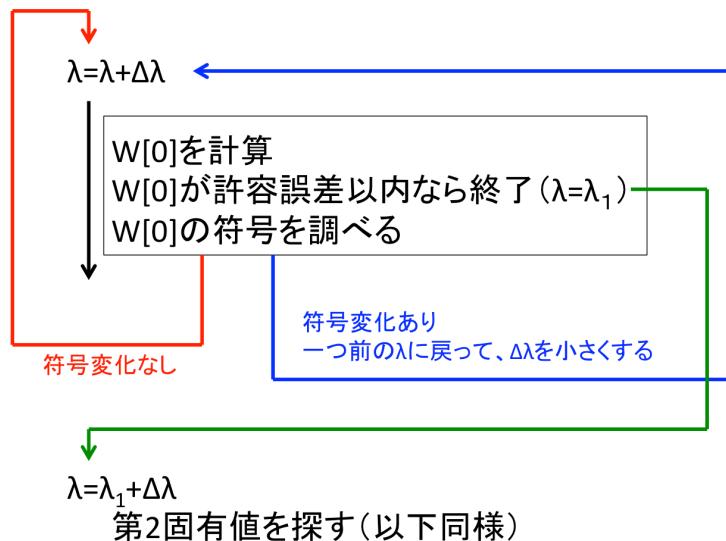


Fig.17 shooting 法の流れ

例として、

$$N_*^2 = 1 \quad (2.5.33)$$

の場合の結果を示す^{*10}。

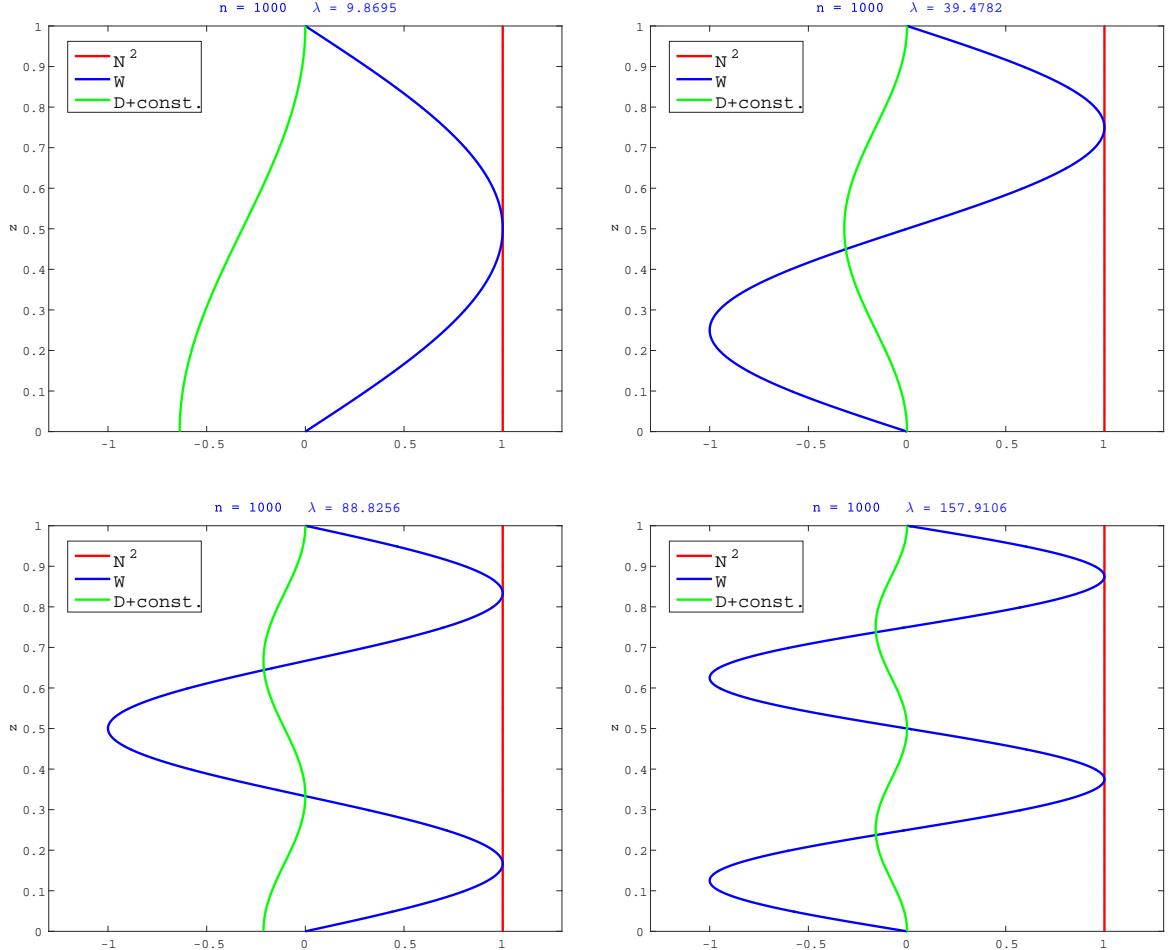


Fig.18 密度成層が $N_*^2 = 1$ の時の固有関数の鉛直構造。横軸が振幅、縦軸が z_* で、 $z_* = 1$ が CMB、 $z_* = 0$ が下側境界を表す。また、赤線は $N_*^2(z_*)$ 、青線は大きさ 1 に規格化した $W(z_*)$ 、緑の線は $D(z_*) - D(z_* = 1)$ を表す。 $D - D(z_* = 1)$ の振幅は鉛直波数が大きいほど、 W の振幅に比べ小さくなる。

また、この場合は、解析的に解くこともできて、(2.5.22) 式より、

$$\frac{d^2 W(z_*)}{dz_*^2} = -\lambda W(z_*) \quad (2.5.34)$$

なので、

$$W(z_*) = W_0 \sin(m\pi z_*) \quad (2.5.35)$$

$$\lambda = (m\pi)^2 \quad (2.5.36)$$

ここで、 W_0 は定数、 $m = 1, 2, 3, \dots$ であり、Fig.18 の結果と一致する。

^{*10} その他の場合は、A.1 節を参照。

2.5.4 下側境界付近で、 N^2 が小さくなる場合

下側境界付近で、 N^2 が小さくなる場合は、下側境界で、

$$D(z_* = 0) = 0 \quad (2.5.37)$$

という境界条件を与えるので、鉛直構造方程式 (2.5.5) 式をそのまま離散化する。

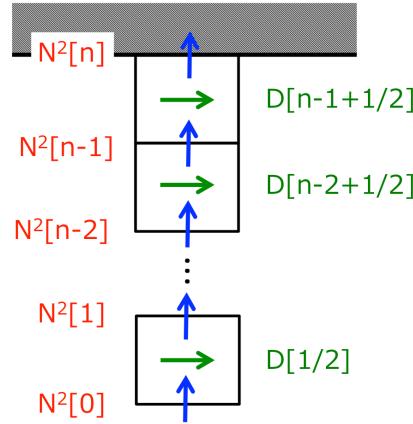


Fig.19 (2.5.22) 式の離散化の仕方

ゆえに、

$$\frac{\frac{1}{N^2[i+1]} \frac{D[i+1+1/2] - D[i+1/2]}{(1/n)} - \frac{1}{N^2[i]} \frac{D[i+1/2] - D[i-1+1/2]}{(1/n)}}{(1/n)} = -\lambda D[i + 1/2] \quad (2.5.38)$$

と離散化できる。変形すれば、

$$D[i - 1 + 1/2] = \left(1 + \frac{N^2[i]}{N^2[i+1]} - \lambda \left(\frac{1}{n}\right)^2 N^2[i]\right) D[i + 1/2] - \frac{N^2[i]}{N^2[i+1]} D[i + 1 + 1/2] \quad (2.5.39)$$

となる^{*11}。 i に実際の値を入れると、

$$\begin{aligned} D[n - 3 + 1/2] &= \left(1 + \frac{N^2[n - 2]}{N^2[n - 1]} - \lambda \left(\frac{1}{n}\right)^2 N^2[n - 2]\right) D[n - 2 + 1/2] - \frac{N^2[n - 2]}{N^2[n - 1]} D[n - 1 + 1/2] \\ D[n - 4 + 1/2] &= \left(1 + \frac{N^2[n - 3]}{N^2[n - 2]} - \lambda \left(\frac{1}{n}\right)^2 N^2[n - 3]\right) D[n - 3 + 1/2] - \frac{N^2[n - 3]}{N^2[n - 2]} D[n - 2 + 1/2] \\ &\vdots \\ D[1/2] &= \left(1 + \frac{N^2[1]}{N^2[2]} - \lambda \left(\frac{1}{n}\right)^2 N^2[1]\right) D[1 + 1/2] - \frac{N^2[1]}{N^2[2]} D[2 + 1/2] \end{aligned}$$

^{*11} $\frac{N^2[i]}{N^2[i+1]} = 1$ のとき、(2.5.25) 式に一致する。

となる。ここで、境界条件は、

$$D[n - 2 + 1/2] = D[n - 1 + 1/2] \quad (2.5.40)$$

$$D[1/2] = 0 \quad (2.5.41)$$

である。今回も上側境界か計算を始めるが、2.5.3 節と異なり、上側境界での微分は与えられていないが、値は与えられていないので、例えば、

$$D[n - 2 + 1/2] = D[n - 1 + 1/2] = 1 \quad (2.5.42)$$

などとして、計算をし、 $D[1/2] = 0$ となる λ を探す。上側境界の値を自由に与えていい理由は、2.5.3 節と同様である。また、 $W(z_*)$ が必要な場合は、(2.5.31) 式から計算する。ただし、 N^2 が小さくなる下側境界付近で W の振幅がとても大きくなることに注意。これは、成層が弱いのにもかかわらず、静水圧平衡を仮定しているためである。またこれは、上側境界付近で成層が強い場合に、全体を揺らすには、下側でかなり大きな鉛直流が必要になる、ということを意味している。

例として、

$$N_*^2 = z_*^2 \quad (2.5.43)$$

の場合を示す^{*12}。

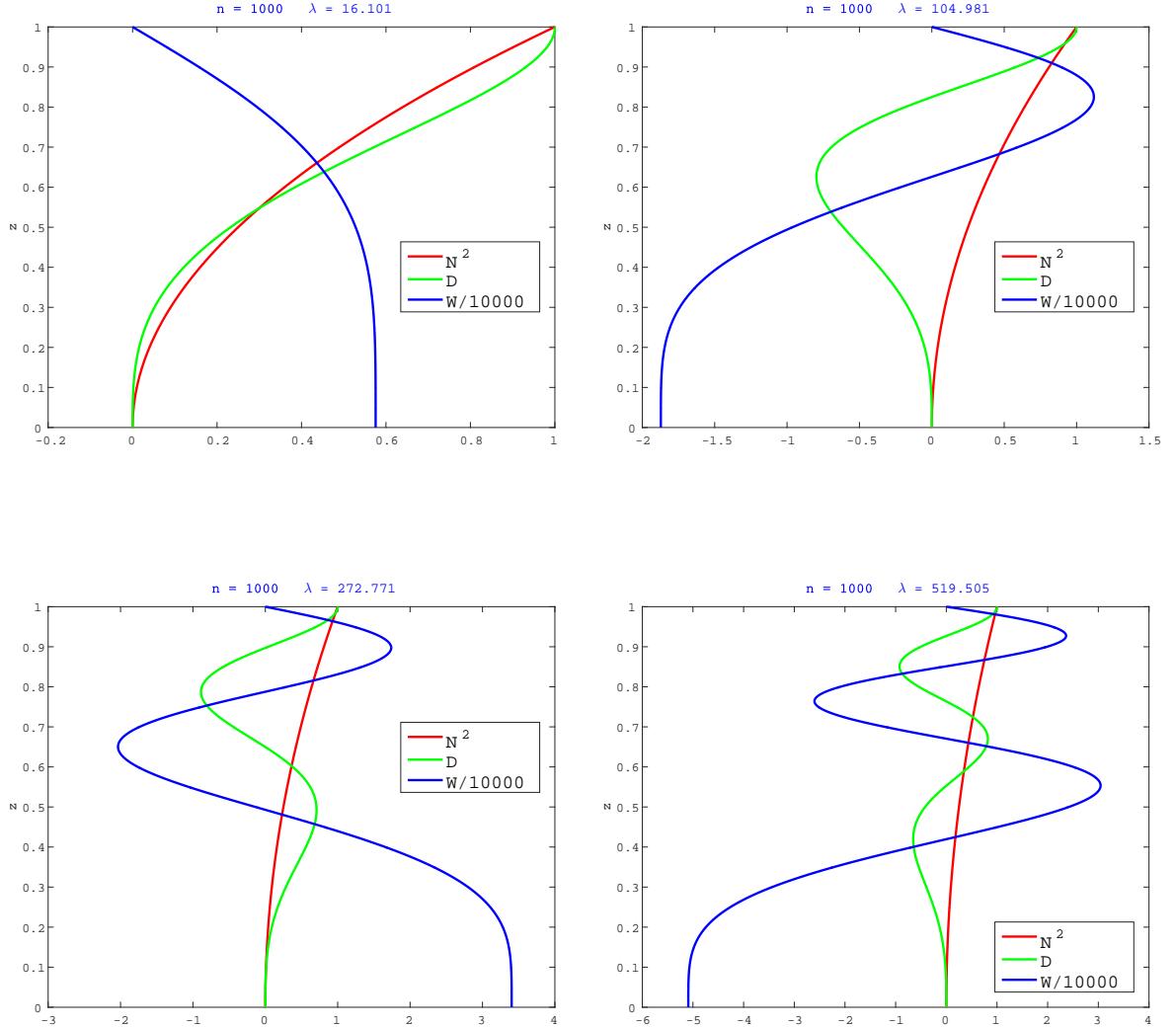


Fig.20 密度成層が $N_*^2 = z_*^2$ の時の固有関数の鉛直構造。横軸が振幅、縦軸が z_* で、 $z_* = 1$ が CMB、 $z_* = 0$ が下側境界を表す。また、赤線は $N_*^2(z_*)$ 、青線は $W(z_*)/10000$ 、緑の線は大きさ 1 に規格化した $D(z_*)$ を表す。 W の振幅は鉛直波数が大きいほど、大きくなる。

^{*12} その他の場合は、A.1 節を参照。

2.6 水平構造方程式

水平構造方程式は (2.3.5)~(2.3.9) 式より、

$$\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} - (f + \beta y)V(x, y, t) = -g \frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial x} + \frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \frac{\partial M_x(x, y, t)}{\partial x} + M_y(x, y, t) \frac{d}{dy} \left(\frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \right) \quad (2.6.1)$$

$$\frac{\partial V(x, y, t)}{\partial t} + (f + \beta y)U(x, y, t) = -g \frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial y} + \frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \frac{\partial M_y(x, y, t)}{\partial x} \quad (2.6.2)$$

$$\frac{\partial M_x(x, y, t)}{\partial t} = \frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} - V(x, y, t) \frac{d}{dy} \left(\frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \right) \quad (2.6.3)$$

$$\frac{\partial M_y(x, y, t)}{\partial t} = \frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial x} \quad (2.6.4)$$

$$\frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial t} = -h \left(\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y, t)}{\partial y} \right) \quad (2.6.5)$$

であった。鉛直構造方程式を解くと、(2.6.5) 式の h の値が得られる。ここで、

$$h = \frac{N_0^2 H^2}{g \lambda} \quad (2.6.6)$$

である。ただし、以下の結果は、一様な成層の場合の固有値 (2.5.36)

$$\lambda = (m\pi)^2 \quad (m = 1, 2, 3 \dots) \quad (2.6.7)$$

を用いる。

さらに、時間と東西方向に Fourier 変換する。すなわち、

$$\begin{pmatrix} u_x(x, y, z, t) \\ u_y(x, y, z, t) \\ P(x, y, z, t) \\ b_x(x, y, z, t)/\sqrt{\rho_0 \mu} \\ b_y(x, y, z, t)/\sqrt{\rho_0 \mu} \end{pmatrix} = \Re \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} U(y) \\ V(y) \\ g\Pi(y) \\ M_x(y) \\ M_y(y) \end{pmatrix} e^{ik_x x} e^{-i\omega t} D(z) \end{pmatrix} \quad (2.6.8)$$

というように変数分離したとする。このようにできるのは、水平構造方程式の係数には、 y のみが含まれているからである。ゆえに、水平構造方程式 (2.6.1)~(2.6.5) 式は

$$-i\omega U(y) = (f + \beta y)V(y) - ik_x g\Pi(y) + ik_x V_{Ax}(y)M_x(y) + M_y(y) \frac{dV_{Ax}(y)}{dy} \quad (2.6.9)$$

$$-i\omega V(y) = -(f + \beta y)U(y) - g \frac{d\Pi(y)}{dy} + ik_x V_{Ax}(y)M_y(y) \quad (2.6.10)$$

$$-i\omega M_x(y) = ik_x V_{Ax}(y)U(y) - V(y) \frac{dV_{Ax}(y)}{dy} \quad (2.6.11)$$

$$-i\omega M_y(y) = ik_x V_{Ax}(y)V(y) \quad (2.6.12)$$

$$-i\omega \Pi(y) = -\frac{N_0^2 H^2}{g \lambda} \left(ik_x U(y) + \frac{dV(y)}{dy} \right) \quad (2.6.13)$$

となる。ここで、東西方向の Alfvén 波速度を

$$V_{Ax}(y) = \frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \quad (2.6.14)$$

とした。

また、赤道付近を考えるので、

$$f = 0 \quad (2.6.15)$$

とし、背景磁場も β 面近似のように、

$$V_{Ax}(y) = V_{Ax0} + V'_{Ax}y \quad (2.6.16)$$

と近似できるとする。ここで、

$$V_{Ax0} = \text{const.} \quad (2.6.17)$$

$$V'_{Ax} = \frac{dV_{Ax}}{dy} = \text{const.} \quad (2.6.18)$$

である。よって、最終的に用いる水平構造方程式は

$$-i\omega U(y) = \beta y V(y) - ik_x g \Pi(y) + ik_x (V_{Ax0} + V'_{Ax}y) M_x(y) + M_y(y) V'_{Ax} \quad (2.6.19)$$

$$-i\omega V(y) = -\beta y U(y) - g \frac{d\Pi(y)}{dy} + ik_x (V_{Ax0} + V'_{Ax}y) M_y(y) \quad (2.6.20)$$

$$-i\omega M_x(y) = ik_x (V_{Ax0} + V'_{Ax}y) U(y) - V(y) V'_{Ax} \quad (2.6.21)$$

$$-i\omega M_y(y) = ik_x (V_{Ax0} + V'_{Ax}y) V(y) \quad (2.6.22)$$

$$-i\omega \Pi(y) = -\frac{N_0^2 H^2}{g \lambda} \left(ik_x U(y) + \frac{dV(y)}{dy} \right) \quad (2.6.23)$$

となる。

2.6.1 無次元化

赤道付近を考える時は、長さスケールとして赤道変形半径

$$\sqrt{\frac{N_0 H}{\beta}} \quad (2.6.24)$$

を選ぶことが多い。本論文でも、それに倣って無次元化する。

$$\omega = \sqrt{\beta N_0 H} \omega_* \quad (2.6.25)$$

$$k_x = \frac{k_{x*}}{\sqrt{\frac{N_0 H}{\beta}}} \quad (2.6.26)$$

$$y = \sqrt{\frac{N_0 H}{\beta}} y_* \quad (2.6.27)$$

ここで、 ω_* は無次元周波数、 k_{x*} は無次元東西波数、 y_* は無次元の南北方向の座標である。この無次元化により、水平構造方程式は、

$$\begin{aligned} -i\omega_* U(y_*) &= y_* V(y_*) - ik_{x*} \left(\frac{g\Pi(y_*)}{N_0 H} \right) \\ &\quad + ik_{x*} \left(\frac{V_{Ax0}}{N_0 H} + \frac{V'_{Ax}}{\sqrt{\beta N_0 H}} y_* \right) M_x(y_*) + M_y(y_*) \frac{V'_{Ax}}{\sqrt{\beta N_0 H}} \end{aligned} \quad (2.6.28)$$

$$-i\omega_* V(y_*) = -y_* U(y_*) - \frac{d}{dy_*} \left(\frac{g\Pi(y_*)}{N_0 H} \right) + ik_{x*} \left(\frac{V_{Ax0}}{N_0 H} + \frac{V'_{Ax}}{\sqrt{\beta N_0 H}} y_* \right) M_y(y_*) \quad (2.6.29)$$

$$-i\omega_* M_x(y_*) = ik_{x*} \left(\frac{V_{Ax0}}{N_0 H} + \frac{V'_{Ax}}{\sqrt{\beta N_0 H}} y_* \right) U(y_*) - V(y) \frac{V'_{Ax}}{\sqrt{\beta N_0 H}} \quad (2.6.30)$$

$$-i\omega_* M_y(y_*) = ik_{x*} \left(\frac{V_{Ax0}}{N_0 H} + \frac{V'_{Ax}}{\sqrt{\beta N_0 H}} y_* \right) V(y_*) \quad (2.6.31)$$

$$-i\omega_* \left(\frac{g\Pi(y_*)}{N_0 H} \right) = -\lambda^{-1} \left(ik_{x*} U(y_*) + \frac{dV(y_*)}{dy_*} \right) \quad (2.6.32)$$

となる。ここで、見やすさのため、

$$\varpi(y_*) = \frac{g\Pi(y_*)}{N_0 H} \quad (2.6.33)$$

とおき、2つの無次元数を

$$\mathcal{V}_0 = \frac{V_{Ax0}}{N_0 H} \quad (2.6.34)$$

$$\mathcal{V}_1 = \frac{V'_{Ax}}{\sqrt{\beta N_0 H}} \quad (2.6.35)$$

として、

$$-i\omega_* U(y_*) = y_* V(y_*) - ik_{x*} \varpi(y_*) + ik_{x*} (\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 y_*) M_x(y_*) + M_y(y_*) \mathcal{V}_1 \quad (2.6.36)$$

$$-i\omega_* V(y_*) = -y_* U(y_*) - \frac{d\varpi(y_*)}{dy_*} + ik_{x*} (\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 y_*) M_y(y_*) \quad (2.6.37)$$

$$-i\omega_* M_x(y_*) = ik_{x*} (\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 y_*) U(y_*) - V(y) \mathcal{V}_1 \quad (2.6.38)$$

$$-i\omega_* M_y(y_*) = ik_{x*} (\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_1 y_*) V(y_*) \quad (2.6.39)$$

$$-i\omega_* \varpi(y_*) = -\lambda^{-1} \left(ik_{x*} U(y_*) + \frac{dV(y_*)}{dy_*} \right) \quad (2.6.40)$$

となる。

また、 $\lambda = \pi^2$ のときに、分散関係を浅水波の場合の結果と一致するようにするには（付録 F や付録 G 参照）、

$$H \rightarrow \frac{H}{\pi} \quad (2.6.41)$$

すなわち、

$$\omega_* \rightarrow \omega_* \sqrt{\pi} = \bar{\omega} \quad (2.6.42)$$

$$k_{x*} \rightarrow \frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} = \bar{k}_x \quad (2.6.43)$$

$$y_* \rightarrow y_* \sqrt{\pi} = \bar{y} \quad (2.6.44)$$

$$\varpi(y_*) \rightarrow \varpi(y_*) \pi = \bar{\varpi}(\bar{y}) \quad (2.6.45)$$

$$\mathcal{V}_0 \rightarrow \mathcal{V}_0 \pi = \bar{\mathcal{V}}_0 \quad (2.6.46)$$

$$\mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1 \sqrt{\pi} = \bar{\mathcal{V}}_1 \quad (2.6.47)$$

$$\lambda \rightarrow \frac{\lambda}{\pi^2} = \bar{\lambda} \quad (2.6.48)$$

という読み替えが必要になる^{*13}。ゆえに、水平構造方程式は、

$$-i\bar{\omega}U(\bar{y}) = \bar{y}V(\bar{y}) - i\bar{k}_x\bar{\varpi}(\bar{y}) + i\bar{k}_x\left(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1\bar{y}\right)M_x(\bar{y}) + M_y(\bar{y})\bar{\mathcal{V}}_1 \quad (2.6.49)$$

$$-i\bar{\omega}V(\bar{y}) = -\bar{y}U(\bar{y}) - \frac{d\bar{\varpi}(\bar{y})}{d\bar{y}} + i\bar{k}_x\left(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1\bar{y}\right)M_y(\bar{y}) \quad (2.6.50)$$

$$-i\bar{\omega}M_x(\bar{y}) = i\bar{k}_x\left(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1\bar{y}\right)U(\bar{y}) - V(\bar{y})\bar{\mathcal{V}}_1 \quad (2.6.51)$$

$$-i\bar{\omega}M_y(\bar{y}) = i\bar{k}_x\left(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1\bar{y}\right)V(\bar{y}) \quad (2.6.52)$$

$$-i\bar{\omega}\bar{\varpi}(\bar{y}) = -\bar{\lambda}^{-1}\left(i\bar{k}_xU(\bar{y}) + \frac{dV(\bar{y})}{d\bar{y}}\right) \quad (2.6.53)$$

を用いる。

2.6.2 離散化

水平構造方程式 (2.6.49)~(2.6.53) は、 y についての微分方程式であるが、解析的に解くのは難しいので、 y 方向に離散化して、数値的に計算する。離散の仕方は、Fig.22 のようにスタッガード格子で離散化する。また、水平構造方程式は、 $y \rightarrow -y$ の変換に対し不変なので^{*14}、北半球か南半球どちらかを考えれば良い。

ここで、 $\bar{y} = Y$ まで離散化することにし、 \bar{y} が 1 あたり、 n 分割することとする。ただし、 U と M_x と $\bar{\varpi}$ 、 V と M_y の格子点の数が同じになるように、 U と M_x と $\bar{\varpi}$ は $[1/2] \sim [nY - 1 + 1/2]$ の格子点を考え、 V と M_y は $[0] \sim [nY - 1]$ の格子点を考える ($[nY]$ の格子点は考えない)。すなわち、1 つの物理量が持つ格子点の数は nY 個である。

^{*13} これは、赤道変形半径を $\sqrt{\frac{N_0 H}{\beta}}$ と $\sqrt{\frac{\sqrt{gh}}{\beta}}$ のどちらで定義するかということと関係している。

^{*14} 連立のままでは、わかりづらい。一つの式にまとめると不变であることが分かる（付録 F や付録 G 参照）。

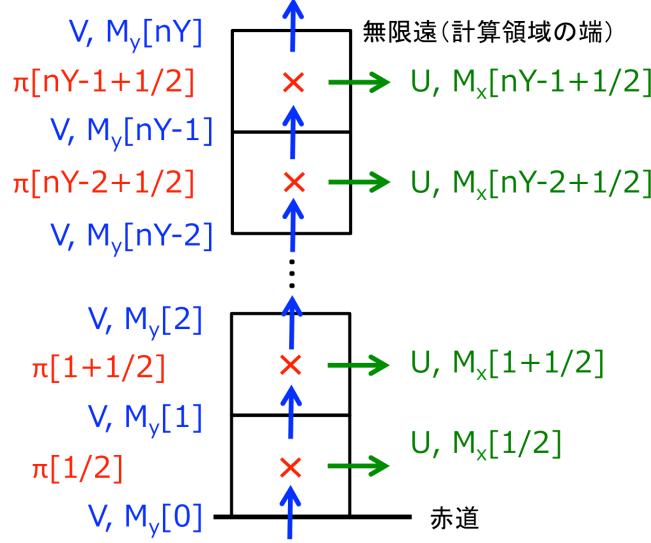


Fig.21 水平構造方程式の離散化の仕方

ゆえに、水平構造方程式を離散化すると、

$$-i\bar{\omega}U[j + 1/2] = \frac{j + 1/2}{n} \frac{V[j + 1] + V[j]}{2} - ik_x^- \bar{\varpi}[j + 1/2] \\ + ik_x^- \left(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{j + 1/2}{n} \right) M_x[j + 1/2] + \frac{M_y[j + 1] + M_y[j]}{2} \bar{\mathcal{V}}_1 \quad (2.6.54)$$

$$-i\bar{\omega}V[j] = -\frac{j}{n} \frac{U[j + 1/2] + U[j - 1/2]}{2} - \frac{\bar{\varpi}[j + 1/2] - \bar{\varpi}[j - 1/2]}{1/n} \\ + ik_x^- \left(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{j}{n} \right) M_y[j] \quad (2.6.55)$$

$$-i\bar{\omega}M_x[j + 1/2] = ik_x^- \left(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{j + 1/2}{n} \right) U[j + 1/2] - \frac{V[j + 1] + V[j]}{2} \bar{\mathcal{V}}_1 \quad (2.6.56)$$

$$-i\bar{\omega}M_y[j] = ik_x^- \left(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{j}{n} \right) V[j] \quad (2.6.57)$$

$$-i\bar{\omega}\bar{\varpi}[j + 1/2] = -\bar{\lambda}^{-1} \left(ik_x^- U[j + 1/2] + \frac{V[j + 1] - V[j]}{1/n} \right) \quad (2.6.58)$$

となる。ここで、 i は虚数単位、 j は格子点の番号に関する数字で、 $0 \sim nY - 1$ の値をとることに注意。

2.6.3 境界条件

必要な境界条件は、赤道上での V, M_y の値と、無限遠での $U, M_x, \bar{\varpi}$ の値である。

無限遠は、南北方向の微分が 0 という条件を与える。すなわち、

$$U[nY - 1 + 1/2] = U[nY - 2 + 1/2] \quad (2.6.59)$$

$$M_x[nY - 1 + 1/2] = M_x[nY - 2 + 1/2] \quad (2.6.60)$$

$$\bar{\varpi}[nY - 1 + 1/2] = \bar{\varpi}[nY - 2 + 1/2] \quad (2.6.61)$$

とする。

赤道の境界条件は、固有モードが赤道対称モードと反対称モードになると予想して、与える。ここで注意すべきことは、 U 、 M_x 、 $\bar{\varpi}$ と V 、 M_y では赤道での対称性が逆になる、ということである。このことは、水平構造方程式を 1 つの式にまとめず、連立のまま、 $y \rightarrow -y$ と変換すると分かる。以下では、 U 、 M_x 、 $\bar{\varpi}$ に関して、対称モード・反対称モードと呼ぶことにしよう。ゆえに、 U 、 M_x 、 $\bar{\varpi}$ が赤道対称モードならば、 V 、 M_y の値が 0、すなわち、

$$V[0] = 0 \quad (2.6.62)$$

$$M_y[0] = 0 \quad (2.6.63)$$

とし、 U 、 M_x 、 $\bar{\varpi}$ が赤道反対称モードならば、 V 、 M_y の南北方向の微分が 0、すなわち、

$$V[0] = V[1] \quad (2.6.64)$$

$$M_y[0] = M_y[1] \quad (2.6.65)$$

とする。対称、反対称をまとめて、

$$V[0] = (1 - \alpha)V[1] \quad (2.6.66)$$

$$M_y[0] = (1 - \alpha)M_y[1] \quad (2.6.67)$$

としておく。ここで、 $\alpha = 1$ ならば赤道対称モード、 $\alpha = 0$ ならば赤道反対称モードである。

2.6.4 水平構造方程式の行列化

格子点の数は、 nY 個であったが、境界条件を与えることで、計算すべき格子点の数は $nY - 1$ 個になった。ここで、各物理量の格子点での値を並べたベクトルを作る。

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U[1/2] \\ U[1 + 1/2] \\ \vdots \\ U[nY - 2 + 1/2] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_x = \begin{pmatrix} V[1/2] \\ V[1 + 1/2] \\ \vdots \\ V[nY - 2 + 1/2] \end{pmatrix}, \quad \bar{\boldsymbol{\varpi}} = \begin{pmatrix} \bar{\varpi}[1/2] \\ \bar{\varpi}[1 + 1/2] \\ \vdots \\ \bar{\varpi}[nY - 2 + 1/2] \end{pmatrix} \quad (2.6.68)$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V[1] \\ V[2] \\ \vdots \\ V[nY - 1] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_y = \begin{pmatrix} M_y[1] \\ M_y[2] \\ \vdots \\ M_y[nY - 1] \end{pmatrix} \quad (2.6.69)$$

まず、 \mathbf{U} の時間微分の式の j に実際の値を入れ、境界条件を用いると、

$$\begin{aligned}
-i\bar{\omega}U[1/2] &= \frac{1/2}{n} \frac{V[1] + (1 - \alpha)V[1]}{2} - ik_x^- \bar{\varpi}[1/2] \\
&\quad + ik_x^- \left(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1/2}{n} \right) M_x[1/2] + \frac{M_y[1] + (1 - \alpha)M_y[1]}{2} \bar{\mathcal{V}}_1 \\
-i\bar{\omega}U[1 + 1/2] &= \frac{1 + 1/2}{n} \frac{V[2] + V[1]}{2} - ik_x^- \bar{\varpi}[1 + 1/2] \\
&\quad + ik_x^- \left(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1 + 1/2}{n} \right) M_x[1 + 1/2] + \frac{M_y[2] + M_y[1]}{2} \bar{\mathcal{V}}_1 \\
&\quad \vdots \\
-i\bar{\omega}U[nY - 3 + 1/2] &= \frac{nY - 3 + 1/2}{n} \frac{V[nY - 2] + V[nY - 3]}{2} - ik_x^- \bar{\varpi}[nY - 3 + 1/2] \\
&\quad + ik_x^- \left(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{nY - 3 + 1/2}{n} \right) M_x[nY - 3 + 1/2] + \frac{M_y[nY - 2] + M_y[nY - 3]}{2} \bar{\mathcal{V}}_1 \\
-i\bar{\omega}U[nY - 2 + 1/2] &= \frac{nY - 2 + 1/2}{n} \frac{V[nY - 1] + V[nY - 2]}{2} - ik_x^- \bar{\varpi}[nY - 2 + 1/2] \\
&\quad + ik_x^- \left(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{nY - 2 + 1/2}{n} \right) M_x[nY - 2 + 1/2] + \frac{M_y[nY - 1] + M_y[nY - 2]}{2} \bar{\mathcal{V}}_1
\end{aligned}$$

となる。これらを先ほど定義したベクトルを用いて表すと、

$$\begin{aligned}
-i\bar{\omega}\mathbf{U} &= \begin{pmatrix} \frac{2-\alpha}{4n} & & & \\ & \frac{3}{4n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{2nY-5}{4n} & \frac{2nY-5}{4n} \\ & & & & \frac{2nY-3}{4n} & \frac{2nY-3}{4n} \end{pmatrix} \mathbf{V} - ik_x^- \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \bar{\varpi} \\
+ ik_x^- & \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1/2}{n} & & & \\ & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1+1/2}{n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{nY-2+1/2}{n} \end{pmatrix} \mathbf{M}_x \\
+ \bar{\mathcal{V}}_1 & \begin{pmatrix} \frac{2-\alpha}{2} & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{M}_y
\end{aligned} \tag{2.6.70}$$

となる。

次に、 \mathbf{V} の時間微分の式は、

$$\begin{aligned}
-i\bar{\omega}V[1] &= -\frac{1}{n} \frac{U[1+1/2] + U[1/2]}{2} - \frac{\bar{\omega}[1+1/2] - \bar{\omega}[1/2]}{1/n} + ik_x^-(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1}{n}) M_y[1] \\
-i\bar{\omega}V[2] &= -\frac{2}{n} \frac{U[2+1/2] + U[1+1/2]}{2} - \frac{\bar{\omega}[2+1/2] - \bar{\omega}[1+1/2]}{1/n} + ik_x^-(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{2}{n}) M_y[2] \\
&\vdots \\
-i\bar{\omega}V[nY-2] &= -\frac{n}{n} \frac{U[nY-2+1/2] + U[jnY-3+1/2]}{2} \\
&\quad - \frac{\bar{\omega}[nY-2+1/2] - \bar{\omega}[nY-3+1/2]}{1/n} + ik_x^-(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{nY-2}{n}) M_y[nY-2] \\
-i\bar{\omega}V[nY-1] &= -\frac{n}{n} \frac{U[nY-2+1/2] + U[nY-2+1/2]}{2} \\
&\quad - \frac{\bar{\omega}[nY-2+1/2] - \bar{\omega}[nY-2+1/2]}{1/n} + ik_x^-(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{nY-1}{n}) M_y[nY-1]
\end{aligned}$$

となり、ベクトルで表すと、

$$\begin{aligned}
-i\bar{\omega}\mathbf{V} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2n} & -\frac{1}{2n} & -\frac{2}{2n} & & \\ & -\frac{2}{2n} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -\frac{nY-2}{2n} & -\frac{nY-2}{2n} \\ & & & & -\frac{2n}{n} \end{pmatrix} \mathbf{U} - \begin{pmatrix} -n & n & & & \\ & -n & n & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -n & n \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \bar{\omega} \\
&+ ik_x^- \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1}{n} & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{2}{n} & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{nY-1}{n} & \end{pmatrix} \mathbf{M}_y
\end{aligned} \tag{2.6.71}$$

となる。

今度は、 \mathbf{M}_x の時間微分の式、

$$\begin{aligned}
-i\bar{\omega}M_x[1/2] &= ik_x^-(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1/2}{n}) U[1/2] - \frac{V[1] + (1-\alpha)V[1]}{2} \bar{\mathcal{V}}_1 \\
-i\bar{\omega}M_x[1+1/2] &= ik_x^-(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1+1/2}{n}) U[1+1/2] - \frac{V[2] + V[1]}{2} \bar{\mathcal{V}}_1 \\
&\vdots \\
-i\bar{\omega}M_x[nY-3+1/2] &= ik_x^-(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{nY-3+1/2}{n}) U[nY-3+1/2] - \frac{V[nY-2] + V[nY-3]}{2} \bar{\mathcal{V}}_1 \\
-i\bar{\omega}M_x[nY-2+1/2] &= ik_x^-(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{nY-2+1/2}{n}) U[nY-2+1/2] - \frac{V[nY-1] + V[nY-2]}{2} \bar{\mathcal{V}}_1
\end{aligned}$$

より、ベクトルで表すと、

$$-i\bar{\omega}M_x = ik_x \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1/2}{n} & & & \\ & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1+1/2}{n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{nY-2+1/2}{n} \\ -\bar{\mathcal{V}}_1 \begin{pmatrix} \frac{2-\alpha}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} V & & \end{pmatrix} U \quad (2.6.72)$$

となる。

M_y の時間微分の式は、

$$\begin{aligned} -i\bar{\omega}M_y[1] &= ik_x \left(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1}{n} \right) V[1] \\ -i\bar{\omega}M_y[2] &= ik_x \left(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{2}{n} \right) V[2] \\ &\vdots \\ -i\bar{\omega}M_y[nY-2] &= ik_x \left(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{nY-2}{n} \right) V[nY-2] \\ -i\bar{\omega}M_y[nY-1] &= ik_x \left(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{nY-1}{n} \right) V[nY-1] \end{aligned}$$

なので、

$$-i\bar{\omega}M_y = ik_x \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1}{n} & & & \\ & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{2}{n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{nY-1}{n} \end{pmatrix} V \quad (2.6.73)$$

となる。

最後に、 $\bar{\varpi}$ の時間微分の式は、

$$\begin{aligned} -i\bar{\omega}\bar{\varpi}[1/2] &= -\bar{\lambda}^{-1} \left(ik_x U[1/2] + \frac{V[1] - (1-\alpha)V[1]}{1/n} \right) \\ -i\bar{\omega}\bar{\varpi}[1+1/2] &= -\bar{\lambda}^{-1} \left(ik_x U[1+1/2] + \frac{V[2] - V[1]}{1/n} \right) \\ &\vdots \\ -i\bar{\omega}\bar{\varpi}[nY-3+1/2] &= -\bar{\lambda}^{-1} \left(ik_x U[nY-3+1/2] + \frac{V[nY-2] - V[nY-3]}{1/n} \right) \\ -i\bar{\omega}\bar{\varpi}[nY-2+1/2] &= -\bar{\lambda}^{-1} \left(ik_x U[nY-2+1/2] + \frac{V[nY-1] - V[nY-2]}{1/n} \right) \end{aligned}$$

となるので、ベクトルで表すと、

$$-i\bar{\omega}\bar{\varpi} = -i\bar{\lambda}^{-1}\bar{k}_x \mathbf{U} - \bar{\lambda}^{-1} \begin{pmatrix} n\alpha & & & \\ -n & n & & \\ & & \ddots & \\ & & & -n & n \end{pmatrix} \mathbf{V} \quad (2.6.74)$$

となる。

以上をすべてまとめると、

$$-i\bar{\omega} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_y \\ \bar{\varpi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & C_u & \bar{k}_x V_{A1/2} & V_{dA} & -i\bar{k}_x E \\ C_v & O & O & \bar{k}_x V_{A1} & D_v \\ \bar{k}_x V_{A1/2} & -V_{dA} & O & O & O \\ O & \bar{k}_x V_{A1} & O & O & O \\ -i\bar{\lambda}^{-1}\bar{k}_x E & D_p & O & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_y \\ \bar{\varpi} \end{pmatrix} \quad (2.6.75)$$

となる。ここで、 O は零行列、 E は単位行列、 $k, l = 1, 2, \dots, nY - 1$ として、

$$C_u[k, l] = \frac{1}{4n} \begin{pmatrix} 2 - \alpha & & & & \\ 3 & 3 & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 2k - 1 & 2k - 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2nY - 3 & 2nY - 3 \end{pmatrix} \quad (2.6.76)$$

$$C_v[k, l] = -\frac{1}{2n} \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ & 2 & 2 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & k & k & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & nY - 2 & nY - 2 \\ & & & & & & 2nY - 2 \end{pmatrix} \quad (2.6.77)$$

$$V_{A1}[k, l] = i \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1}{n} & & & & \\ & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{2}{n} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{k}{n} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{nY-1}{n} \end{pmatrix} \quad (2.6.78)$$

$$V_{A1/2}[k, l] = i \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1/2}{n} & & & \\ & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1+1/2}{n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{k-1+1/2}{n} \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{nY-2+1/2}{n} \end{pmatrix} \quad (2.6.79)$$

$$V_{dA} = \frac{\bar{\mathcal{V}}_1}{2} \begin{pmatrix} 2 - \alpha & & & \\ 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6.80)$$

$$D_v[k, l] = \begin{pmatrix} n & -n & & & \\ & n & -n & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & n & -n \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6.81)$$

$$D_p[k, l] = \bar{\lambda}^{-1} \begin{pmatrix} -n\alpha & & & & \\ n & -n & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & n & -n \end{pmatrix} \quad (2.6.82)$$

である。

(2.6.87) 式は、 $5(nY - 1) \times 5(nY - 1)$ の行列であり、固有値 $\bar{\omega}$ は $5(nY - 1)$ 個存在する。すなわち、数値的に得られる固有値の数は、格子点の数に依存する。格子点が少なければ、大きなスケールの振動モードしか表現できないが、格子点の数が大きくなると、細かい振動モードまで表現できて、そのモードの固有値を得ることができるようになる。

今の場合、格子点の増やし方は、(i) n を大きくする、(ii) Y を大きくする、の 2 通りある。 n を大きくすればより細かく振動するモードの固有値を求められるようになり、大きなスケールの振動モードの固有値はより精度よく決まるようになる。一方、計算領域の端（無限遠）付近に振幅を持つモードの固有値を正しく求めるには、 Y を大きくしなければならない。

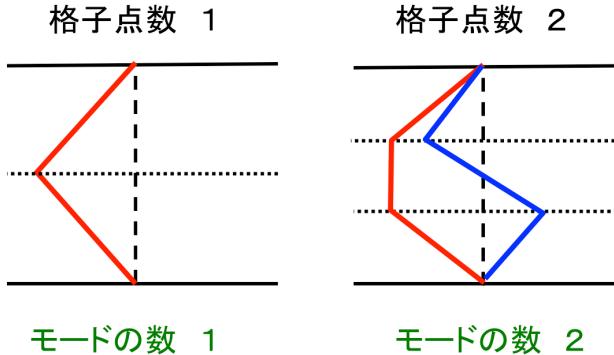


Fig.22 格子点の数と、表現できるモードの数

2.6.5 行列の固有値問題

今回は、行列の固有値の計算に MATLAB を使用した。(2.6.87) 式の両辺に i をかけると、

$$\bar{\omega} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_y \\ \bar{\varpi} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} O & C_u & \bar{k}_x V_{A1/2} & V_{dA} & -i\bar{k}_x E \\ C_v & O & O & \bar{k}_x V_{A1} & D_v \\ \bar{k}_x V_{A1/2} & -V_{dA} & O & O & O \\ O & \bar{k}_x V_{A1} & O & O & O \\ -i\bar{\lambda}^{-1}\bar{k}_x E & D_p & O & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_y \\ \bar{\varpi} \end{pmatrix} \quad (2.6.83)$$

となり、この右辺の行列をまずプログラム中で作成する。行列を作る時に、 \bar{k}_x の値を与えなければならない。行列のサイズがそれなりに大きいと、固有値の計算には時間がかかるてしまうので、「sparse」コマンドなどで行列をスパース型行列^{*15}に変換しておくと良い。ただし、スパース型行列の固有値を求める時は、「eigs」コマンドを用いる。また「eigs」コマンドはすべての固有値と固有ベクトルを計算できないことに注意^{*16}。固有値が得られたら、 \bar{k}_x の値を少しずつ変えながら、以上のことを行なう。

Fortran で計算する場合も同様にできると思われる。固有値を計算するときは LAPACK の非対称複素数固有値問題サブルーチン「ZGEEV」などを用いれば良いだろう。

2.6.6 $\bar{\mathcal{V}}_0 = \bar{\mathcal{V}}_1 = 0$ (磁場なしの赤道波) の場合の結果の比較

磁場なしの場合 ($\bar{\mathcal{V}}_0 = \bar{\mathcal{V}}_1 = 0$) は、解析的に分散関係と固有関数が得られるので、それらと今回の数値的に求めた結果を比較する。また、鉛直構造の固有値は $\bar{\lambda} = 1$ 、格子点の数は $n = 10$ とし、 $Y = 10$ と $Y = 5$ の場合の結果を示す。

^{*15} 普通の行列は、0 が入っている成分も記憶するのに対し、スパース型行列では、0 でない値が入っている成分について、(行、列、値) を記憶する。0 が入っている成分の割合が大きいほど、計算時間を短縮できる。

^{*16} スパース型に変換しなければ、「eig」コマンドですべての固有値と固有ベクトルを求めることが可能。ただし、今回のような大規模疎行列ですべての固有値が必要になる場合はほとんどないと思われるが、スパース型に変換するのが良い。

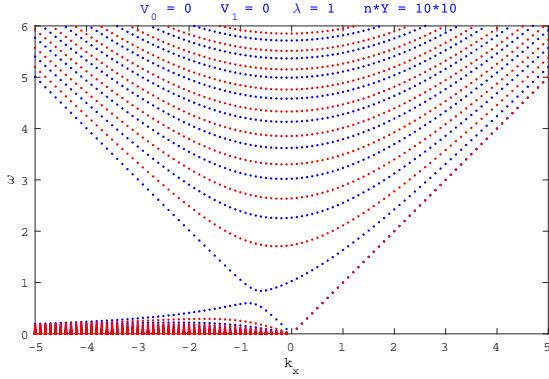


Fig.23 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 10$ 、 $Y = 10$ の場合の数値計算の結果。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x であり、赤が赤道対称モード、青が赤道反対称モードを表す。

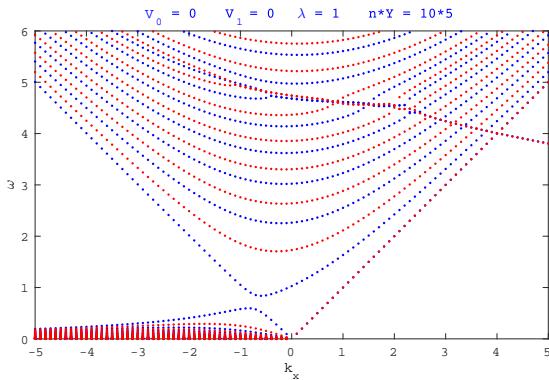


Fig.24 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 10$ 、 $Y = 5$ の場合の数値計算の結果。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x であり、赤が赤道対称モード、青が赤道反対称モードを表す。

この 2 つの結果を付録 G の分散関係のグラフと比較すると、気付くこととして、赤道反対称モードに $\bar{\omega} = -\bar{k}_x$ という分散関係をもつモードが現われてしまったこと (i)、 $Y = 5$ の場合に周波数が大きい領域で、不適切なモードが現れてしまっていること (ii)、がある。また、Fig.25 を見ると、赤道反対称モードにも赤道 Kelvin 波の分散関係が現れてしまっている (iii)。

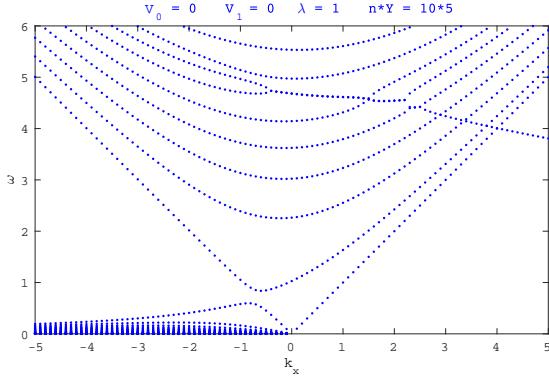


Fig.25 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$, $\bar{\lambda} = 1$, $n = 10$, $Y = 5$ の場合の数値計算の結果（赤道反対称モードのみ）。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x である。

まず、(ii) については、 Y を大きくすると、Fig.26 のように、高周波数側に徐々に移動していくことから、計算領域の端（無限遠）付近に振幅を持つために発生したものだと考えられる。高周波数で現れるのは、周波数が大きいモードほど赤道から離れたところまで振幅をもつからである。

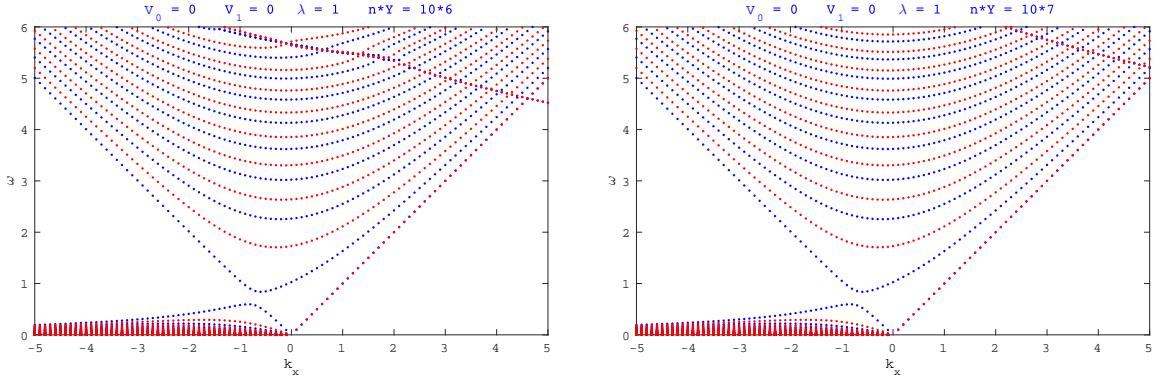


Fig.26 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$, $\bar{\lambda} = 1$, $n = 10$ の場合の数値計算の結果。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x であり、赤が赤道対称モード、青が赤道反対称モードを表す。（左図） $Y = 6$ の場合。（右図） $Y = 7$ の場合。

次に、(ii) と (iii) の問題を解決するために、赤道反対称モードの、 $\bar{\omega} = \bar{k}_x$ 、 $\bar{\omega} = -\bar{k}_x$ の場合の固有関数を確認する。

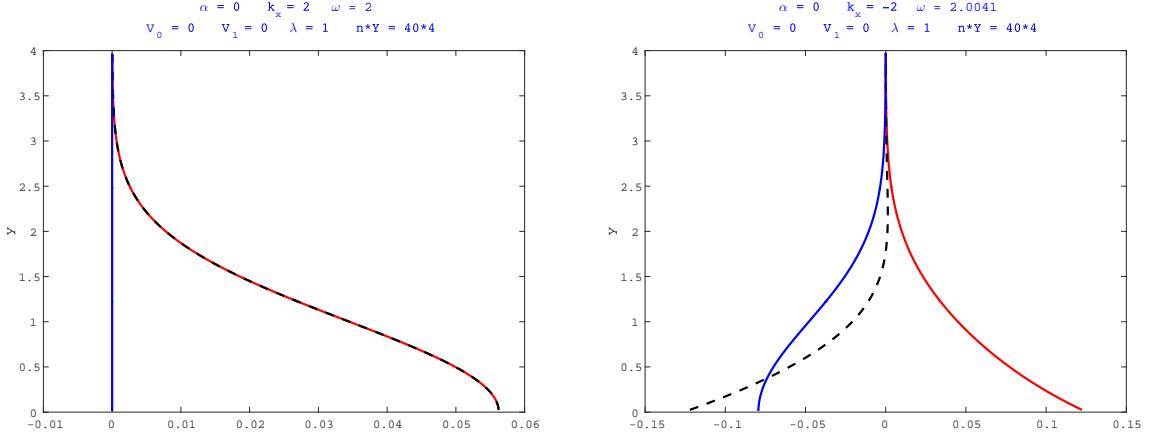


Fig.27 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 4$ の場合の数値計算の結果。赤道反対称モード ($\alpha = 0$) のときの固有関数。縦軸が \bar{y} ($\bar{y} = 0$ が赤道)、横軸が振幅。赤線が U (x (東西) 方向の流れ)、青線が V (y (南北) 方向の流れ)、黒の破線が $\bar{\varpi}$ (圧力) を表す。(左図) $\bar{k}_x = 2$ 、 $\bar{\omega} = 2$ の場合。(右図) $\bar{k}_x = -2$ 、 $\bar{\omega} = 2.0041$ の場合。

赤道反対称モードの場合は、 U と $\bar{\varpi}$ は赤道では、0 にならなければいけないが、Fig.27 を見ると、0 になっていない。これは、赤道では V と M_y の条件しか与えていないからである。Fig.27 の左図のように、赤道対称モードと反対称モードの両方に赤道 Kelvin 波が現れた理由もこのことが原因となっている。

2.6.7 修正境界条件

これまでの境界条件に加え、赤道での U 、 M_x 、 $\bar{\varpi}$ の条件を付け加える。赤道反対称モードのときに、赤道では、これらが 0 になればよいので、

$$U[1/2] \rightarrow \alpha U[1/2] \quad (2.6.84)$$

$$M_x[1/2] \rightarrow \alpha M_x[1/2] \quad (2.6.85)$$

$$\bar{\varpi}[1/2] \rightarrow \alpha \bar{\varpi}[1/2] \quad (2.6.86)$$

とする。こうすると、固有方程式は、

$$-i\bar{\omega} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_y \\ \bar{\varpi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & C_u & \bar{k}_x V_{A1/2} & V_{dA} & -i\bar{k}_x E \\ C_v & O & O & \bar{k}_x V_{A1} & D_v \\ \bar{k}_x V_{A1/2} & -V_{dA} & O & O & O \\ O & \bar{k}_x V_{A1} & O & O & O \\ -i\bar{\lambda}^{-1}\bar{k}_x E & D_p & O & O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \\ \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_y \\ \bar{\varpi} \end{pmatrix} \quad (2.6.87)$$

$$C_u[k, l] = \frac{1}{4n} \begin{pmatrix} 2 - \alpha & & & & \\ 3 & 3 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 2k-1 & 2k-1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 2nY-3 & 2nY-3 \end{pmatrix} \quad (2.6.88)$$

$$C_v[k, l] = -\frac{1}{2n} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & & & & \\ & 2 & 2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & k & k & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & nY-2 & nY-2 \\ & & & & & & 2nY-2 \end{pmatrix} \quad (2.6.89)$$

$$V_{A1}[k, l] = i \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1}{n} & & & & & \\ & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{2}{n} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{k}{n} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{nY-1}{n} \end{pmatrix} \quad (2.6.90)$$

$$V_{A1/2}[k, l] = i \begin{pmatrix} \alpha \left(\bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1/2}{n} \right) & & & & & \\ & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{1+1/2}{n} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{k-1+1/2}{n} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \bar{\mathcal{V}}_0 + \bar{\mathcal{V}}_1 \frac{nY-2+1/2}{n} \end{pmatrix} \quad (2.6.91)$$

$$V_{dA} = \frac{\bar{\mathcal{V}}_1}{2} \begin{pmatrix} 2 - \alpha & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6.92)$$

$$D_v[k, l] = \begin{pmatrix} n\alpha & -n & & & & \\ & n & -n & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & n & -n \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (2.6.93)$$

$$D_p[k, l] = \bar{\lambda}^{-1} \begin{pmatrix} -n\alpha & & & \\ n & -n & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & n & -n \end{pmatrix} \quad (2.6.94)$$

と書きかわる。ここで、 O は零行列、 $k, l = 1, 2, \dots, nY - 1$ であるが、単位行列 E は

$$E[k, l] = \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6.95)$$

とする。

このようにして計算した結果を Fig.28、Fig.29 に示す。付録 G の分散関係のグラフを正しく計算できた。いくつかのモードの固有関数は A.2 節に示している。

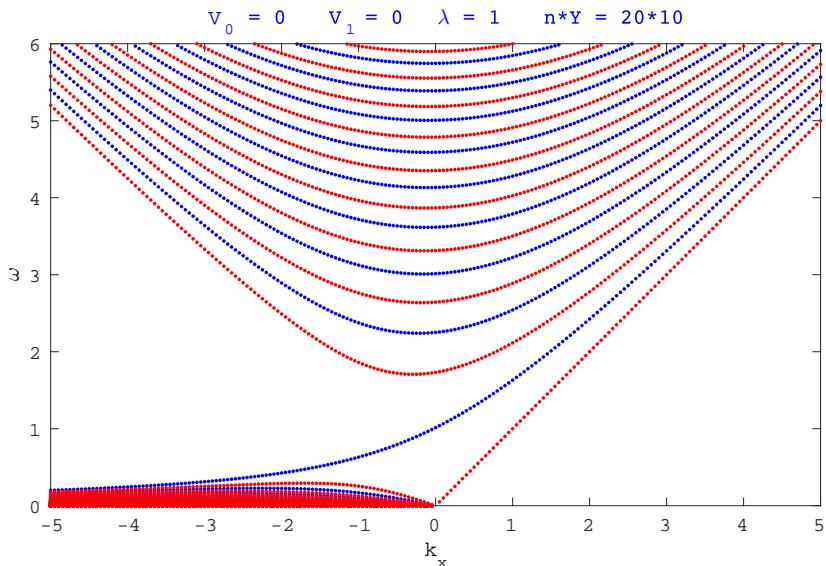


Fig.28 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 20$ 、 $Y = 10$ の場合の数値計算の結果。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x であり、赤が赤道対称モード、青が赤道反対称モードを表す。

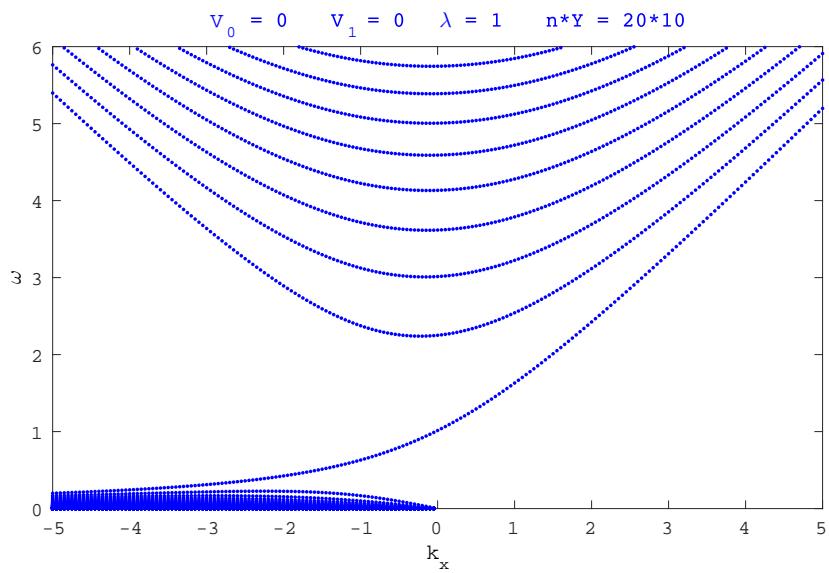


Fig.29 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 20$ 、 $Y = 10$ の場合の数値計算の結果（赤道反対称モードのみ）。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x である。

3 結果と考察

3.1 東西一様磁場の場合 ($\bar{V}_0 \neq 0, \bar{V}_1 = 0$)

まず、 $\bar{V}_0 \neq 0, \bar{V}_1 = 0$ の場合の結果を示す。 $\bar{V}_0 = 1$ の場合。

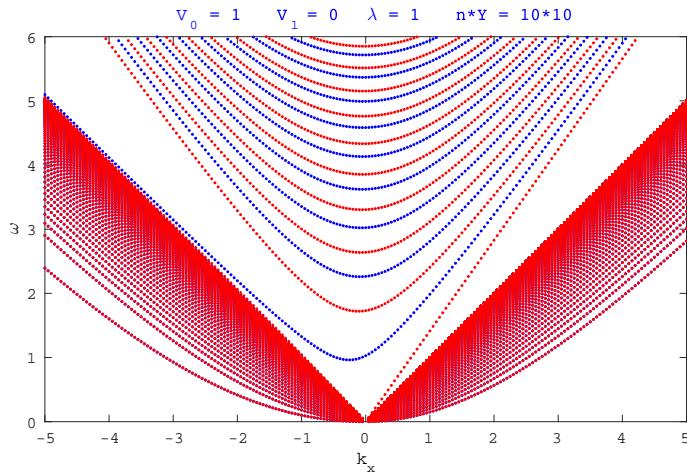


Fig.30 $\bar{V}_0 = 1, \bar{V}_1 = 0, \bar{\lambda} = 1, n = 10, Y = 10$ の場合の数値計算の結果。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x であり、赤が赤道対称モード、青が赤道反対称モードを表す。

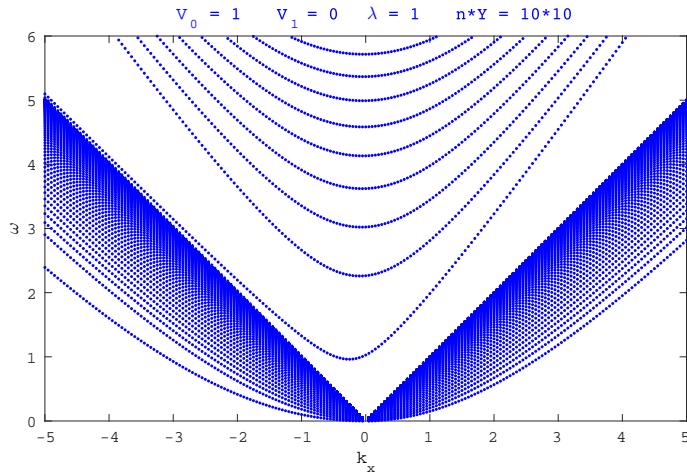


Fig.31 $\bar{V}_0 = 1, \bar{V}_1 = 0, \bar{\lambda} = 1, n = 10, Y = 10$ の場合の数値計算の結果（赤道反対称モードのみ）。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x である。

続いて、 $\bar{V}_0 = 0.1$ の場合。

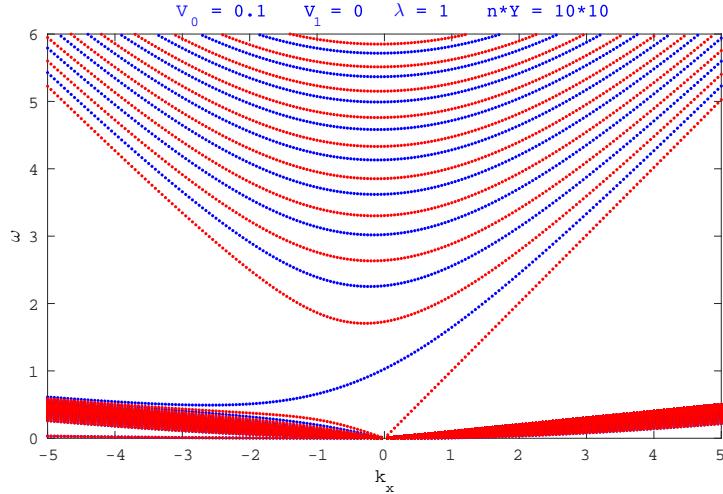


Fig.32 $\bar{V}_0 = 0.1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 10$ 、 $Y = 10$ の場合の数値計算の結果。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x であり、赤が赤道対称モード、青が赤道反対称モードを表す。

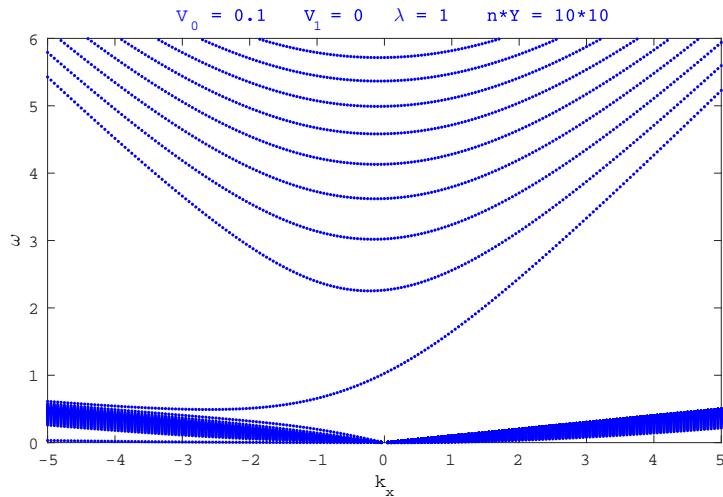


Fig.33 $\bar{V}_0 = 0.1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 10$ 、 $Y = 10$ の場合の数値計算の結果（赤道反対称モードのみ）。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x である。

3.1.1 $\bar{\omega} > |\bar{k}_x|$ の場合

これらの結果は、 $\bar{\omega} > |\bar{k}_x|$ のモードに関しては、付録 G での解析的な結果と一致している。それらの特徴をここでも挙げておくと、

- (1) 赤道 Kelvin 波、慣性重力波、混合 Rossby 重力波は、磁気張力が復元力として加わっているために、周波数が大きくなっている。
- (2) Rossby 波は、磁場が強い、または、東西波数が大きくなると、Alfvén 波的になる。

である。この $\bar{\omega} > |\bar{k}_x|$ のモードは、磁場の存在によって、固有関数の形も変更を受けているが、ここでは示さない。興味がある読者は、A.2.2 節を参照。

3.1.2 $\bar{\omega} < |\bar{k}_x|$ の場合

$\bar{\omega} < |\bar{k}_x|$ の場合は、付録 G での解析的な結果では、波が赤道にトラップされないことがわかっている。 $\bar{V}_0 = 0.1$ の場合の分散関係の $\bar{\omega} < |\bar{k}_x|$ の領域を拡大してみると、以下のようになる。

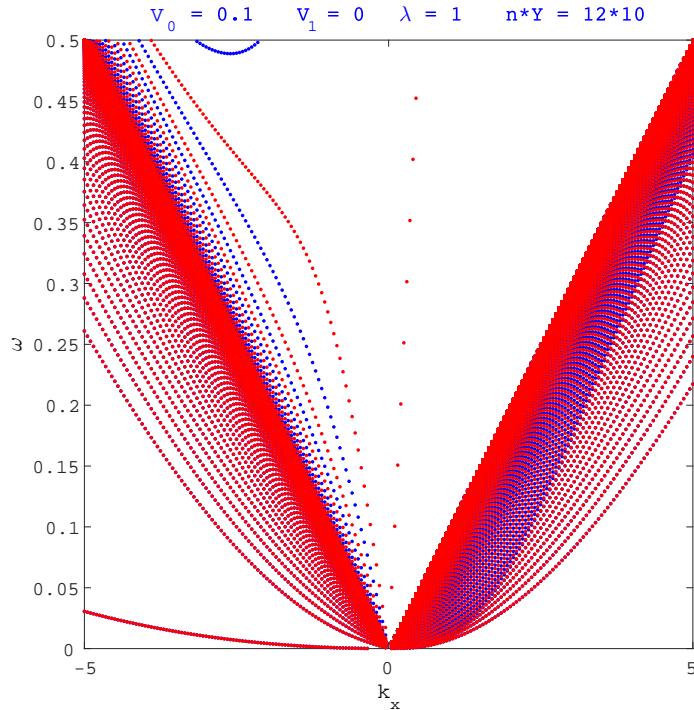


Fig.34 $\bar{V}_0 = 0.1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 12$ 、 $Y = 10$ の場合の数値計算の結果。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x であり、赤が赤道対称モード、青が赤道反対称モードを表す。

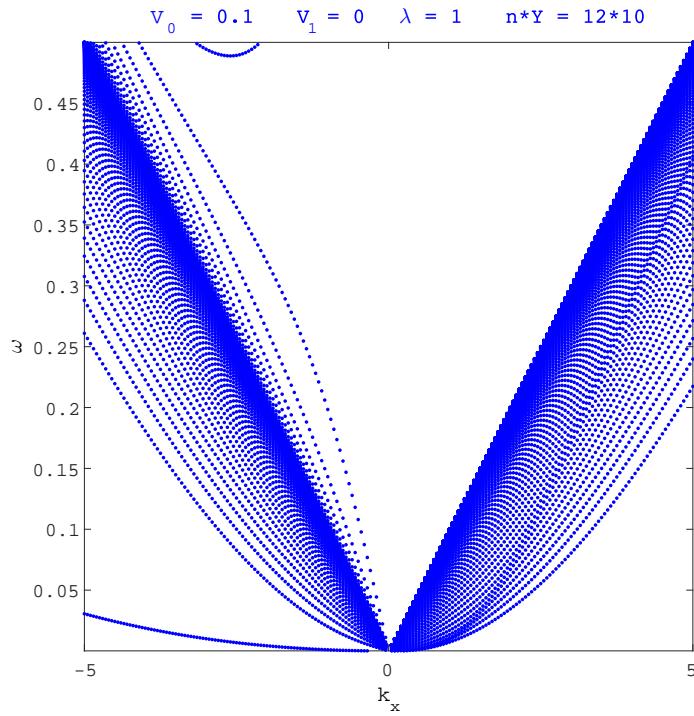


Fig.35 $\bar{V}_0 = 0.1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 12$ 、 $Y = 10$ の場合の数値計算の結果（赤道反対称モードのみ）。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x である。

$\bar{\omega} < |\bar{k}_x|$ のモードの分散関係は、東進と西進で異なっている。また、西進では、赤道対称モードと反対称モードの周波数が一致しているのに対し、東進では、一致している部分と一致していない部分がある。これらを理解するため、いくつかのモードの固有関数を示す。

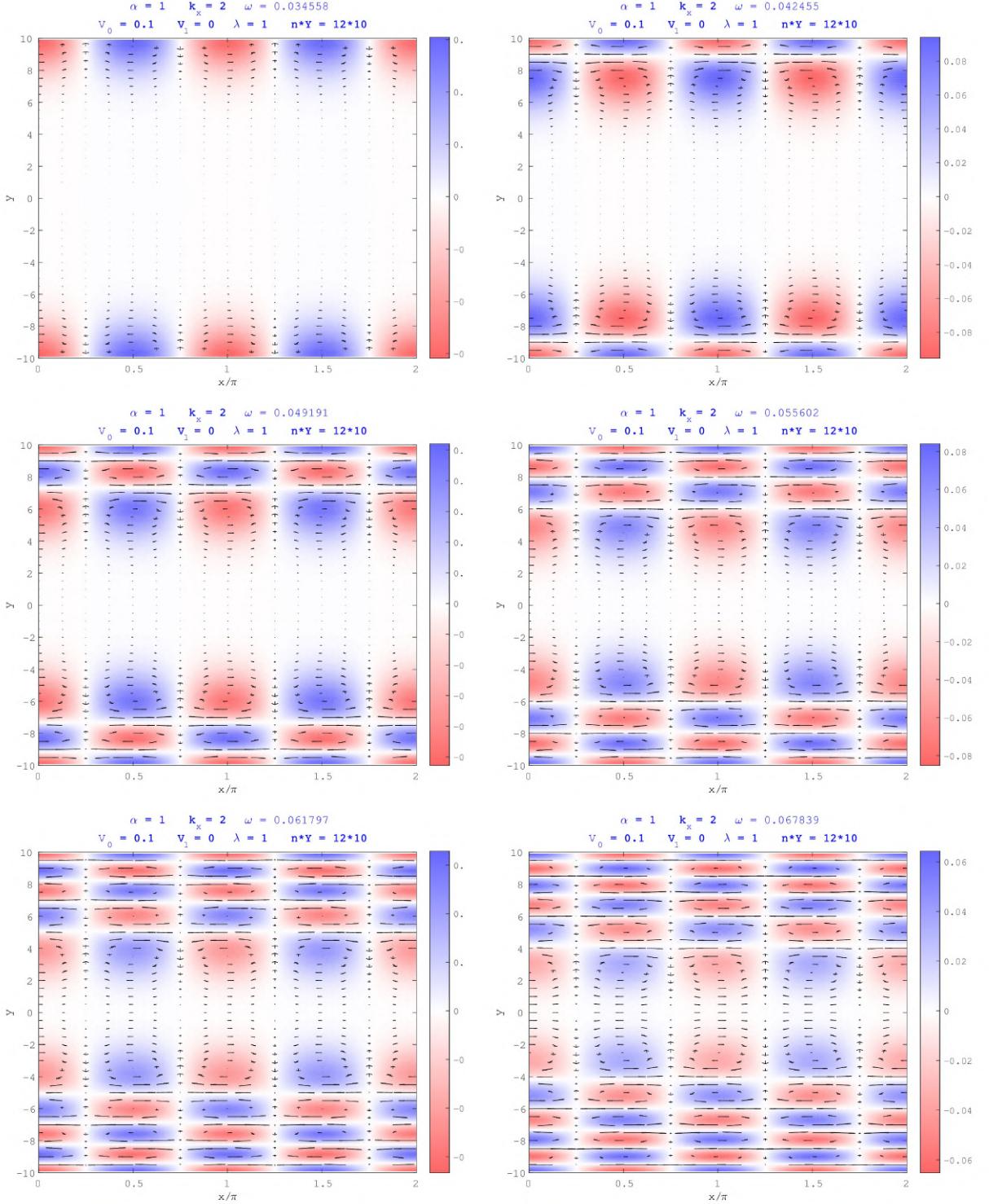


Fig.36 赤道対称、 $\bar{k}_x = 2$ （東進）、 $\bar{V}_0 = 0.1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 12$ 、 $Y = 10$ の場合の固有関数（水平方向の流れと圧力の様子）。縦軸が \bar{y} ($\bar{y} = 0$ が赤道)、横軸が \bar{x}/π 。矢印は流速を表し、色は $\bar{\sigma}$ （圧力）を表す。左上の図が最も周波数が小さいモードで、右下ほど周波数が大きい。

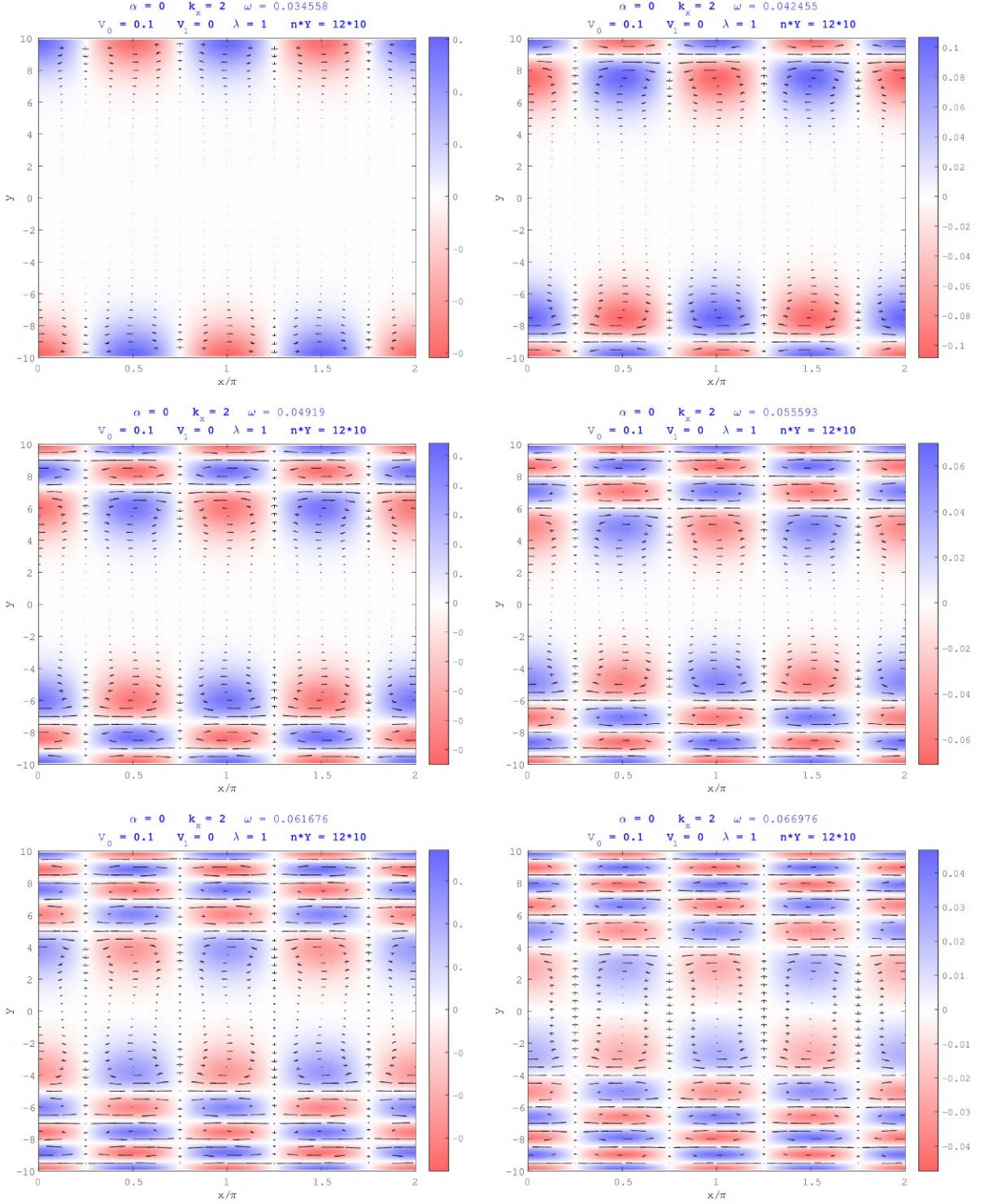


Fig.37 赤道反対称、 $\bar{k}_x = 2$ （東進）、 $\bar{V}_0 = 0.1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 12$ 、 $Y = 10$ の場合の固有関数（水平方向の流れと圧力の様子）。縦軸が \bar{y} ($\bar{y} = 0$ が赤道)、横軸が \bar{x}/π 。矢印は流速を表し、色は $\bar{\sigma}$ (圧力) を表す。左上の図が最も周波数が小さいモードで、右下ほど周波数が大きい。

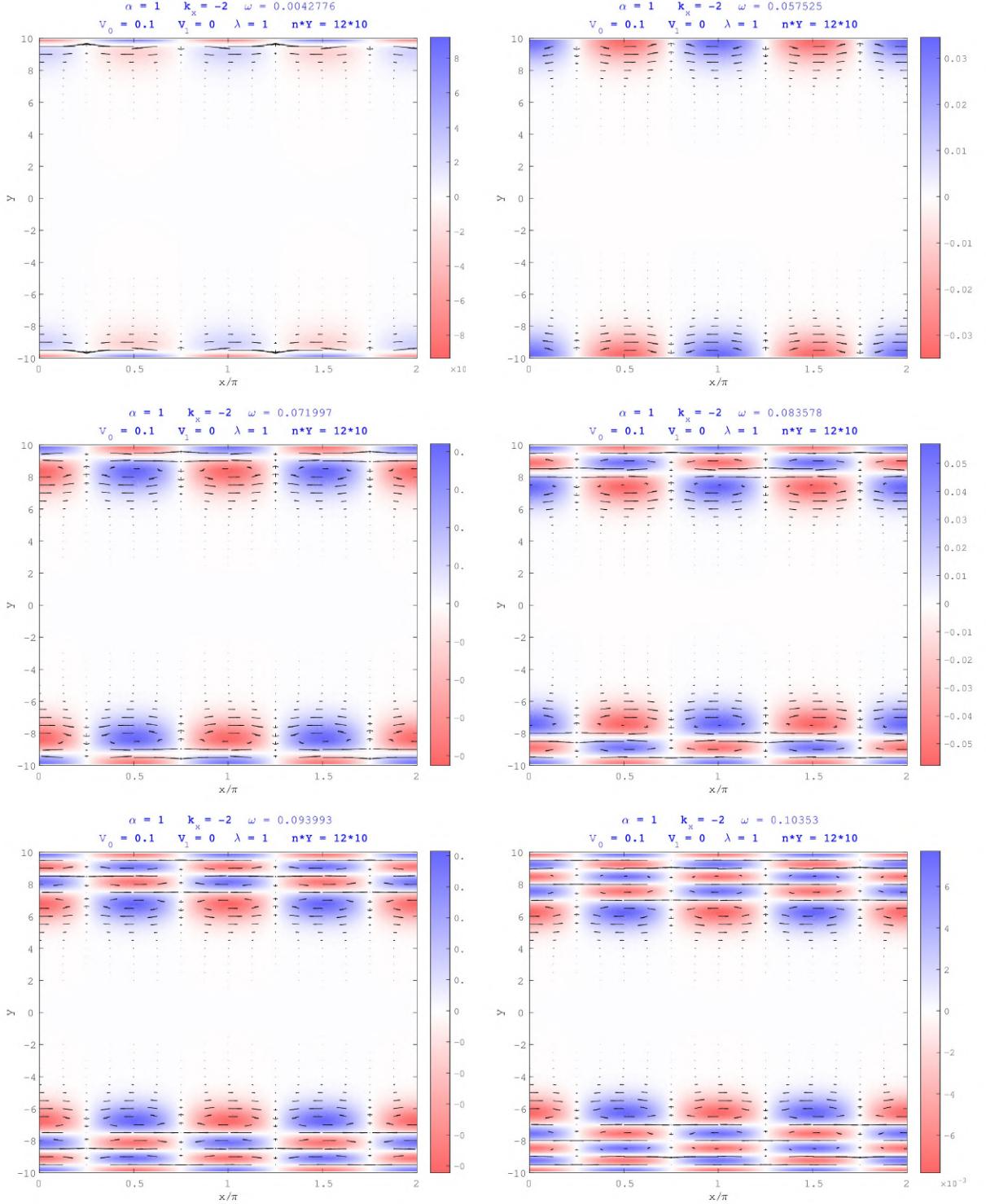


Fig.38 赤道対称、 $\bar{k}_x = -2$ （西進）、 $\bar{V}_0 = 0.1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 12$ 、 $Y = 10$ の場合の固有関数（水平方向の流れと圧力の様子）。縦軸が \bar{y} ($\bar{y} = 0$ が赤道)、横軸が \bar{x}/π 。矢印は流速を表し、色は $\bar{\sigma}$ （圧力）を表す。左上の図が最も周波数が小さいモードで、右下ほど周波数が大きい。

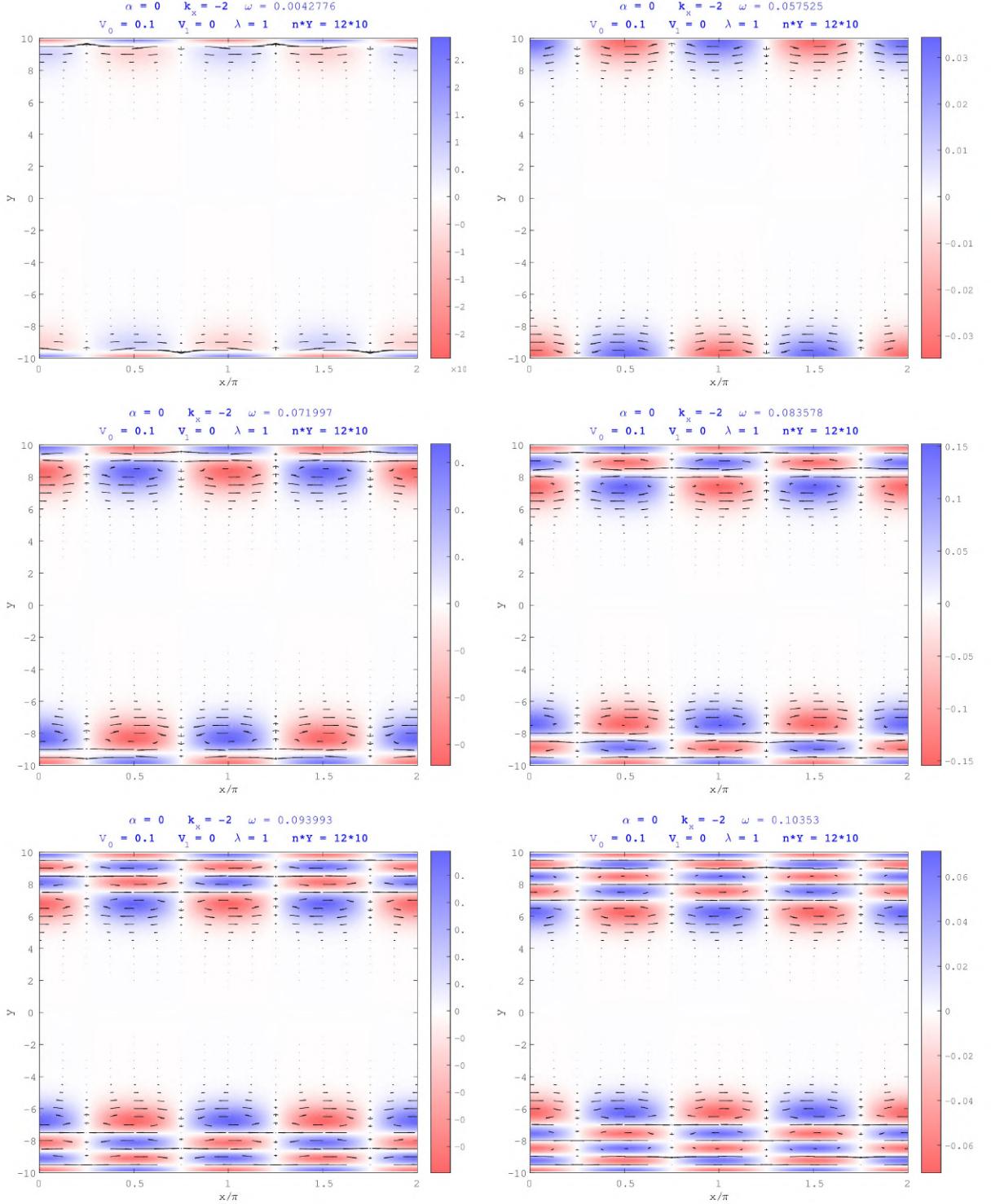


Fig.39 赤道反対称、 $\bar{k}_x = 2$ （西進）、 $\bar{V}_0 = 0.1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 12$ 、 $Y = 10$ の場合の固有関数（水平方向の流れと圧力の様子）。縦軸が \bar{y} ($\bar{y} = 0$ が赤道)、横軸が \bar{x}/π 。矢印は流速を表し、色は $\bar{\sigma}$ (圧力) を表す。左上の図が最も周波数が小さいモードで、右下ほど周波数が大きい。

固有関数を見ると、西進と東進どちらも高緯度に振幅を持っている。すなわち、赤道にはトラップされていない。これらのモードは、計算領域の端（無限遠）で、たまたま境界条件を満たしたモードであり、周波数や固有関数の形状にはほとんど意味がない。このモードをきちんと調べるには、計算領域に端がある球座標系で計算しなければならない。

赤道対称モードと赤道反対称モードの周波数の一致・不一致もこの固有関数のグラフから理解できる。西進も東進も、周波数が大きいモードは南北波数が大きくなる。東進のモードは南北波数が大きくなるにつれ、振幅が赤道付近までせり出してくるのに対し、西進の方はせり出してこない。赤道付近に振幅を持たなければ、赤道対称モードと赤道反対称モードの周波数は一致する。このため、西進のモードは赤道対称モードと赤道反対称モードの周波数が一致している。一方、東進のモードは、周波数が大きくなると、赤道付近に振幅を持つようになり、赤道対称モードと赤道反対称モードの周波数には、ずれが出てくる。

付録 F によると、中緯度 β 面では MC Rossby 波が存在できる。 $\bar{\omega} < |\bar{k}_x|$ のモードは、赤道付近には振幅をもたず、高緯度に振幅を持つことから、MC Rossby 波だと考えられる。MC Rossby 波はコリオリ力と磁気張力がつり合う波で、赤道ではコリオリ力がはたらかないのに対し、磁気張力は流れが存在すればはたらくので、つり合いが達成されず、赤道付近に存在できないのであろう。

3.1.3 地球外核のパラメータでの分散関係

以上の結果は、分散関係の定性的な振る舞いを見るために、地球の外核でのパラメータとは異なる値を用いていた。以下では、地球の外核での値だと考えられているものを代入し、周期と波長がどれほどになるかを示す。ここでは、以下のパラメータ

$$H = 100\text{km} \quad (3.1.1)$$

$$\beta = 10^{-11}/(\text{m} \cdot \text{s}) \quad (3.1.2)$$

$$\lambda = \pi^2 \quad (3.1.3)$$

は固定し、成層と磁場の強さ

$$N = 2\Omega, 20\Omega \quad (3.1.4)$$

$$B_x = 0, 1, 10\text{mT} \quad (3.1.5)$$

を変化させる。ここで、 $\Omega = 0.73 \cdot 10^{-4}/\text{s}$ は地球の自転角速度であり、物性値は

$$\rho_0 = 10^4 \text{kg/m}^3 \quad (3.1.6)$$

$$\mu = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{H/m} \quad (3.1.7)$$

とする。

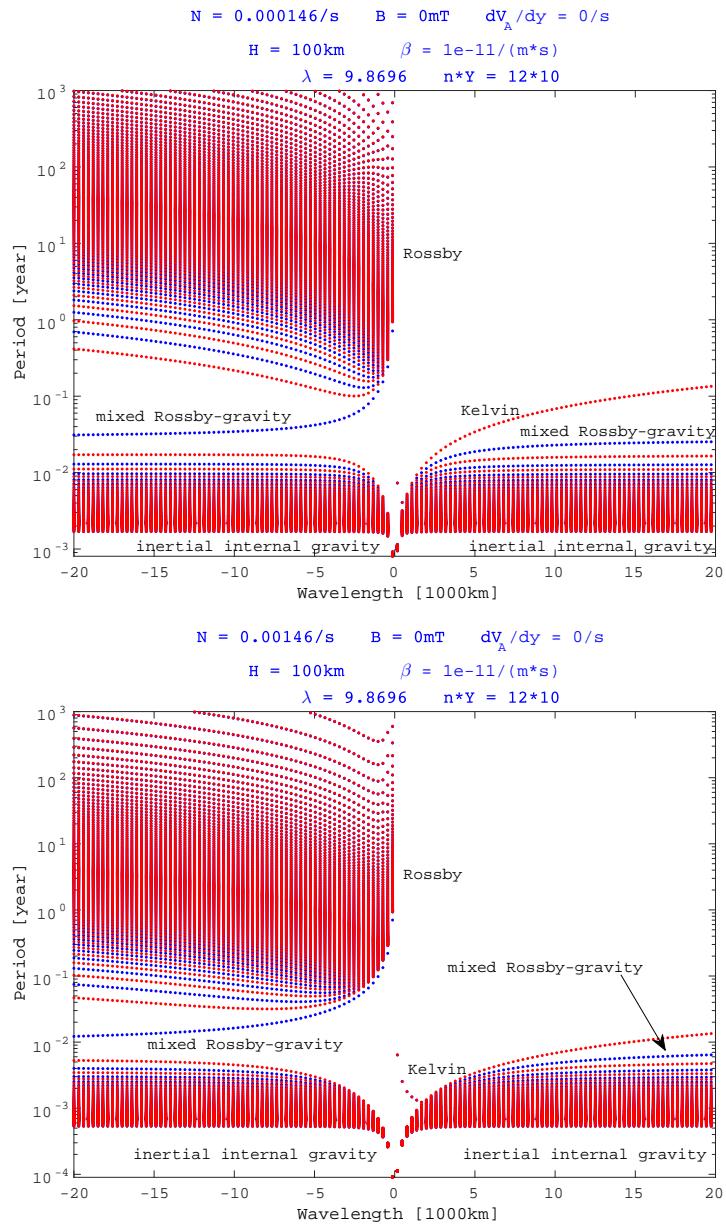


Fig.40 $B_x = 0\text{mT}$ の場合の分散関係。横軸は波長（東進側を正としている、単位は km）、縦軸は周期（単位は年）である。（上図） $N = 2\Omega$ の場合。（下図） $N = 20\Omega$ の場合。

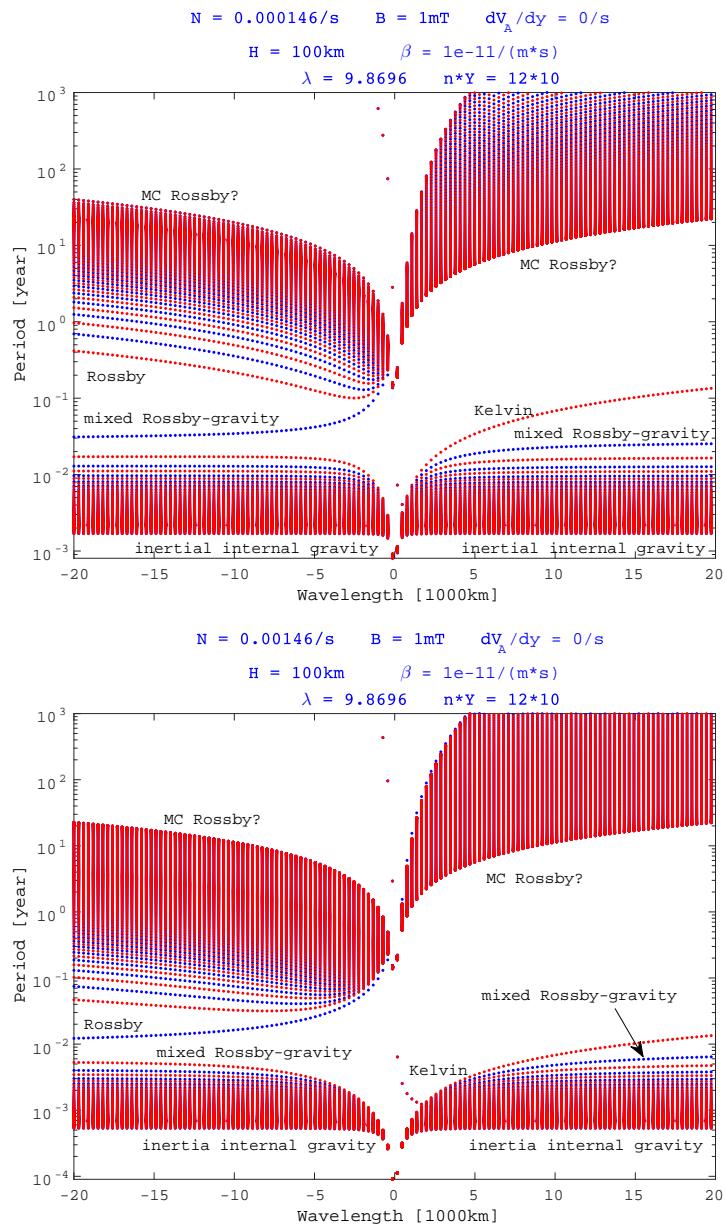


Fig.41 $B_x = 1\text{mT}$ の場合の分散関係。横軸は波長（東進側を正としている、単位は km）、縦軸は周期（単位は年）である。（上図） $N = 2\Omega$ の場合。（下図） $N = 20\Omega$ の場合。

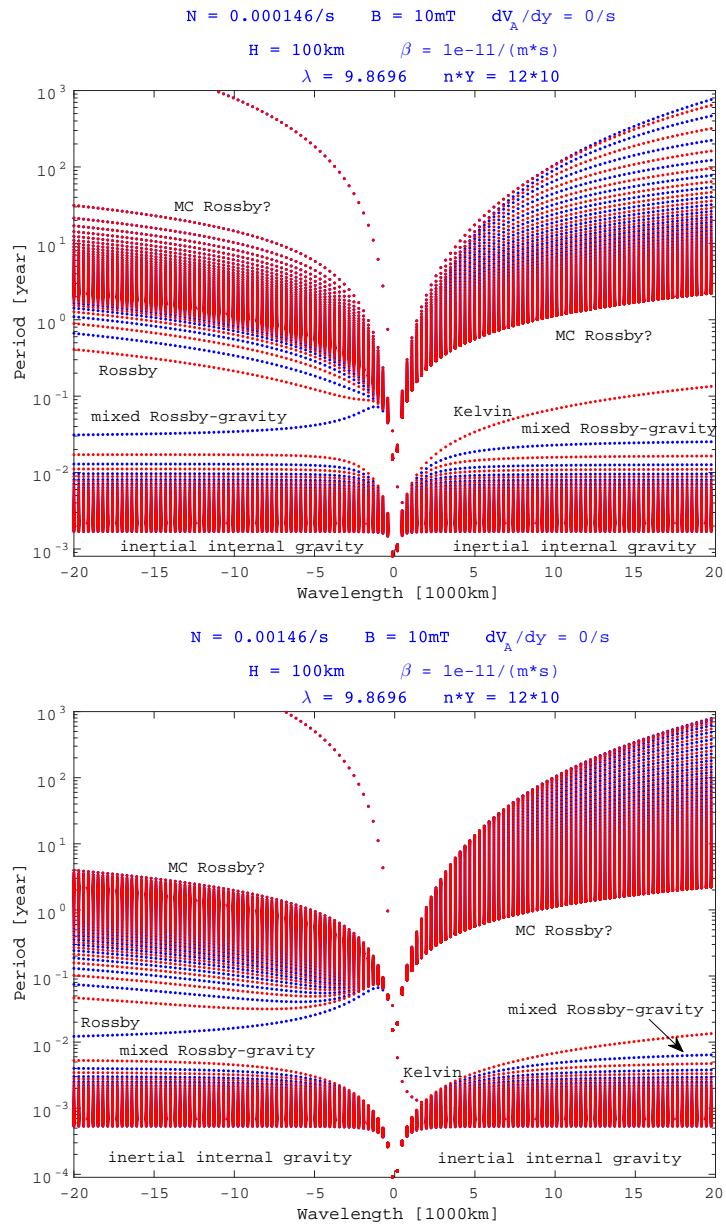


Fig.42 $B_x = 10\text{mT}$ の場合の分散関係。横軸は波長（東進側を正としている、単位は km）、縦軸は周期（単位は年）である。（上図） $N = 2\Omega$ の場合。（下図） $N = 20\Omega$ の場合。

3.2 赤道反対称磁場の場合 ($\bar{\mathcal{V}}_0 = 0$ 、 $\bar{\mathcal{V}}_1 \neq 0$)

3.2.1 数値計算の結果

次に、磁場勾配がある場合を考える。赤道反対称な背景磁場であれば、赤道で磁気張力がはたらかなくなるので、赤道付近にも MC Rossby 波ができるかもしれない。

ただし注意すべきことは、磁気勾配があると、Alfvén 波が連続スペクトルを持つことである。実際、本研究でも連続スペクトルと思われるような分散関係が得られた。 $\bar{\mathcal{V}}_0 = 0$ 、 $\bar{\mathcal{V}}_1 = 0.1$ であるが、計算範囲 Y が異なる分散関係を以下に示す (Fig43~43)。

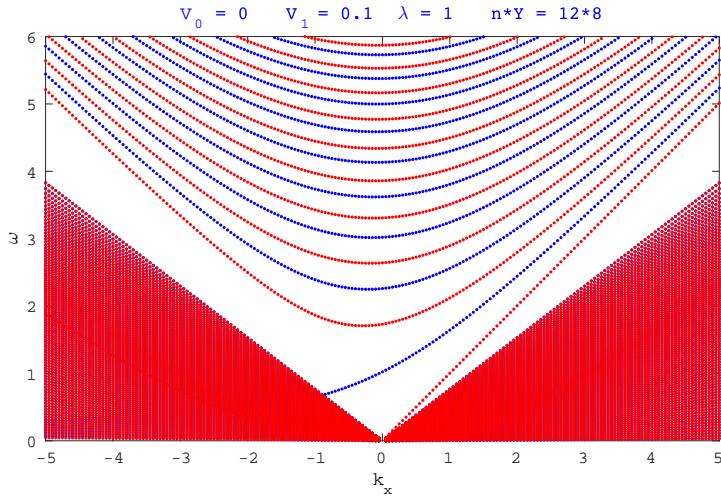


Fig.43 $\bar{V}_0 = 0$, $\bar{V}_1 = 0.1$, $\bar{\lambda} = 1$, $n = 12$, $Y = 8$ の場合の数値計算の結果。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x であり、赤が赤道対称モード、青が赤道反対称モードを表す。

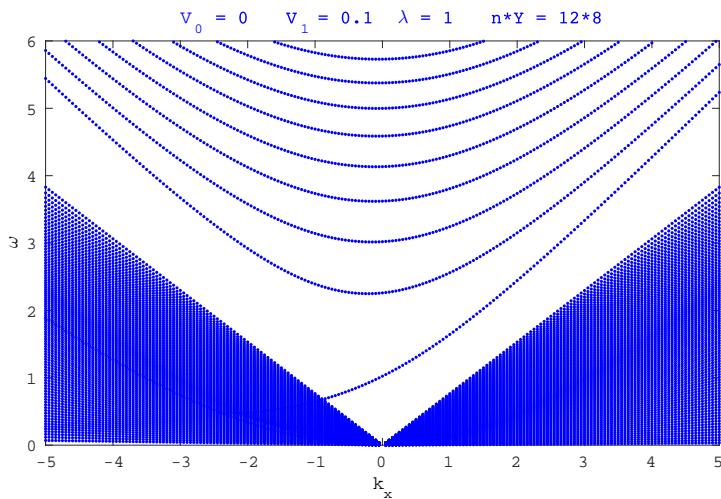


Fig.44 $\bar{V}_0 = 0$, $\bar{V}_1 = 0.1$, $\bar{\lambda} = 1$, $n = 12$, $Y = 8$ の場合の数値計算の結果（赤道反対称モードのみ）。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x である。

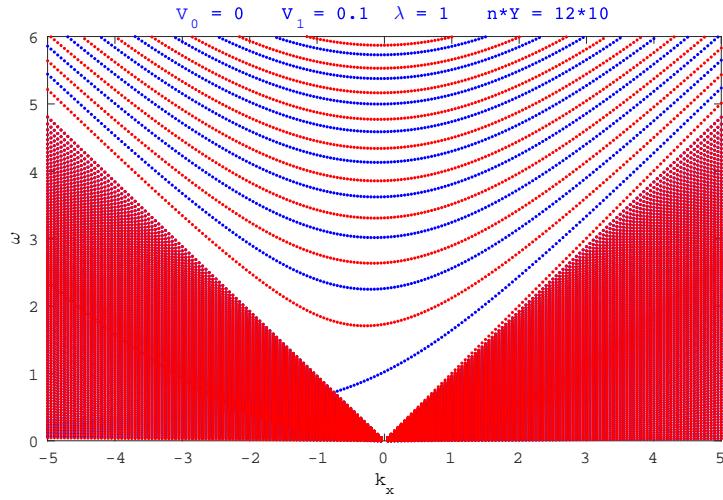


Fig.45 $\bar{V}_0 = 0$ 、 $\bar{V}_1 = 0.1$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 12$ 、 $Y = 10$ の場合の数値計算の結果。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x であり、赤が赤道対称モード、青が赤道反対称モードを表す。

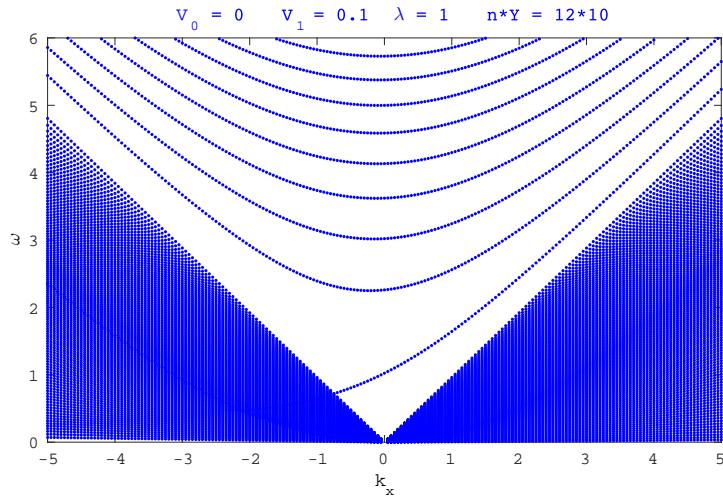


Fig.46 $\bar{V}_0 = 0$ 、 $\bar{V}_1 = 0.1$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 12$ 、 $Y = 10$ の場合の数値計算の結果（赤道反対称モードのみ）。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x である。

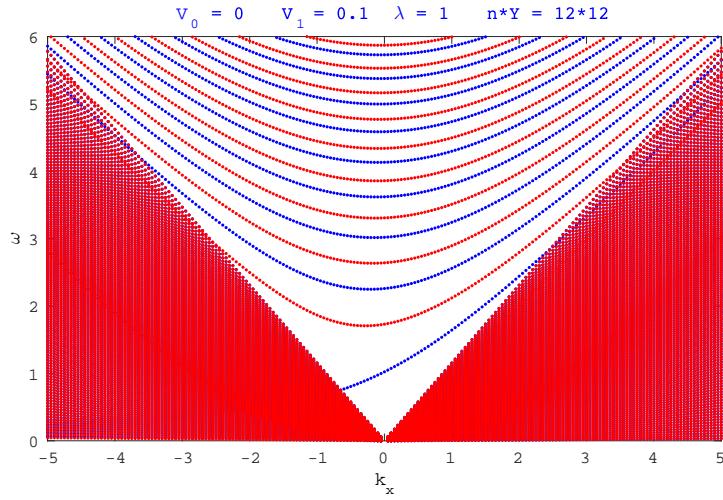


Fig.47 $\bar{V}_0 = 0$ 、 $\bar{V}_1 = 0.1$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 12$ 、 $Y = 12$ の場合の数値計算の結果。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x であり、赤が赤道対称モード、青が赤道反対称モードを表す。

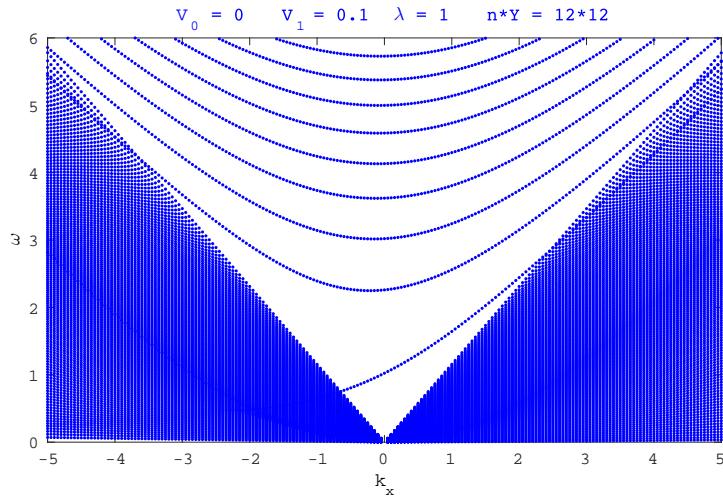


Fig.48 $\bar{V}_0 = 0$ 、 $\bar{V}_1 = 0.1$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 12$ 、 $Y = 12$ の場合の数値計算の結果（赤道反対称モードのみ）。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x である。

Fig43~48 を見ると、計算範囲 Y が大きいほど、連続的なスペクトルの幅が広がっていることがわかる。これは、今、無限遠ほど Alfvén 波速度が大きくなっているので、計算範囲が広がるほど、速い Alfvén 波が存在できるからである。赤道 β 面の場合、理想的には無限遠まで計算すべきであり、その場合は、無限遠で Alfvén 波速度が無限大になるので、分散関係のグラフ全体に点がプロットされることになる。

連続的なスペクトルの部分を拡大したものを以下に示す。

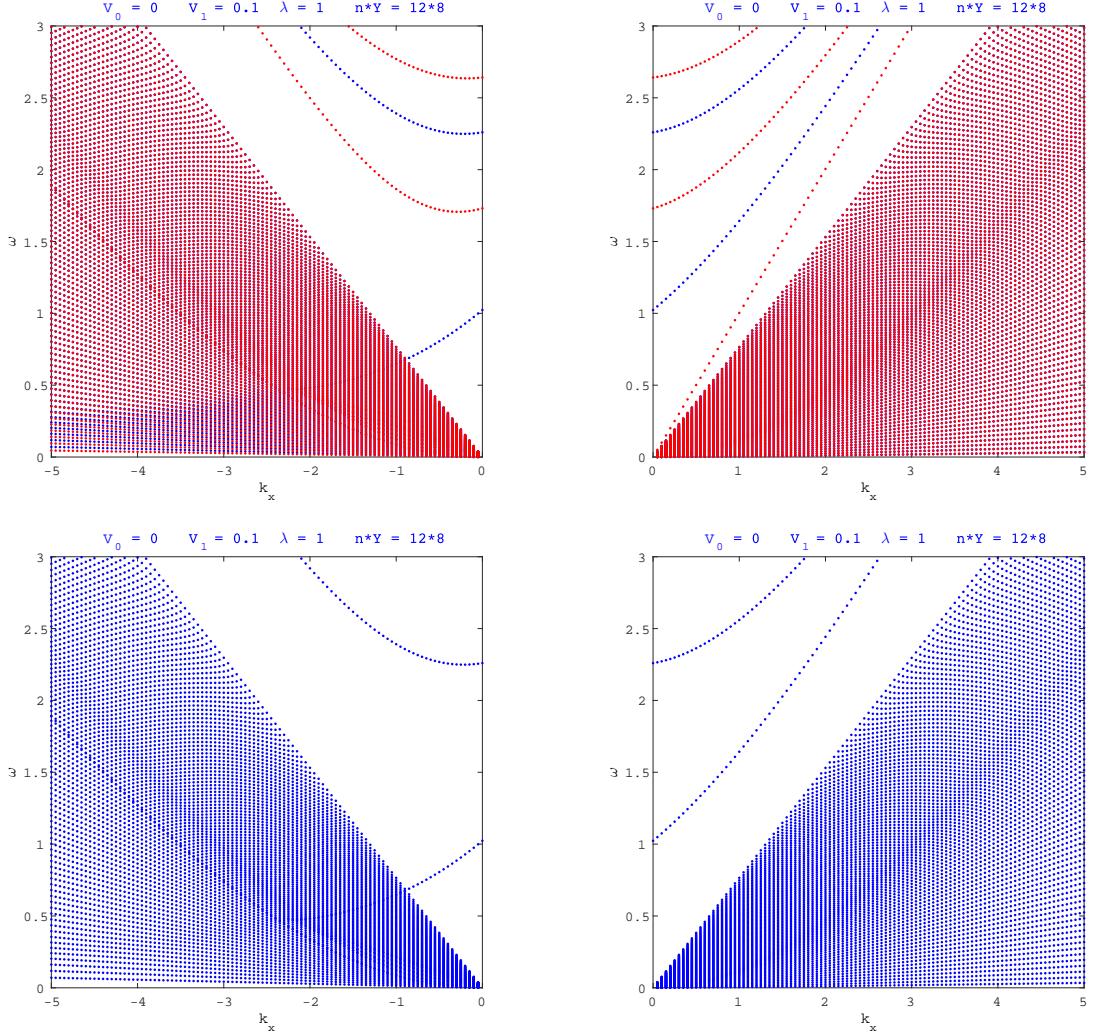


Fig.49 $\bar{V}_0 = 0$, $\bar{V}_1 = 0.1$, $\bar{\lambda} = 1$, $n = 12$, $Y = 8$ の場合の数値計算の結果。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x であり、赤が赤道対称モード、青が赤道反対称モードを表す。

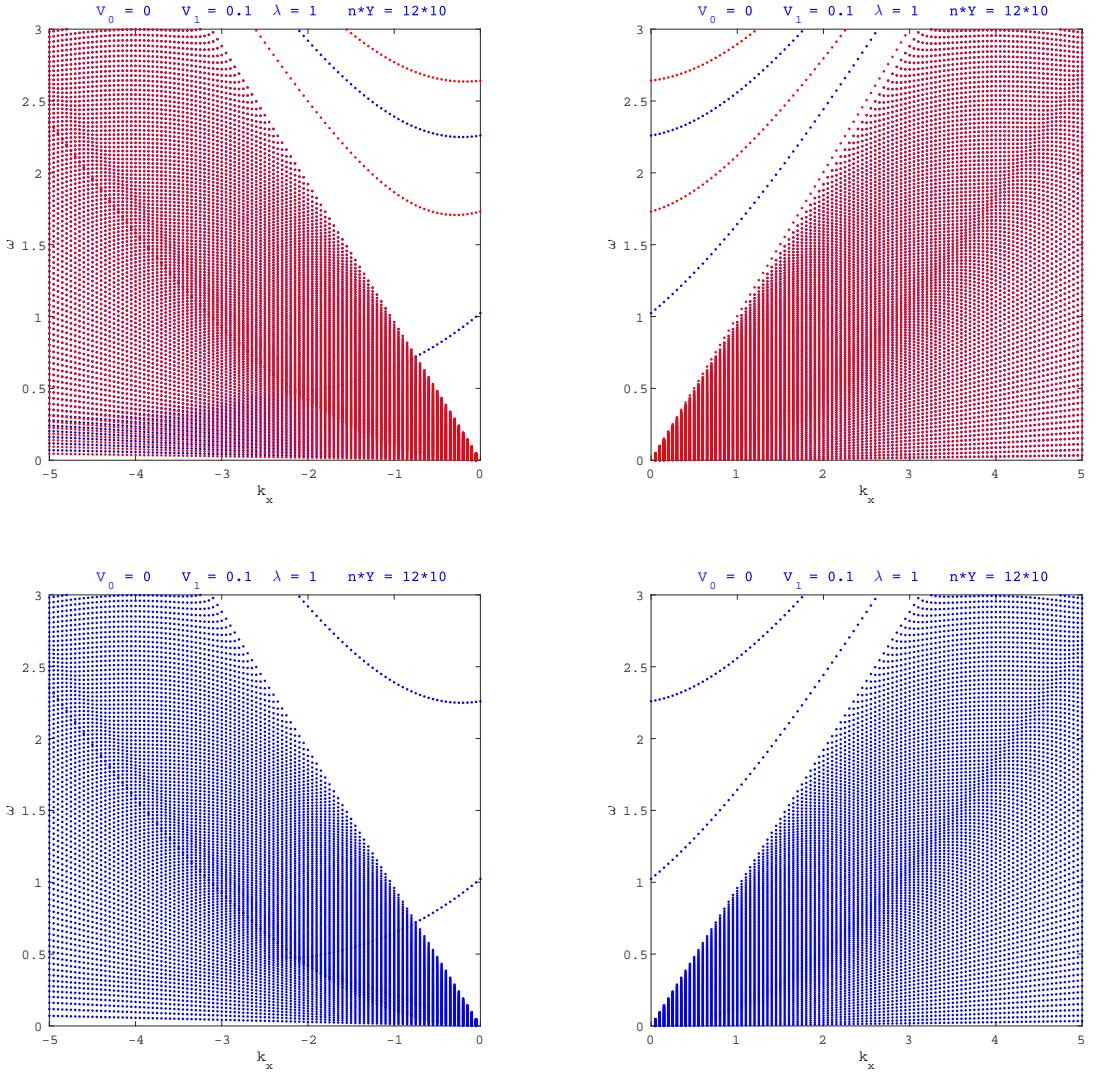


Fig.50 $\bar{V}_0 = 0$, $\bar{V}_1 = 0.1$, $\bar{\lambda} = 1$, $n = 12$, $Y = 10$ の場合の数値計算の結果。縦軸が $\bar{\omega}$ 、横軸は \bar{k}_x であり、赤が赤道対称モード、青が赤道反対称モードを表す。

以上の図から、連続的なスペクトルの中にいくつかの特徴があることがわかる。

- (1) 西進と東進どちらにも存在する対称なぼんやりとした線状のもの。計算範囲 Y を大きくするほど高周波数側にシフトしている。
- (2) 西進のみに存在するはっきりとした線状のもの。計算範囲 Y を大きくするほど高周波数側にシフトしている。
- (3) 西進混合 Rossby 重力波のブランチが周波数が小さいところでなくなっている。特に、(2) の線との交点付近で消滅している。
- (4) 東進の赤道対称モードと赤道反対称モードの周波数は、すべて一致しているのに対し、西進の方は低周波数領域で、ずれが生じている。

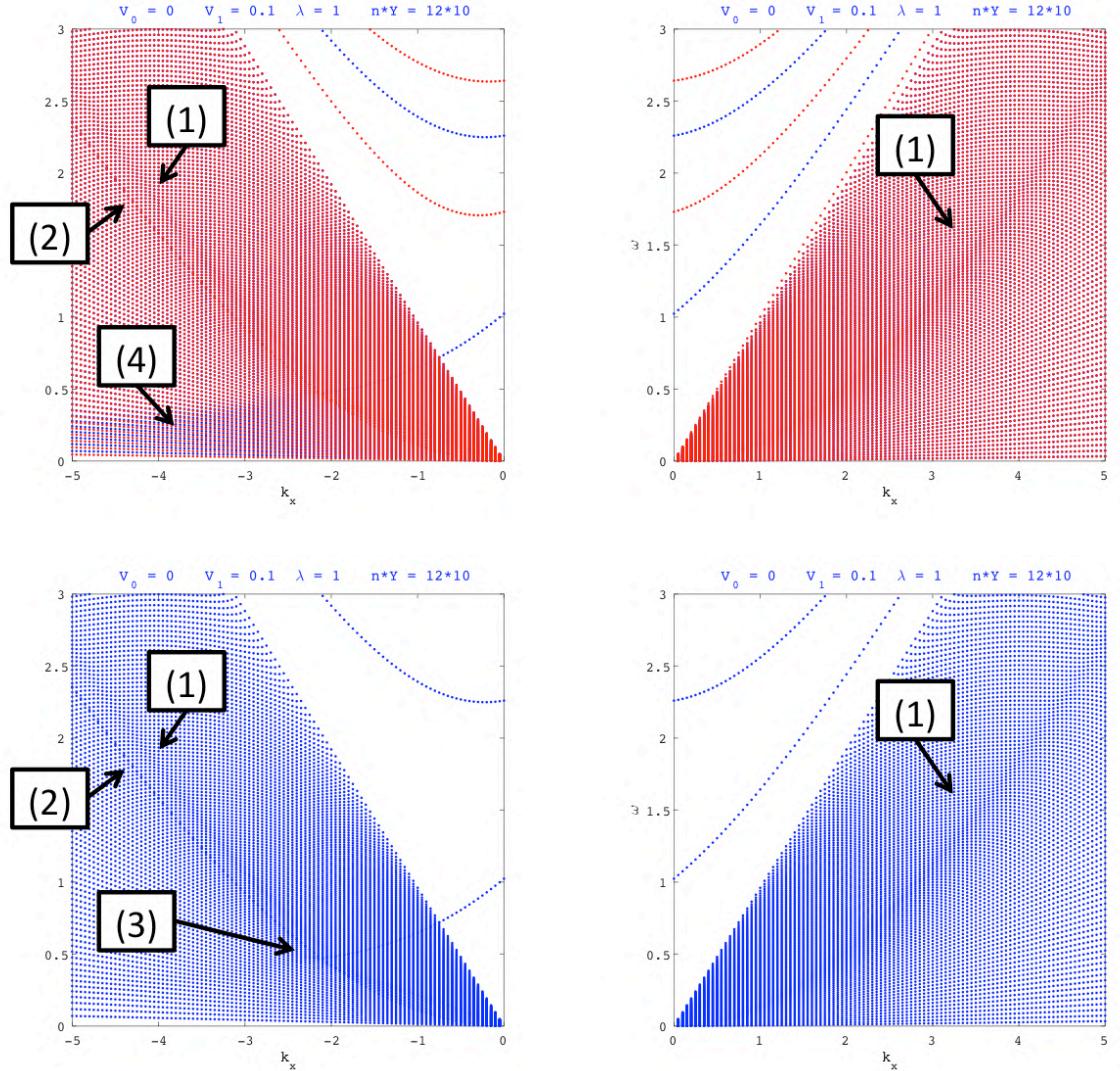


Fig.51 連続的なスペクトルの中の特徴。番号は対応させている。このグラフは、Fig.50 と同じものである。

これらの意味するものを理解するため、固有関数を確認する。ここで、注意すべきことは、付録 F でも示したように、磁場勾配があるときは、特異点が現れることである。特異点は 2 つあり、今の無次元化を行うと、

$$\bar{y}_s = \pm \frac{\bar{\omega}}{\bar{V}_1 \bar{k}_x} \quad (3.2.1)$$

$$\bar{y}_s = \pm \frac{\sqrt{\bar{\omega}^2 - \bar{k}_x^2/\lambda^2}}{\bar{V}_1 \bar{k}_x} \quad (3.2.2)$$

となる。ただし、後者は、南北流が 0 になる位置である。

まずは、東進のモードの固有関数を示す。

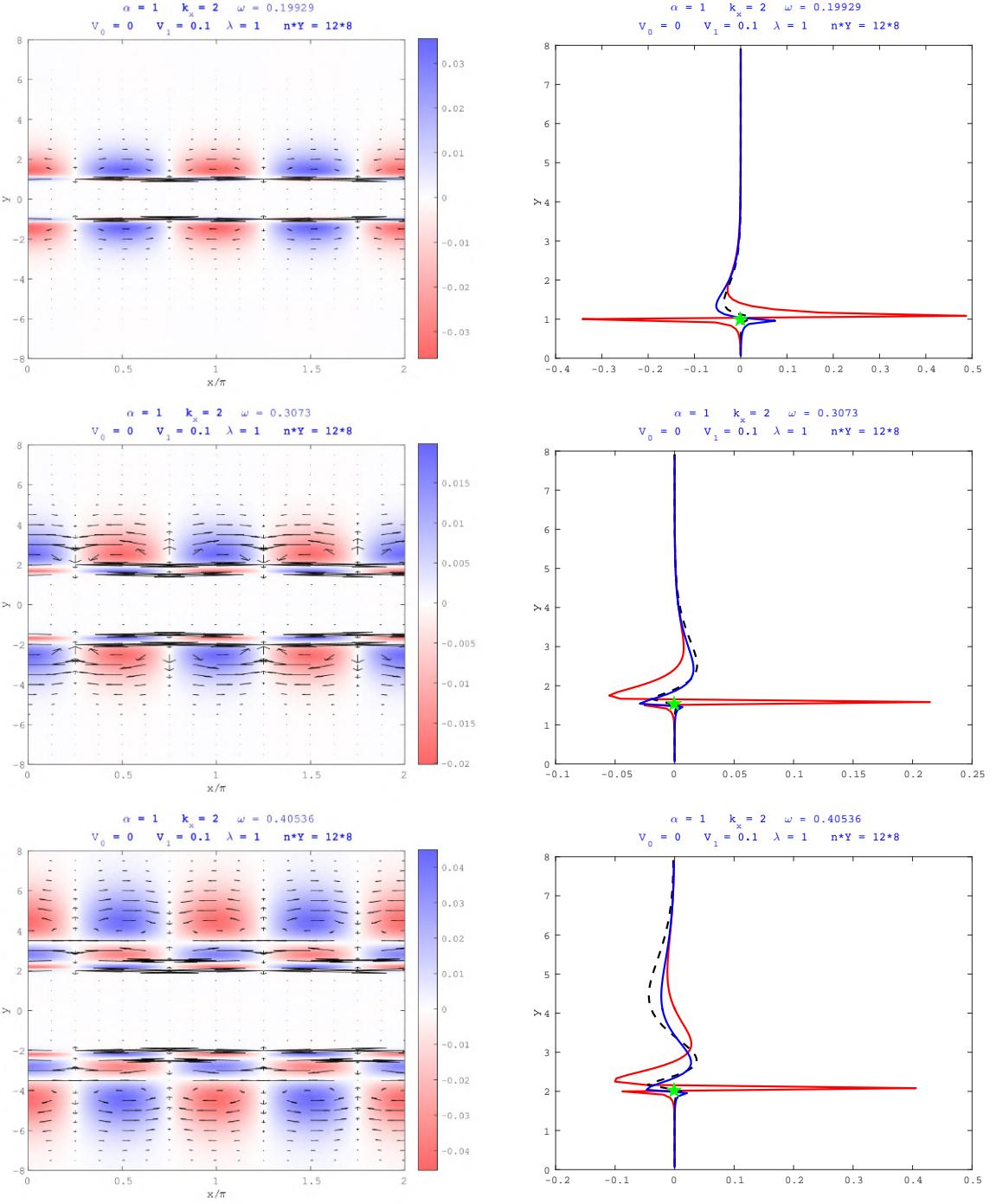


Fig.52 赤道対称、 $\bar{k}_x = 2$ 、 $\bar{V}_0 = 0$ 、 $\bar{V}_1 = 0.1$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 12$ 、 $Y = 8$ の場合。(左図) 水平方向の流れと圧力の様子。縦軸が \bar{y} ($\bar{y} = 0$ が赤道)、横軸が \bar{x}/π 。矢印は流速を表し、色は $\bar{\sigma}$ (圧力) を表す。(右図) 固有関数の南北構造。縦軸が \bar{y} ($\bar{y} = 0$ が赤道)、横軸が振幅。赤線が U (x (東西) 方向の流れ)、青線が V (y (南北) 方向の流れ)、黒の破線が $\bar{\sigma}$ (圧力) を表す。また、緑の星印は $\bar{y} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{V}_1 \bar{k}_x}$ の位置を表す。(上段) $\bar{\omega} = 0.19929$ の場合。(中段) $\bar{\omega} = 0.3073$ の場合。(下段) $\bar{\omega} = 0.40536$ の場合。

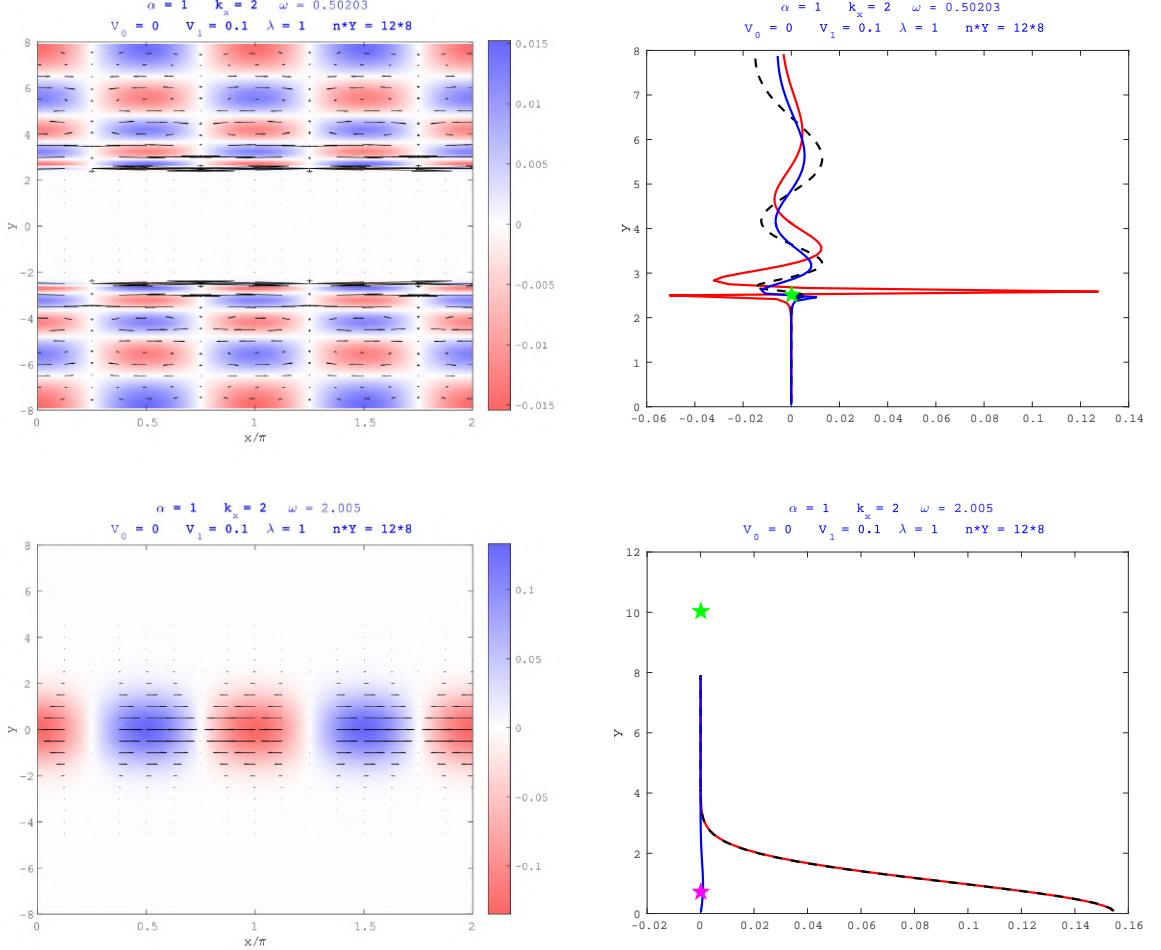


Fig.53 赤道対称、 $\bar{k}_x = 2$ 、 $\bar{V}_0 = 0$ 、 $\bar{V}_1 = 0.1$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 12$ 、 $Y = 8$ の場合。(左図)と(右図)は Fig.52 と同じであるが、マゼンタの星印は $\bar{y} = \frac{\sqrt{\bar{\omega}^2 - \bar{k}_x^2 / \bar{\lambda}^2}}{\bar{V}_1 \bar{k}_x}$ の位置を表す。(上段) $\bar{\omega} = 0.50203$ の場合。(下段) $\bar{\omega} = 2.005$ (赤道 kelvin 波) の場合。

以上の図より、東進のモードはすべて、特異点 $\bar{y}_s = \frac{\bar{\omega}}{\bar{V}_1 \bar{k}_x}$ の外側（高緯度側）に振幅を持つことがわかる。また、低周波数領域では無限遠には振幅を持たないが、徐々に周波数を大きくしていくと、(1) の線付近で振幅を持つ領域が計算領域の端にぶつかっている。(1) の線はそのことが原因で発生したと考えられる。

次に、西進のモードの固有関数を示す。

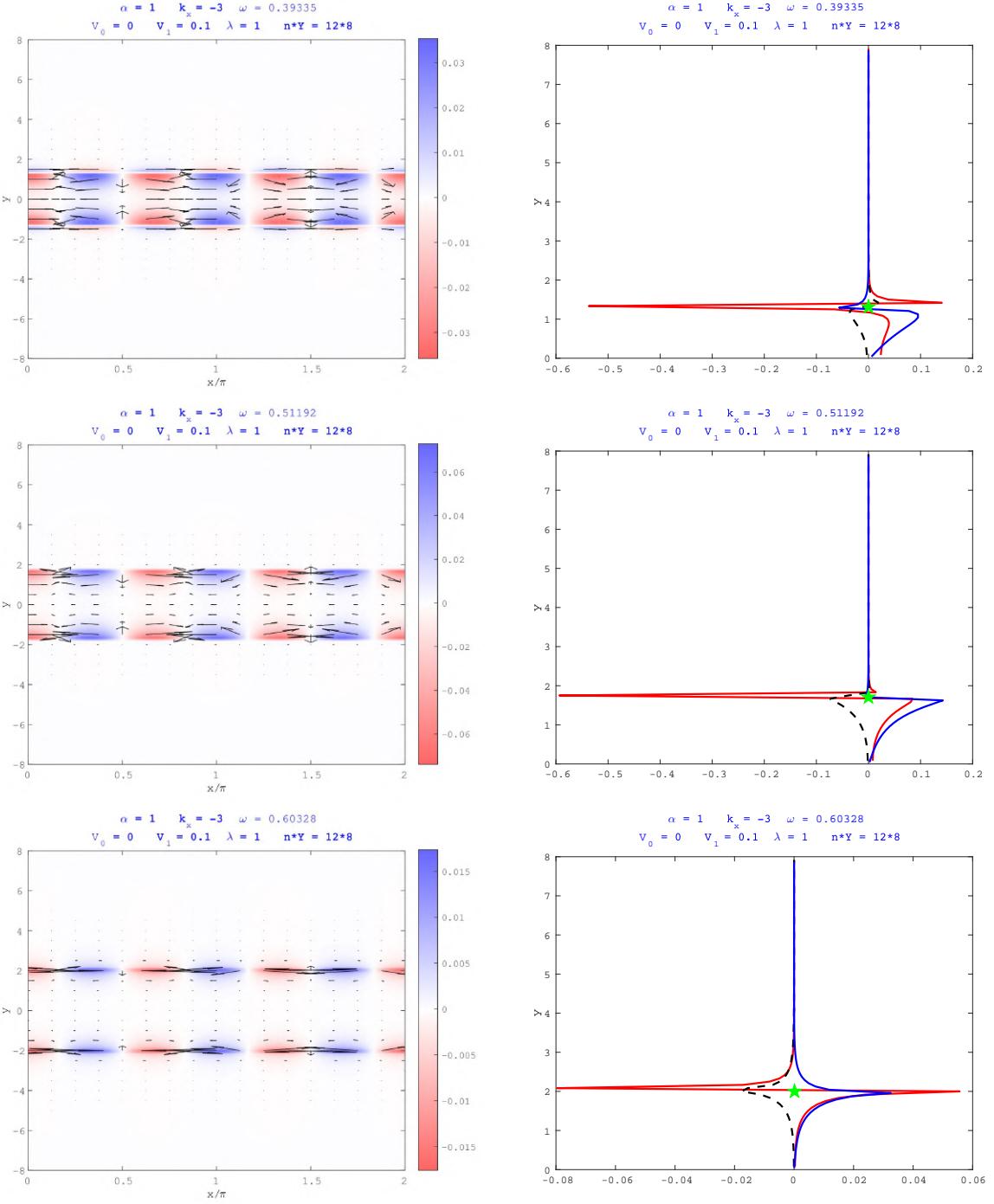


Fig.54 赤道対称、 $\bar{k}_x = -3$ 、 $\bar{V}_0 = 0$ 、 $\bar{V}_1 = 0.1$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 12$ 、 $Y = 8$ の場合。(左図) と(右図) は Fig.52 と同じである。(上段) $\bar{\omega} = 0.39335$ の場合。(中段) $\bar{\omega} = 0.51192$ の場合。(下段) $\bar{\omega} = 0.60328$ の場合。

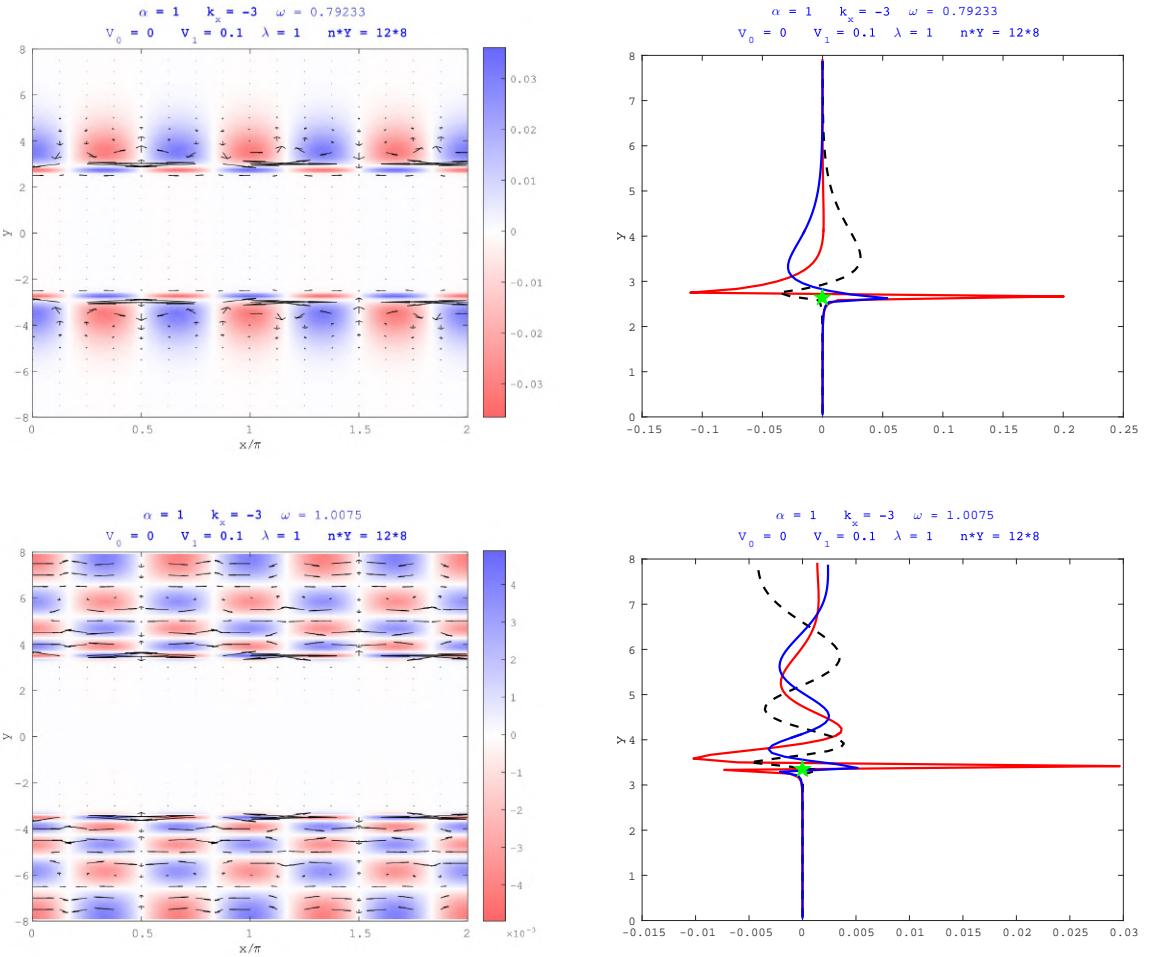


Fig.55 赤道対称、 $\bar{k}_x = -3$ 、 $\bar{V}_0 = 0$ 、 $\bar{V}_1 = 0.1$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 12$ 、 $Y = 8$ の場合。(左図)と(右図)はFig.52と同じである。(上段) $\bar{\omega} = 0.79233$ の場合。(下段) $\bar{\omega} = 1.0075$ の場合。

西進のモードは、低周波領域では特異点の内側（赤道側）に振幅を持っている。そして、(2)の線の付近では、特異点付近にのみ振幅を持つ。(2)の線よりも周波数が小さいモードの中でも、赤道対称モードと赤道反対称モードの周波数が一致している領域と一致していない領域があるが、一致している領域は特異点付近のみに振幅を持ち、赤道付近には振幅がないのに対し、一致していない領域は赤道付近にも振幅があるため、ずれが生じている。(2)の線より周波数が大きい領域では、特異点より外側（高緯度側）に振幅を持ち、徐々に周波数を大きくしていくと、(1)の線付近で、計算領域の端に振幅がぶつかる。

次に、(3)に関する確認のために、混合 Rossby 重力波の固有関数に注目する。

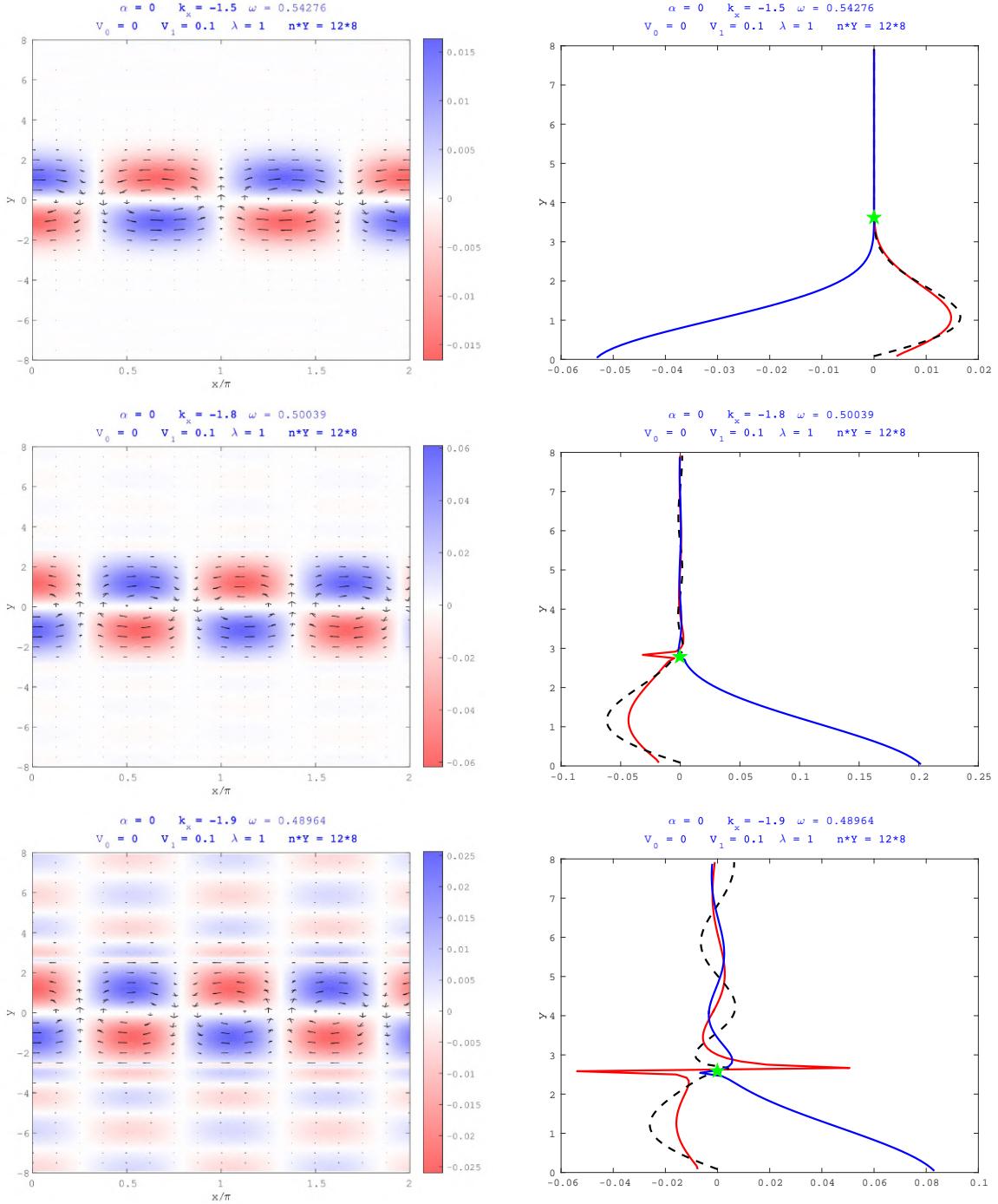


Fig.56 混合 Rossby 重力波（赤道反対称）の固有関数。 $\bar{V}_0 = 0$ 、 $\bar{V}_1 = 0.1$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 12$ 、 $Y = 8$ の場合。（左図）と（右図）は Fig.52 と同じである。（上段） $\bar{k}_x = -1.5$ 、 $\bar{\omega} = 0.54276$ の場合。（中段） $\bar{k}_x = -1.8$ 、 $\bar{\omega} = 0.50039$ の場合。（下段） $\bar{k}_x = -1.9$ 、 $\bar{\omega} = 0.48964$ の場合。

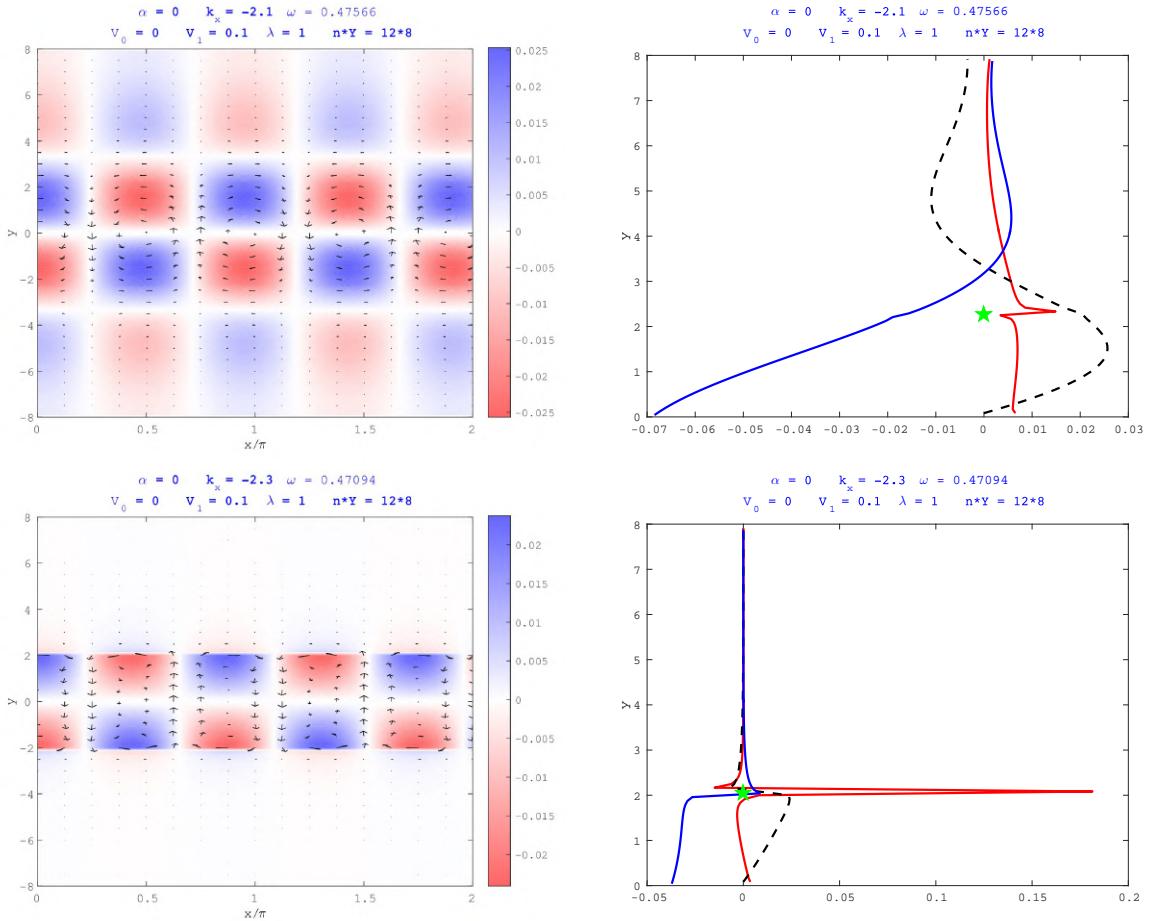


Fig.57 混合 Rossby 重力波（赤道反対称）の固有関数。 $\bar{V}_0 = 0$ 、 $\bar{V}_1 = 0.1$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 12$ 、 $Y = 8$ の場合。（左図）と（右図）は Fig.52 と同じである。（上段） $\bar{k}_x = -1.5$ 、 $\bar{\omega} = 0.54276$ の場合。（中段） $\bar{k}_x = -2.1$ 、 $\bar{\omega} = 0.47566$ の場合。（下段） $\bar{k}_x = -2.3$ 、 $\bar{\omega} = 0.47094$ の場合。

固有関数を見ると、東西波数を西進側に大きくしていくと、混合 Rossby 重力波の振幅を持つ領域に、特異点が入っていくことがわかった。特異点が入ってくると、特異点の内側と外側に振幅を持つようになり、最終的に、特異点の内側（赤道側）に振幅を持つモードのように変化した。

3.2.2 観測との比較

磁場が一様でない場合の結果は、まだ観測と比較できるような段階ではないのだが、無理やり比較を行う。今、比較に使えそうな値として、特異点の位置がある。Chulliat et al.(2015)[12] と Finlay and Jackson(2003)[14] では、赤道付近の特徴的な変動があったので、それらの変動の南北スケールと、赤道から特異点までの距離が対応すると仮定してみる。

Fig.58 より、南北方向のスケールは、Chulliat et al.(2015) の結果の方は、赤道から約 1800km (緯度 30 度)、Finlay and Jackson(2003) の結果の方は約 900km (緯度 15 度) とする。この位置が特異点の位置に対応すると仮定する。特異点の位置 y_s は、

$$y_s = \frac{1}{V'_{Ax}} \frac{\omega}{k_x} \quad (3.2.3)$$

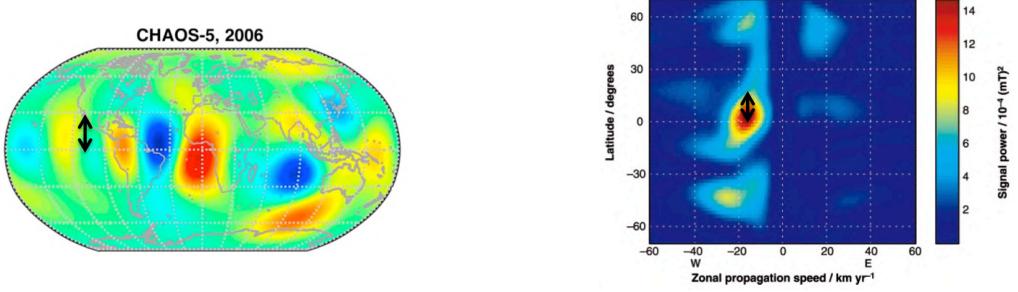


Fig.58 Chulliat et al.(2015)[12]（左）と Finlay and Jackson(2003)[14]（右）で示された赤道付近の特徴的な変動。それらの論文から引用し、加筆した。

なので、さらに、東西方向の位相速度を与えるれば、東西磁場の南北微分を見積もることができます。幸い、どちらの研究でも位相速度が与えられていて、Chulliat et al.(2015)の方では、西に 550km/yr (東西波数 -6、6 年周期)、Finlay and Jackson(2003)の方では、西に 17km/yr (東西波数 -5、270 年周期) となっている。これらから、東西磁場の南北微分が得られる。東西磁場が線形的に変化しているとすると、緯度 30 度での東西磁場の強さは、Chulliat et al.(2015)の方では、約 2mT、Finlay and Jackson(2003)の方では 0.1mT という結果が得られた^{*17}。

これらの値は 1.3 節で示した Hide and Roberts(1979)[31] でのトロイダル磁場の強さよりも弱い。CMB での動径方向の磁場の強さは、Buffett(2014)[8] で用いられている値によると 0.6mT であり、Finlay and Jackson(2003) の結果から計算した結果はこの値よりも小さい。一方、Gillet et al.(2010)[17] のコア内部の磁場強度の見積もりは 4mT であり、コア最上部で多少磁場が弱くなるとすれば、Chulliat et al.(2015) の結果から計算した値と近い。

^{*17} 計算には、密度 $\rho_0 = 10^4 \text{ kg/m}^3$ 、透磁率 $\mu = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}$ を用いた。

4 議論と今後の課題

4.1 MHD 赤道波に関する他の研究

MHD 赤道波に関する研究は、細かく議論されてるものはほとんどないが、まったくないわけではない。

自分が知っている中で一番古い MHD 赤道波の研究は Bergman(1993)[3] である。この論文では、慣性項と磁場の時間微分を無視して分散関係を求めてある。ただし、磁気拡散は考慮しており、振動しない減衰モードの分散関係である。

Heng and Workman(2014)[28] は、MHD 浅水波方程式（例えば、Gilman (2000)[19]、Schecter et al.(2001)[49] など）から、赤道 β 面近似によって、背景磁場が一様な時は、磁場なしの場合と似た式になることを見出している。ただし、細かく調べてあるわけではなく、固有モードの周波数 ω が Alfvén 波の周波数 $V_{Ax0}k_x$ より遅い時は、（符号が変化し）式はもはや Weber の微分方程式ではなくなるという記述もなく、磁場なしの赤道波の類推からそのまま分散関係を得ている。

4.2 東西一様磁場の場合 ($\bar{\mathcal{V}}_0 \neq 0, \bar{\mathcal{V}}_1 = 0$)

背景磁場が東西一様磁場の場合、($\bar{\omega} < \bar{k}_x$ の) 遅い波は赤道付近に振幅を持たず、高緯度に振幅を持つことがわかった。このモードは MC Rossby 波だと考えられる。中緯度 β 面（付録 F）では、MC Rossby 波が存在できるが、赤道では存在できないとすると、どのくらいの緯度まで振幅を持つのか、という問題は非常に興味深い。これが分かれば、地磁気観測から MC Rossby 波を捕まえるヒントになる。ただし、このことを知るためにには、球座標での計算が必要であり、これは今後の課題である。

また、一つ疑問に思っていることは、MAC 波 (Braginsky(1993)[5]、Buffett(2014)[8]、Buffett et al.(2016)[9]) の問題である。 f 面での計算（付録 D、付録 E）では、MAC 波が解として存在したのに対し、中緯度 β 面にすると、MAC 波はなくなり、（成層の影響を受けた）MC Rossby 波が現れる。また、Braginsky らの研究によると、球座標では、少なくとも軸対称（東西波数 0）な MAC 波が存在する。本研究は背景磁場として東西磁場を与えていたのに対し、Braginsky らの研究では背景磁場として鉛直磁場を与えているが、この違いが MAC 波の失踪と出現を決めているのであろうか？中緯度 β 面で MAC 波が現れない理由として他に考えられるのは、極付近にトラップされているから^{*18}、MC Rossby 波に化けているから、などあるが、これらを確かめるためにも球座標での計算が必要である。

*18 Heng and Spitkovsky(2009)[27] によると、球座標で計算すると、極に局在する遅いモードがあるらしい。

4.3 赤道反対称磁場の場合 ($\bar{V}_0 = 0$, $\bar{V}_1 \neq 0$)

赤道反対称磁場の場合で問題なのは、無限遠で Alfvén 波速度が無限大になっていることであろう。これが原因で、理想的には、分散関係全体が連続固有値になってしまっている。実際の地球では、南北方向の定義域は、北極から南極までであり、Alfvén 波速度も有限の値なので、連続的なスペクトルは分散関係全体を埋め尽くさず、ある一定の幅を持つはずである。この連続的な固有値とその他の波の固有値との相互作用など、興味深い現象がありそうではあるが、それらのきちんとした理解には、球座標での計算がやはり必要になってくるであろう。

ただし、赤道付近のみに振幅を持つモードに関しては、赤道 β 面での計算は有用であろう。以下では、そのことに関する今後の課題を示す。

4.3.1 解析解への準備

付録 F によると、南北流 $V(y)$ でまとめた式は

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V(y)}{dy^2} + 2[V_{Ax}(y)] \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^4 & \frac{\frac{d[V_{Ax}(y)]}{dy}}{\left[\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2\right] \left[\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2\right]} \frac{dV(y)}{dy} \\ & + \left[\frac{(\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{\omega^2(f + \beta y)^2}{(\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - \frac{\omega k_x \beta}{\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2} \right. \\ & \left. - 2[V_{Ax}(y)] \omega(f + \beta y) k_x^3 \frac{\frac{d[V_{Ax}(y)]}{dy}}{\left[\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2\right] \left[\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2\right]} \right] V(y) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

であった。今、

$$f = 0 \quad (4.3.2)$$

$$V_{Ax}(y) = V'_{Ax} y \quad (4.3.3)$$

の場合を考えているので、代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V(y)}{dy^2} + 2V'_{Ax} y \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^4 & \frac{V'_{Ax}}{\left[\omega^2 - V'^2_{Ax} y^2 k_x^2\right] \left[\omega^2 - V'^2_{Ax} y^2 k_x^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2\right]} \frac{dV(y)}{dy} \\ & + \left[\frac{(\omega^2 - V'^2_{Ax} y^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{\omega^2 \beta^2 y^2}{(\omega^2 - V'^2_{Ax} y^2 k_x^2) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - \frac{\omega k_x \beta}{\omega^2 - V'^2_{Ax} y^2 k_x^2} \right. \\ & \left. - 2[V_{Ax}(y)] \omega \beta y k_x^3 \frac{V'_{Ax}}{\left[\omega^2 - V'^2_{Ax} y^2 k_x^2\right] \left[\omega^2 - V'^2_{Ax} y^2 k_x^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2\right]} \right] V(y) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

となる。ここで、簡単のために、非発散

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (4.3.5)$$

の場合を考えてみよう。これは、成層が非常に強く、鉛直流がとても小さい極限で、

$$N \rightarrow \infty \quad (4.3.6)$$

とすれば、非発散の場合の式が得られる。ゆえに、

$$\frac{d^2V(y)}{dy^2} - 2V'_{Ax}yk_x^2 \frac{V'_{Ax}}{\omega^2 - V'^2_{Ax}y^2k_x^2} \frac{dV(y)}{dy} + \left[-k_x^2 - \frac{\omega k_x \beta}{\omega^2 - V'^2_{Ax}y^2k_x^2} \right] V(y) = 0 \quad (4.3.7)$$

を得る。ここで、

$$y = \frac{\omega}{V'_{Ax}k_x} \tilde{y} \quad (4.3.8)$$

と無次元化すると、

$$\frac{d^2V(\tilde{y})}{d\tilde{y}^2} - \frac{2\tilde{y}}{1-\tilde{y}^2} \frac{dV(\tilde{y})}{d\tilde{y}} - \frac{\omega^2}{V'^2_{Ax}} \left[1 + \frac{\beta}{\omega k_x} \frac{1}{1-\tilde{y}^2} \right] V(\tilde{y}) = 0 \quad (4.3.9)$$

となる。もし、

$$1 \gg \frac{\beta}{\omega k_x} \frac{1}{1-\tilde{y}^2} \quad (4.3.10)$$

と近似できれば、この微分方程式は、Legendre の微分方程式になるが、特異点付近では、明らかに、

$$1 \ll \frac{\beta}{\omega k_x} \frac{1}{1-\tilde{y}^2} \quad (4.3.11)$$

である。

非発散の場合でも、容易に解が求まらないことがわかったが、元の式を解くよりかは幾分ましである。 $\tilde{y} = 1$ は、微分方程式の確定特異点なので、この微分方程式の特異点周りの解は、Frobenius 級数展開によって求めることができる。

$$V(\tilde{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\tilde{y} - 1)^{n+\alpha} \quad (4.3.12)$$

この先の計算は、今後の課題である。

4.3.2 微小散逸項の導入

別の計算方法として、微小な散逸を入れるというのがある。本研究では、簡単化のため非散逸としているが、実際には散逸が存在し、それが原因となって、共鳴するところで特異点が発生している。ただし、物理的な現象の理解のためには、できるだけ非散逸で考えたい。

そこで、例えば、粘性散逸だとすると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \quad (4.3.13)$$

という書き換えで粘性項を導入することができるが、これを少しサボって

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon_{\nu} \quad (4.3.14)$$

とする。非散逸を考えるなら、後々 $\varepsilon_\nu \rightarrow 0$ とするので、粘性項の中に ∇^2 を含む、ということは重要ではなくなり、このように近似できる。

本研究での特異点は

$$\omega^2 = V'_{Ax} y^2 k_x^2 \quad (4.3.15)$$

となる y であり、赤道 β 面では定義域が $-\infty \leq y \leq \infty$ なので、すべての固有モードが必ずどこかに特異点を持つ^{*19}。ここで、微小減衰項を加えると^{*20}、特異点の位置は

$$(\omega + i\varepsilon)^2 = V'_{Ax} y^2 k_x^2 \quad (4.3.16)$$

となる。右辺は常に実数であるので、 ω が純虚数でない限り、この等号は成り立たない。すなわち、 y が実空間であれば、 ω が純虚数になるモードにしか特異点は存在しない。

さて、これらを (4.3.4) 式に適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2V(y)}{dy^2} &+ \frac{2V'_{Ax} y \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^4}{\left[(\omega + i\varepsilon)^2 - V'_{Ax} y^2 k_x^2\right] \left[(\omega + i\varepsilon)^2 - V'_{Ax} y^2 k_x^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2\right]} \frac{dV(y)}{dy} \\ &+ \left[\frac{\left((\omega + i\varepsilon)^2 - V'_{Ax} y^2 k_x^2\right)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{(\omega + i\varepsilon)^2 \beta^2 y^2}{\left((\omega + i\varepsilon)^2 - V'_{Ax} y^2 k_x^2\right) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - \frac{(\omega + i\varepsilon) k_x \beta}{(\omega + i\varepsilon)^2 - V'_{Ax} y^2 k_x^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2[V_{Ax}(y)](\omega + i\varepsilon) \beta y k_x^3 V'_{Ax}}{\left[(\omega + i\varepsilon)^2 - V'_{Ax} y^2 k_x^2\right] \left[(\omega + i\varepsilon)^2 - V'_{Ax} y^2 k_x^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2\right]} \right] V(y) = 0 \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

となる。積分を用いて、固有値や固有関数を求める方法があれば、複素積分によって特異点を回避しながら積分できる。

この先の計算は、今後の課題である。

また、本研究のような数値計算を行う際も同様な微小減衰項を入れることで、上手く計算できることが予想できる。ただし、散逸が固有値や固有関数にも影響を与えるので、それらの評価が必要になると考えられる。

^{*19} 数値計算では、無限遠まで計算することができないので、結果の節では、速いモードには特異点が存在しなかった。

^{*20} 粘性散逸、磁気拡散、密度拡散の大きさはすべて同程度だと仮定した。後々 0 にするので、このようにしても問題ないと考えられる。

5 結論

本研究では、赤道付近の地磁気変動を説明できる可能性のある、地球外核最上部の安定成層における MHD 赤道波を調べた。赤道 β 面近似と静水圧近似を用い、背景磁場としては、一様な東西磁場と赤道反対称な線形的に変化する東西磁場という、2つの場合を考え、数値的に分散関係を計算した。以下に、本研究で得られた結果をまとめるとする。

- 一様な東西磁場
 - (1) 慣性重力波や混合 Rossby 重力波は、磁気張力による復元力のため、周波数が磁場なしの場合に比べ大きくなる。
 - (2) 磁場が強い、または、東西波数が大きくなると、Rossby 波のブランチは Alfvén 波的になる。
 - (3) 中緯度 β 面の場合に現れる MC Rossby 波は赤道にはトラップされない。これは、赤道ではコリオリ力がはたらかないのに対し、磁気張力ははたらくためだと考えられる。
- 赤道反対称な線形的に変化する東西磁場
 - (1) 磁場勾配があると Alfvén 波は連続固有値を持つことが知られているが、赤道 β 面面上でも連続固有値を持つ。
 - (2) 固有モードの東西方向の位相速度と Alfvén 波速度が一致する緯度に特異点が現れる。これは共鳴が起こっていることを意味する。
 - (3) 連続固有値の中には、特異点より内側（赤道側）に振幅をもつモードと特異点より外側（極側）に振幅をもつモードがある。

本研究は、微小な散逸の導入や球座標系での計算など、課題が多く残されており、今後の研究によって、地磁気変動の説明や物理的理理解に役立つことが期待される。

謝辞

本修士論文及び付録は、著者が九州大学 理学府 地球惑星科学専攻在学中に固体地球惑星科学講座 地球内部ダイナミクス分野において行った研究をまとめたものです。本研究を進めていくにあたり、本学 吉田茂生准教授には熱心なご指導や数多くの助言を頂きました。さらに、文章校正のために、テストの採点等お忙しい中、お時間を割いて頂きました。また、本学 中田正夫教授には、本研究に関して有用なご意見を頂きました。修士論文発表会でも多くの方々から今後の研究に役立つコメントをいただきました。最後に、本研究室の大学院 博士後期課程の波々伯部 広隆さんと大学院 修士課程の入江芳矢くんには、本研究に関する議論をしていただきました。この場を借りて感謝申し上げます。

また、本論文の数値計算・グラフの作成には、自腹で購入した MATLAB 学生版を使用しました。

参考文献

- [1] 竹広真一. 2次元 β 面上のロスピー波の伝播 数値実験解説. 地球流体電腦俱楽部理論ノート 天文学特別講義 VI, http://www.gfd-dennou.org/arch/lecture/NAO_GFD/, 2016.
- [2] Alexander M Balk. Large-scale quasi-geostrophic magnetohydrodynamics. *The Astrophysical Journal*, Vol. 796, No. 2, p. 143, 2014.
- [3] Michael I Bergman. Magnetic rossby waves in a stably stratified layer near the surface of the earth's outer core. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, Vol. 68, No. 1-4, pp. 151–176, 1993.
- [4] SI Braginsky. Waves in a stably stratified layer on the surface of the terrestrial core. *Geomagn. Aeron*, Vol. 27, pp. 410–414, 1987.
- [5] SI Braginsky. Mac-oscillations of the hidden ocean of the core. *Journal of geomagnetism and geoelectricity*, Vol. 45, No. 11-12, pp. 1517–1538, 1993.
- [6] Stanislav I Braginsky. Magnetic rossby waves in the stratified ocean of the core, and topographic core-mantle coupling. *Earth, planets and space*, Vol. 50, No. 8, pp. 641–649, 1998.
- [7] Stanislav I Braginsky. Dynamics of the stably stratified ocean at the top of the core. *Physics of the earth and planetary interiors*, Vol. 111, No. 1, pp. 21–34, 1999.
- [8] Bruce Buffett. Geomagnetic fluctuations reveal stable stratification at the top of the earth's core. *Nature*, Vol. 507, No. 7493, pp. 484–487, 2014.
- [9] Bruce Buffett, Nicholas Knezeck, and Richard Holme. Evidence for mac waves at the top of earth's core and implications for variations in length of day. *Geophysical Journal International*, Vol. 204, No. 3, pp. 1789–1800, 2016.
- [10] Ulrich R Christensen. Geodynamo models: Tools for understanding properties of earth's magnetic field. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Vol. 187, No. 3, pp. 157–169, 2011.
- [11] A Chulliat and S Maus. Geomagnetic secular acceleration, jerks, and a localized standing wave at the core surface from 2000 to 2010. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, Vol. 119, No. 3, pp. 1531–1543, 2014.
- [12] Arnaud Chulliat, Patrick Alken, and Stefan Maus. Fast equatorial waves propagating at the top of the earth's core. *Geophysical Research Letters*, Vol. 42, No. 9, pp. 3321–3329, 2015.
- [13] Emmanuel Dormy and Andrew M Soward. *Mathematical aspects of natural dynamos*. CRC Press, 2007.
- [14] Christopher C Finlay and Andrew Jackson. Equatorially dominated magnetic field change at the surface of earth's core. *Science*, Vol. 300, No. 5628, pp. 2084–2086, 2003.

- [15] Christopher C Finlay, Nils Olsen, and Lars Tøffner-Clausen. Dtu candidate field models for igrf-12 and the chaos-5 geomagnetic field model. *Earth, Planets and Space*, Vol. 67, No. 1, p. 114, 2015.
- [16] N Gillet, D Jault, and CC Finlay. Planetary gyre, time-dependent eddies, torsional waves, and equatorial jets at the earth's core surface. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, Vol. 120, No. 6, pp. 3991–4013, 2015.
- [17] Nicolas Gillet, Dominique Jault, Elisabeth Canet, and Alexandre Fournier. Fast torsional waves and strong magnetic field within the earth's core. *Nature*, Vol. 465, No. 7294, pp. 74–77, 2010.
- [18] Nicolas Gillet, Dominique Jault, CC Finlay, and Nils Olsen. Stochastic modeling of the earth's magnetic field: Inversion for covariances over the observatory era. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, Vol. 14, No. 4, pp. 766–786, 2013.
- [19] Peter A Gilman. Magnetohydrodynamic “shallow water” equations for the solar tachocline. *The Astrophysical Journal Letters*, Vol. 544, No. 1, p. L79, 2000.
- [20] Johan Peter Goedbloed and Stefaan Poedts. *Principles of magnetohydrodynamics: with applications to laboratory and astrophysical plasmas*. Cambridge university press, 2004.
- [21] Hitoshi Gomi, Kenji Ohta, Kei Hirose, Stéphane Labrosse, Razvan Caracas, Matthieu J Verstraete, and John W Hernlund. The high conductivity of iron and thermal evolution of the earth's core. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Vol. 224, pp. 88–103, 2013.
- [22] D Gubbins and PH Roberts. Magnetohydrodynamics of the earth's core. *Geomagnetism*, Vol. 2, p. 1-183, Vol. 2, pp. 1–183, 1987.
- [23] D Gubbins, CJ Thomson, and KA Whaler. Stable regions in the earth's liquid core. *Geophysical Journal International*, Vol. 68, No. 1, pp. 241–251, 1982.
- [24] G Helffrich. How light element addition can lower core liquid wave speeds. *Geophysical Journal International*, Vol. 188, No. 3, pp. 1065–1070, 2012.
- [25] George Helffrich. Outer core compositional layering and constraints on core liquid transport properties. *Earth and Planetary Science Letters*, Vol. 391, pp. 256–262, 2014.
- [26] George Helffrich and Satoshi Kaneshima. Outer-core compositional stratification from observed core wave speed profiles. *Nature*, Vol. 468, No. 7325, pp. 807–810, 2010.
- [27] Kevin Heng and Anatoly Spitkovsky. Magnetohydrodynamic shallow water waves: linear analysis. *The Astrophysical Journal*, Vol. 703, No. 2, p. 1819, 2009.
- [28] Kevin Heng and Jared Workman. Analytical models of exoplanetary atmospheres. i. atmospheric dynamics via the shallow water system. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, Vol. 213, No. 2, p. 27, 2014.
- [29] JW Hernlund and A McNamara. The core–mantle boundary region. *Treatise on Geophysics*, Vol. 7, pp. 461–519, 2015.

- [30] R Hide. On hydromagnetic waves in a stratified rotating incompressible fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 39, No. 02, pp. 283–287, 1969.
- [31] R Hide and PH Roberts. How strong is the magnetic field in the earth’s liquid core? *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Vol. 20, No. 2-4, pp. 124–126, 1979.
- [32] K Hori, CA Jones, and RJ Teed. Slow magnetic rossby waves in the earth’s core. *Geophysical Research Letters*, Vol. 42, No. 16, pp. 6622–6629, 2015.
- [33] Andrew Jackson, Art RT Jonkers, and Matthew R Walker. Four centuries of geomagnetic secular variation from historical records. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 358, No. 1768, pp. 957–990, 2000.
- [34] D Jault and Chris Finlay. Waves in the core and mechanical core-mantle interactions. In *Treatise on Geophysics*. Elsevier Science, 2015.
- [35] Satoshi Kaneshima and George Helffrich. Vp structure of the outermost core derived from analysing large-scale array data of smks waves. *Geophysical Journal International*, Vol. 193, No. 3, pp. 1537–1555, 2013.
- [36] Satoshi Kaneshima and Takanori Matsuzawa. Stratification of earth’ s outermost core inferred from smks array data. *Progress in Earth and Planetary Science*, Vol. 2, No. 1, p. 15, 2015.
- [37] Zuzana Konôpková, R Stewart McWilliams, Natalia Gómez-Pérez, and Alexander F Goncharov. Direct measurement of thermal conductivity in solid iron at planetary core conditions. *Nature*, Vol. 534, No. 7605, pp. 99–101, 2016.
- [38] Julian Mak, Stephen D Griffiths, and DW Hughes. Shear flow instabilities in shallow-water magnetohydrodynamics. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 788, pp. 767–796, 2016.
- [39] X Márquez-Artavia, CA Jones, and SM Tobias. Rotating magnetic shallow water waves and instabilities in a sphere. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, pp. 1–41, 2017.
- [40] René J Moreau. *Magnetohydrodynamics*, Vol. 3. Springer Science & Business Media, 2013.
- [41] Takashi Nakagawa. An implication for the origin of stratification below the core–mantle boundary region in numerical dynamo simulations in a rotating spherical shell. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Vol. 247, pp. 94–104, 2015.
- [42] Kenji Ohta, Yasuhiro Kuwayama, Kei Hirose, Katsuya Shimizu, and Yasuo Ohishi. Experimental determination of the electrical resistivity of iron at earth’ s core conditions. *Nature*, Vol. 534, No. 7605, pp. 95–98, 2016.
- [43] Nils Olsen, Hermann Lühr, Christopher C Finlay, Terence J Sabaka, Ingo Michaelis, Jan Rauberg, and Lars Tøffner-Clausen. The chaos-4 geomagnetic field model. *Geophysical Journal International*, Vol. 197, No. 2, pp. 815–827, 2014.
- [44] JiaMing Ou, AiMin Du, and WenYao Xu. Investigation of the sa evolution by using

the chaos-4 model over 1997–2013. *Science China Earth Sciences*, Vol. 59, No. 5, pp. 1041–1050, 2016.

- [45] Monica Pozzo, Chris Davies, David Gubbins, and Dario Alfe. Thermal and electrical conductivity of iron at earth’s core conditions. *Nature*, Vol. 485, No. 7398, pp. 355–358, 2012.
- [46] PH Roberts and S Scott. On analysis of the secular variation. *Journal of geomagnetism and geoelectricity*, Vol. 17, No. 2, pp. 137–151, 1965.
- [47] Nathanaël Schaeffer and Dominique Jault. Electrical conductivity of the lowermost mantle explains absorption of core torsional waves at the equator. *Geophysical Research Letters*, 2016.
- [48] Nathanaël Schaeffer, Dominique Jault, Philippe Cardin, and Marie Drouard. On the reflection of alfvén waves and its implication for earth’s core modelling. *Geophysical Journal International*, Vol. 191, No. 2, pp. 508–516, 2012.
- [49] DA Schechter, JF Boyd, and PA Gilman. “shallow-water” magnetohydrodynamic waves in the solar tachocline. *The Astrophysical Journal Letters*, Vol. 551, No. 2, p. L185, 2001.
- [50] K Stewartson. The dispersion of a current on the surface of a highly conducting fluid. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 53, pp. 774–775. Cambridge Univ Press, 1957.
- [51] Shin-ichi Takehiro. Penetration of alfvén waves into an upper stably-stratified layer excited by magnetoconvection in rotating spherical shells. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Vol. 241, pp. 37–43, 2015.
- [52] Shin-ichi Takehiro and John R Lister. Penetration of columnar convection into an outer stably stratified layer in rapidly rotating spherical fluid shells. *Earth and Planetary Science Letters*, Vol. 187, No. 3, pp. 357–366, 2001.
- [53] Jérémie Vidal and Nathanaël Schaeffer. Quasi-geostrophic modes in the earth’s fluid core with an outer stably stratified layer. *Geophysical Journal International*, Vol. 202, No. 3, pp. 2182–2193, 2015.
- [54] Takeshi Yukutake and Hisayoshi Shimizu. Drifting and standing fields in the geomagnetic field for the past 400years. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Vol. 248, pp. 63–72, 2015.
- [55] TV Zaqarashvili, R Oliver, and JL Ballester. Global shallow water magnetohydrodynamic waves in the solar tachocline. *The Astrophysical Journal Letters*, Vol. 691, No. 1, p. L41, 2009.
- [56] TV Zaqarashvili, R Oliver, JL Ballester, and BM Shergelashvili. Rossby waves in “shallow water” magnetohydrodynamics. *Astronomy & Astrophysics*, Vol. 470, No. 3, pp. 815–820, 2007.
- [57] 磯田豊. 非回転系における内部重力波の分散性. 北海道大学水産科学研究彙報, Vol. 65, No. 2,

pp. 77–91, 2015.

- [58] 柴田正和. 常微分方程式の局所漸近解析: 特異点・臨界点が解の大域的性質を明らかにする.
森北出版, 2010.
- [59] 木村竜治. 地球流体力学入門: 大気と海洋の流れのしくみ. 東京堂出版, 1983.

付録 A 本文の補足

A.1 様々な成層での鉛直構造の固有値の例

A.1.1 全領域で $N^2 > 0$ の場合

$$N_*^2 = \frac{z_* + a}{1 + a} \quad (a > 0) \quad (\text{A.1})$$

の場合を考える。この時、(2.5.22) 式より、

$$\frac{d^2W(z_*)}{dz_*^2} = -\lambda \frac{z_* + a}{1 + a} W(z_*) \quad (\text{A.2})$$

であり、

$$u = -\left(\frac{\lambda}{1+a}\right)^{\frac{1}{3}}(z_* + a) \quad (\text{A.3})$$

の変数変換により、

$$\frac{d^2W(u)}{du^2} = uW(u) \quad (\text{A.4})$$

を得る。これは Airy の微分方程式であり、解は、Airy 関数 Ai と Biry 関数 Bi を用いて、

$$W(z_*) = W_a Ai\left[-\left(\frac{\lambda}{1+a}\right)^{\frac{1}{3}}(z_* + a)\right] + W_b Bi\left[-\left(\frac{\lambda}{1+a}\right)^{\frac{1}{3}}(z_* + a)\right] \quad (\text{A.5})$$

となる。ここで、 W_a 、 W_b は定数である。

ゆえに、境界条件より、

$$\begin{pmatrix} Ai\left[-\left(\frac{\lambda}{1+a}\right)^{\frac{1}{3}}a\right] & Bi\left[-\left(\frac{\lambda}{1+a}\right)^{\frac{1}{3}}a\right] \\ Ai\left[-\left(\frac{\lambda}{1+a}\right)^{\frac{1}{3}}(1+a)\right] & Bi\left[-\left(\frac{\lambda}{1+a}\right)^{\frac{1}{3}}(1+a)\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_a \\ W_b \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{A.6})$$

となり、 $W_a = W_b = 0$ とならない条件は、

$$\det \begin{pmatrix} Ai\left[-\left(\frac{\lambda}{1+a}\right)^{\frac{1}{3}}a\right] & Bi\left[-\left(\frac{\lambda}{1+a}\right)^{\frac{1}{3}}a\right] \\ Ai\left[-\left(\frac{\lambda}{1+a}\right)^{\frac{1}{3}}(1+a)\right] & Bi\left[-\left(\frac{\lambda}{1+a}\right)^{\frac{1}{3}}(1+a)\right] \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.7})$$

である。この行列式の計算により固有値 λ を求めることができる (Fig.59)。

shooting 法での $a = 1$ の場合の結果を、Fig.60 に示す。

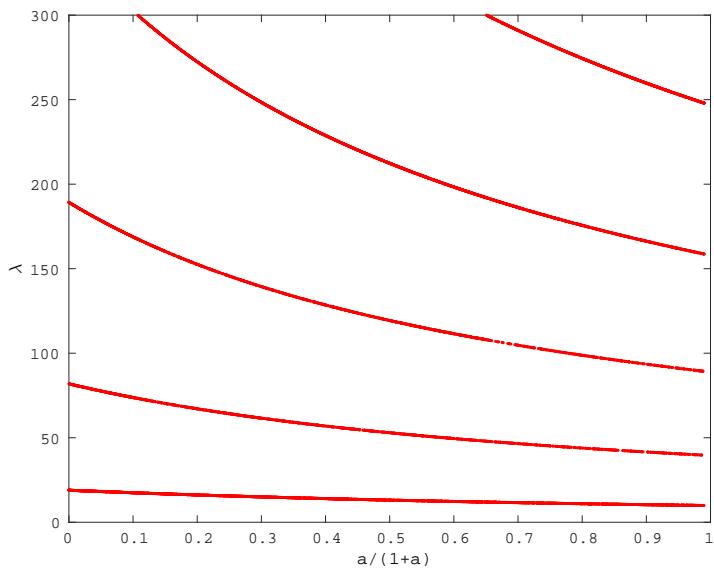


Fig.59 密度成層が $N_*^2 = \frac{z_* + a}{1+a}$ の時の、固有値 λ の a 依存性。横軸が $a/(1+a)$ 、縦軸が λ である。また、 $a \rightarrow \infty(a/(1+a) \rightarrow 1)$ のとき $N_*^2 \rightarrow 1$ になるので、固有値は、 $\lambda \rightarrow (m\pi)^2$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) となる。

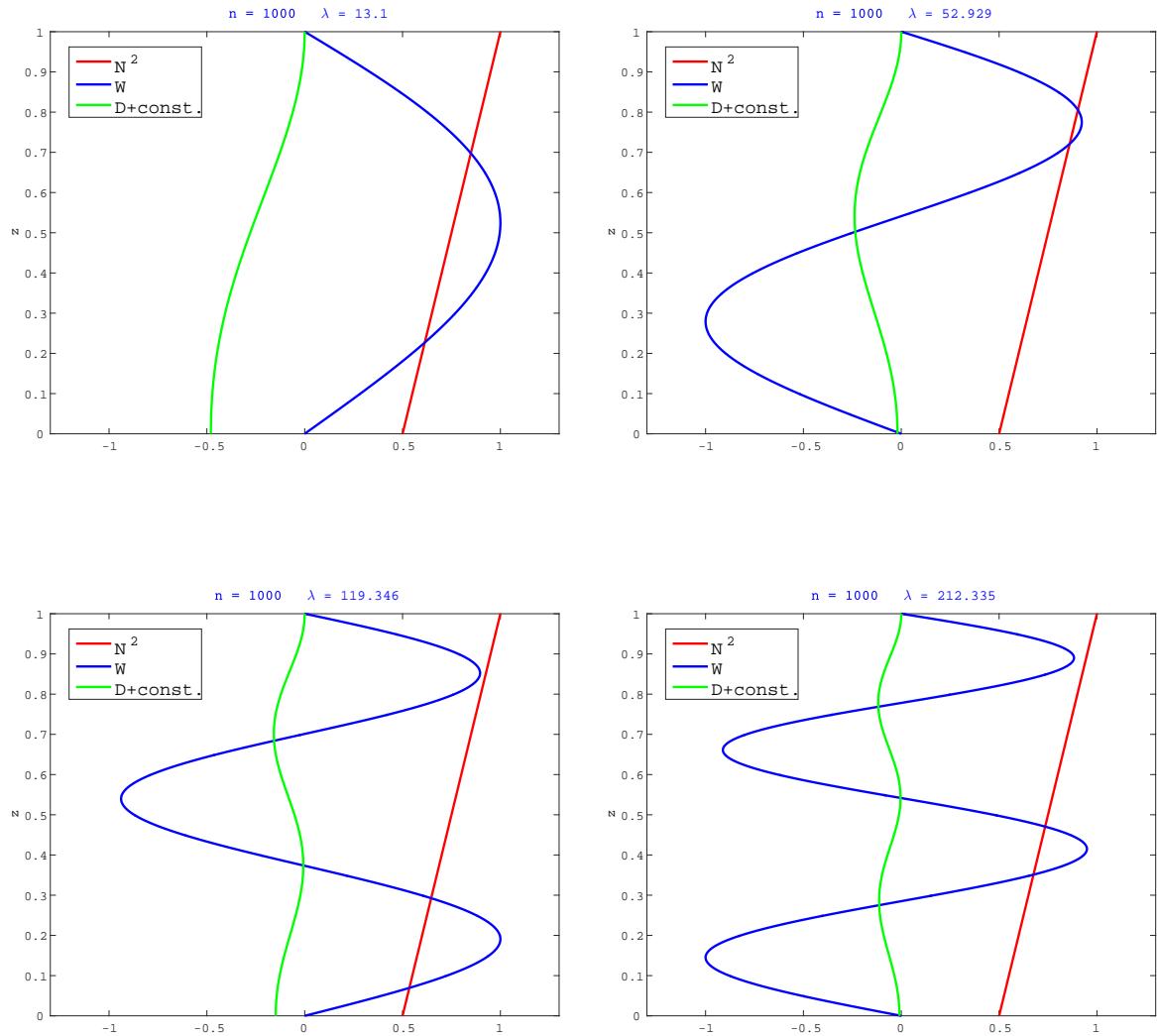


Fig.60 Fig.18と同じであるが、密度成層が $N_*^2 = \frac{z_* + a}{1+a}$ の時の固有関数の鉛直構造。 $a = 1$ ($a/(1+a) = 0.5$) の場合

次に、

$$N_*^2 = \frac{z_*^2 + 1}{2} \quad (\text{A.8})$$

の場合の結果を示す。

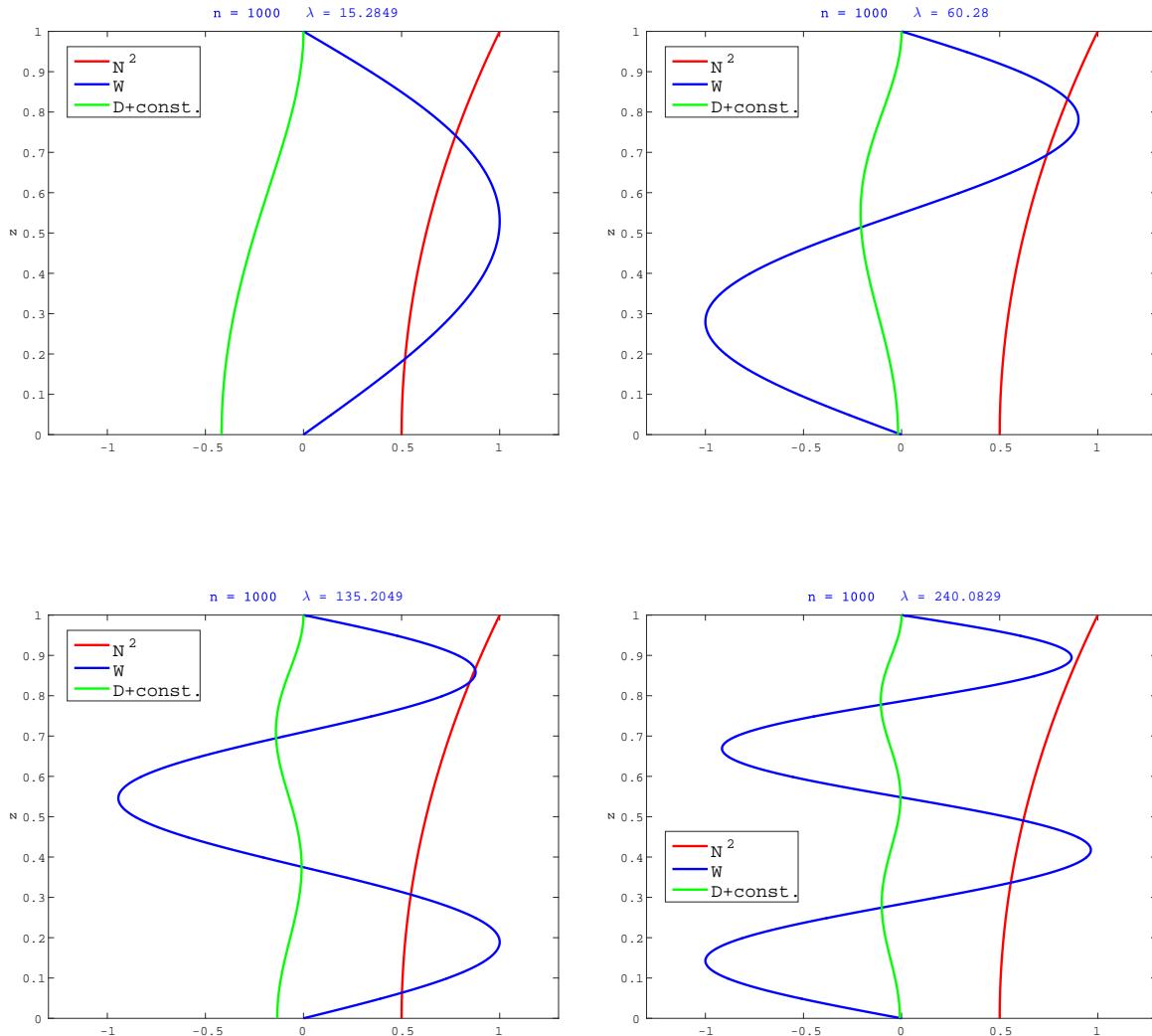


Fig.61 Fig.18と同じであるが、密度成層が $N_*^2 = \frac{z_*+a}{1+a}$ の時の固有関数の鉛直構造。 $a = 1$ ($a/(1+a) = 0.5$) の場合

A.1.2 下側境界付近で、 N^2 が小さくなる場合

$$N_*^2 = \frac{e^{z_*} - 1}{e - 1} \quad (\text{A.9})$$

の場合を示す。

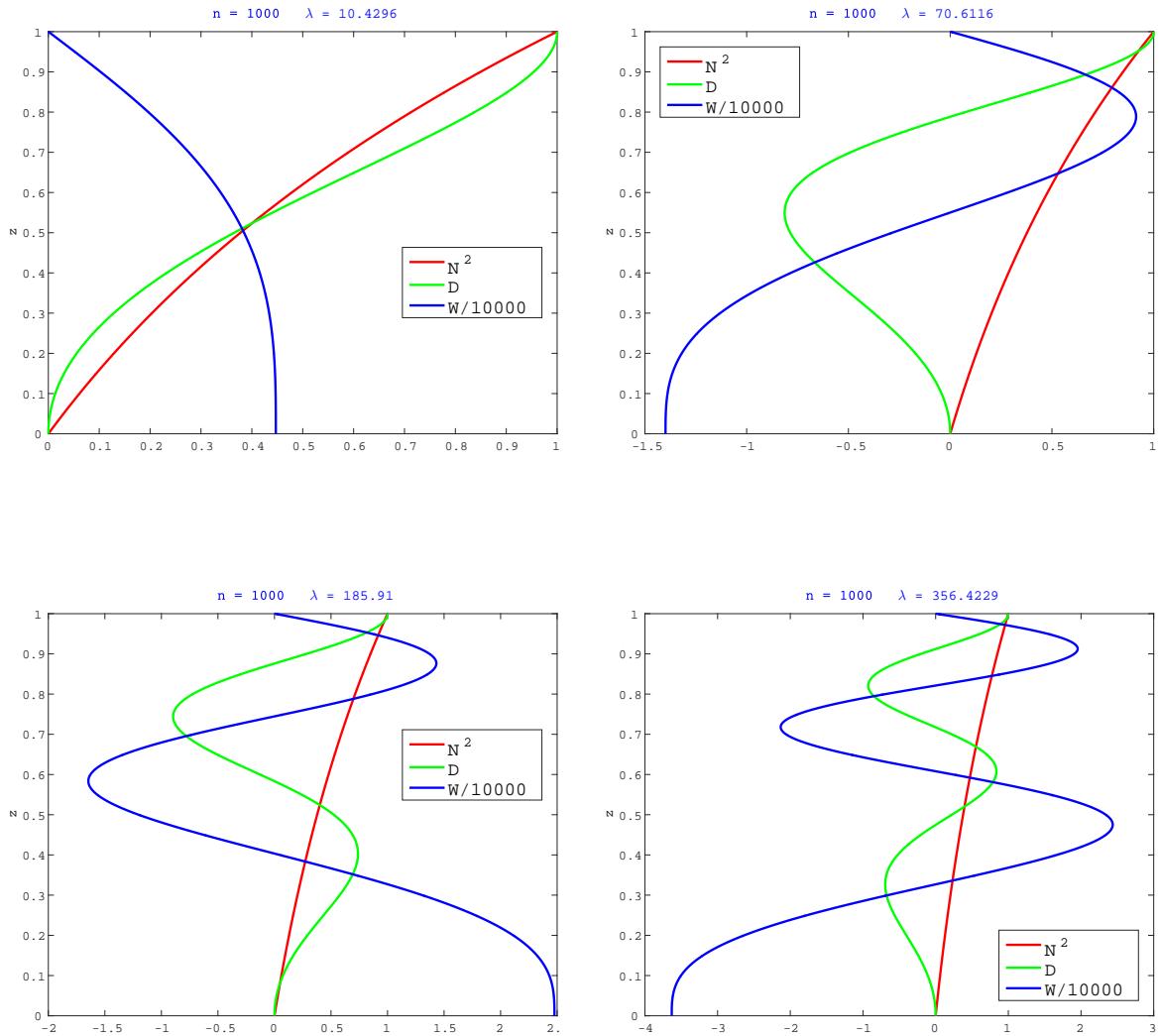


Fig.62 Fig.20と同じであるが、密度成層が $N_*^2 = \frac{e^{z_*}-1}{e-1}$ の時の固有関数の鉛直構造。

次に、

$$N_*^2 = \frac{\tanh(10(z_* - 0.5)) + 1}{2} \quad (\text{A.10})$$

の場合、

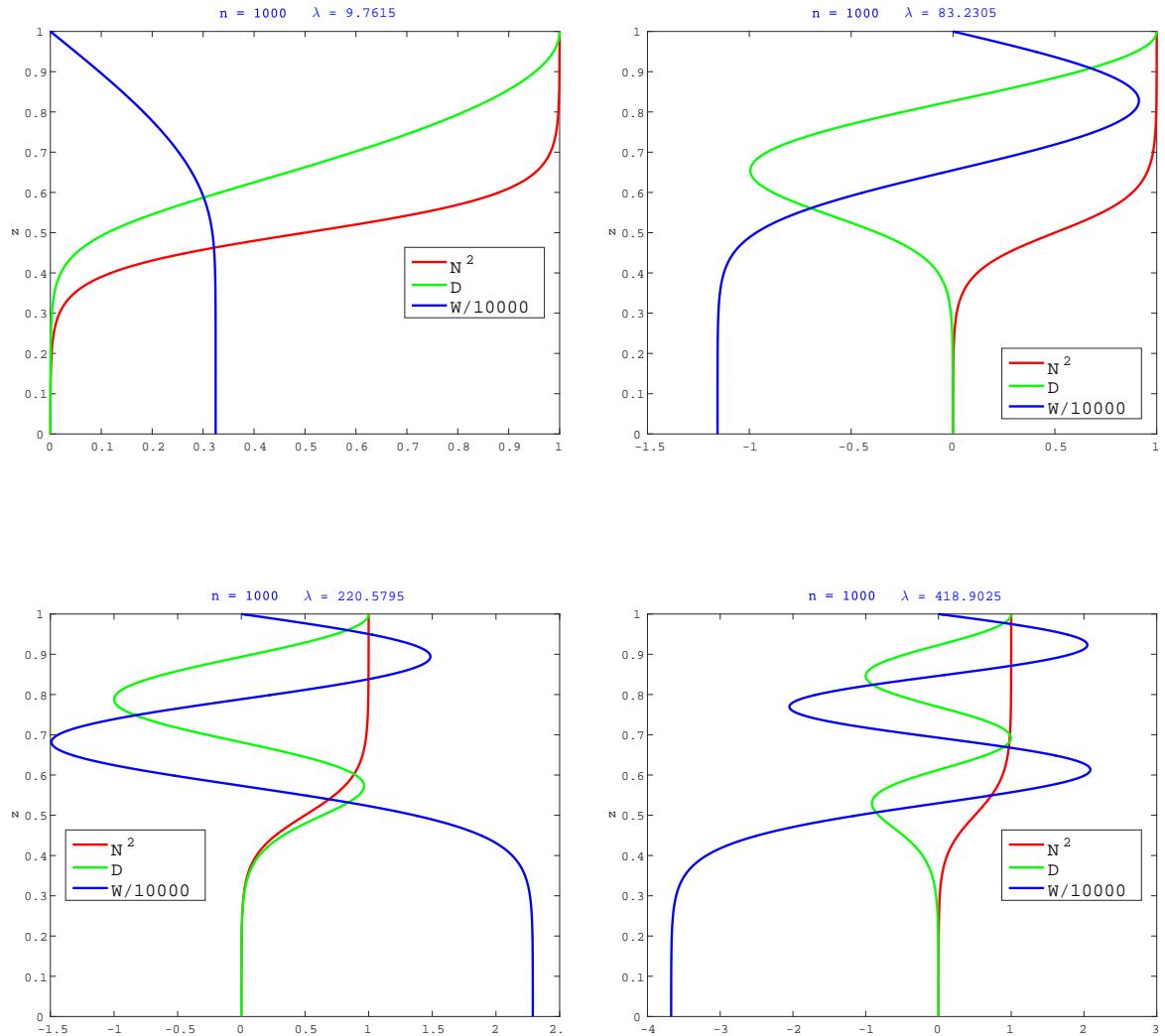


Fig.63 Fig.20と同じであるが、密度成層が $N_*^2 = \frac{\tanh(10(z_* - 0.5)) + 1}{2}$ の時の固有関数の鉛直構造。

A.2 MHD 赤道波の固有関数

A.2.1 $\bar{\mathcal{V}}_0 = \bar{\mathcal{V}}_1 = 0$ (磁場なしの赤道波) の場合の固有関数

磁場なしの場合 ($\bar{\mathcal{V}}_0 = \bar{\mathcal{V}}_1 = 0$) に、固有関数も正しく計算できているか確認する。^{*21}

- 赤道対称モード、 $\bar{k}_x = 1$ (東進) の場合

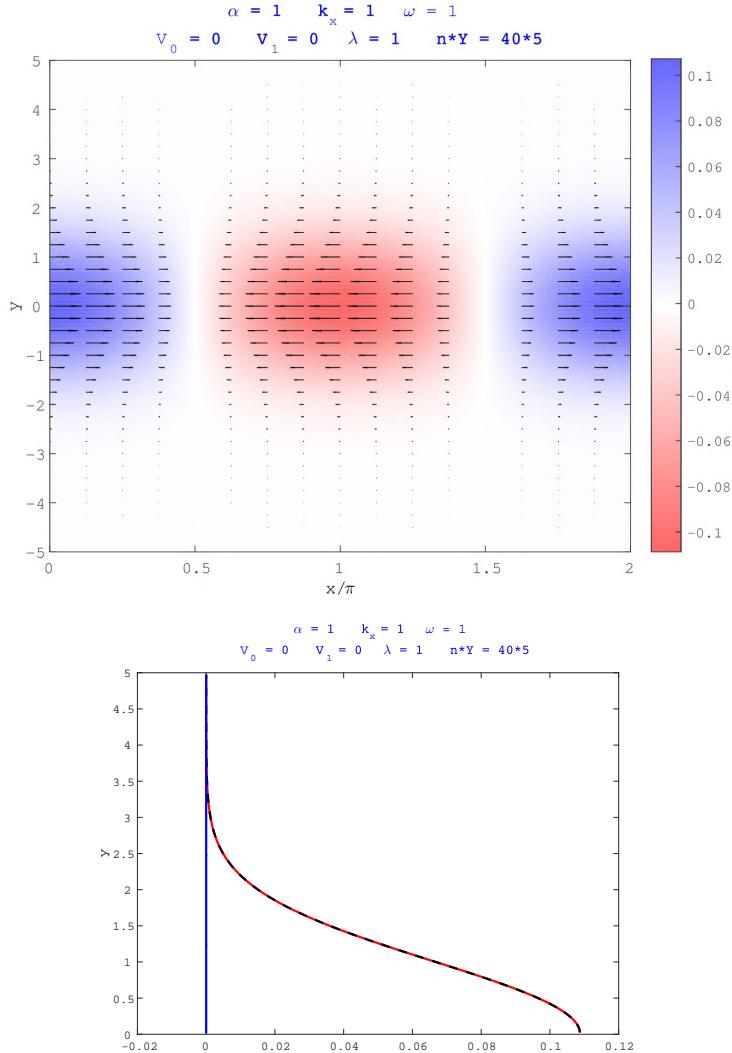


Fig.64 (東進) 赤道 Kelvin 波の固有関数 (赤道対称モード)。 $\bar{k}_x = 1$ 、 $\bar{\mathcal{V}}_0 = \bar{\mathcal{V}}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。(上図) 水平方向の流れと圧力の様子。縦軸が \bar{y} ($\bar{y} = 0$ が赤道)、横軸が \bar{x}/π 。矢印は流速を表し、色は $\bar{\varpi}$ (圧力) を表す。東西流の発散・収束により、圧力が変化するので、東進する。南北方向には、圧力勾配とコリオリ力がつり合う。(下図) 固有関数の南北構造。縦軸が \bar{y} ($\bar{y} = 0$ が赤道)、横軸が振幅。赤線が U (x (東西) 方向の流れ)、青線が V (y (南北) 方向の流れ)、黒の破線が $\bar{\varpi}$ (圧力) を表す。

^{*21} ここでは、次数は固有関数 V がもつノードの数と対応させている。

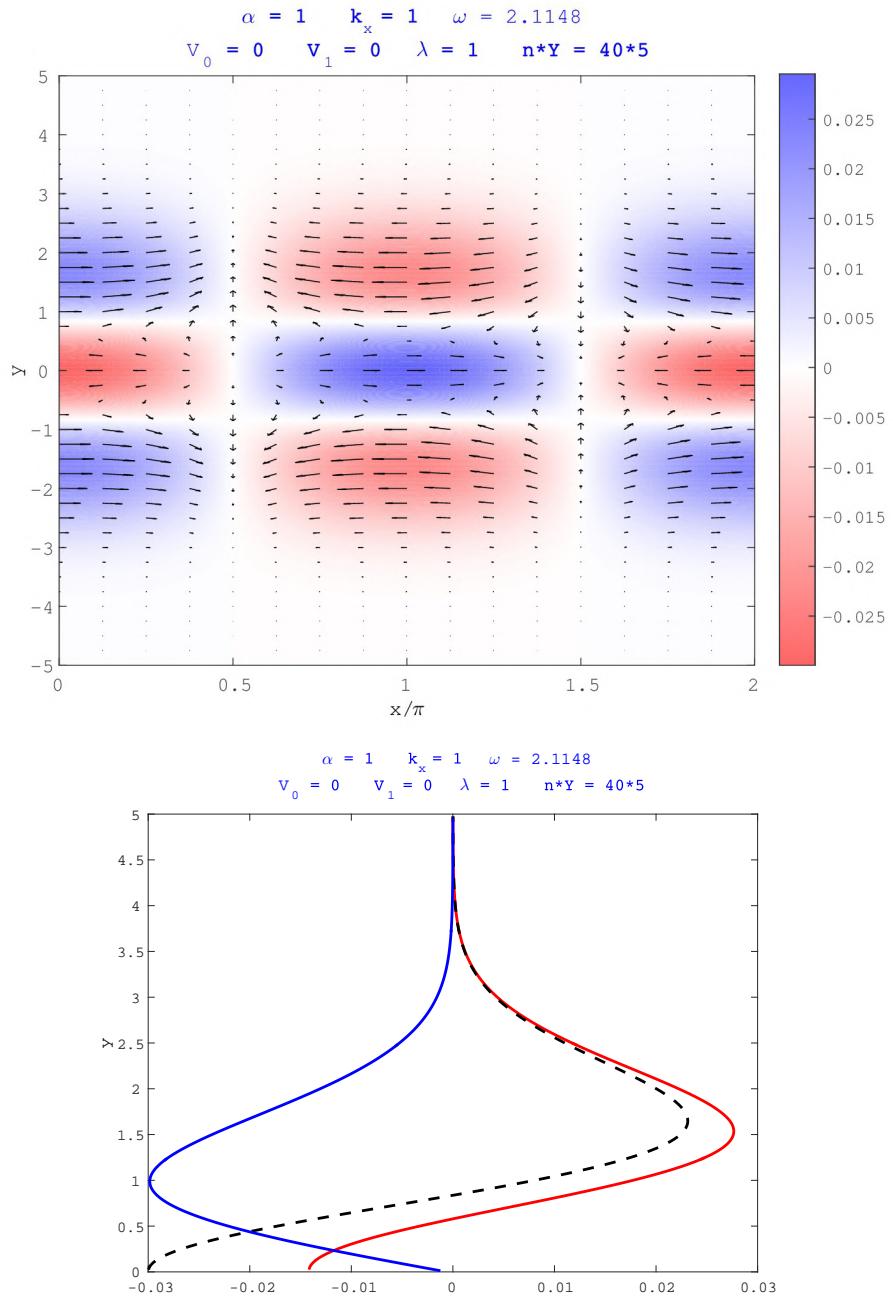


Fig.65 (1次) 東進慣性重力波の固有関数(赤道対称モード)。 $\bar{k}_x = 1$ 、 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。(上図)と(下図)の見方は Fig.64 と同じ。赤道 Kelvin 波のように、発散・収束によって圧力が変化して東進するが、コリオリ力により、流れが北半球なら時計回り、南半球なら反時計回りに変化する。

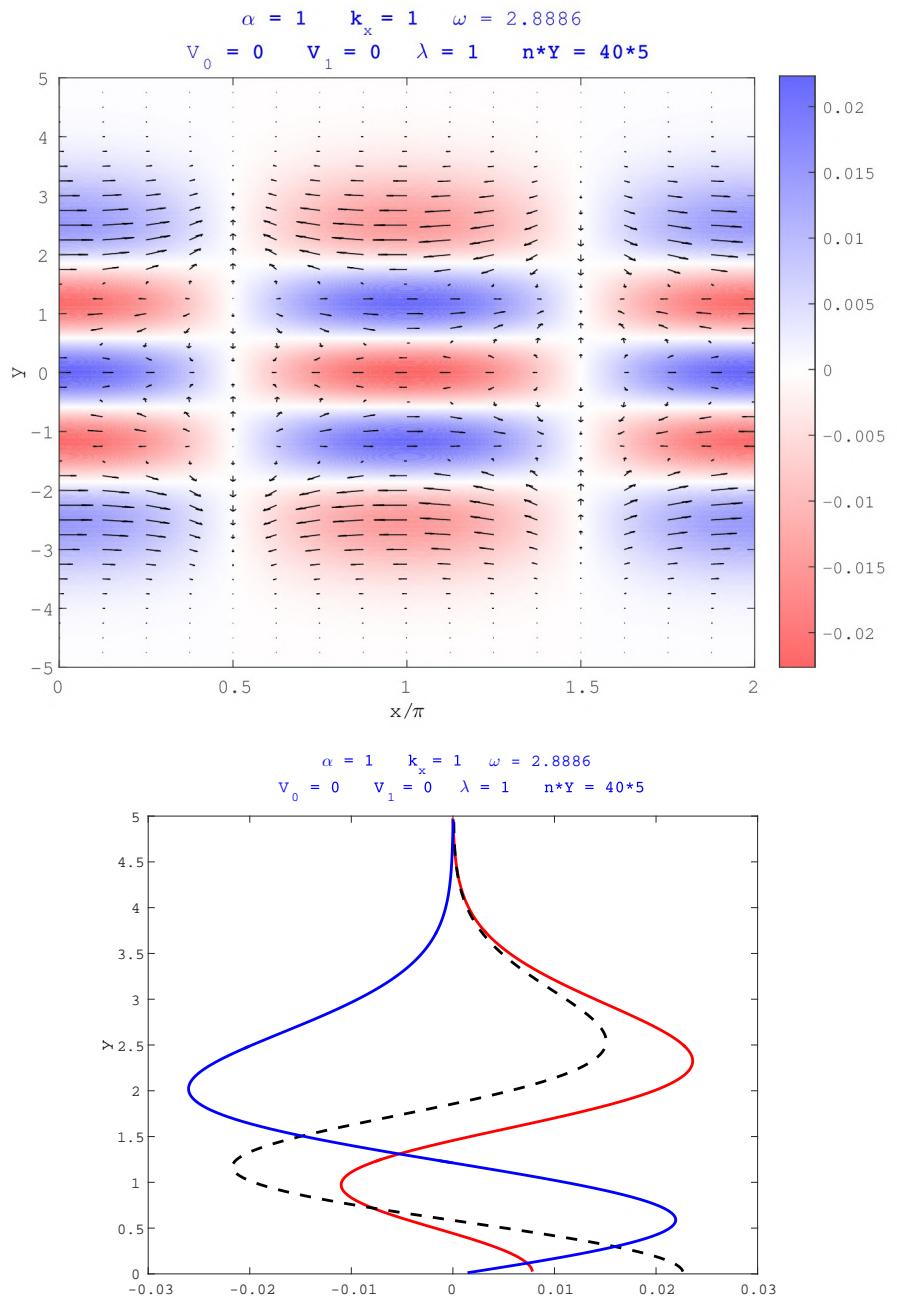


Fig.66 (3次) 東進慣性重力波の固有関数(赤道対称モード)。 $\bar{k}_x = 1$ 、 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。(上図)と(下図)の見方は Fig.64 と同じ。

- 赤道反対称モード、 $\bar{k}_x = 1$ （東進）の場合

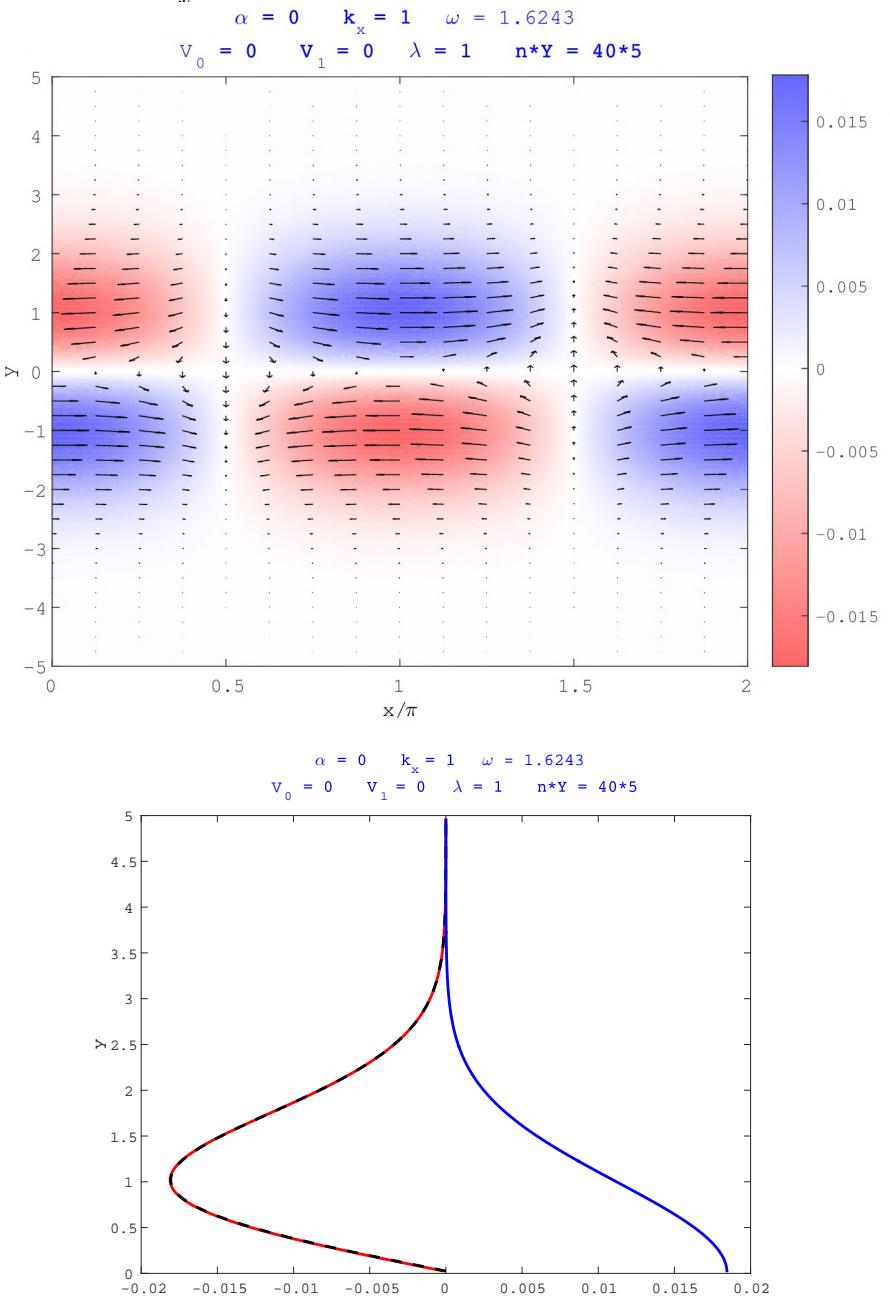


Fig.67 東進混合 Rossby 重力波の固有関数（赤道反対称モード）。 $\bar{k}_x = 1$ 、 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（上図）と（下図）の見方は Fig.64 と同じ。東進の場合は、慣性重力波と同じような伝播メカニズムで東進する。

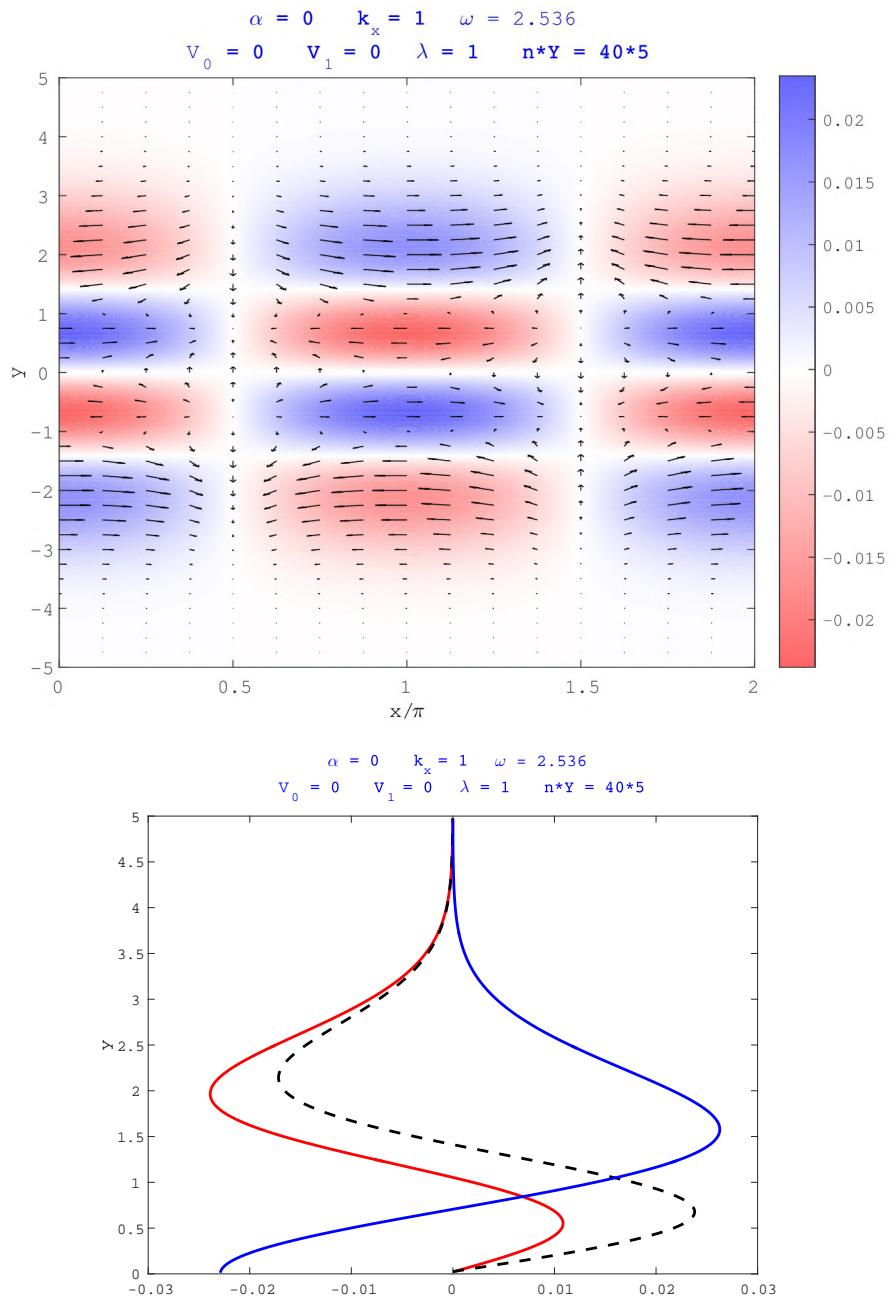


Fig.68 (2次) 東進慣性重力波の固有関数(赤道反対称モード)。 $\bar{k}_x = 1$ 、 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。(上図)と(下図)の見方はFig.64と同じ。

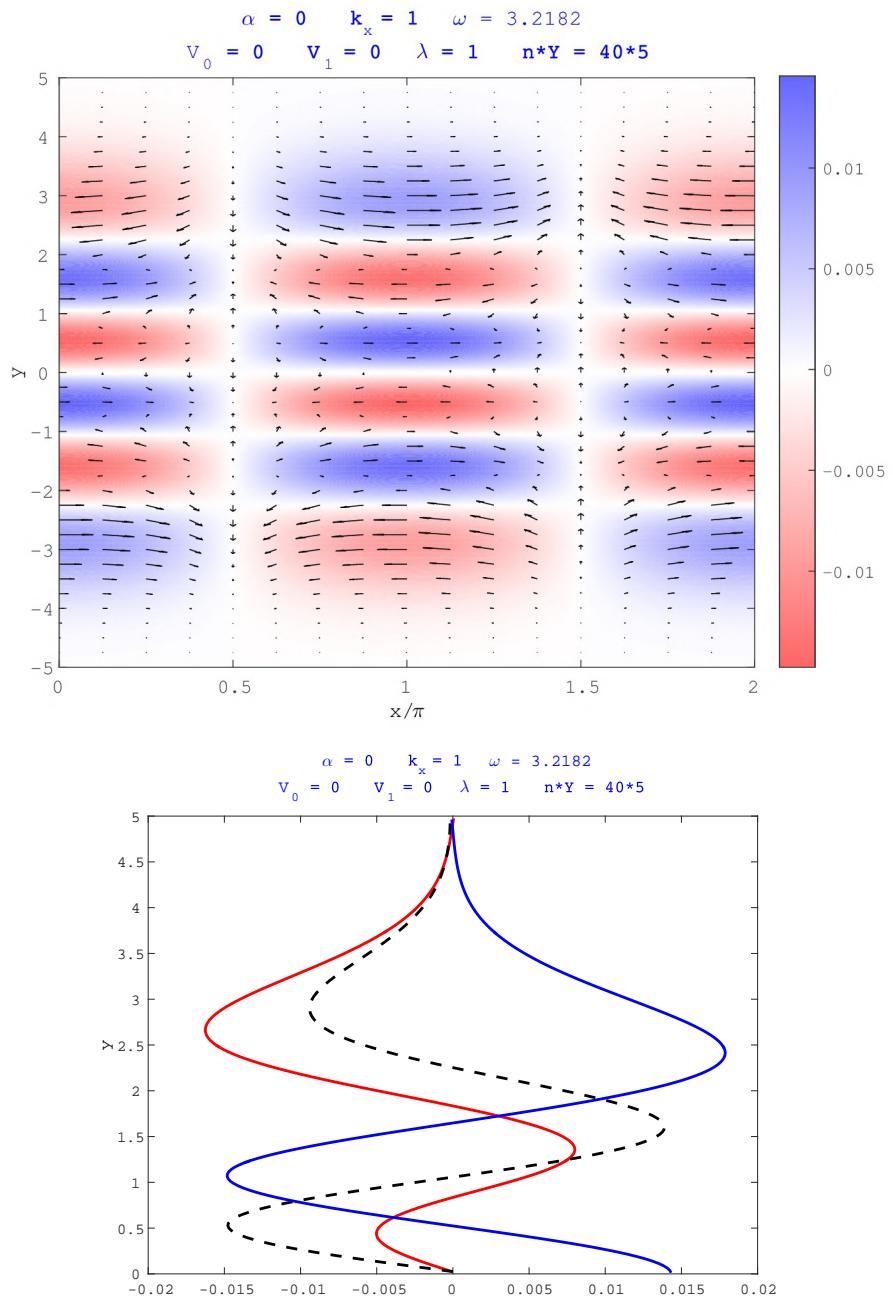


Fig.69 (4次) 東進慣性重力波の固有関数（赤道反対称モード）。 $\bar{k}_x = 1$ 、 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（上図）と（下図）の見方は Fig.64 と同じ。

- 赤道対称モード、 $\bar{k}_x = -1$ （西進）の場合

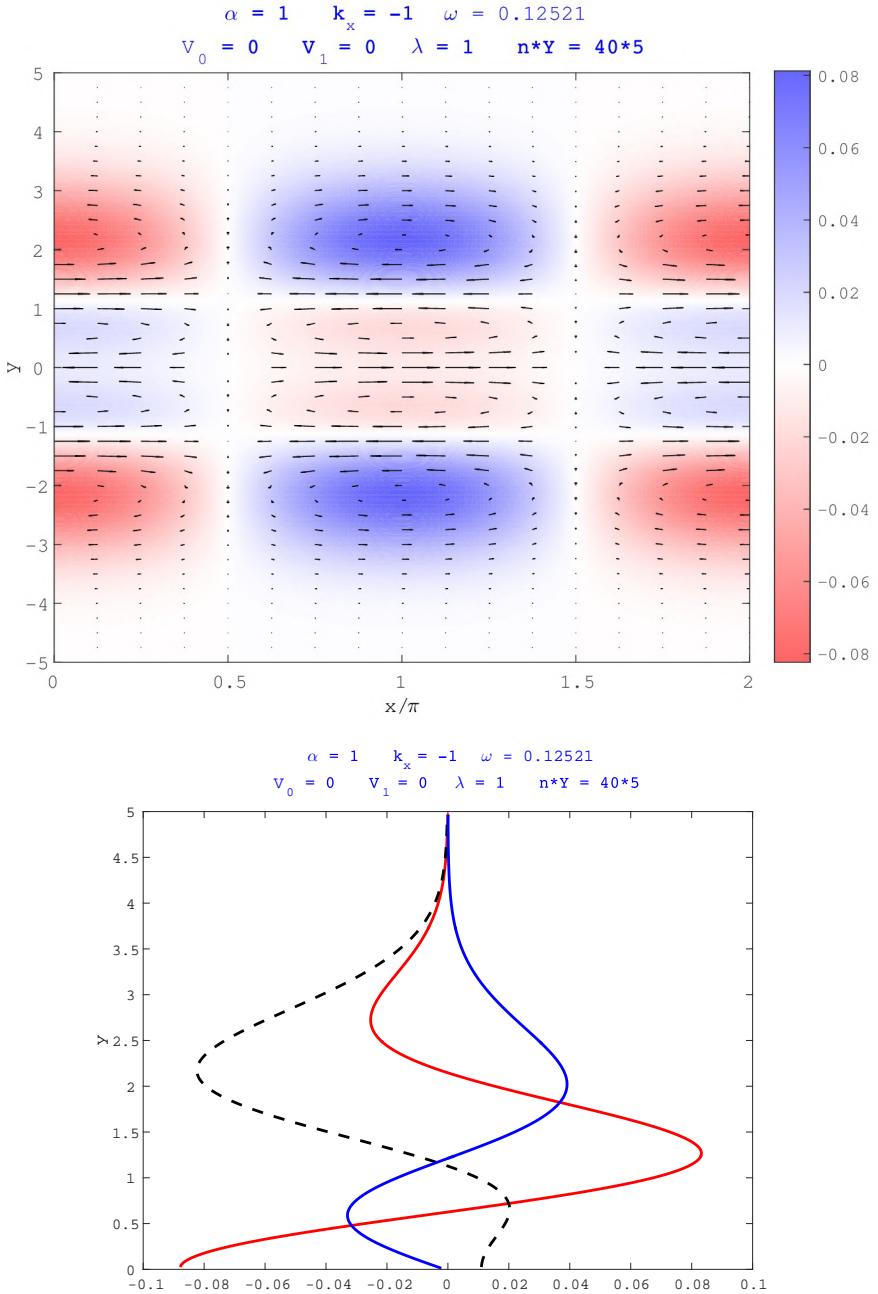


Fig.70 (3次) (西進) Rossby 波の固有関数 (赤道対称モード)。 $\bar{k}_x = -1$ 、 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。(上図)と(下図)の見方は Fig.64 と同じ。圧力の極値を中心として渦があり、圧力勾配とコリオリ力がつり合っている。南北流が背景渦度場を移流してきて、西進する。

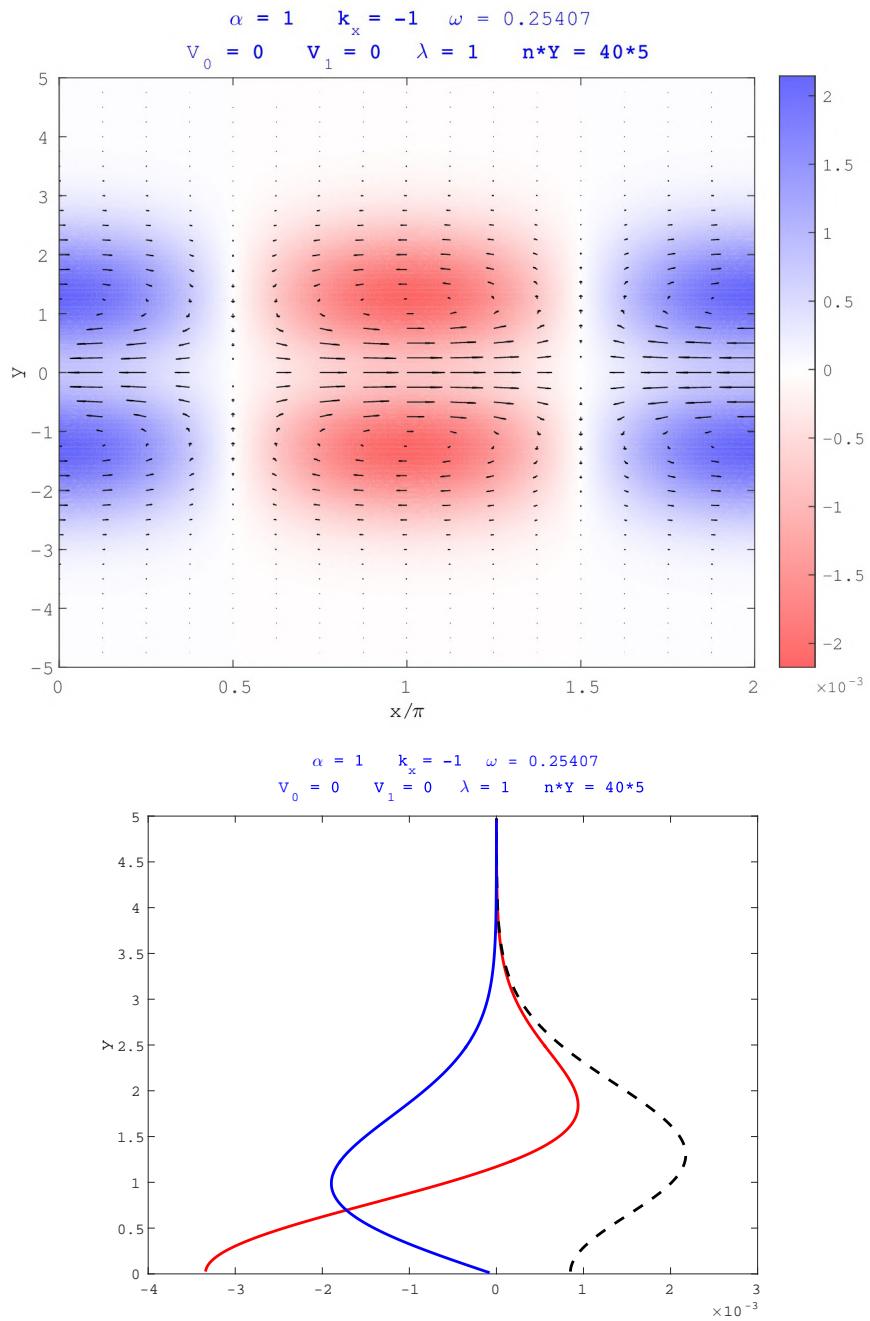


Fig.71 (1次) (西進) Rossby 波波の固有関数（赤道対称モード）。 $\bar{k}_x = -1$ 、 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（上図）と（下図）の見方は Fig.64 と同じ。

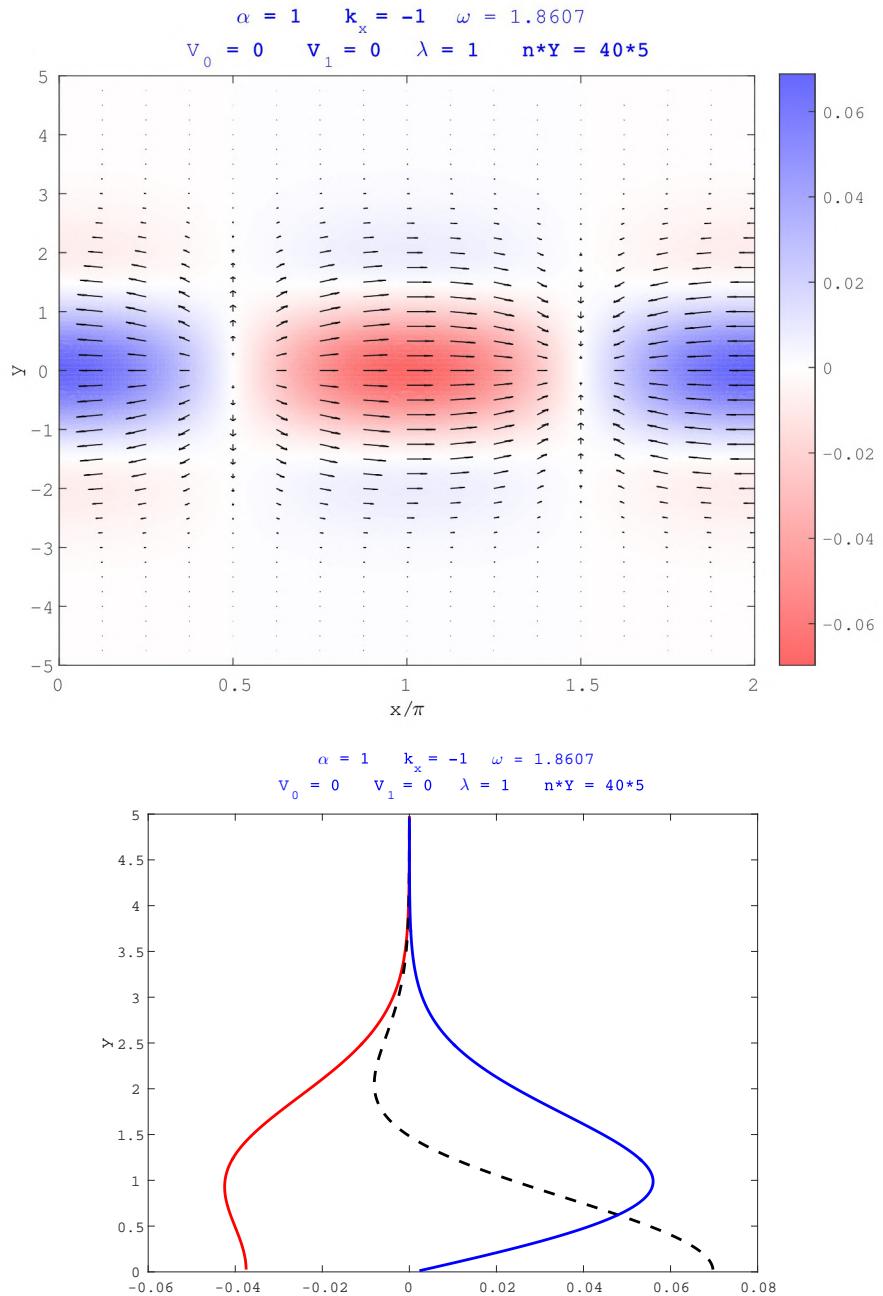


Fig.72 (1次) 西進慣性重力波の固有関数（赤道対称モード）。 $\bar{k}_x = -1$ 、 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（上図）と（下図）の見方は Fig.64 と同じ。

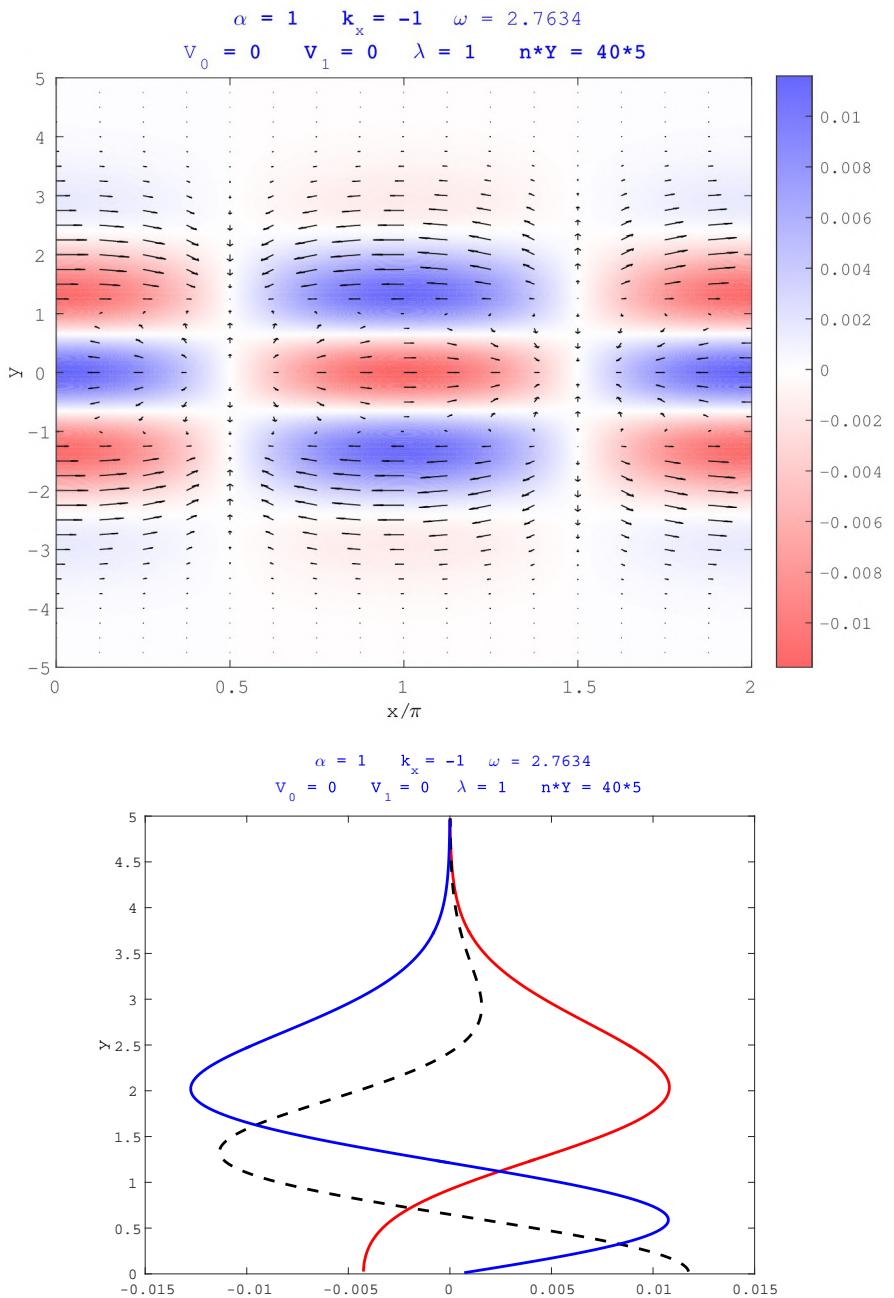


Fig.73 (3次) 西進慣性重力波の固有関数（赤道対称モード）。 $\bar{k}_x = -1$ 、 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（上図）と（下図）の見方は Fig.64 と同じ。

- 赤道反対称モード、 $\bar{k}_x = -1$ （西進）の場合

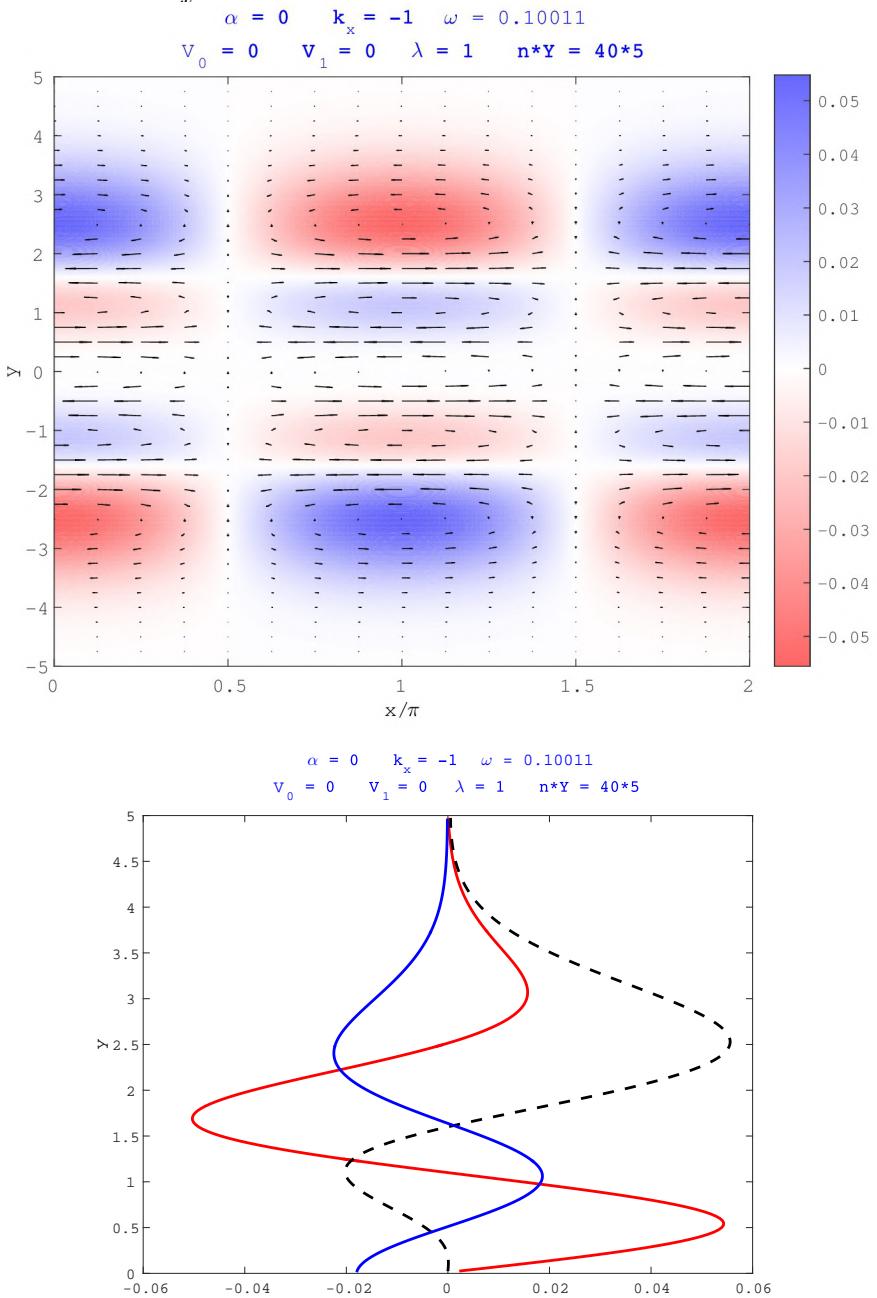


Fig.74 (4次) (西進) Rossby 波の固有関数 (赤道反対称モード)。 $\bar{k}_x = -1$ 、 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。(上図) と (下図) の見方は Fig.64 と同じ。

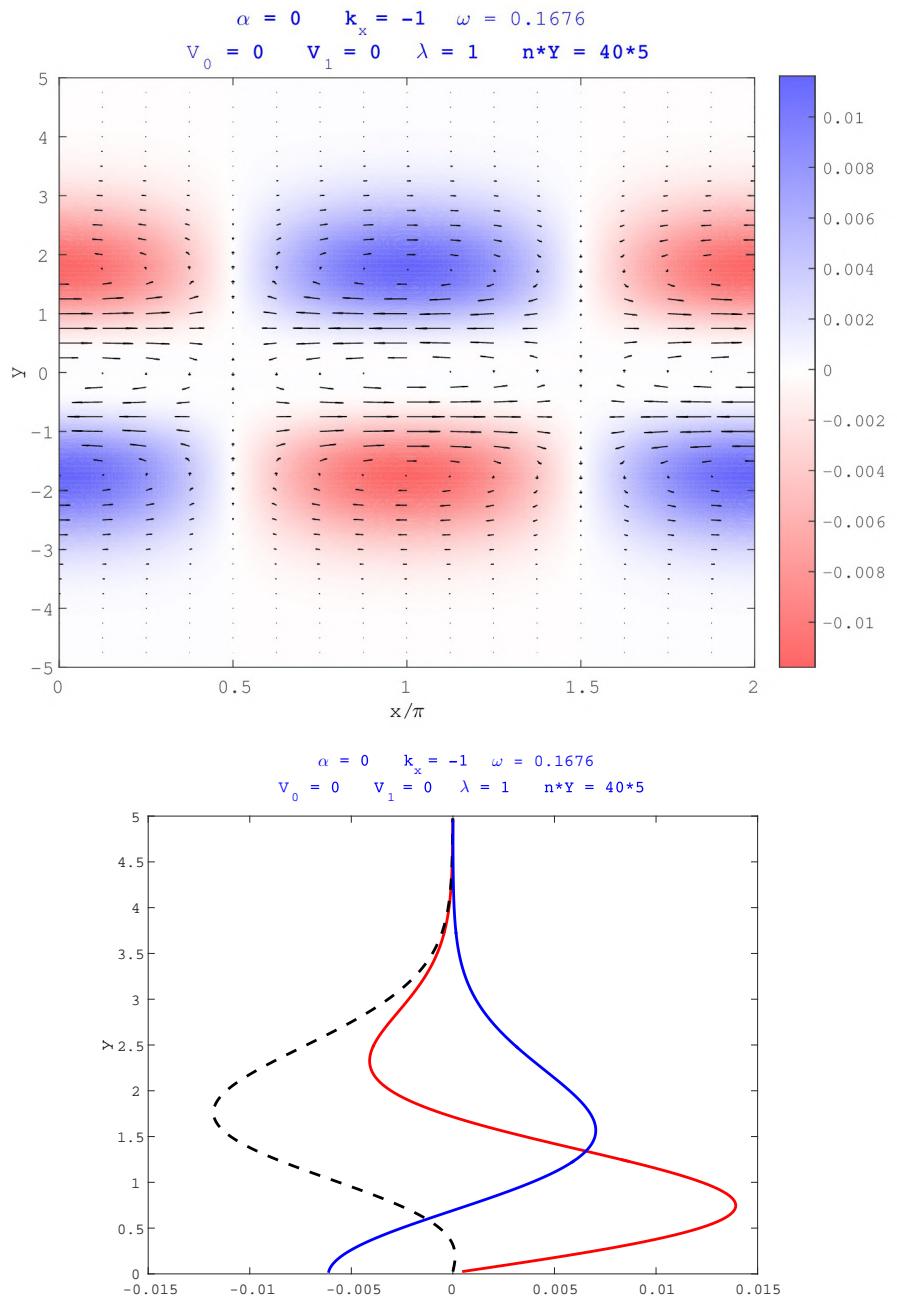


Fig.75 (2 次) (西進) Rossby 波の固有関数 (赤道反対称モード)。 $\bar{k}_x = -1$ 、 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。(上図) と (下図) の見方は Fig.64 と同じ。

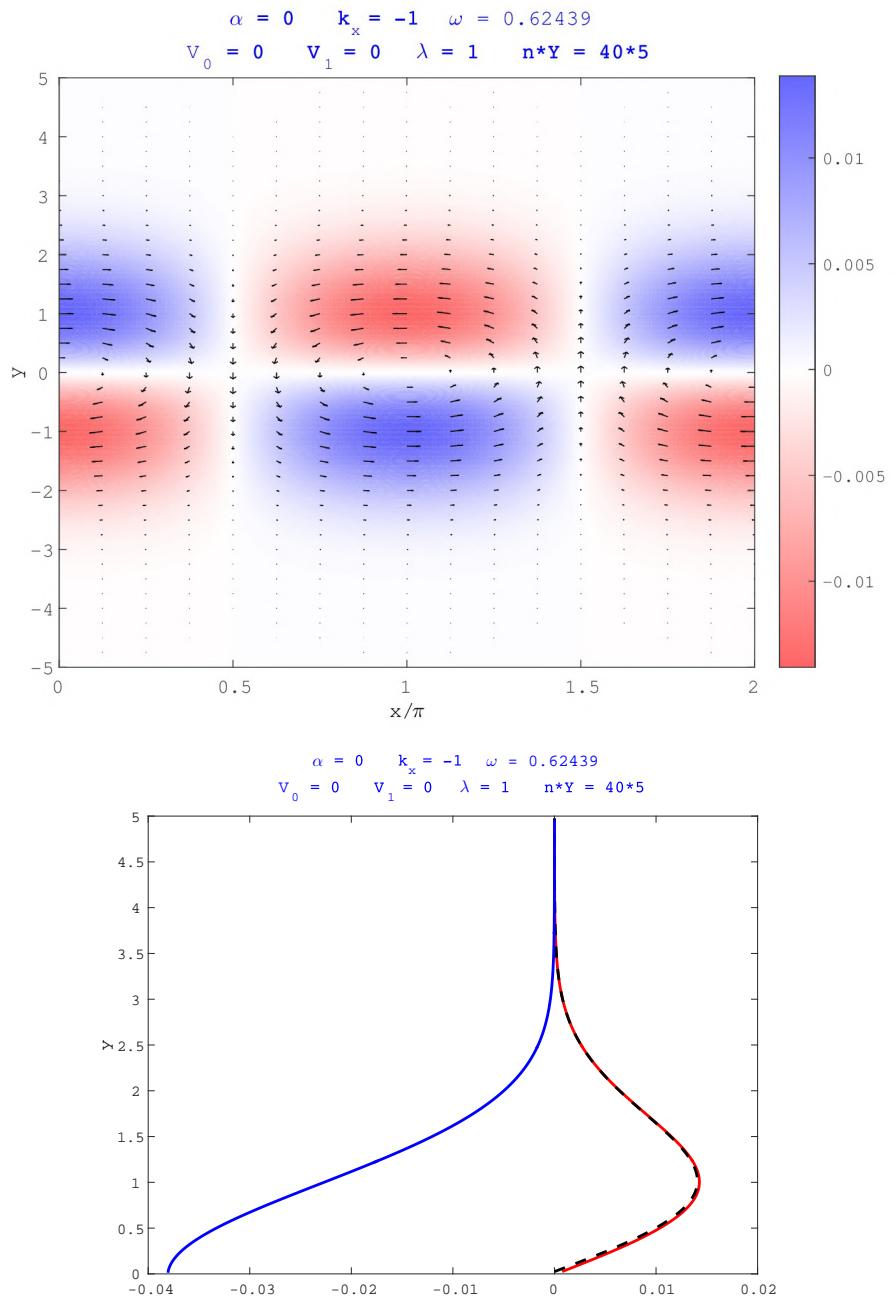


Fig.76 西進混合 Rossby 重力波の固有関数（赤道反対称モード）。 $\bar{k}_x = -1$ 、 $V_0 = V_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（上図）と（下図）の見方は Fig.64 と同じ。

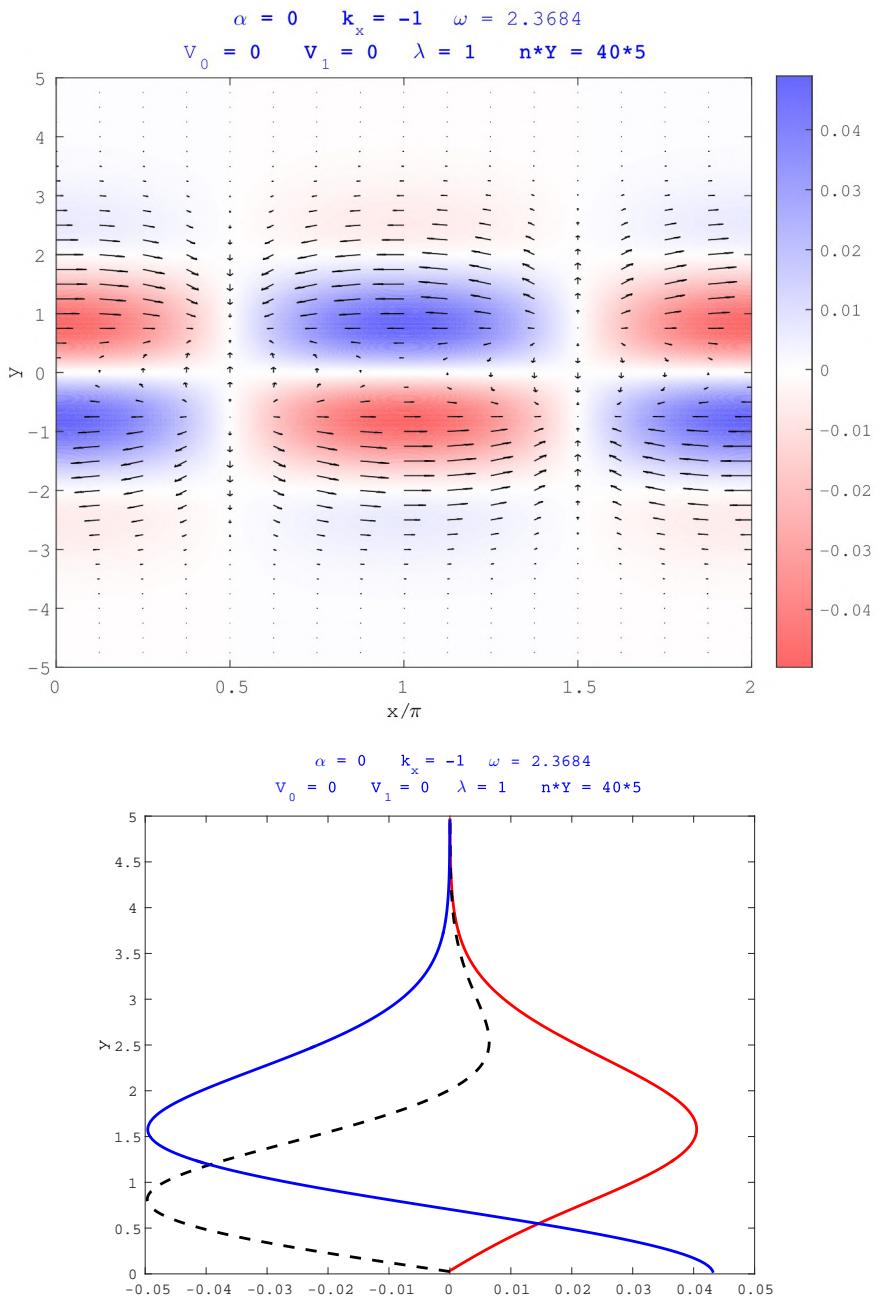


Fig.77 (2次) 西進慣性重力波の固有関数（赤道反対称モード）。 $\bar{k}_x = -1$ 、 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（上図）と（下図）の見方は Fig.64 と同じ。

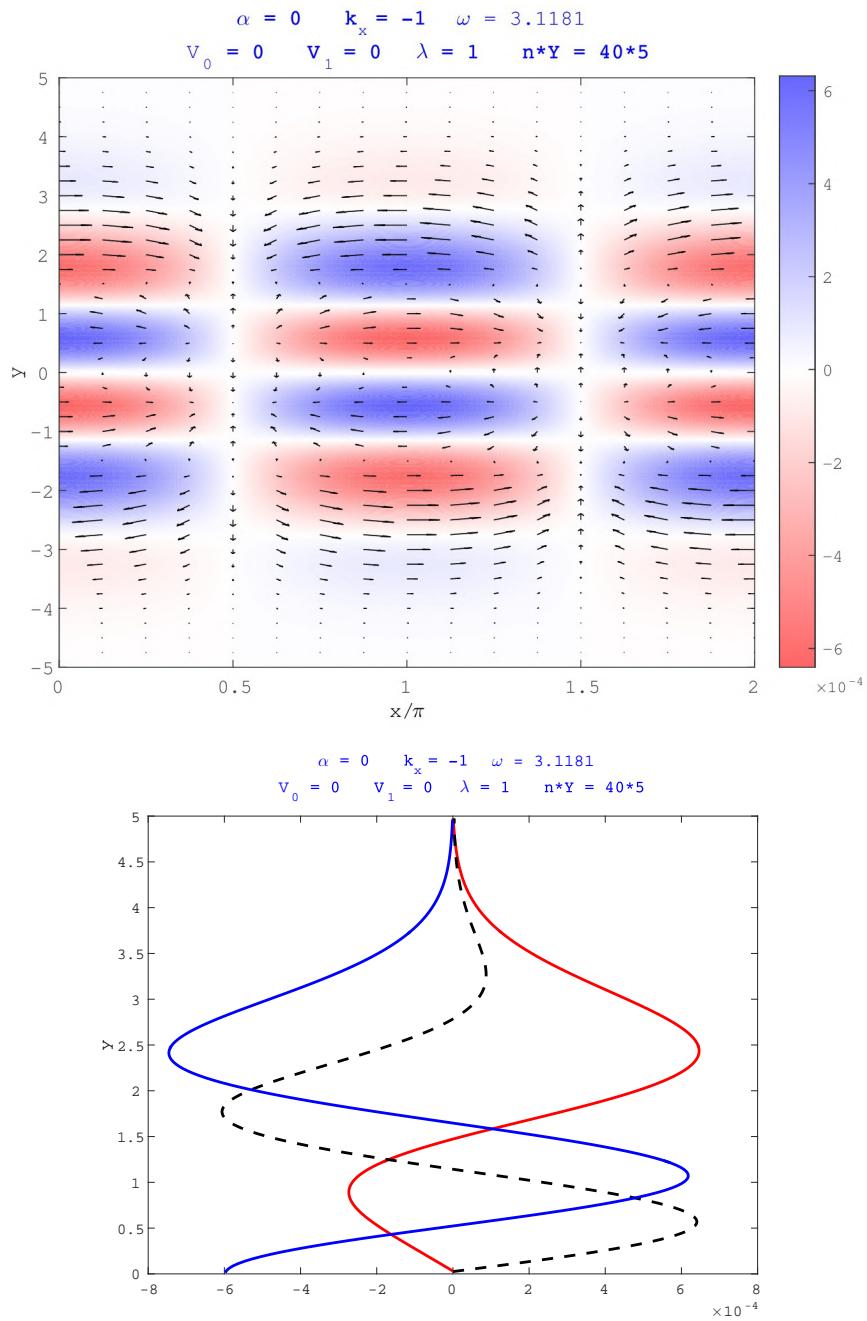


Fig.78 (4次) 西進慣性重力波の固有関数（赤道反対称モード）。 $\bar{k}_x = -1$ 、 $\bar{V}_0 = \bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（上図）と（下図）の見方は Fig.64 と同じ。

A.2.2 $\bar{V}_0 \neq 0, \bar{V}_1 = 0$ (東西一様磁場) の場合の固有関数

- 赤道 Kelvin 波 (Fig.79、80)

付録 G でも示したように、磁場が強くなると、赤道から離れるにつれて、より速く振幅が小さくなる。また、磁場が強いほど、東西流の振幅が圧力の振幅に比べ大きくなる。

これらの原因を以下のように考えた。まず、赤道 Kelvin 波の場合の式のつり合いは、水平構造方程式 (2.6.1)~(2.6.5) より、

$$\frac{\partial U(x, y, t)}{\partial t} = -g \frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial x} + \frac{B_x}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \frac{\partial M_x(x, y, t)}{\partial x} \quad (\text{A.1})$$

$$\beta y U(x, y, t) = -g \frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial y} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial M_x(x, y, t)}{\partial t} = \frac{B_x}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial t} = -h \frac{\partial U(x, y, t)}{\partial x} \quad (\text{A.4})$$

となる。磁場があると、東西流の発散・収束は、圧力偏差だけでなく、東西磁場もつくり出す。このため、東西流の加速は、圧力勾配力だけでなく、磁場による力によっても引き起こされ、磁場がない場合よりも、東西流が強くなることが予想される。一方、南北方向の力のつり合いは、コリオリ力と圧力勾配のつり合いで決まるが、磁場が強い場合は、東西流が強くなつてコリオリ力が強くなるので、力を釣り合わせるには、コリオリパラメータが小さくなる赤道付近に流れを局在させる必要がある。また、構造が赤道に局在すれば、圧力勾配を大きくできる。このため、磁場が強いと、東西流は大きくなり、振幅はより赤道付近に局在する。

また、東西波数を変えて、東西流と圧力の振幅の比に、変化は見られなかった (Fig.80)。これは、赤道 Kelvin 波の分散関係が、

$$\omega = \sqrt{gh + \frac{B_x^2}{\rho_0 \mu} k_x} \quad (\text{A.5})$$

であり、圧力と東西流の振幅の比は (A.4) 式で決まることによる。

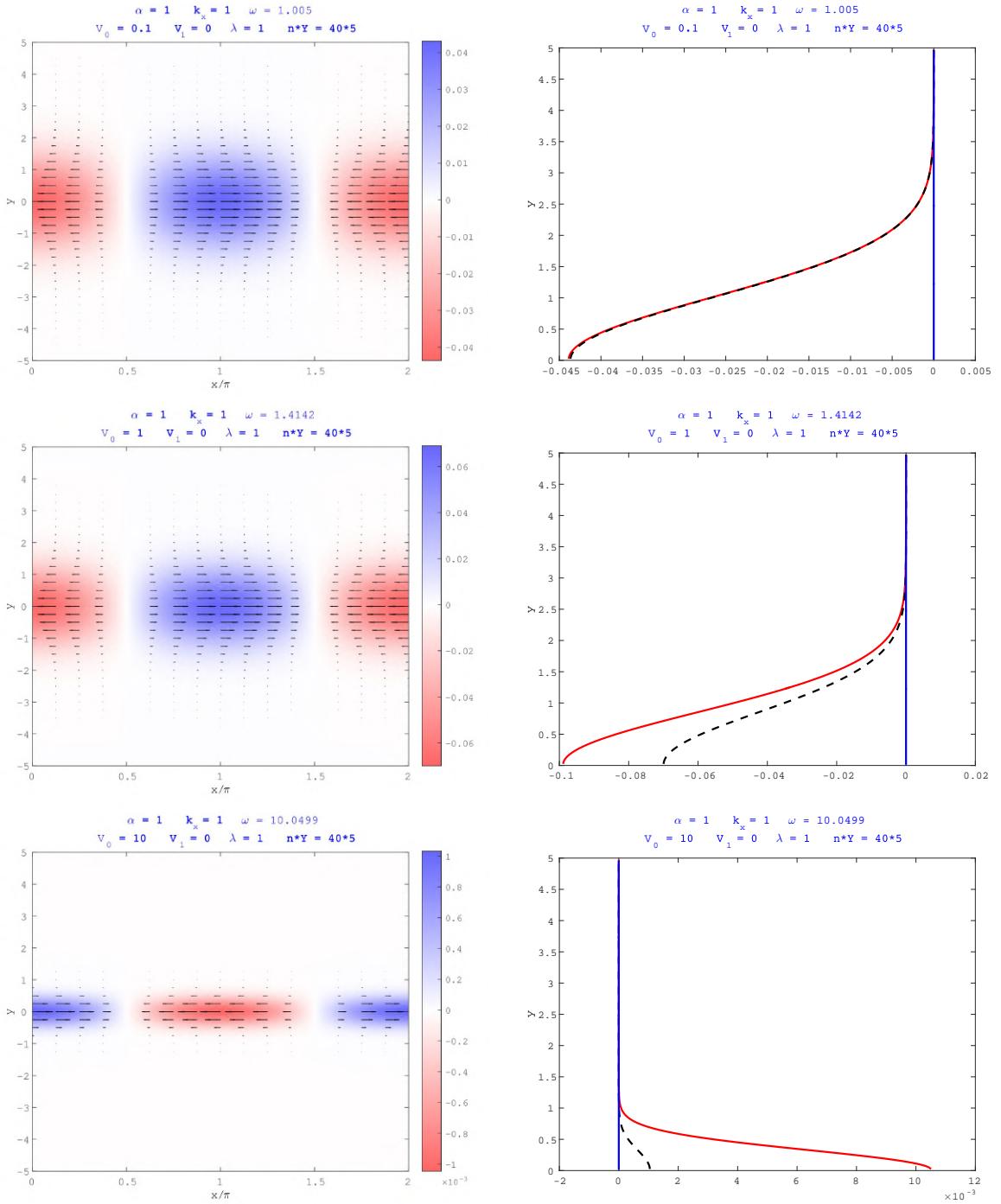


Fig.79 (東進) 赤道 Kelvin 波の固有関数 (赤道対称モード)。 $\bar{k}_x = 1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。(左図) 水平方向の流れと圧力の様子。縦軸が \bar{y} ($\bar{y} = 0$ が赤道)、横軸が \bar{x}/π 。矢印は流速を表し、色は $\bar{\varpi}$ (圧力) を表す。(右図) 固有関数の南北構造。縦軸が \bar{y} ($\bar{y} = 0$ が赤道)、横軸が振幅。赤線が U (x (東西) 方向の流れ)、青線が V (y (南北) 方向の流れ)、黒の破線が $\bar{\varpi}$ (圧力) を表す。(上段) $\bar{V}_0 = 0.1$ の場合。(中段) $\bar{V}_0 = 1$ の場合。(下段) $\bar{V}_0 = 10$ の場合。

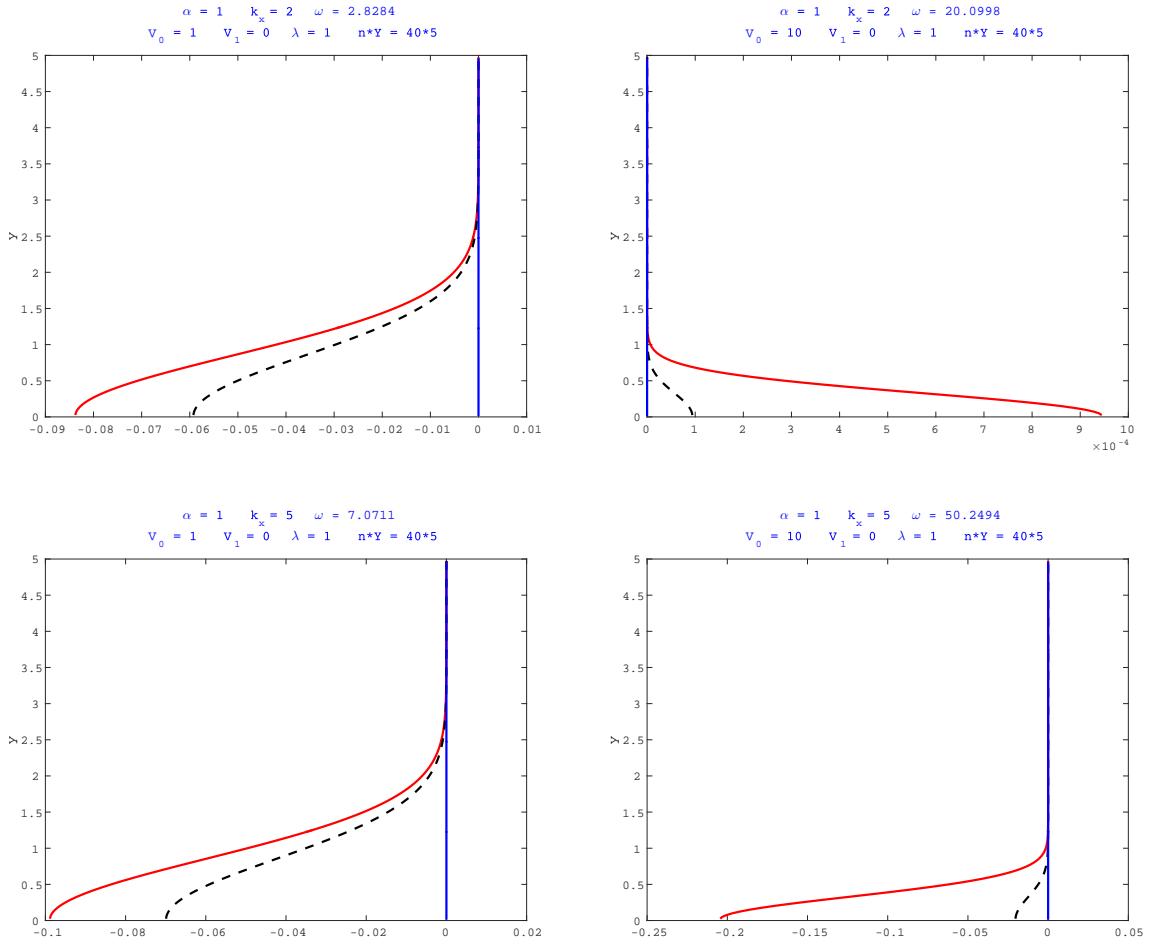


Fig.80 (東進) 赤道 Kelvin 波の固有関数（赤道対称モード）の東西波数依存性。 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。図の見方は Fig.79 の（右図）と同じ。（上段） $\bar{k}_x = 2$ の場合。（下段） $\bar{k}_x = 5$ の場合。（左列） $\bar{V}_0 = 1$ の場合。（右列） $\bar{V}_0 = 10$ の場合。

- 東進慣性重力波 (Fig.81~84)

慣性重力波の場合も、赤道 Kelvin 波と同様に、磁場が強いほど、振幅を持つ領域がより赤道付近に限られ、東西流が圧力に比べ大きくなる。慣性重力波の場合は、南北流が存在するが、磁場の強さを変化させても、東西流と南北流の振幅の比はほとんど変わらない。

また、慣性重力波のように、南北流が存在する場合、流れや圧力の振幅の比は、東西波数にも依存する (Fig.84)。どのように依存するかは、詳しくはまだわかっていないが、東西波数が大きくなると、南北流が小さくなる傾向がある。

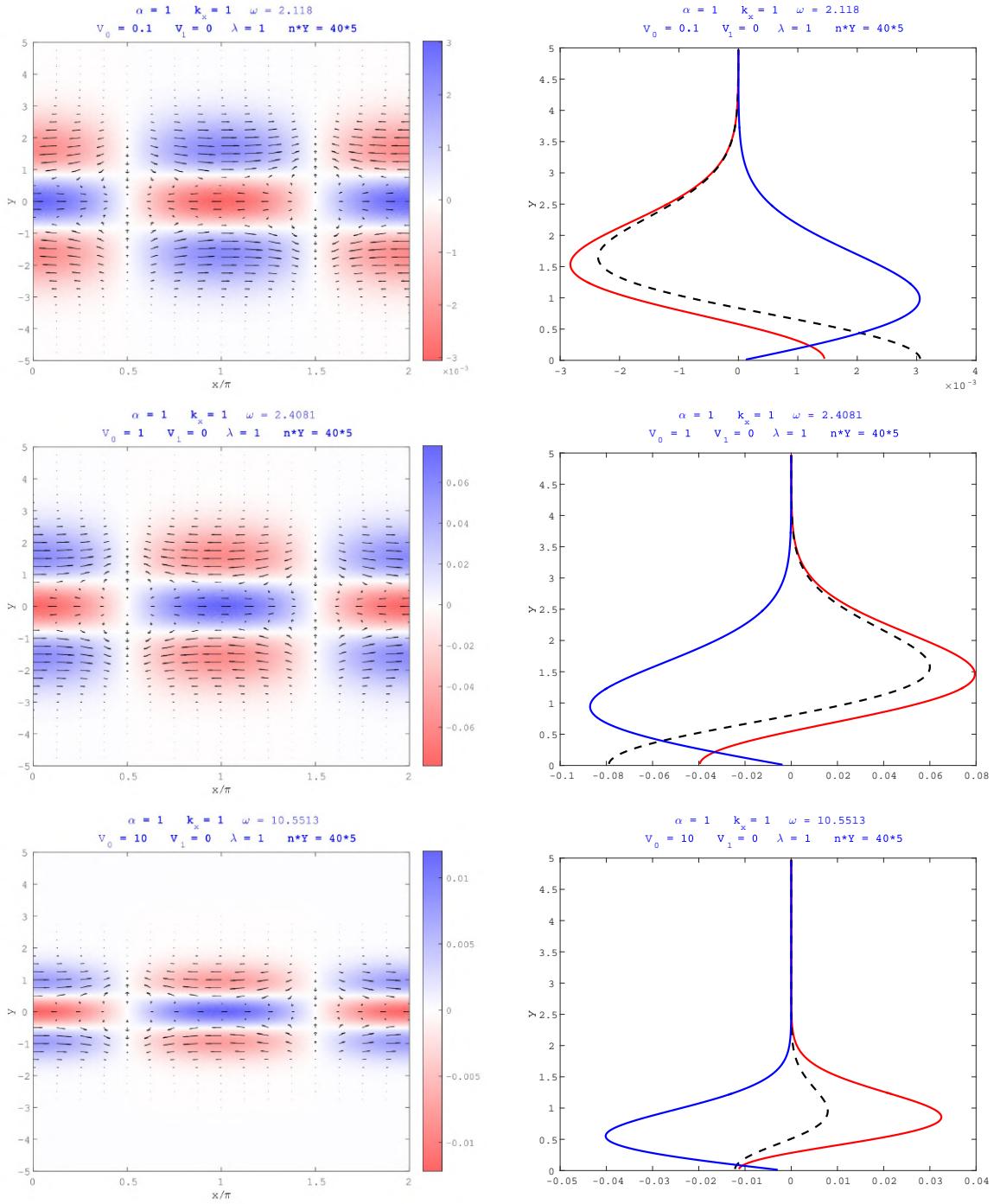


Fig.81 (1次) 東進慣性重力波の固有関数（赤道対称モード）。 $\bar{k}_x = 1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（左図）と（右図）の見方は Fig.79 と同じ。（上段） $\bar{V}_0 = 0.1$ の場合。（中段） $\bar{V}_0 = 1$ の場合。（下段） $\bar{V}_0 = 10$ の場合。

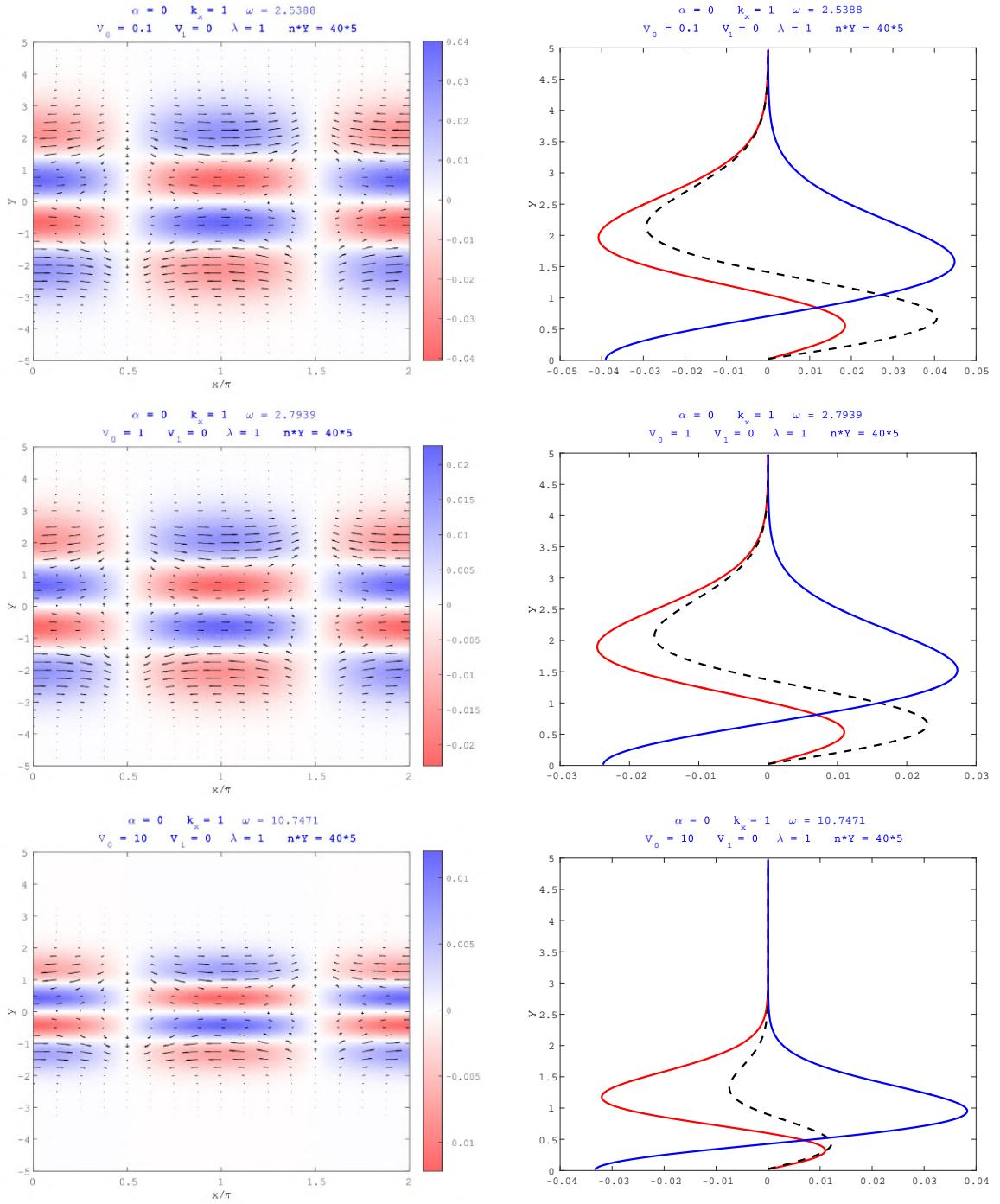


Fig.82 (2次) 東進慣性重力波の固有関数（赤道反対称モード）。 $\bar{k}_x = 1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（左図）と（右図）の見方は Fig.79 と同じ。（上段） $\bar{V}_0 = 0.1$ の場合。（中段） $\bar{V}_0 = 1$ の場合。（下段） $\bar{V}_0 = 10$ の場合。

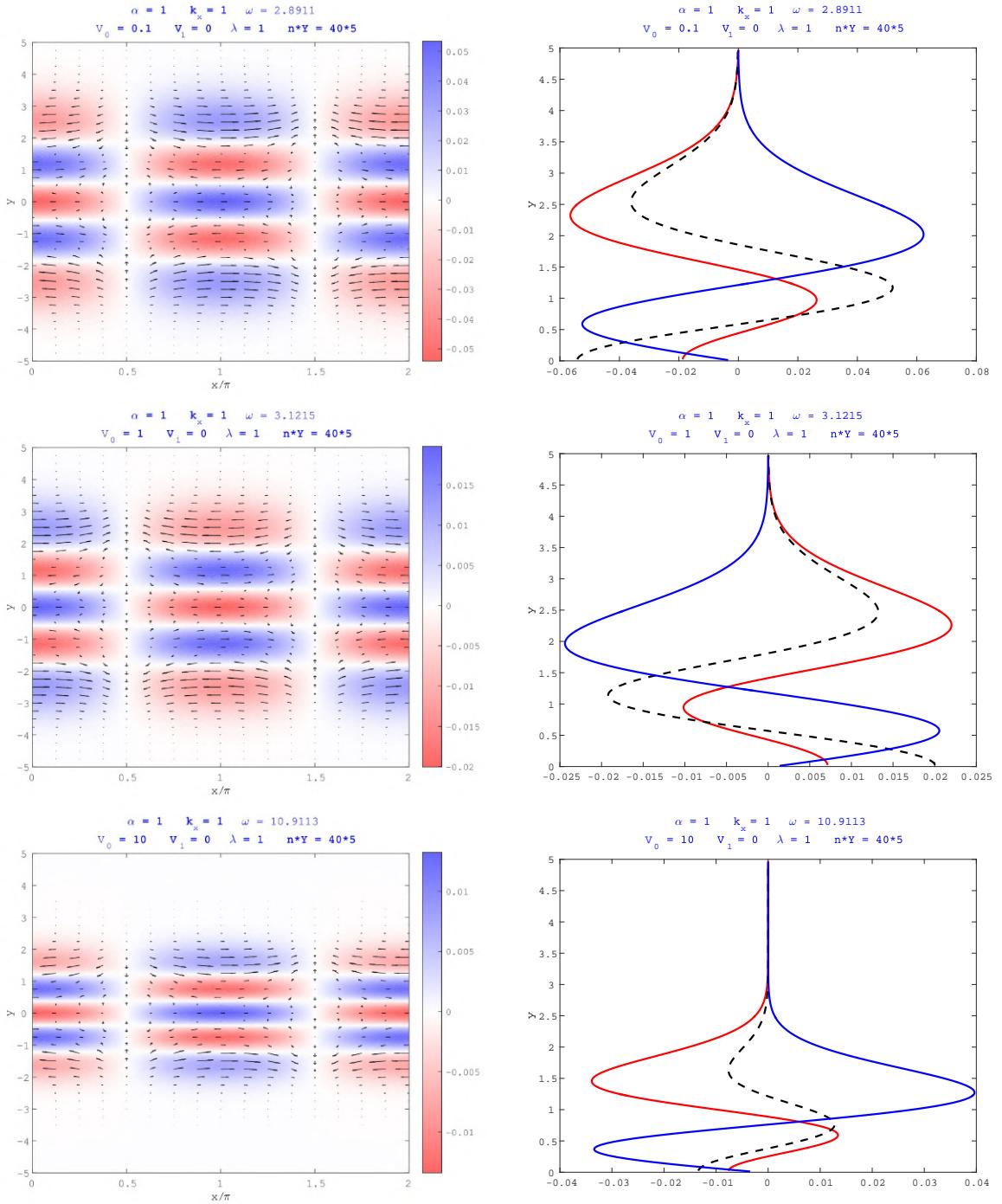


Fig.83 (3 次) 東進慣性重力波の固有関数（赤道対称モード）。 $\bar{k}_x = 1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（左図）と（右図）の見方は Fig.79 と同じ。（上段） $\bar{V}_0 = 0.1$ の場合。（中段） $\bar{V}_0 = 1$ の場合。（下段） $\bar{V}_0 = 10$ の場合。

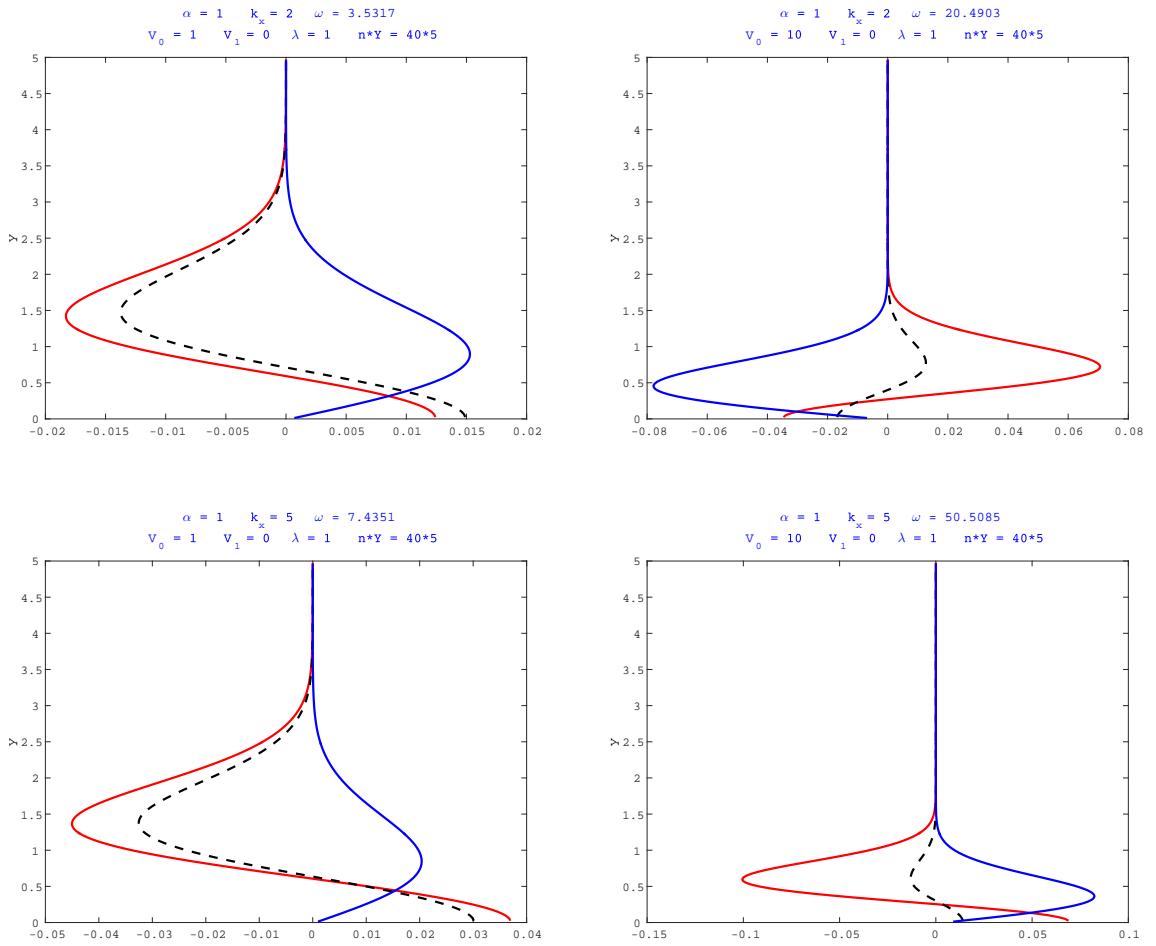


Fig.84 東進慣性重力波の固有関数の東西波数依存性(1次、赤道対称モード)。 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。図の見方は Fig.79 の(右図)と同じ。(上段) $\bar{k}_x = 2$ の場合。(下段) $\bar{k}_x = 5$ の場合。(左列) $\bar{V}_0 = 1$ の場合。(右列) $\bar{V}_0 = 10$ の場合。

- 西進慣性重力波 (Fig.85~88)

特徴は、東進の慣性重力波とほとんど同じである。

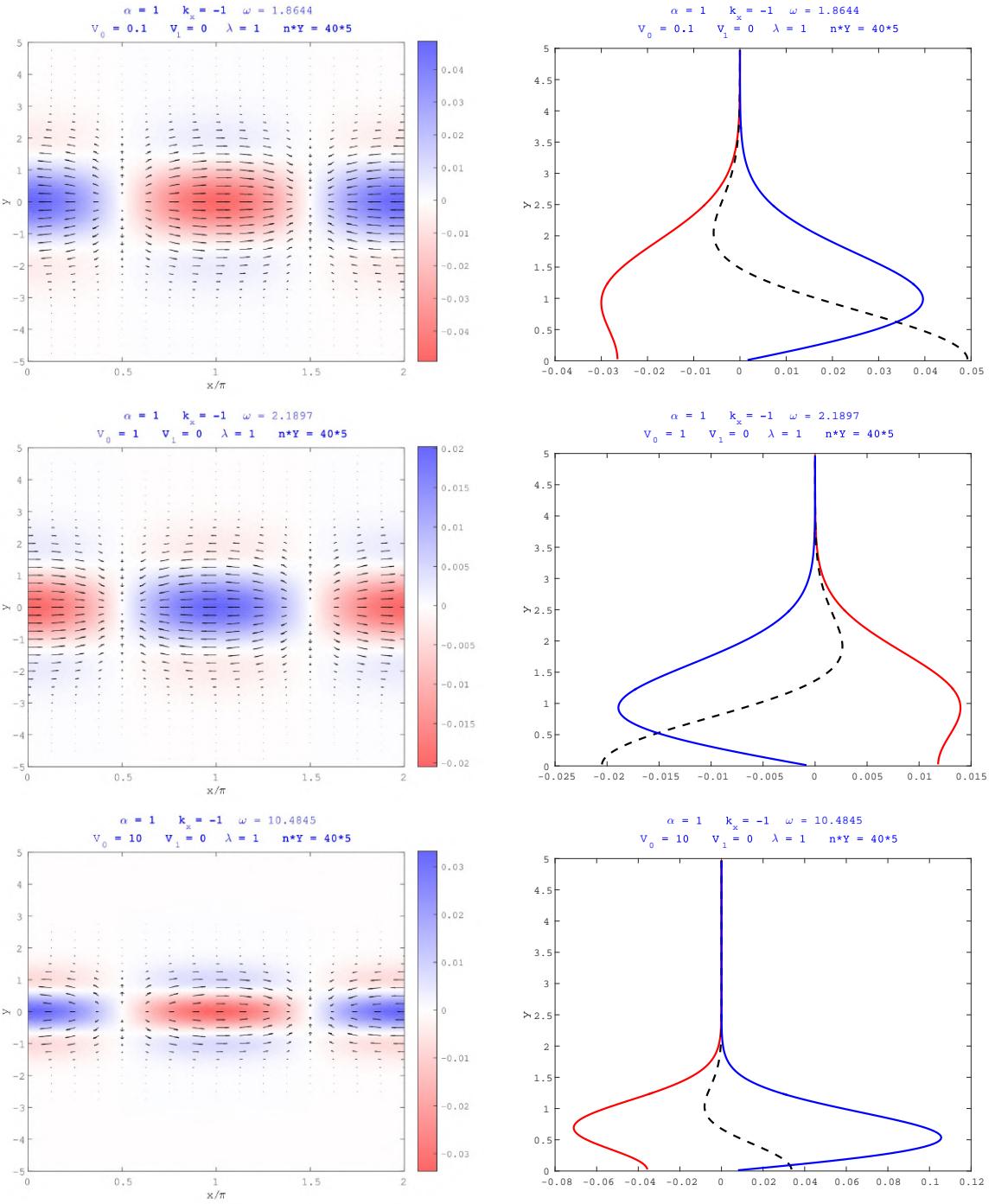


Fig.85 (1次) 西進慣性重力波の固有関数 (赤道対称モード)。 $\bar{k}_x = -1, \bar{V}_1 = 0, \bar{\lambda} = 1, n = 40, Y = 5$ の場合。(左図) と (右図) の見方は Fig.79 と同じ。(上段) $\bar{V}_0 = 0.1$ の場合。(中段) $\bar{V}_0 = 1$ の場合。(下段) $\bar{V}_0 = 10$ の場合。

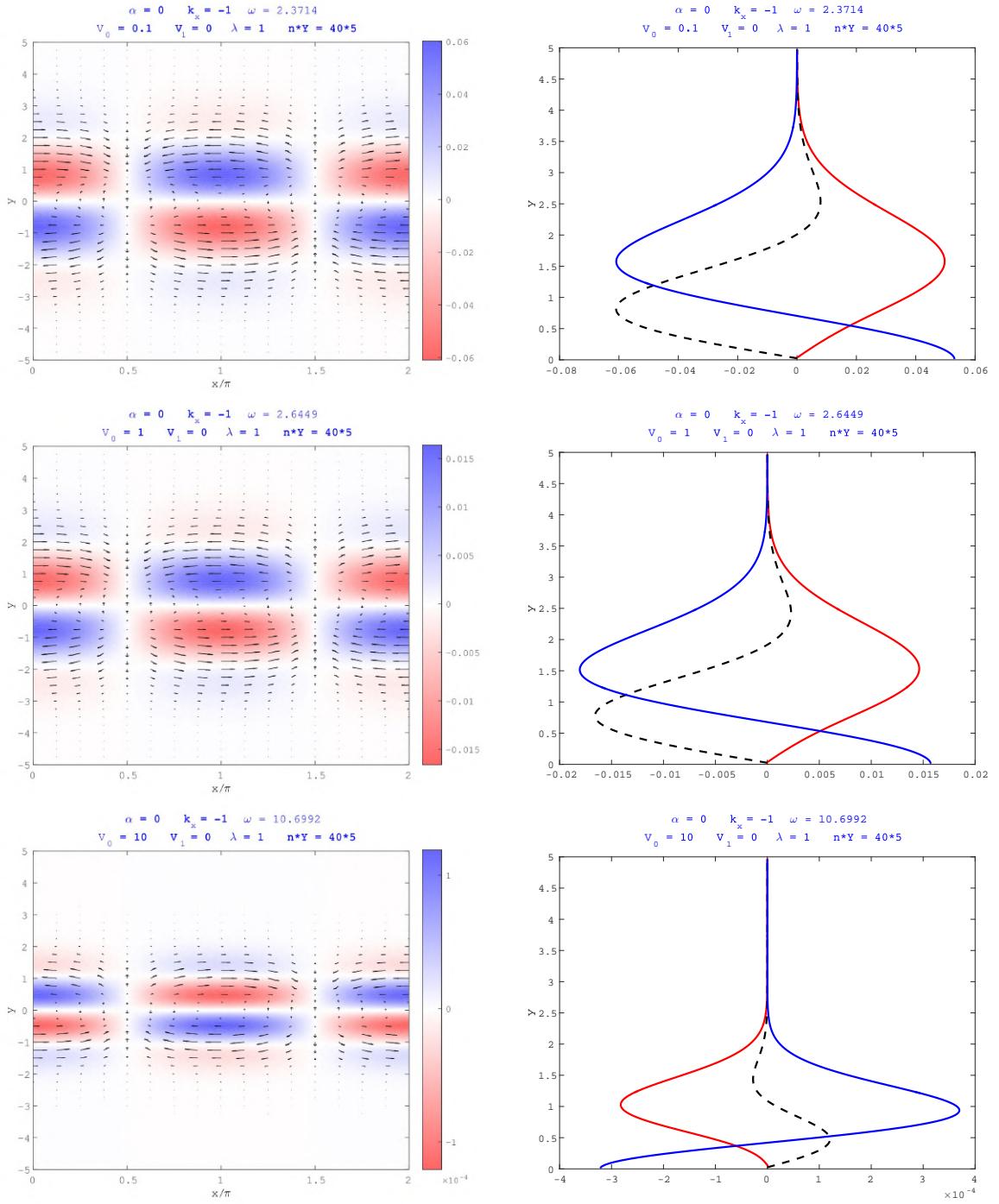


Fig.86 (2次) 西進慣性重力波の固有関数(赤道反対称モード)。 $\bar{k}_x = -1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。(左図)と(右図)の見方は Fig.79 と同じ。(上段) $\bar{V}_0 = 0.1$ の場合。(中段) $\bar{V}_0 = 1$ の場合。(下段) $\bar{V}_0 = 10$ の場合。

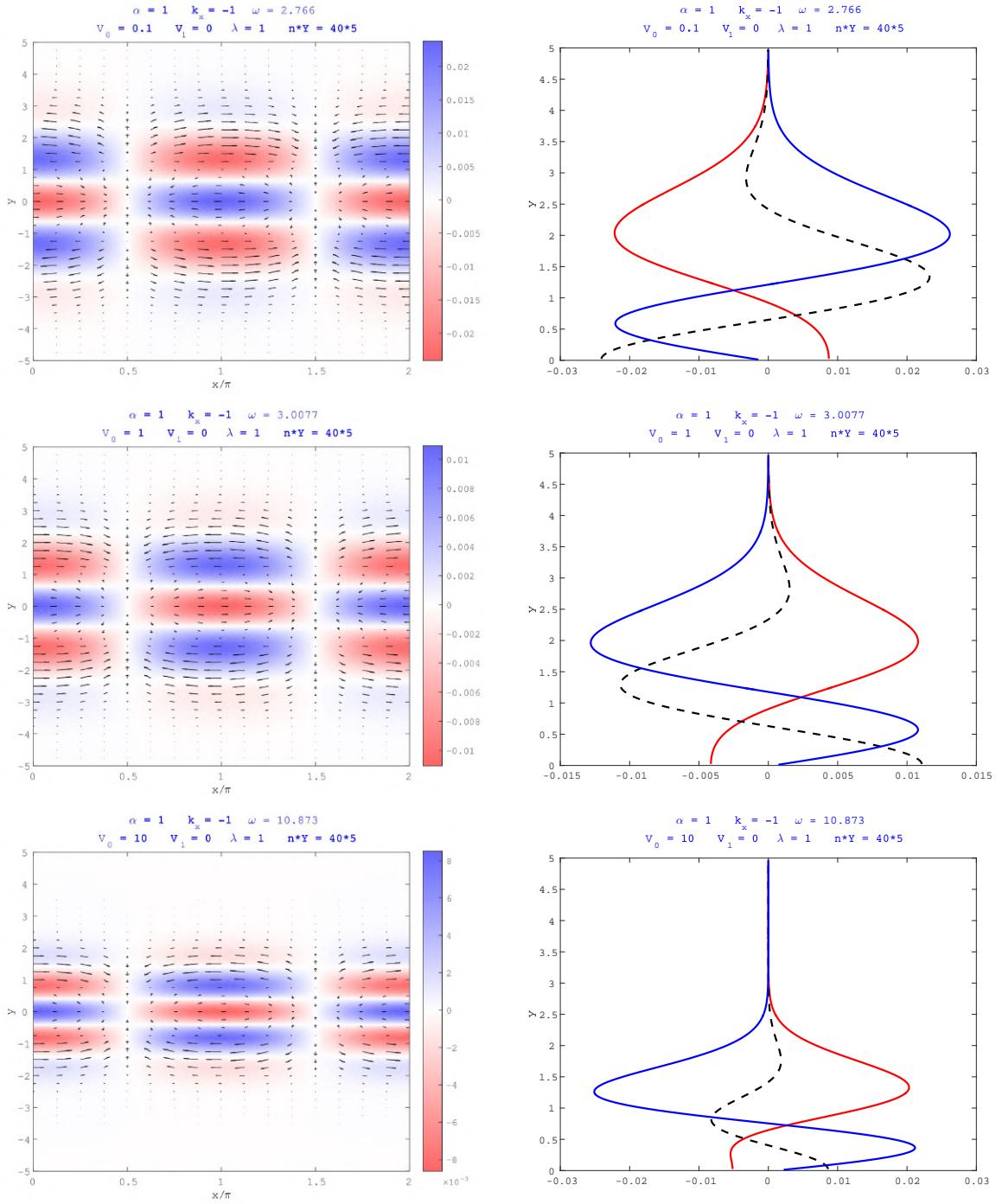


Fig.87 (3 次) 西進慣性重力波の固有関数（赤道対称モード）。 $\bar{k}_x = -1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（左図）と（右図）の見方は Fig.79 と同じ。（上段） $\bar{V}_0 = 0.1$ の場合。（中段） $\bar{V}_0 = 1$ の場合。（下段） $\bar{V}_0 = 10$ の場合。

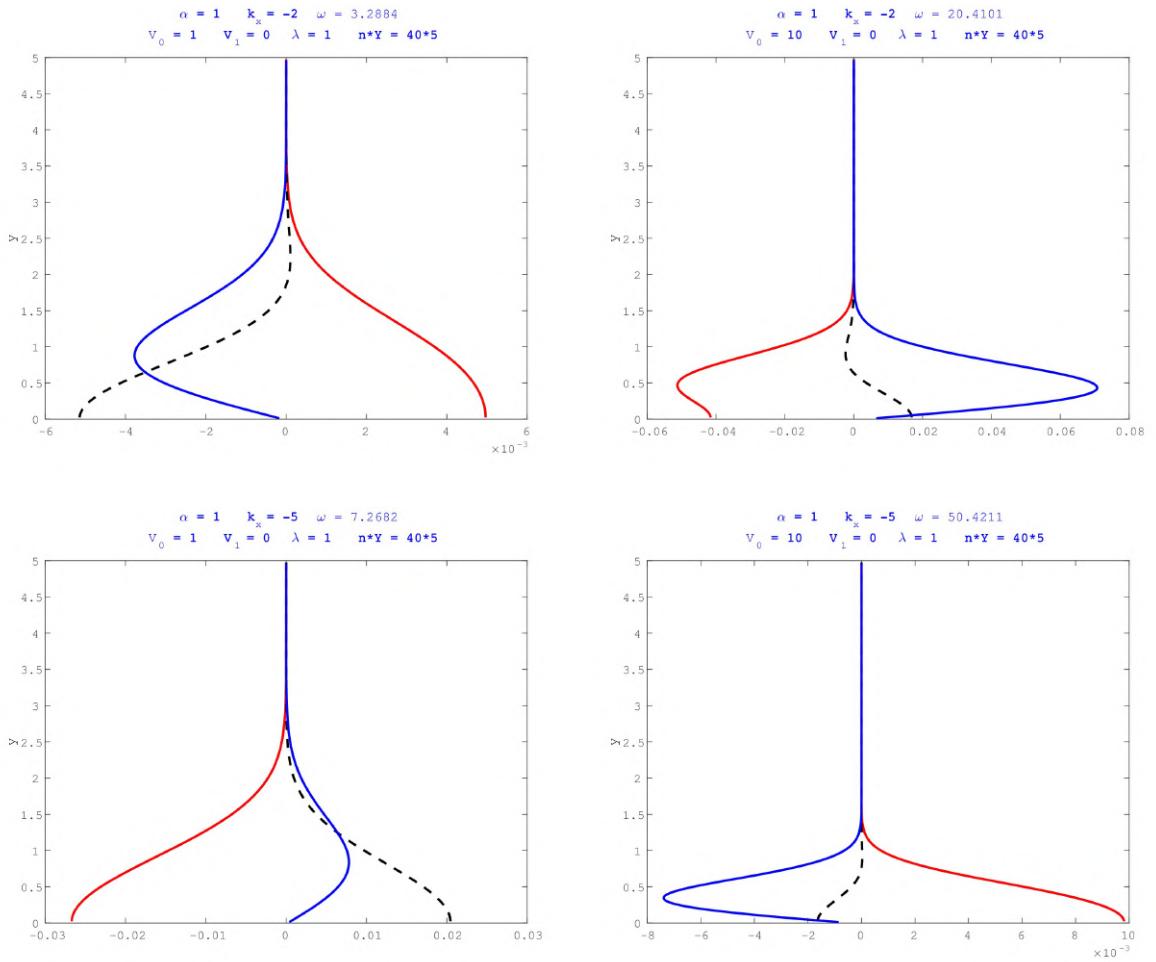


Fig.88 西進慣性重力波の固有関数の東西波数依存性(1次、赤道対称モード)。 $\bar{V}_1 = 0, \bar{\lambda} = 1, n = 40, Y = 5$ の場合。図の見方は Fig.79 の(右図)と同じ。(上段) $\bar{k}_x = -2$ の場合。(下段) $\bar{k}_x = -5$ の場合。(左列) $\bar{V}_0 = 1$ の場合。(右列) $\bar{V}_0 = 10$ の場合。

- 東進混合 Rossby 重力波 (Fig.89、90)

東進の混合 Rossby 重力波は、慣性重力波的なので、慣性重力波と同じような特徴を持つ。

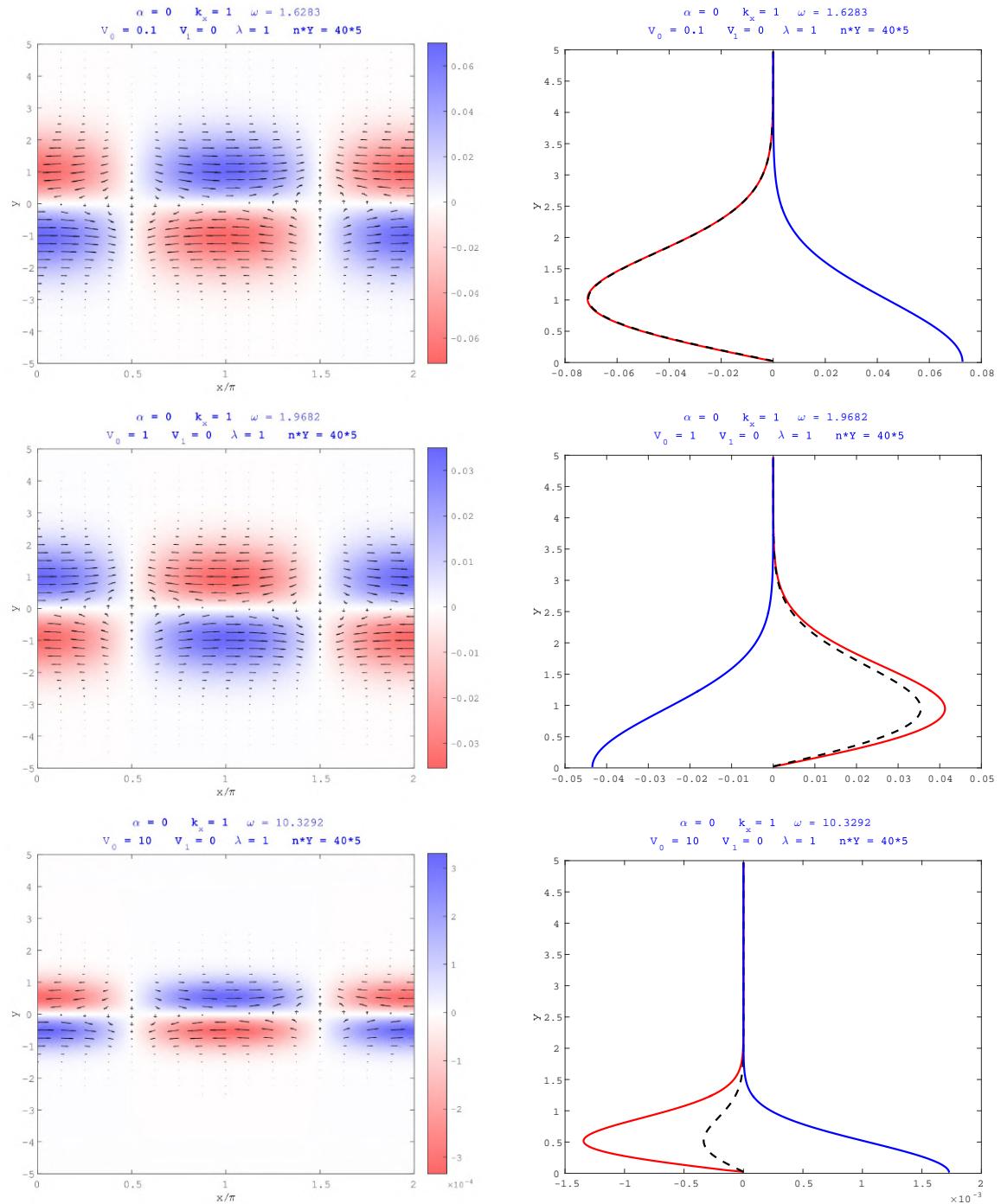


Fig.89 東進混合 Rossby 重力波の固有関数（赤道反対称モード）。 $\bar{k}_x = 1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（左図）と（右図）の見方は Fig.79 と同じ。（上段） $\bar{V}_0 = 0.1$ の場合。（中段） $\bar{V}_0 = 1$ の場合。（下段） $\bar{V}_0 = 10$ の場合。

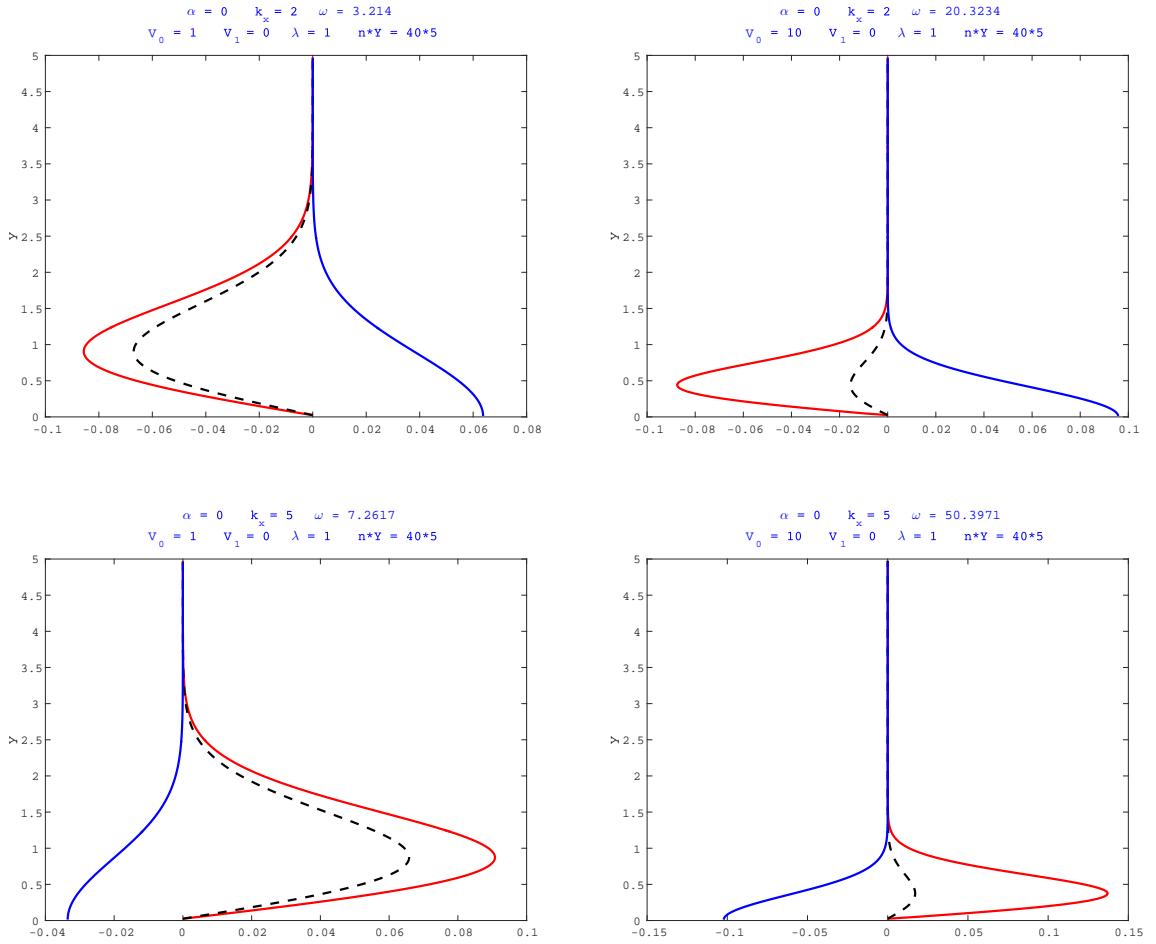


Fig.90 東進混合 Rossby 重力波の固有関数（赤道反対称モード）の東西波数依存性。 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。図の見方は Fig.79 の（右図）と同じ。（上段） $\bar{k}_x = 2$ の場合。（下段） $\bar{k}_x = 5$ の場合。（左列） $\bar{V}_0 = 1$ の場合。（右列） $\bar{V}_0 = 10$ の場合。

● 西進混合 Rossby 重力波 (Fig.91~93)

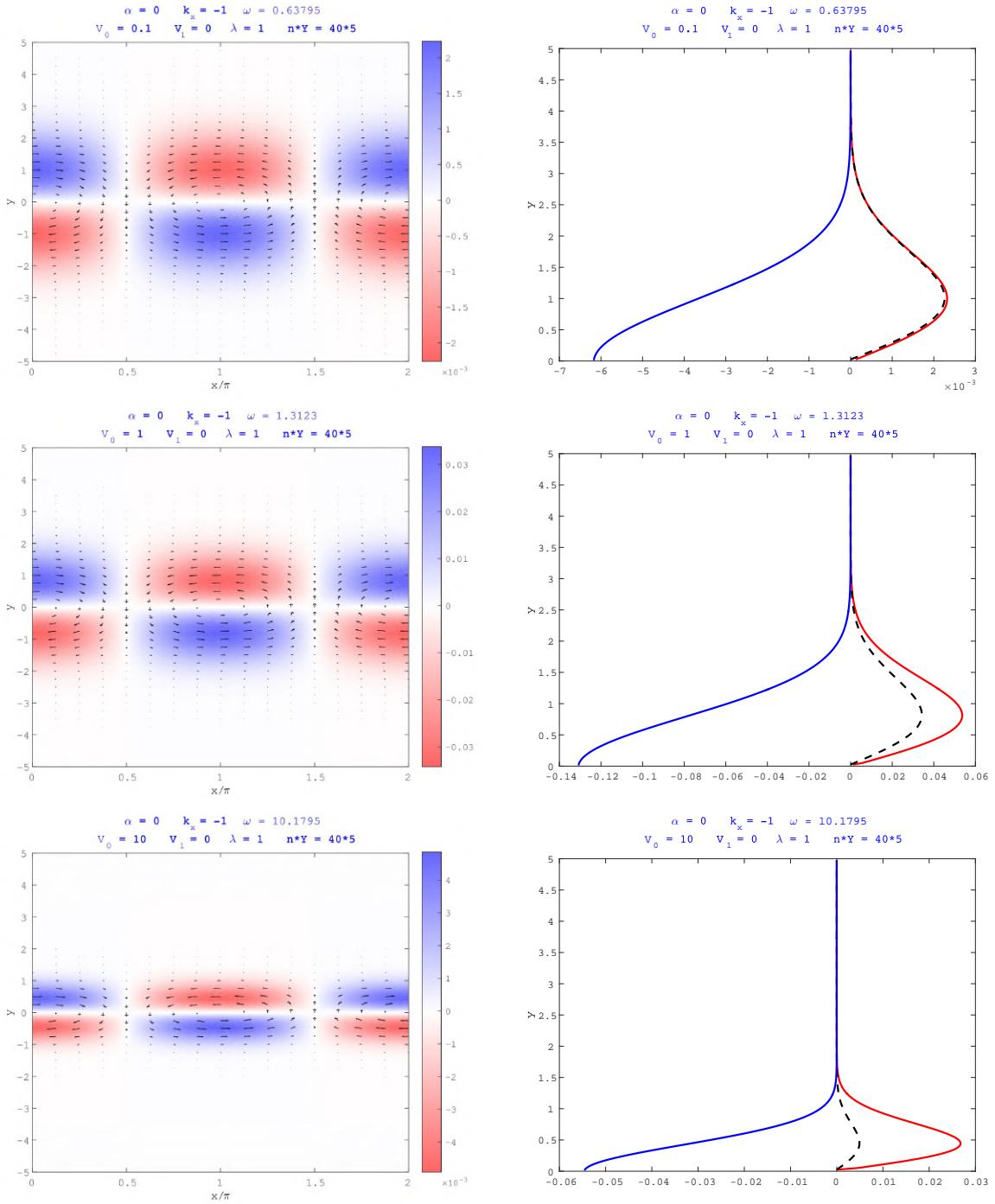


Fig.91 西進混合 Rossby 重力波の固有関数 (赤道反対称モード)。 $\bar{k}_x = -1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。(左図) と (右図) の見方は Fig.79 と同じ。(上段) $\bar{V}_0 = 0.1$ の場合。(中段) $\bar{V}_0 = 1$ の場合。(下段) $\bar{V}_0 = 10$ の場合。

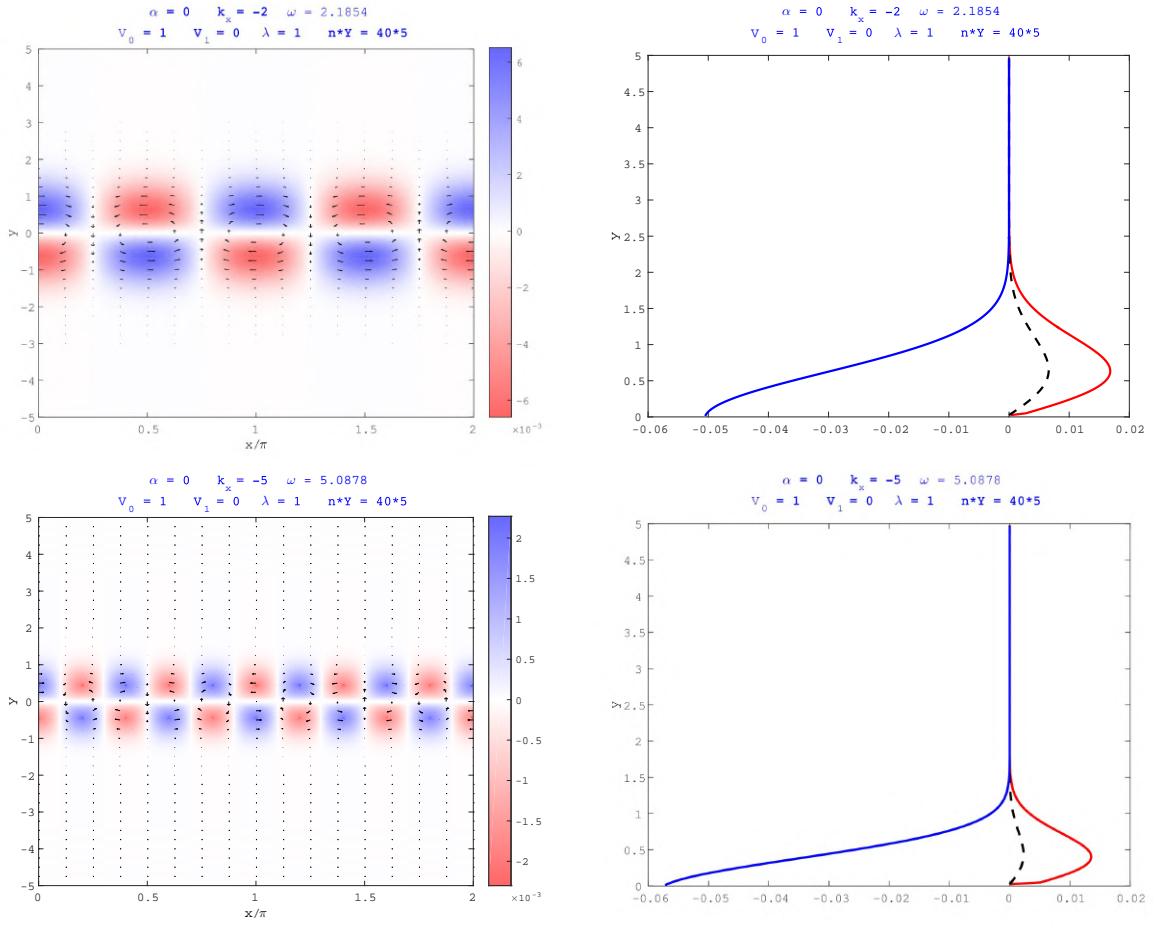


Fig.92 西進混合 Rossby 重力波の固有関数（赤道反対称モード）の東西波数依存性。 $\bar{V}_0 = 1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（左図）と（右図）の見方は Fig.79 と同じ。（上段） $\bar{k}_x = -2$ の場合。（下段） $\bar{k}_x = -5$ の場合。

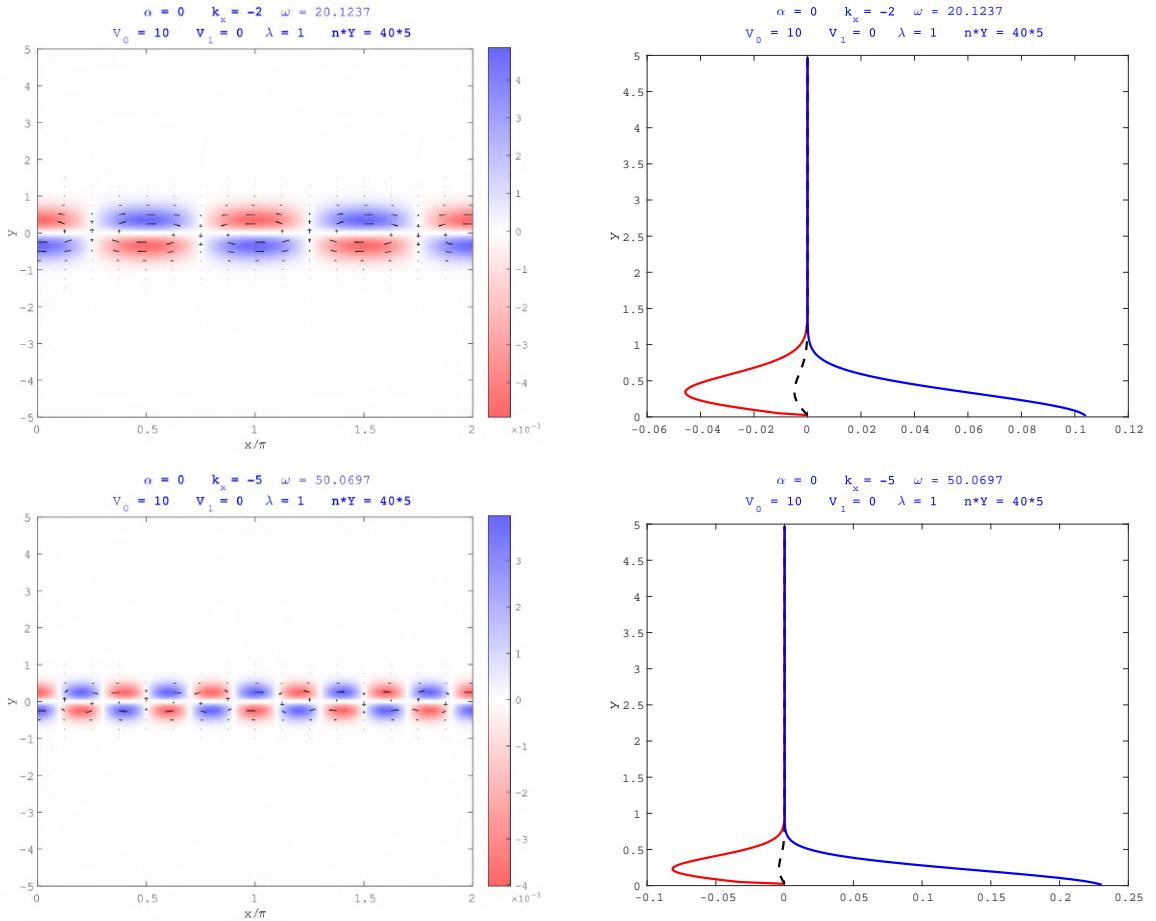


Fig.93 西進混合 Rossby 重力波の固有関数（赤道反対称モード）の東西波数依存性。 $\bar{V}_0 = 10$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（左図）と（右図）の見方は Fig.79 と同じ。（上段） $\bar{k}_x = -2$ の場合。（下段） $\bar{k}_x = -5$ の場合。

西進の混合 Rossby 重力波も、磁場が強くなると、振幅を持つ範囲が南北方向に狭くなる。また同様に、東西流は圧力と比べ大きくなる。一方、東西流と南北流の振幅を比べると、磁場を強くすると、東西流が強くなっていき、南北流の振幅に近づく（Fig.91）。

東西波数依存性は、慣性重力波の場合と異なり、東西波数が大きいほど南北流が大きくなる。これは、後述の Rossby 波の特徴だと考えられる（Fig.92、93）。

また、東西波数を大きくすると、周波数は Alfvén 波的になるが、流れの構造は西進混合 Rossby 重力波の特徴を残している。

- Rossby 波 (Fig.94~98)

Rossby 波も、磁場が強くなると^{*22}、振幅を持つ領域が南北方向に狭まり、東西流は圧力や南北流に比べ大きくなる。また、東西波数が大きいほど南北流が大きくなる。(Fig.97、98)。

また、東西波数を大きくすると、周波数は Alfvén 波的になるが、流れの構造は Rossby 波の特徴を残している。

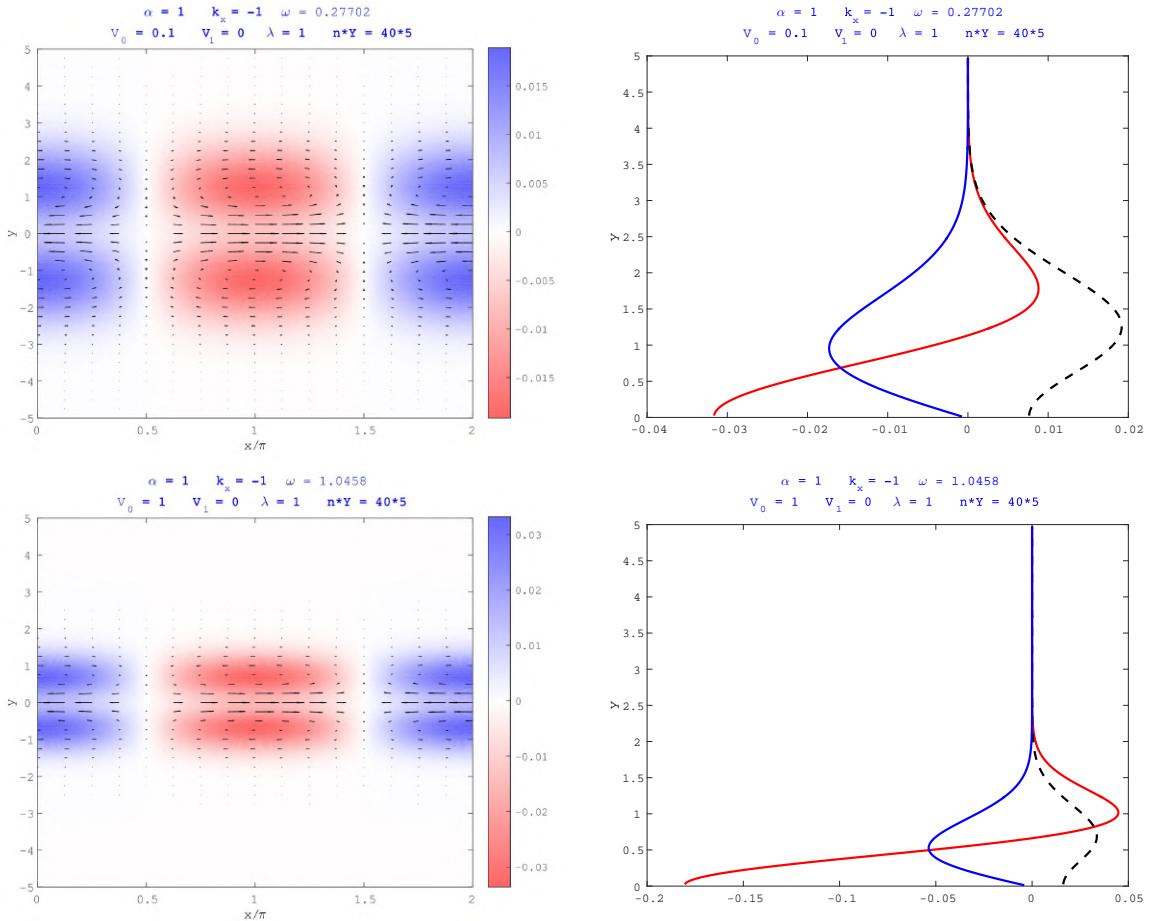


Fig.94 (1 次、西進) Rossby 波の固有関数（赤道対称モード）。 $\bar{k}_x = -1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（左図）と（右図）の見方は Fig.79 と同じ。（上段） $\bar{V}_0 = 0.1$ の場合。（下段） $\bar{V}_0 = 1$ の場合。

^{*22} 磁場があまり強すぎると、すべてのモードが Alfvén 波の周波数に押し込められてしまうので、数値的には計算できなくなってしまう。

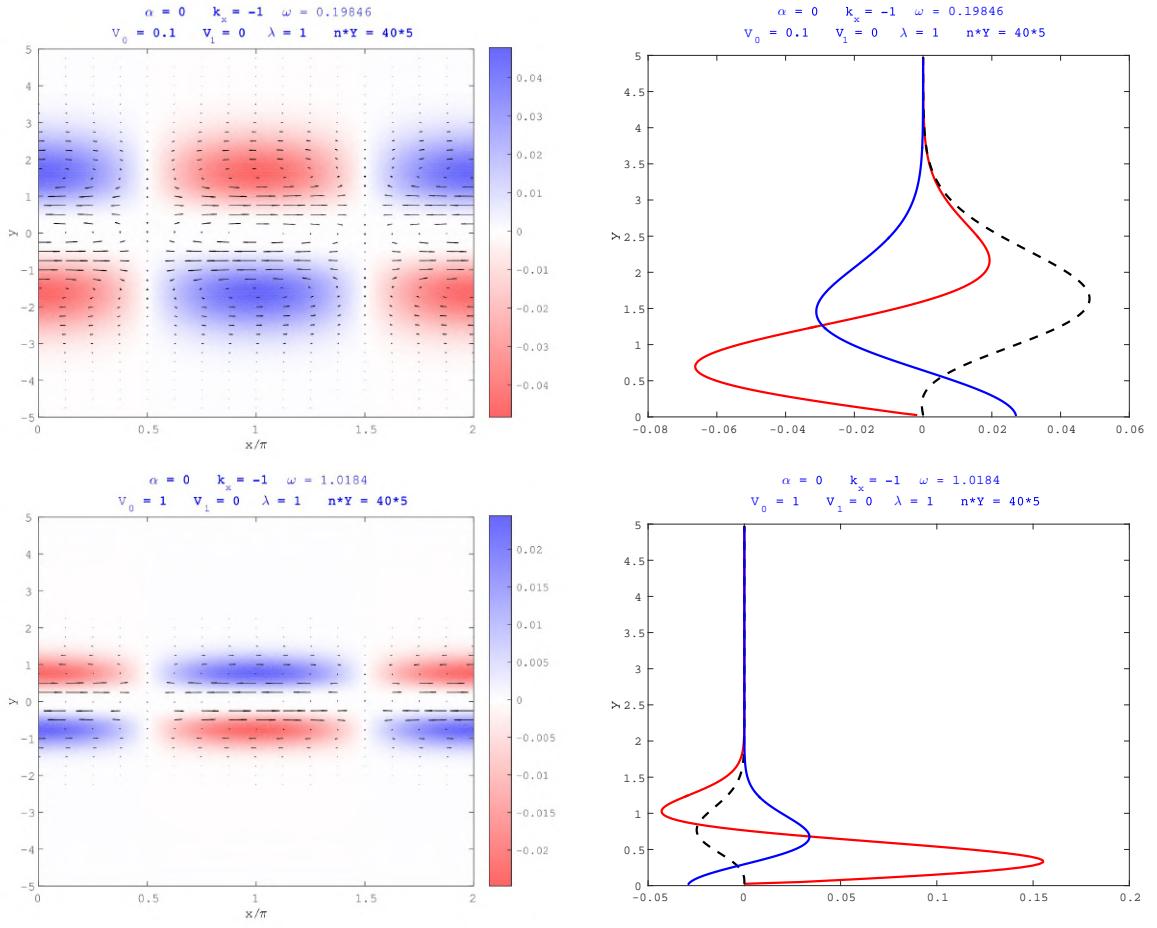


Fig.95 (2次、西進) Rossby 波の固有関数(赤道反対称モード)。 $\bar{k}_x = -1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。(左図)と(右図)の見方は Fig.79 と同じ。(上段) $\bar{V}_0 = 0.1$ の場合。(下段) $\bar{V}_0 = 1$ の場合。

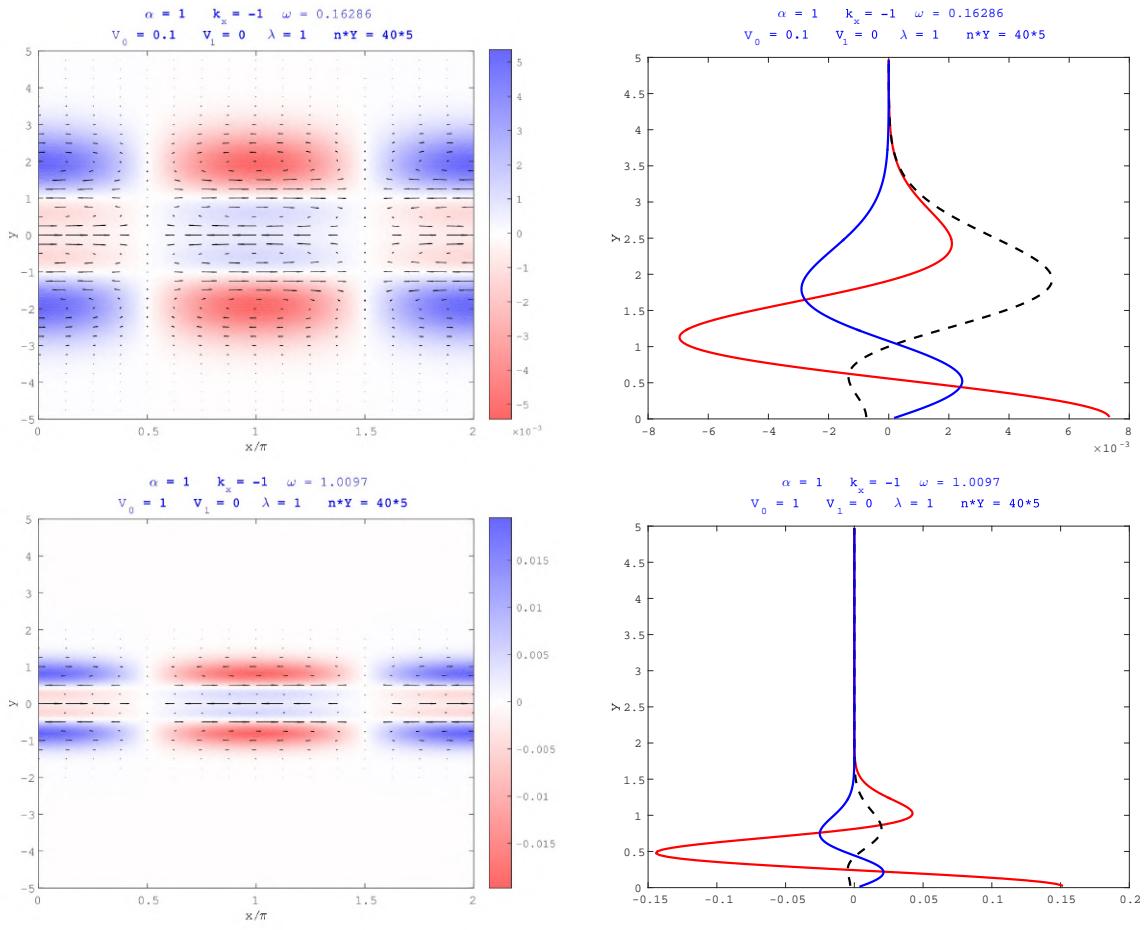


Fig.96 (3次、西進) Rossby 波の固有関数(赤道反対称モード)。 $\bar{k}_x = -1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。(左図)と(右図)の見方は Fig.79 と同じ。(上段) $\bar{V}_0 = 0.1$ の場合。(下段) $\bar{V}_0 = 1$ の場合。

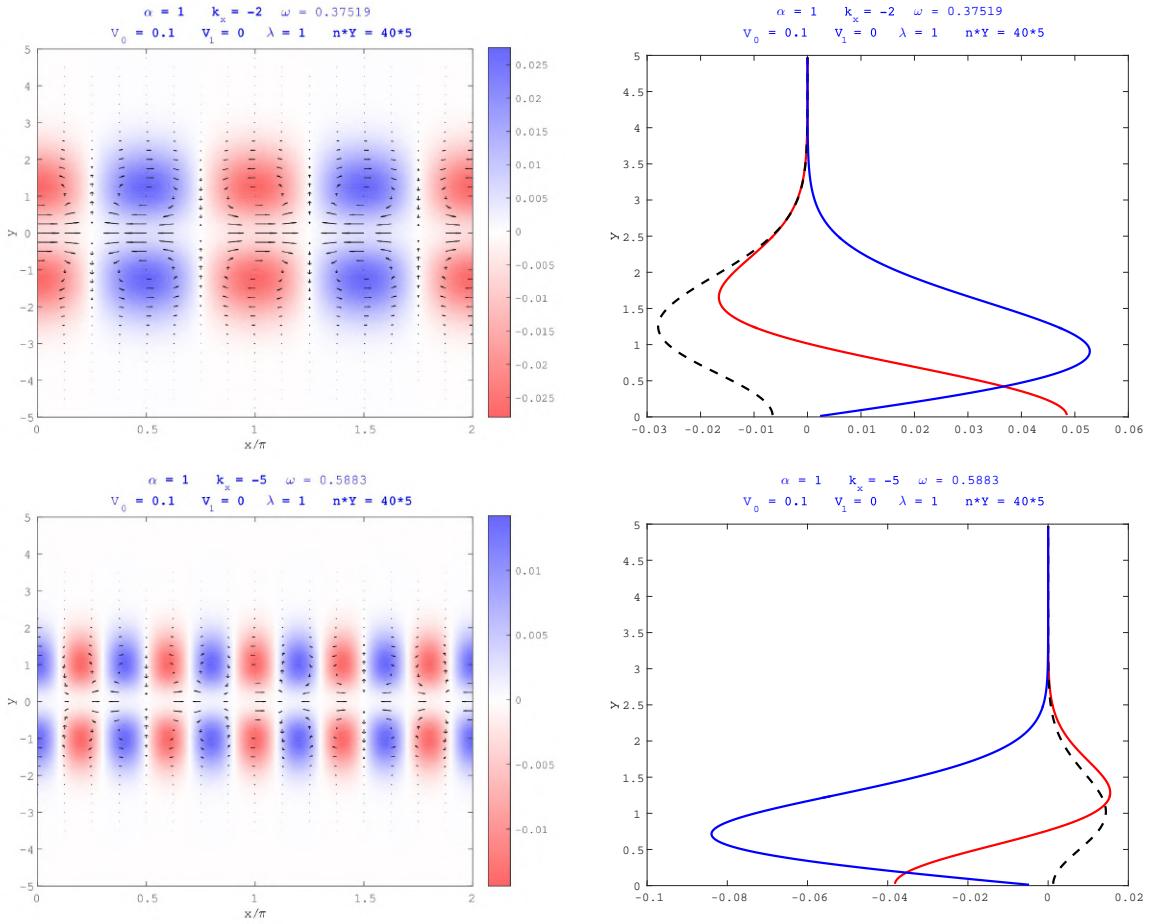


Fig.97 Rossby 波の固有関数の東西波数依存性（1次、赤道対称モード）。 $\bar{V}_0 = 0.1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（左図）と（右図）の見方は Fig.79 と同じ。（上段） $\bar{k}_x = -2$ の場合。（下段） $\bar{k}_x = -5$ の場合。

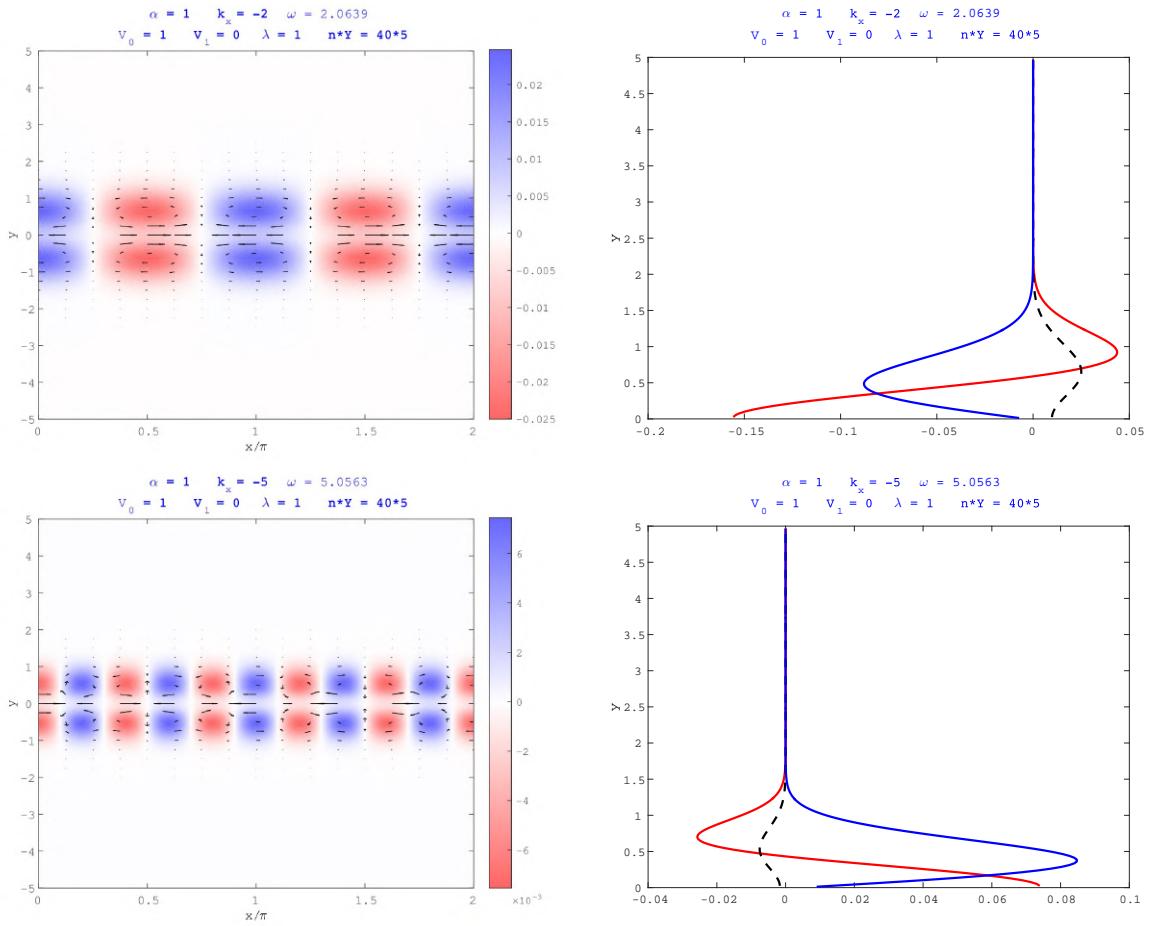


Fig.98 Rossby 波の固有関数の東西波数依存性（1次、赤道対称モード）。 $\bar{V}_0 = 1$ 、 $\bar{V}_1 = 0$ 、 $\bar{\lambda} = 1$ 、 $n = 40$ 、 $Y = 5$ の場合。（左図）と（右図）の見方は Fig.79 と同じ。（上段） $\bar{k}_x = -2$ の場合。（下段） $\bar{k}_x = -5$ の場合。

第Ⅰ部

一様な安定成層をした電磁流体の、回転系での 非散逸な波動

付録 B 磁場と回転が一様な無限空間

B.1 考える系

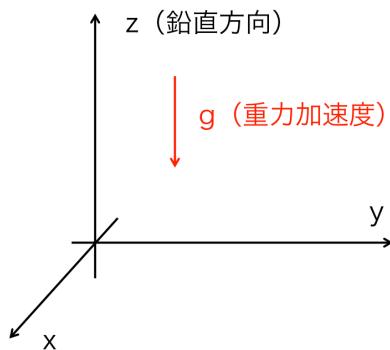


Fig.99 考える系

この章では、無限空間に隙間なく満たされた流体を考える。座標は Cartesian 座標 (x, y, z) を用いる。ここで、 z 軸は、重力加速度 \mathbf{g} の逆向きになるようにとる。すなわち、 $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{e}}_z$ とする。 $\hat{\mathbf{e}}_i$ は、 i 方向の単位ベクトルである。また、簡単のため、 g は全領域で一定とする。

すべての流体粒子の密度は同じではなく、重力の存在のために、密度成層をしている。すなわち、密度を $\bar{\rho}$ とすると、 $\bar{\rho}$ は z のみの関数である。ただし、流体粒子は非圧縮であるとする²³。ここでは、簡単のために、 $\bar{\rho}(z) \propto z$ とする。このように鉛直座標に比例した密度分布をしているとき、本書では「一様な成層」と呼ぶ。さらに、下からの加熱（上からの冷却）や物質の供給は考えず、安定な成層をしているとする。すなわち、 $\frac{d\bar{\rho}(z)}{dz} = \text{const.} < 0$ である。

さらに、簡単のため、一様な流れはないものとする。

流体は自転しており、自転角速度ベクトルを 2 倍したものを \mathbf{f} とする。この章では、 \mathbf{f} の向きは自由にとって良い。また、流体はほとんど剛体回転していると仮定し、 $|\mathbf{f}|$ は全領域で一定とする。

本書で考える流体は導電性をもつものであり、その運動は磁場の影響を受ける²⁴。背景磁場 \mathbf{B} は、流体の外部から与えられ、その向きは任意で、 \mathbf{B} は一様であるとする。

そして、簡単のため、非散逸を仮定する²⁵。すなわち、流体は非粘性で、完全導体（電気伝導度が無限大）であるとする。さらに、熱や物質（つまり、密度）の拡散も無視する。

*23 最初に、ある流体粒子に与えられた密度は、考へている運動の間、変化しない。

*24 海水は、塩分が含まれているので、ある程度電気を通すが、一般的な海洋物理学の範囲内では、回転と成層の影響の方が、磁場の影響に比べとても大きいので、磁場の影響を考えることはあまりない。

*25 非散逸の場合、基礎方程式は容易になるが、境界条件が必要な場合、注意を要する。詳しくは、付録 C を参照。

B.2 基礎方程式

無限小振幅の波動を考える。波動が起こっていない、静止した状況では、流速は 0 で、磁場、密度場、圧力はそれぞれ \mathbf{B} 、 $\bar{\rho}$ 、 p_0 である。流速、磁場、密度場、圧力の摂動をそれぞれ \mathbf{u} 、 \mathbf{b} 、 $\Delta\rho$ 、 p とすると、波が発生しているとき、流速、磁場、密度場、圧力はそれぞれ \mathbf{u} 、 $\mathbf{B} + \mathbf{b}$ 、 $\bar{\rho} + \Delta\rho$ 、 $p_0 + p$ となる。

摂動は無限小なので、線形化を行うと、非粘性流体の運動方程式は、

$$\bar{\rho}(z) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \bar{\rho}(z)(\mathbf{f} \times \mathbf{u}) = -\nabla \left((p_0 + p) + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}}{\mu} \right) + \bar{\rho}(z) \nabla \left(\frac{|(\mathbf{f}/2) \times \mathbf{r}|^2}{2} \right) + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{b}}{\mu} + (\bar{\rho}(z) + \Delta\rho) \mathbf{g} \quad (\text{B.2.1})$$

となる²⁶。ここで、 μ は流体の透磁率、 \mathbf{r} は位置ベクトルである。流体は等方的であるとし、 μ はスカラーとして扱う。各項の意味は左から順に、慣性項、Coriolis 力、圧力と磁気圧の勾配、遠心力、磁気張力、重力である。

$\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 、 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 、 $\Delta\rho = 0$ 、 $p = 0$ とすると、静止した状況での力のつり合いの式

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= -\nabla p_0 + \bar{\rho}(z) \nabla \left(\frac{|(\mathbf{f}/2) \times \mathbf{r}|^2}{2} \right) + \bar{\rho}(z) \mathbf{g} \\ &= -\nabla p_0 + \bar{\rho}(z) \nabla \left(\frac{|(\mathbf{f}/2) \times \mathbf{r}|^2}{2} \right) + g \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z} \int_z \bar{\rho}(z') dz' \end{aligned} \quad (\text{B.2.2})$$

が得られる。すなわち、圧力 p_0 は、遠心力とその流体粒子の上にのっている重さで決まる。この式を用いると、運動方程式は、

$$\bar{\rho}(z) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \bar{\rho}(z)(\mathbf{f} \times \mathbf{u}) = -\nabla \left(p + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}}{\mu} \right) + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{b}}{\mu} + \Delta\rho \mathbf{g} \quad (\text{B.2.3})$$

となる。

ここで、慣性項などに係る密度が z に依存するため、このままでは取り扱いが難しい。そこで、 $\bar{\rho}(z)$ を定数である ρ_0 に置き換える。この近似を Boussinesq 近似といい、流速 \mathbf{u} が音速に比べ十分小さく、鉛直変位の空間スケールが密度場 $\bar{\rho}(z)$ の鉛直変化の空間スケールより小さいとき、良い近似となる [59]。安定成層により、鉛直方向の流れはあまり大きくないと想像できるので、この近似を用いても問題ないだろう。この近似により、運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{f} \times \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}}{\rho_0 \mu} \right) + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{b}}{\rho_0 \mu} + \frac{\Delta\rho}{\rho_0} \mathbf{g} \quad (\text{B.2.4})$$

となる。さらに、

$$P = \frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}}{\rho_0 \mu} \quad (\text{B.2.5})$$

²⁶Coulomb 力と変位電流による Lorentz 力（両者合わせて、電場に関する Maxwell 応力）は無視している。これらの項は、MHD (MagnetoHydroDynamics) 近似を用いることができるとき、無視できる。

とおくと、運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{f} \times \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{b}}{\rho_0 \mu} + \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \mathbf{g} \quad (\text{B.2.6})$$

となる。

次に、完全導体のときの誘導方程式を線形化すると、

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (\text{B.2.7})$$

となる。この式の他に重要な電磁気学の式は、MHD (MagnetoHydroDynamics) 近似の下での Ampère の法則^{*27}

$$\nabla \times \mathbf{b} = \mu \mathbf{j} \quad (\text{B.2.8})$$

と、磁場に関する Gauss の法則

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (\text{B.2.9})$$

さらに、MHD 近似^{*28}の下での、線形化した完全導体における Ohm の法則^{*29}

$$\mathbf{e} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0 \quad (\text{B.2.10})$$

である^{*30}。ここで、 \mathbf{j} は電流の摂動、 \mathbf{e} は電場の摂動である。また、MHD 近似における電荷の保存則は

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{B.2.11})$$

である。

拡散がない場合の密度場の移流の式を線形化すると、

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \bar{\rho}(z) = -u_z \frac{d\bar{\rho}(z)}{dz} \quad (\text{B.2.12})$$

となる。ここで、 $u_z = \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z$ である。以下、あるベクトル \mathbf{a} に対し、 $a_i = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i$ とする。

最後に、非圧縮流体の連続の式より、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{B.2.13})$$

である。

^{*27} 電気を良く通すとき、電流に比べ変位電流は十分小さく、無視できる。

^{*28} 速度 \mathbf{u} は光速に比べ十分小さいとしている。

^{*29} 電気伝導度は無限大であるのに対し、電流は有限でないといけない。

^{*30} 完全導体のとき、電場 \mathbf{e} と電流 \mathbf{j} は Ohm の法則を通じて関係づいていない。これにより電磁気学的に非散逸となっている。

B.3 基礎方程式の変形

非圧縮流体の場合、音波は無限の速さで伝播するので、圧力は運動方程式のつじつま合わせの役割をする。磁気圧は計算することができるが、圧力によって隠されてしまうので、両者の和をとった P をつじつま合わせの量だとしよう。運動方程式 (B.2.6) の発散をとり、連続の式 (B.2.13) と磁場に関する Gauss の法則 (B.2.10) を用いると、

$$-\mathbf{f} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = -\nabla^2 P + \frac{\nabla \Delta \rho \cdot \mathbf{g}}{\rho_0} \quad (\text{B.3.1})$$

となるので、もし P や p が必要になった場合は、この Poisson 方程式を解けば良い^{*31}。この式を発散方程式という場合がある。

一方、 P はつじつま合わせの量なので、その大きさを知る必要がない場合は、運動方程式の回転をとって P を消去する、という手法がよく行われる。運動方程式 (B.2.6) の回転をとり、連続の式 (B.2.13) を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{u}) - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)(\nabla \times \mathbf{b})}{\rho_0 \mu} + \frac{\nabla_H \Delta \rho \times \mathbf{g}}{\rho_0} \quad (\text{B.3.2})$$

となる。ここで、 $\nabla \times \mathbf{u}$ を渦度といい、この式を、渦度方程式という。ここで、 $\nabla_H = \nabla - \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}$ である。各項の意味は左から順に、渦度の時間変化、ストレッチング^{*32}とティルティング^{*33}の項、磁気張力のトルクによる渦生成、浮力のトルクによる渦生成である。

さらに、渦度方程式 (B.3.2) の回転をとり、連続の式 (B.2.13) と磁場に関する Gauss の法則 (B.2.10) を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 \mathbf{u} + (\mathbf{f} \cdot \nabla)(\nabla \times \mathbf{u}) = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)\nabla^2 \mathbf{b}}{\rho_0 \mu} - \frac{(\mathbf{g} \cdot \nabla)\nabla_H \Delta \rho - \mathbf{g} \nabla_H^2 \Delta \rho}{\rho_0} \quad (\text{B.3.3})$$

となる。

次に、誘導方程式 (B.2.7) の回転をとると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{b}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)(\nabla \times \mathbf{u}) \quad (\text{B.3.4})$$

となる。

密度場の移流の式 (B.2.12) は、浮力振動数（または、Brunt-Väisälä 振動数）

$$N = \sqrt{-\frac{g}{\rho_0} \frac{d\bar{\rho}}{dz}} \quad (\text{B.3.5})$$

^{*31} この式より、回転軸方向の渦の中心や密度の摂動の鉛直勾配があるところで、 P が大きくなったり、小さくなったりしていることが分かる。

^{*32} 角運動量保存則より、回転軸方向に流体が引き延ばされると渦が強くなる効果。

^{*33} 回転軸方向にシアーがあると、渦が傾いて、渦の回転軸に垂直な成分が生成される効果。これは Coriolis 力のトルクによる渦生成とも言える。

を用いると、

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} = \frac{\rho_0 N^2}{g} u_z \quad (\text{B.3.6})$$

となる。安定成層のときは、 $N^2 > 0$ である。

B.4 独立な成分の選択

波が発生したとき、変動しうる量は \mathbf{u} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{e} 、 \mathbf{j} 、 $\Delta \rho$ 、 P である。このうち、 \mathbf{u} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{e} 、 \mathbf{j} はベクトルで、3つの成分を持つので、変動しうる量は全部で $14 (= 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1)$ 個ある。このうち、電場 \mathbf{e} は、Ohm の法則 (B.2.10) によって、速度 \mathbf{u} のみと関係しているので、独立に変化できない^{*34}。同様に、電流 \mathbf{j} は、Ampère の法則 (B.2.8) によって、磁場 \mathbf{b} のみと関係している^{*35}。さらに、圧力 P は、非圧縮流体のときはつじつま合わせの量であったので、独立に変化できない^{*36}。ゆえに、考えるべき量は、 \mathbf{u} 、 \mathbf{b} 、 $\Delta \rho$ の7つである。

ただし、 \mathbf{u} 、 \mathbf{b} は連続の式 (B.2.13) と磁場に関する Gauss の法則 (B.2.10) という制約条件があるので、3成分のうち1つは独立に変化できない。そこで、 \mathbf{u} を $(\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z$ と u_z で、 \mathbf{b} を $(\nabla \times \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z$ と b_z で表すことにしよう。今、特別な方向は、成層している z 方向であるので、このような分け方を行った。

渦度方程式 (B.3.2) と $\hat{\mathbf{e}}_z$ の内積をとると、

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z] - (\mathbf{f} \cdot \nabla) u_z = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)[(\nabla \times \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z]}{\rho_0 \mu} \quad (\text{B.4.1})$$

となり、(B.3.3) 式と $\hat{\mathbf{e}}_z$ の内積をとると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_z + (\mathbf{f} \cdot \nabla)[(\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z] = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \nabla^2 b_z}{\rho_0 \mu} - \frac{g \nabla_H^2 \Delta \rho}{\rho_0} \quad (\text{B.4.2})$$

となる。次に、誘導方程式 (B.2.7) と $\hat{\mathbf{e}}_z$ の内積をとると、

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_z \quad (\text{B.4.3})$$

となり、(B.3.4) 式と $\hat{\mathbf{e}}_z$ の内積をとると、

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\nabla \times \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z] = (\mathbf{B} \cdot \nabla)[(\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z] \quad (\text{B.4.4})$$

となる。渦度の鉛直成分を $\zeta_z = (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z$ とおいて、Ampère の法則 (B.2.8) より、 $\mu j_z =$

^{*34} これは、電場の時間変化である変位電流を無視したことと、電磁波が除去されていることと関係している。

^{*35} 電流の時間変化の式はないので、これは減衰モードが除去されていることと関係している。

^{*36} 非圧縮という近似は、流体の内部エネルギーが変化せず、外部とやりとりしないという近似と同じである。すなわち、圧力（圧力は状態方程式を通じて、流体粒子の密度と関係している）の時間変化を無視することで、音波が除去されている。

$(\nabla \times \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_z$ とすると、5つの独立な成分 $(\zeta_z, u_z, j_z, b_z, \Delta\rho)$ の時間変化を表した5つの式

$$\frac{\partial \zeta_z}{\partial t} - (\mathbf{f} \cdot \nabla) u_z = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)(\mu j_z)}{\rho_0 \mu} \quad (\text{B.4.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_z + (\mathbf{f} \cdot \nabla) \zeta_z = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \nabla^2 b_z}{\rho_0 \mu} - \frac{g \nabla_H^2 \Delta \rho}{\rho_0} \quad (\text{B.4.6})$$

$$\frac{\partial(\mu j_z)}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \zeta_z \quad (\text{B.4.7})$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_z \quad (\text{B.4.8})$$

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} = \frac{\rho_0 N^2}{g} u_z \quad (\text{B.4.9})$$

が得られる。ここで、散逸がある場合^{*37}は、独立な成分は5つであるが、非散逸の場合は、そのうちの b_z または $\Delta \rho$ は独立ではない。なぜならば、(B.4.8) 式に $\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \nabla^2}{\rho_0 \mu}$ を作用した

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \nabla^2 b_z}{\rho_0 \mu} \right) = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \nabla^2 u_z}{\rho_0 \mu} \quad (\text{B.4.10})$$

と、(B.4.9) 式に $\frac{g \nabla_H^2}{\rho_0}$ を作用した

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{g \nabla_H^2 \Delta \rho}{\rho_0} \right) = N^2 \nabla_H^2 u_z \quad (\text{B.4.11})$$

を用いて、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \nabla^2 b_z}{\rho_0 \mu} - \frac{g \nabla_H^2 \Delta \rho}{\rho_0} \right) = \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \nabla^2}{\rho_0 \mu} - N^2 \nabla_H^2 \right) u_z \quad (\text{B.4.12})$$

となるので、

$$\gamma = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \nabla^2 b_z}{\rho_0 \mu} - \frac{g \nabla_H^2 \Delta \rho}{\rho_0} \quad (\text{B.4.13})$$

とおくと、4つの独立な成分 $(\zeta_z, u_z, j_z, \gamma)$ の4つの時間変化の式

$$\frac{\partial \zeta_z}{\partial t} - (\mathbf{f} \cdot \nabla) u_z = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)(\mu j_z)}{\rho_0 \mu} \quad (\text{B.4.14})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_z + (\mathbf{f} \cdot \nabla) \zeta_z = \gamma \quad (\text{B.4.15})$$

$$\frac{\partial(\mu j_z)}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \zeta_z \quad (\text{B.4.16})$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \nabla^2}{\rho_0 \mu} - N^2 \nabla_H^2 \right) u_z \quad (\text{B.4.17})$$

が得られるからである。このことは物理的な直感からも想像できる。安定成層があるとき、上昇流があると、重い流体を上に運ぶことになるので、下向きの浮力（負の浮力）がはたらく。一方、磁

^{*37} 散逸があっても、磁場に関する拡散係数と密度に関する拡散係数が同じであれば、独立な成分は4つになる。

場があるとき、上昇流があると、磁気張力によって下向きの力がはたらくので、負の浮力と同様なふるまいになっている^{*38}。

B.5 フーリエ変換

前節の4つの式を時間と空間に対して、フーリエ変換する。もしくは、波型の解

$$\begin{pmatrix} \zeta_z(\mathbf{r}, t) \\ u_z(\mathbf{r}, t) \\ \mu j_z(\mathbf{r}, t) \\ \gamma(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \Re \left[\begin{pmatrix} \zeta_{z0} \\ u_{z0} \\ \mu j_{z0} \\ \gamma_0 \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{B.5.1})$$

を仮定して、そのふるまいを調べる。ここで、 \mathbf{k} は波数ベクトル、 ω は周波数である。

代入すると、4つの式は

$$-i\omega\zeta_{z0} - i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k})u_{z0} = \frac{i(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})(\mu j_{z0})}{\rho_0\mu} \quad (\text{B.5.2})$$

$$i\omega k^2 u_{z0} + i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k})\zeta_{z0} = \gamma_0 \quad (\text{B.5.3})$$

$$-i\omega\mu j_{z0} = i(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})\zeta_{z0} \quad (\text{B.5.4})$$

$$-i\omega\gamma_0 = \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 k^2}{\rho_0\mu} + N^2 \mathbf{k}_H^2 \right) u_{z0} \quad (\text{B.5.5})$$

となる。ここで、 $k = |\mathbf{k}|$ 、 $\mathbf{k}_H^2 = k^2 - k_z^2$ である。これらの式を行列の形にすると、

$$\begin{pmatrix} \omega & \mathbf{f} \cdot \mathbf{k} & \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}}{\rho_0\mu} & 0 \\ \mathbf{f} \cdot \mathbf{k} & \omega k^2 & 0 & i \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} & 0 & \omega & 0 \\ 0 & \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 k^2}{\rho_0\mu} + N^2 \mathbf{k}_H^2 & 0 & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{z0} \\ u_{z0} \\ \mu j_{z0} \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{B.5.6})$$

となる。順番を入れ替えて

$$\begin{pmatrix} \omega & \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}}{\rho_0\mu} & \mathbf{f} \cdot \mathbf{k} & 0 \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} & \omega & 0 & 0 \\ \mathbf{f} \cdot \mathbf{k} & 0 & \omega k^2 & i \\ 0 & 0 & \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 k^2}{\rho_0\mu} + N^2 \mathbf{k}_H^2 & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{z0} \\ \mu j_{z0} \\ u_{z0} \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{B.5.7})$$

とすると、式の構造がよく分かる。

もし、 $\mathbf{f} \cdot \mathbf{k} = 0$ のときは、

$$\begin{pmatrix} \omega & \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}}{\rho_0\mu} & 0 & 0 \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega k^2 & i \\ 0 & 0 & \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 k^2}{\rho_0\mu} + N^2 \mathbf{k}_H^2 & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{z0} \\ \mu j_{z0} \\ u_{z0} \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{B.5.8})$$

^{*38} この現象は、一般的に呼ばれている「磁気浮力」ではない。Parker 不安定は、ここでいう下向きの磁気張力よりも上向きの「磁気浮力」が大きいときに起こる不安定性である。

となって、左上の 2×2 のブロックと右下の 2×2 のブロック以外は 0 になる。すなわち、このとき、 $(\zeta_{z0}, \mu j_{z0})$ のみのモードと (u_{z0}, γ_0) のみのモードに分離する。元の式に戻ると、 $\mathbf{f} \cdot \mathbf{k} = 0$ のときは、

$$-i\omega\zeta_{z0} = \frac{i(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})(\mu j_{z0})}{\rho_0\mu} \quad (\text{B.5.9})$$

$$-i\omega\mu j_{z0} = i(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})\zeta_{z0} \quad (\text{B.5.10})$$

の 2 つの式で $(\zeta_{z0}, \mu j_{z0})$ に関して閉じた式になっており、もう一組、

$$i\omega k^2 u_{z0} = \gamma_0 \quad (\text{B.5.11})$$

$$-i\omega\gamma_0 = \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 k^2}{\rho_0\mu} + N^2 \mathbf{k}_H^2 \right) u_{z0} \quad (\text{B.5.12})$$

の 2 つの式で (u_{z0}, γ_0) に関して閉じた式になっている。

B.6 速度と磁場の水平成分を計算する場合

速度と磁場の水平成分が必要な場合は、水平流速と水平磁場それぞれに関する速度ポテンシャル ϕ と流線関数 ψ を定義すると便利である^{*39}。

$$u_x = \frac{\partial \phi_u}{\partial x} + \frac{\partial \psi_u}{\partial y} \quad (\text{B.6.1})$$

$$u_y = \frac{\partial \phi_u}{\partial y} - \frac{\partial \psi_u}{\partial x} \quad (\text{B.6.2})$$

$$b_x = \frac{\partial \phi_b}{\partial x} + \frac{\partial \psi_b}{\partial y} \quad (\text{B.6.3})$$

$$b_y = \frac{\partial \phi_b}{\partial y} - \frac{\partial \psi_b}{\partial x} \quad (\text{B.6.4})$$

このようにしておくと、連続の式 (B.2.13) より、

$$\nabla_H^2 \phi_u = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{B.6.5})$$

$$\nabla_H^2 \phi_b = \frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} = -\frac{\partial b_z}{\partial z} \quad (\text{B.6.6})$$

となり、また、渦度の定義と Ampère の法則 (B.2.8) より、

$$\nabla_H^2 \psi_u = -\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = -\zeta_z \quad (\text{B.6.7})$$

$$\nabla_H^2 \psi_b = -\left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) = -\mu j_z \quad (\text{B.6.8})$$

^{*39} この表現は、Cartesian 座標におけるトロイダル・ポロイダル分解になっており、速度ポテンシャルがポロイダル成分、流線関数がトロイダル成分に対応する。

となる。速度ポテンシャルと流線関数を B.5 節と同じように

$$\begin{pmatrix} \phi_u(\mathbf{r}, t) \\ \phi_b(\mathbf{r}, t) \\ \psi_u(\mathbf{r}, t) \\ \psi_b(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \Re \left[\begin{pmatrix} \phi_{u0} \\ \phi_{b0} \\ \psi_{u0} \\ \psi_{b0} \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{B.6.9})$$

とフーリエ変換すれば、

$$\phi_{u0} = \frac{ik_z}{|\mathbf{k}_H|^2} u_{z0} \quad (\text{B.6.10})$$

$$\phi_{b0} = \frac{ik_z}{|\mathbf{k}_H|^2} b_{z0} \quad (\text{B.6.11})$$

$$\psi_{u0} = \frac{1}{|\mathbf{k}_H|^2} \zeta_{z0} \quad (\text{B.6.12})$$

$$\psi_{b0} = \frac{1}{|\mathbf{k}_H|^2} \mu j_{z0} \quad (\text{B.6.13})$$

となるので、速度と磁場の水平成分は、

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \Re \left[\left\{ -\frac{k_z u_{z0}}{|\mathbf{k}_H|^2} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} + \frac{\zeta_{z0}}{|\mathbf{k}_H|^2} \begin{pmatrix} ik_y \\ -ik_x \end{pmatrix} \right\} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{B.6.14})$$

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \Re \left[\left\{ -\frac{k_z b_{z0}}{|\mathbf{k}_H|^2} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} + \frac{\mu j_{z0}}{|\mathbf{k}_H|^2} \begin{pmatrix} ik_y \\ -ik_x \end{pmatrix} \right\} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{B.6.15})$$

というように求められる。これらの式から、速度の水平成分は u_z と ζ_z 、磁場の水平成分は b_z と j_z どちらにも依存していることが分かる。

ただし、水平のどちらか一方向が一様な場合は、両方に依存しない。例えば、 y 方向一様で、 $k_y = 0$ とすると、

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \Re \left[\left\{ -\frac{k_z u_{z0}}{k_x^2} \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\zeta_{z0}}{k_x^2} \begin{pmatrix} 0 \\ -ik_x \end{pmatrix} \right\} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{B.6.16})$$

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \Re \left[\left\{ -\frac{k_z b_{z0}}{k_x^2} \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\mu j_{z0}}{k_x^2} \begin{pmatrix} 0 \\ -ik_x \end{pmatrix} \right\} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{B.6.17})$$

となるので、 u_x と b_x は u_z と b_z だけから決まり、 u_y と b_y は ζ_z と j_z だけから決まる。

また、鉛直方向に一様な場合は $k_z = 0$ で、

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \Re \left[\frac{\zeta_{z0}}{|\mathbf{k}_H|^2} \begin{pmatrix} ik_y \\ -ik_x \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{B.6.18})$$

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \Re \left[\frac{\mu j_{z0}}{|\mathbf{k}_H|^2} \begin{pmatrix} ik_y \\ -ik_x \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{B.6.19})$$

となり、速度と磁場の水平成分は ζ_z と j_z だけで決まるようになる。これは流れと磁場が 2 次元的になり、流線関数 ψ だけで全て表せるようになったからである。

B.7 分散関係

B.7.1 $\mathbf{f} \cdot \mathbf{k} = 0$ の場合

$\mathbf{f} \cdot \mathbf{k} = 0$ のときの固有方程式は、

$$\begin{pmatrix} \omega & \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}}{\rho_0 \mu} & 0 & 0 \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega k^2 & i \\ 0 & 0 & \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 k^2}{\rho_0 \mu} + N^2 \mathbf{k}_H^2 & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{z0} \\ \mu j_{z0} \\ u_{z0} \\ \gamma_0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{B.7.1})$$

である。ここで、 $\zeta_{z0} = \mu j_{z0} = u_{z0} = \gamma_0 = 0$ というような自明な解以外の解が存在するためには、係数行列の行列式が

$$\det \begin{pmatrix} \omega & \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}}{\rho_0 \mu} & 0 & 0 \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega k^2 & i \\ 0 & 0 & \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 k^2}{\rho_0 \mu} + N^2 \mathbf{k}_H^2 & i\omega \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B.7.2})$$

でなければならない。ブロック行列の行列式の公式より、この式は

$$\det \begin{pmatrix} \omega & \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}}{\rho_0 \mu} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} & \omega \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} \omega k^2 & i \\ \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 k^2}{\rho_0 \mu} + N^2 \mathbf{k}_H^2 & i\omega \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B.7.3})$$

と簡単になり、結局、

$$\left(\omega^2 - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2}{\rho_0 \mu} \right) \left(\omega^2 - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2}{\rho_0 \mu} - \frac{N^2 \mathbf{k}_H^2}{k^2} \right) = 0 \quad (\text{B.7.4})$$

となる。すなわち、周波数 ω と波数 \mathbf{k} がある関係式を満たすような波でないと、 $\zeta_{z0} = \mu j_{z0} = u_{z0} = \gamma_0 = 0$ となってしまい、波として存在できない。この ω と \mathbf{k} の関係式を分散関係式といふ。

ここで、B.5 節によると、 $u_{z0} = \gamma_0 = 0$ 、または $\zeta_{z0} = \mu j_{z0} = 0$ でも、閉じた式になるので、波が存在できるのであった。

$u_{z0} = \gamma_0 = 0$ とすると、固有方程式は

$$\begin{pmatrix} \omega & \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}}{\rho_0 \mu} & 0 & 0 \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} & \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega k^2 & i \\ 0 & 0 & \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 k^2}{\rho_0 \mu} + N^2 \mathbf{k}_H^2 & i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{z0} \\ \mu j_{z0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{B.7.5})$$

となるが、右下のブロックにどんな値が入っても、下側の 2 式は成立するので、結局

$$\begin{pmatrix} \omega & \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}}{\rho_0 \mu} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{k} & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{z0} \\ \mu j_{z0} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{B.7.6})$$

という固有値問題を考えれば十分である。よって、 $\zeta_{z0} = \mu j_{z0} = 0$ 以外の解が存在するための分散関係は

$$\omega^2 - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2}{\rho_0 \mu} = 0 \quad (\text{B.7.7})$$

となる。

一方、 $\zeta_{z0} = \mu j_{z0} = 0$ のときも同様にして、 $u_{z0} = \gamma_0 = 0$ 以外の解が存在するための分散関係は

$$\omega^2 - \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2}{\rho_0 \mu} - \frac{N^2 \mathbf{k}_H^2}{k^2} = 0 \quad (\text{B.7.8})$$

であることが分かる。このようなモードの分離は、Hide(1969) [30] で求められた分散関係の $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ の場合と一致している。

(B.7.4) 式は、(B.7.7) 式と (B.7.8) 式を含んでいる。(B.7.4) 式を求めるときに用いたものは、 $\zeta_{z0}, \mu j_{z0}, u_{z0}, \gamma_0$ の全てが 0 ではないという条件であったので、この中のいくつかが 0 でなければ、それ以外は 0 でも良い。そのため、完全な分散関係 (B.7.4) 式には、 $(\zeta_{z0}, \mu j_{z0})$ のみのモードの分散関係と (u_{z0}, γ_0) のみのモードの分散関係が含まれている。

ここで、 $(\zeta_{z0}, \mu j_{z0})$ のみのモードの周波数は

$$\omega_{\zeta_z, j_z} = \pm \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}}{\sqrt{\rho_0 \mu}} = \pm (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}) = \omega_M \quad (\text{B.7.9})$$

である。この波は Alfvén 波と呼ばれ、磁気張力を復元力とした波である。ここで、 $\mathbf{V}_A = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\rho_0 \mu}}$ は Alfvén 波速度ベクトルである。 $(\zeta_{z0}, \mu j_{z0})$ のみのモードは、水平流速しかもたないので、密度成層の影響を受けない。

一方、 (u_{z0}, γ_0) のみのモードの分散関係は

$$\omega_{u_z, \gamma} = \pm \sqrt{\frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2}{\rho_0 \mu} + \frac{N^2 \mathbf{k}_H^2}{k^2}} = \pm \sqrt{\omega_M^2 + \omega_A^2} \quad (\text{B.7.10})$$

となり、これらのモードは、密度成層の影響を受ける。ここで、

$$\omega_A = \pm \frac{N |\mathbf{k}_H|}{k} \quad (\text{B.7.11})$$

は、内部重力波の周波数である。内部重力波は、安定成層による浮力を復元力とする。さらに、磁場の強さと密度成層の強さの比で表される長さスケール

$$\lambda_{MA} = \frac{|\mathbf{B}|}{N \sqrt{\rho_0 \mu}} \quad (\text{B.7.12})$$

を用いれば、

$$\omega_{u_z, \gamma} = \pm \omega_M \sqrt{1 + \frac{\mathbf{k}_H^2}{\lambda_{MA}^2 k^2 (\frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|} \cdot \mathbf{k})^2}} \quad (\text{B.7.13})$$

と書くこともできる。この周波数は、安定成層があり、 $\mathbf{k}_H \neq \mathbf{0}$ であれば、常に Alfvén 波の周波数より大きい。これは、磁気張力と浮力があるために、磁気張力だけの場合よりも復元力が強くなっているからである。

次に、各モードの流れの様子を調べよう。連続の式 (B.2.13) に波型の解を代入すると、

$$k_x u_x + k_y u_y + k_z u_z = 0 \quad (\text{B.7.14})$$

となり、流れと波数の間には、制約条件があることがわかる^{*40}。

ここで、 $(\zeta_{z0}, \mu j_{z0})$ のみのモードは、 $u_z = 0$ より、

$$k_x u_x + k_y u_y = 0 \quad (\text{B.7.15})$$

を満たすような、流速と波数の組み合わせになっている。

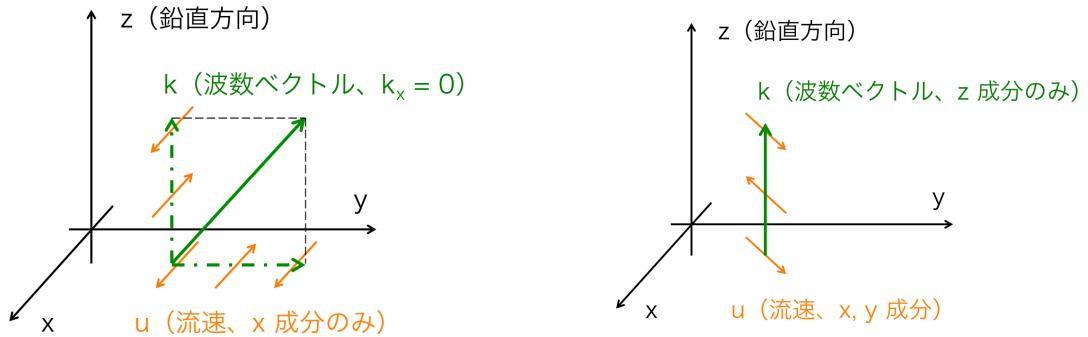


Fig.100 $\mathbf{f} \cdot \mathbf{k} = 0$ のときの $(\zeta_{z0}, \mu j_{z0})$ のみのモードの例。 $k_x = 0$ の場合。 (B.7.15) 式より、 $k_y u_y = 0$ でなければならない。ただし、 $(\zeta_{z0}, \mu j_{z0})$ のみのモードが存在するためには、 (B.7.9) 式より $B_y = B_z = 0$ ではないとする。(左図) $k_y \neq 0, u_y = 0$ の場合。(右図) $k_y = 0, u_y \neq 0$ の場合。

一方、 (u_{z0}, γ_0) のみのモードは、仮に $k_x = 0$ とすると、

$$k_y u_y + k_z u_z = 0 \quad (\text{B.7.16})$$

さらに、 $k_x = 0$ のとき $\zeta_{z0} = 0$ より $k_x u_y = k_y u_x = 0$ と、ならなければならない。ただし、 $k_y = 0$ のとき $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ となってしまうので、 $u_x = 0$ である。

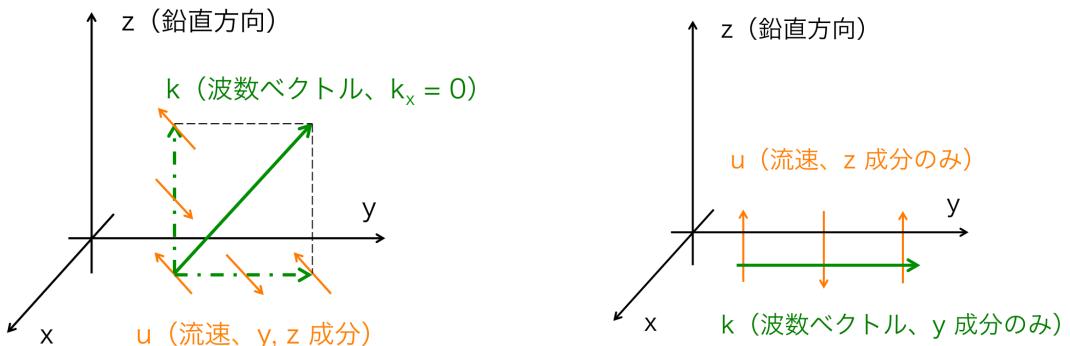


Fig.101 $\mathbf{f} \cdot \mathbf{k} = 0$ のときの (u_{z0}, γ_0) のみのモードの例。 $k_x = 0$ の場合。このとき $u_x = 0$ である。ただし、 (u_{z0}, γ_0) のみのモードが存在するためには、 (B.7.10) 式より $B_y = B_z = 0$ ではないとする。(左図) $u_y \neq 0, k_y \neq 0, k_z = -k_y \frac{u_y}{u_z}$ の場合。(右図) $u_y = 0, k_y = 0, k_z = 0$ の場合。

^{*40} $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$ なので、非圧縮流体では横波しか存在しない。

より一般には $(\zeta_{z0}, \mu j_{z0})$ のみのモードと (u_{z0}, γ_0) のみのモードが両方存在していても良い。各モードで連続の式 (B.7.14) を満たしていれば、モードが共存していても、連続の式は成り立つ。そして、上の議論により、 $k_x = 0$ のときは、 u_x は $(\zeta_{z0}, \mu j_{z0})$ のみのモードとして伝播し、 u_y と u_z は (u_{z0}, γ_0) のみのモードとして伝播する。ただし、波数ベクトルは同じでも、2つのモードの周波数は異なるので、位相速度など伝播の性質は異なる。

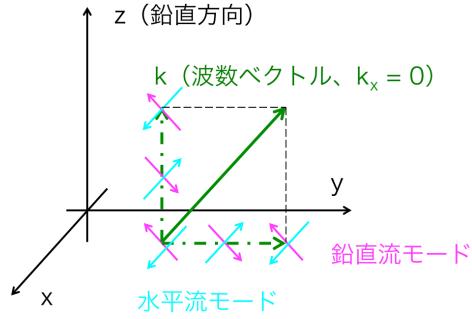


Fig.102 $\mathbf{f} \cdot \mathbf{k} = 0, k_x = 0$ で、 $(\zeta_{z0}, \mu j_{z0})$ のみのモード（水平流モード）と (u_{z0}, γ_0) のみのモード（鉛直流モード）がどちらも存在する場合。ただし、どちらのモードも同じ波数ベクトルを持つような場合のみを示している。 u_x は $(\zeta_{z0}, \mu j_{z0})$ のみのモードとして伝播し、 u_y と u_z は (u_{z0}, γ_0) のみのモードとして伝播する。

B.7.2 $\mathbf{f} \cdot \mathbf{k} \neq 0$ の場合

$\mathbf{f} \cdot \mathbf{k} \neq 0$ の場合は、 $\zeta_{z0}, \mu j_{z0}, u_{z0}, \gamma_0$ の全てが関係し合うので、 $\mathbf{f} \cdot \mathbf{k} = 0$ の場合のようにモードの分離は起こらない。分散関係を求めるために 4×4 の行列式を計算するのは、やや煩雑なので、式の数を減らす。元の 4 つの式は、(B.5.2)~(B.5.5) 式より、

$$-i\omega\zeta_{z0} - i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k})u_{z0} = \frac{i(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})(\mu j_{z0})}{\rho_0\mu} \quad (\text{B.7.17})$$

$$i\omega k^2 u_{z0} + i(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k})\zeta_{z0} = \gamma_0 \quad (\text{B.7.18})$$

$$-i\omega\mu j_{z0} = i(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})\zeta_{z0} \quad (\text{B.7.19})$$

$$-i\omega\gamma_0 = \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 k^2}{\rho_0\mu} + N^2 \mathbf{k}_H^2 \right) u_{z0} \quad (\text{B.7.20})$$

である。(B.7.17) 式に、(B.7.19) 式を代入して、 μj_{z0} を消去すると、

$$\omega^2 \zeta_{z0} + \omega(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k})u_{z0} = \frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 \zeta_{z0}}{\rho_0\mu} \quad (\text{B.7.21})$$

ゆえに、

$$[\omega^2 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2] \zeta_{z0} + \omega(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k})u_{z0} = 0 \quad (\text{B.7.22})$$

となる。次に、(B.7.18) 式に、(B.7.20) 式を代入して、 γ_0 を消去すると、

$$\omega^2 k^2 u_{z0} + \omega(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k})\zeta_{z0} = \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 k^2}{\rho_0\mu} + N^2 \mathbf{k}_H^2 \right) u_{z0} \quad (\text{B.7.23})$$

ゆえに、

$$\left[\omega^2 k^2 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 k^2 - N^2 \mathbf{k}_H^2 \right] u_{z0} + \omega(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}) \zeta_{z0} = 0 \quad (\text{B.7.24})$$

となる。これを行列の形にすると、

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 & \omega(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}) \\ \omega(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}) & \omega^2 k^2 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 k^2 + N^2 \mathbf{k}_H^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{z0} \\ u_{z0} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{B.7.25})$$

となる。ゆえに、分散関係は

$$[\omega^2 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2][\omega^2 k^2 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 k^2 - N^2 \mathbf{k}_H^2] = \omega^2 (\mathbf{f} \cdot \mathbf{k})^2 \quad (\text{B.7.26})$$

となる。ここで、Coriolis 力を復元力とする慣性波の周波数を

$$\omega_C = \pm \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}}{k} \quad (\text{B.7.27})$$

とすると、この分散関係は

$$[\omega^2 - \omega_M^2][\omega^2 - \omega_M^2 - \omega_A^2] = \omega^2 \omega_C^2 \quad (\text{B.7.28})$$

と書くことができる。さらに変形すると、

$$\omega^4 - (2\omega_M^2 + \omega_A^2 + \omega_C^2)\omega^2 + \omega_M^2(\omega_M^2 + \omega_A^2) = 0 \quad (\text{B.7.29})$$

となり、2次方程式の解の公式から

$$\omega^2 = \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2}\right)^2 + \omega_M^2 \omega_C^2} \quad (\text{B.7.30})$$

となる。

B.7.3 基本的な波の位相速度・群速度

今までに現れた基本的な波は、磁気張力を復元力とする Alfvén 波、浮力を復元力とする内部重力波、Coriolis 力を復元力とする慣性波である。この節では、これらの波の位相速度と群速度を示す。 \mathbf{c}_p は位相速度、 \mathbf{c}_g は群速度、 $\hat{\mathbf{e}}_H = \hat{\mathbf{e}}_k = \frac{\mathbf{k}}{k}$ とする。

群速度の導出に便利な公式は、以下の通りである。ただし、 \mathbf{a} はあるベクトル。

$$\frac{\partial(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} = \left(\frac{\partial(a_x k_x + a_y k_y + a_z k_z)}{\partial k_x}, \dots, \dots \right) = (a_x, a_y, a_z) = \mathbf{a} \quad (\text{B.7.31})$$

$$\frac{\partial k}{\partial \mathbf{k}} = \left(\frac{\partial \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}{\partial k_x}, \dots, \dots \right) = \left(\frac{2k_x}{2\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}}, \dots, \dots \right) = \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (\text{B.7.32})$$

$$\frac{\partial |\mathbf{k}_H|}{\partial \mathbf{k}} = \left(\frac{\partial \sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{\partial k_x}, \dots, \frac{\partial \sqrt{k_x^2 + k_y^2}}{\partial k_z} \right) = \left(\frac{2k_x}{2\sqrt{k_x^2 + k_y^2}}, \dots, 0 \right) = \frac{\mathbf{k}_H}{|\mathbf{k}_H|} \quad (\text{B.7.33})$$

- Alfvén 波

$$\omega_M = \pm \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}}{\sqrt{\rho_0 \mu}} = \pm (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}) \quad (\text{B.7.34})$$

$$\mathbf{c}_{pM} = \frac{\omega_M}{k} \hat{\mathbf{e}}_k = \pm \frac{\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}}{k} \hat{\mathbf{e}}_k \quad (\text{B.7.35})$$

$$\mathbf{c}_{gM} = \frac{\partial \omega_M}{\partial \mathbf{k}} = \pm \mathbf{V}_A \quad (\text{B.7.36})$$

群速度は波数ベクトルによらず、常に背景磁場 \mathbf{B} の方向。

- 内部重力波

$$\omega_A = \pm \frac{N |\mathbf{k}_H|}{k} \quad (\text{B.7.37})$$

$$\mathbf{c}_{pA} = \frac{\omega_A}{k} \hat{\mathbf{e}}_k = \pm \frac{N |\mathbf{k}_H|}{k^2} \hat{\mathbf{e}}_k \quad (\text{B.7.38})$$

$$\mathbf{c}_{gA} = \frac{\partial \omega_A}{\partial \mathbf{k}} = \pm N \frac{k_z^2 \frac{\mathbf{k}_H}{|\mathbf{k}_H|} - k_z |\mathbf{k}_H| \hat{\mathbf{e}}_z}{k^3} \quad (\text{B.7.39})$$

群速度は、波数ベクトルと常に垂直 ($\mathbf{c}_{gA} \cdot \mathbf{k} = 0$)。また、 $(k\mathbf{c}_{pA})^2 + (k\mathbf{c}_{gA})^2 = N^2$ がいつも成り立つ。

- 慣性波

$$\omega_C = \pm \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}}{k} \quad (\text{B.7.40})$$

$$\mathbf{c}_{pC} = \frac{\omega_C}{k} \hat{\mathbf{e}}_k = \pm \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}}{k^2} \hat{\mathbf{e}}_k \quad (\text{B.7.41})$$

$$\mathbf{c}_{gC} = \frac{\partial \omega_C}{\partial \mathbf{k}} = \pm \frac{\mathbf{k} \times (\mathbf{f} \times \mathbf{k})}{k^3} \quad (\text{B.7.42})$$

群速度は、波数ベクトルと常に垂直 ($\mathbf{c}_{gC} \cdot \mathbf{k} = 0$)。また、 $(k\mathbf{c}_{pC})^2 + (k\mathbf{c}_{gC})^2 = \mathbf{f}^2$ がいつも成り立つ。

1次元の波を考える場合、位相速度は「波の山が進む速度」で、群速度は「波長が異なる波の重ね合わせによってできる波束が進む速度」と区別される。波束がある位置は、振幅が大きくなっているところもあるので、群速度はエネルギーの伝播速度でもある。ただし、これが2(3)次元になって、位相速度や群速度が、波数ベクトルの向きに依存する場合、想像するのが難しくなる。2(3)次元的な波の位相速度と群速度を理解するのに良い問題としてインパルス応答問題がある。インパルス応答問題とは、ある空間の1点で一瞬だけ波を発生させる時、すなわち、空間にも時間にもデルタ関数的な励起源を与えた場合、どのように波が伝播するかを見るものである。デルタ関数をフーリエ変換すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ik_x x} dx = e^0 = 1 \quad (\text{B.7.43})$$

となるように、デルタ関数的な励起源は、すべての波数と周波数をもつ波を均等に足しあわせたものであることがわかる。すなわち、ある点で、すべての波数と周波数をもつ波を発生させる。ただ

し、すべての波のうち、速度などがゼロとならない波数と周波数の組み合せ、すなわち、分散関係を満たすものだけが波として伝播できる。さて、ある点で、デルタ関数的な励起源があったとしよう。そこで与えられたエネルギーは、群速度で周囲に伝播する。そのエネルギー（波束）が、どのような速度で、どのような方向に伝播するかは、波束がどのような波数と周波数をもつ波（ただし、波数と周波数が近い）で構成されているかに依存する。そして、波束は励起源から遠ざかるように伝播するが、その波束がもつ模様の変化は、その波束を構成する波の位相速度で変化する。

内部重力波のインパルス応答問題については、磯田（2015）[57] が詳しい。

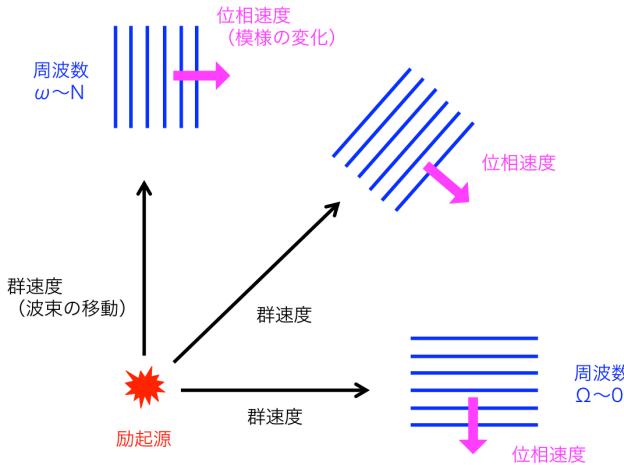


Fig.103 内部重力波のインパルス応答問題

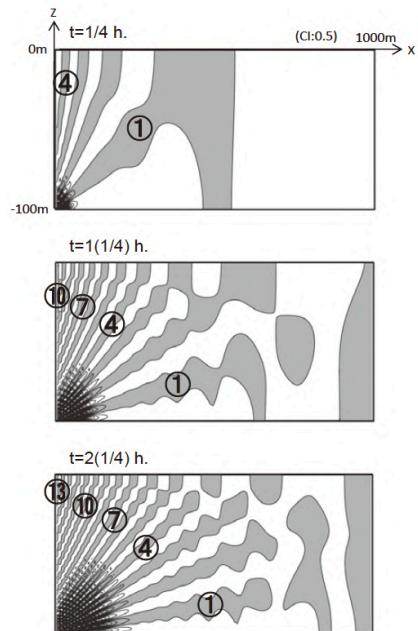


Fig.104 磯田（2015）[57] による、内部重力波のインパルス応答問題の数値計算の結果。詳しい条件設定は、磯田（2015）を参照せよ。左下に励起源があり、3 つのグラフは、上から順に時間の経過を追っている。

B.8 分散関係の極限的なふるまい

$\mathbf{f} \cdot \mathbf{k} \neq 0$ の場合の場合の分散関係 (B.7.30)

$$\omega^2 = \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2}\right)^2 + \omega_M^2 \omega_C^2} \quad (\text{B.8.1})$$

は、 ω_M 、 ω_A 、 ω_C のそれぞれの比によって、ふるまいが異なる。ただし、 ω_M 、 ω_A 、 ω_C は、磁場の強さ、成層の強さ、回転の速さだけでなく、波数にも依存していることに気をつけなければならない。

とくに、後の節では、薄い層を考えるので、

$$k \geq k_z \gg |\mathbf{k}_H| \quad (\text{B.8.2})$$

であり、内部重力波の周波数

$$|\omega_A| = \frac{N|\mathbf{k}_H|}{k} \quad (\text{B.8.3})$$

が大きい極限が成り立つには、小さい値である $\frac{|\mathbf{k}_H|}{k}$ にうちかつほどの強い成層が必要になる。

B.8.1 Alfvén 波周波数 ω_M が大きい場合

$\omega_M \gg \max(\omega_A, \omega_C)$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2}\right)^2 + \omega_M^2 \omega_C^2} \\ &= \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\omega_A^4 + 4\omega_M^2 \omega_C^2} \sqrt{1 + \frac{\omega_C^2(\omega_C^2 + 2\omega_A^2)}{\omega_A^4 + 4\omega_M^2 \omega_C^2}} \\ &= \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\omega_A^4 + 4\omega_M^2 \omega_C^2} \sqrt{1 + \frac{\frac{\omega_C^2}{\omega_M^2}(\omega_C^2 + 2\omega_A^2)}{\frac{\omega_A^4}{\omega_M^2} + 4\omega_C^2}} \\ &\simeq \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\omega_A^4 + 4\omega_M^2 \omega_C^2} \\ &= \omega_M^2 + \mathcal{O}(\max(\omega_A^2, \omega_C^2)) \pm \mathcal{O}(\max(\omega_A^2, \omega_M \omega_C)) \end{aligned} \quad (\text{B.8.4})$$

となる。さらに、 $\omega_C \gg \omega_A$ のときは、

$$\begin{aligned} \omega^2 &\simeq \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \omega_M \omega_C \sqrt{1 + \frac{\omega_A^2}{4\omega_M^2 \omega_C^2}} \\ &\simeq \omega_M^2 \pm \omega_M \omega_C \end{aligned} \quad (\text{B.8.5})$$

$\omega_A \gg \sqrt{\omega_M \omega_C}$ のときは、

$$\begin{aligned} \omega^2 &\simeq \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \frac{\omega_A^2}{2} \sqrt{1 + \frac{4\omega_M^2 \omega_C^2}{\omega_A^4}} \\ &\simeq \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \left(\frac{\omega_A^2}{2} + \frac{\omega_M^2 \omega_C^2}{\omega_A^2} \right) \\ &\simeq \omega_M^2 + \omega_A^2, \quad \omega_M^2 - \frac{\omega_M^2 \omega_C^2}{\omega_A^2} \end{aligned} \quad (\text{B.8.6})$$

となる。いずれにせよ、Alfvén 波周波数が大きい場合、浮力や Coriolis 力の復元によって少し速くなった Alfvén 波と、磁気張力の一部が浮力や Coriolis 力とつり合うことによって少し遅くなつた Alfvén 波に分かれる。

B.8.2 内部重力波周波数 ω_A が大きい場合

$\omega_A \gg \max(\omega_M, \omega_C)$ 、 $N \gg \frac{k}{|\mathbf{k}_H|}$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2}\right)^2 + \omega_M^2 \omega_C^2} \\
&= \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \frac{\omega_A^2}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{\omega_C^2}{\omega_A^2}\right)^2 + \frac{4\omega_M^2 \omega_C^2}{\omega_A^4}} \\
&\simeq \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \frac{\omega_A^2}{2} \sqrt{1 + 2\frac{\omega_C^2}{\omega_A^2} + \frac{4\omega_M^2 \omega_C^2}{\omega_A^4}} \\
&\simeq \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \left(\frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} + \frac{\omega_M^2 \omega_C^2}{\omega_A^2}\right) \\
&\simeq \omega_A^2 + (\omega_M^2 + \omega_C^2), \quad \omega_M^2 - \frac{\omega_M^2 \omega_C^2}{\omega_A^2} \tag{B.8.7}
\end{aligned}$$

ゆえに、内部重力波周波数が大きい場合、速いモードは磁気張力と Coriolis 力の復元で速くなつた内部重力波、遅いモードは Alfvén 波というように、モードが大きく分裂する。この遅いモードは、強い成層によって、ほとんど水平流で波が伝播するために、Alfvén 波になっている。この結果は、Takehiro(2015) [51] の分散関係と同じで、この論文によって、成層が非常に強くても、Alfvén 波で安定成層内部に深く貫入できることが示された。

B.8.3 慣性波周波数 ω_C が大きい場合

$\omega_C \gg \max(\omega_M, \omega_A)$ とする。このとき、

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2}\right)^2 + \omega_M^2 \omega_C^2} \\
&= \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \frac{\omega_C^2}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{\omega_A^2}{\omega_C^2}\right)^2 + \frac{4\omega_M^2}{\omega_C^2}} \\
&= \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \frac{\omega_C^2}{2} \sqrt{1 + 2\frac{\omega_A^2}{\omega_C^2} + \frac{\omega_A^4}{\omega_C^4} + \frac{4\omega_M^2}{\omega_C^2}} \\
&= \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \frac{\omega_C^2}{2} \left[1 + \left(\frac{\omega_A^2}{\omega_C^2} + \frac{\omega_A^4}{2\omega_C^4} + \frac{2\omega_M^2}{\omega_C^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_A^2}{\omega_C^2} + \frac{2\omega_M^2}{\omega_C^2}\right)^2\right] \\
&\quad + \mathcal{O}\left(\max\left(\frac{\omega_A^6}{\omega_C^6}, \frac{\omega_M^2 \omega_A^4}{\omega_C^6}\right)\right) \\
&\simeq \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \left(\frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} + \frac{\omega_A^4}{4\omega_C^2} + \omega_M^2 - \frac{(\omega_A^2 + 2\omega_M^2)^2}{4\omega_C^2}\right) \\
&= \omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \left(\frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} + \omega_M^2 - \frac{\omega_A^2 \omega_M^2 + \omega_M^4}{\omega_C^2}\right) \\
&\simeq \omega_C^2 + (2\omega_M^2 + \omega_A^2), \quad \frac{\omega_M^2 (\omega_M^2 + \omega_A^2)}{\omega_C^2} \tag{B.8.8}
\end{aligned}$$

ゆえに、慣性波周波数が大きい場合、速いモードは磁気張力と浮力の復元で速くなつた慣性波、遅いモードは Coriolis 力と磁気張力と浮力がつり合つて遅くなつた波である。この遅いモードの周波数は、基本的な波（Alfvén 波、内部重力波、慣性波）の周波数に比べ、とても小さい。この遅い波を、本文書では「遅い波」と呼ぶことにする^{*41}。

B.8.4 慣性波周波数が大きい場合の遅い波（MC 波、MAC 波）

慣性波周波数が大きい場合の遅いモード、すなわち、「遅い波」の分散関係は

$$\omega_{\text{slow}}^2 = \frac{\omega_M^2(\omega_M^2 + \omega_A^2)}{\omega_C^2} \quad (\text{B.8.9})$$

であった。ここで、

$$\omega_{MC}^2 = \frac{\omega_M^4}{\omega_C^2} \quad (\text{B.8.10})$$

という周波数で表される波を MC (Magnetic-Coriolis) 波、

$$\omega_{MAC}^2 = \frac{\omega_M^2(\omega_M^2 + \omega_A^2)}{\omega_C^2} \quad (\text{B.8.11})$$

という周波数で表される波を MAC (Magnetic-Archimedes-Coriolis) 波という。

また、 $\omega_C \gg \omega_A \gg \omega_M$ という極限では、「遅い波」の周波数は

$$\omega_{\text{slow}}^2 \simeq \frac{\omega_M^2 \omega_A^2}{\omega_C^2} \quad (\text{B.8.12})$$

となる。

密度成層してない場合 ($N = 0$) や $\omega_C \gg \omega_M \gg \omega_A$ という極限では、

$$\omega_{\text{slow}}^2 \simeq \omega_{MC}^2 \quad (\text{B.8.13})$$

となる。すなわち、MC 波は浮力が効かない波で、MAC 波は浮力の影響を受ける波である。

B.8.5 分散関係のグラフ

分散関係 (B.7.30) の ω_M 、 ω_A 、 ω_C の依存性を Fig.105 に図示する。グラフ中の黒い線が

$$\omega = \sqrt{\omega_M^2 + \frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_A^2 + \omega_C^2}{2}\right)^2 + \omega_M^2 \omega_C^2}} \quad (\text{B.8.14})$$

の分散関係である。また、2 本あるうちの上側の線が速いモード（複合の +）と上側の線が遅いモード（複合の -）である。そして、色つきの線が、B.8 節で求めた極限的な分散関係である。このグラフは、B.8 節の結果とよく合っている。

^{*41} 以下では、「遅い波」と遅いモードという言葉を区別して使い分けるので注意。「遅い波」という言葉は、MAC 波に対して用い、遅いモードは分散関係の 4 つの解のうち、絶対値が小さな 2 つの解に対して用いる。

Fig.105 を見て、さらに分かることは、 $|\omega_M| > \sqrt{\omega_A^2 + \omega_C^2}$ のときは、速いモードと遅いモードはほとんど分裂せず、どちらも Alfvén 波に近い波であるが、 $|\omega_M| = \sqrt{\omega_A^2 + \omega_C^2}$ となるところで、モードのつなぎ替えが起こって、 $|\omega_M| < \sqrt{\omega_A^2 + \omega_C^2}$ では、速いモード（慣性内部重力波）と遅いモード（Alfvén 波）に分裂する。さらに、 $\omega_A < \omega_C$ になるところで、Alfvén 波は MAC 波とつなぎ変わる。

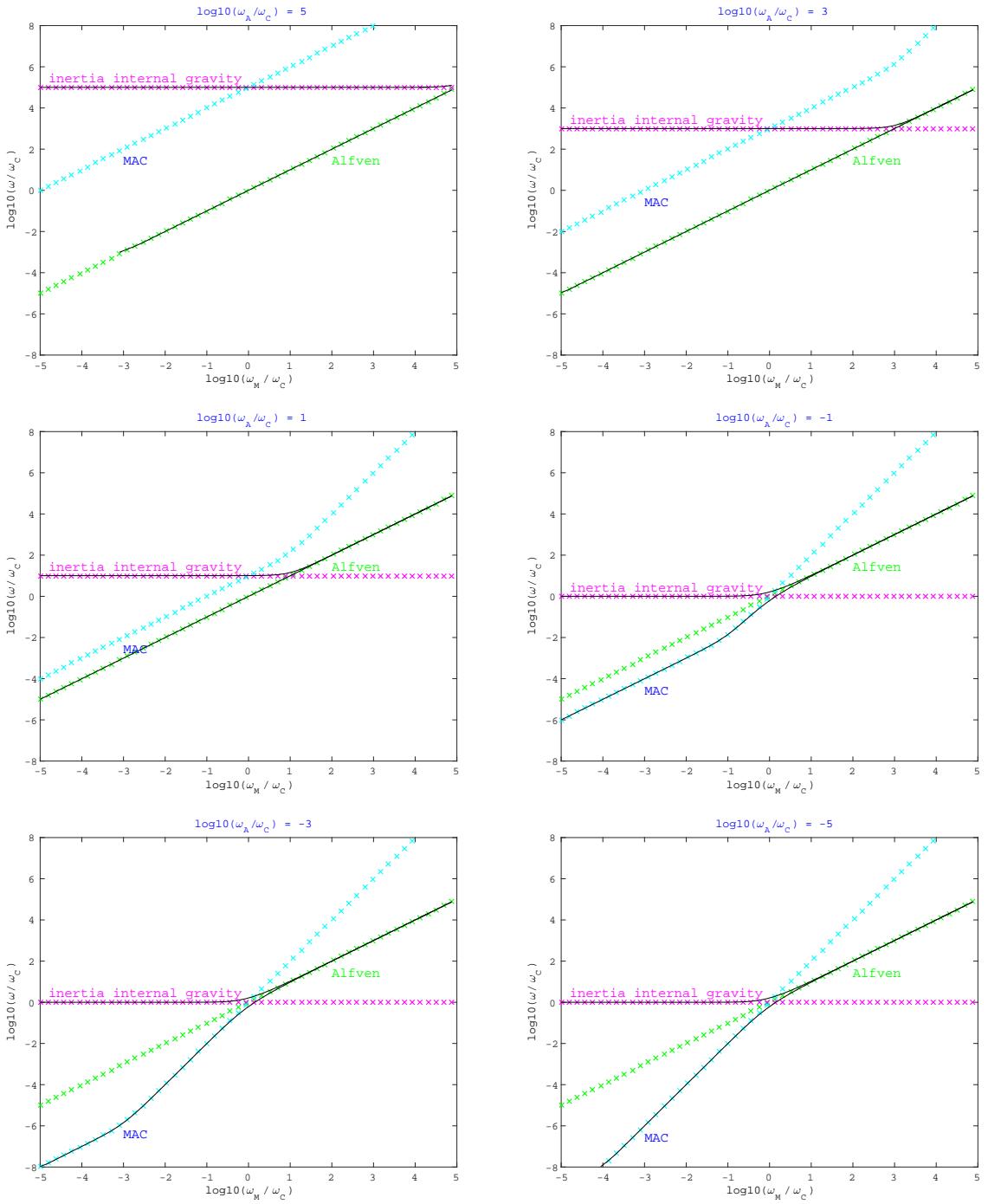


Fig.105 分散関係の ω_M 、 ω_A 、 ω_C の大きさの比の依存性。縦軸が慣性波周波数 ω_C で規格化した周波数、横軸が Alfvén 波周波数 ω_M と慣性波周波数 ω_C の比であり、いずれも自然対数で表している。また、内部重力波周波数 ω_A と慣性波周波数 ω_C の比を $\frac{\omega_A}{\omega_C} = 10^5, 10^3, 10^1, 10^{-1}, \dots$ と変えたものを載せている。上側の黒い線が速いモードの分散関係、下側の黒い線が遅いモードの分散関係である。負の周波数の解は、これらと符号が異なるだけなので、載せていない。緑の線が純粋な Alfvén 波周波数、ピンク色の線が慣性内部重力波の周波数 $\sqrt{\omega_A^2 + \omega_C^2}$ 、水色の線が MAC 波の周波数 $|\omega_{MAC}|$ である。

B.8.6 分散関係の波数依存性

ここでは、簡単のため回転軸は鉛直方向を向いている、すなわち、 $\mathbf{f} = f\hat{\mathbf{e}}_z$ とする。後の節では、このような場合のみを考えるので、ここで得た結果は、後の節の理解にも役立つ。この仮定により、慣性波周波数は、

$$\omega_C = \frac{fk_z}{k} \quad (\text{B.8.15})$$

となる。ゆえに、分散関係 (B.8.14) は

$$\omega = \sqrt{\omega_M^2 + \frac{N^2|\mathbf{k}_H|^2 + f^2 k_z^2}{2k^2}} \pm \sqrt{\left(\frac{N^2|\mathbf{k}_H|^2 + f^2 k_z^2}{2k^2}\right)^2 + \frac{\omega_M^2 f^2 k_z^2}{k^2}} \quad (\text{B.8.16})$$

となる。

そして、Alfvén 波周波数を固定したまま、水平波数 $|\mathbf{k}_H|$ と鉛直波数 k_z の比を変えたときの分散関係のふるまいを Fig.107~Fig.110 に図示する。

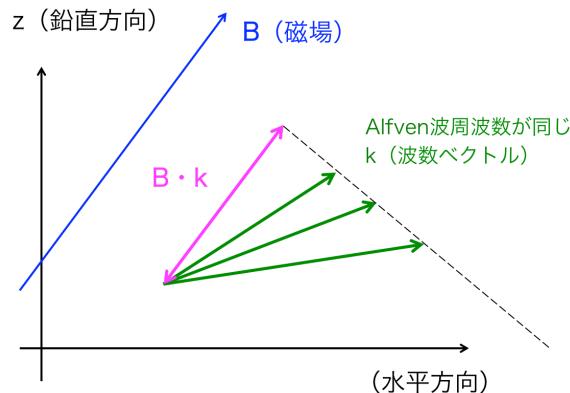


Fig.106 Alfvén 波周波数を固定したまま、水平波数 $|\mathbf{k}_H|$ と鉛直波数 k_z の比を変化させる。

まず、成層が回転に比べ、とても強い場合 (Fig.107) に注目する。 $\frac{|\mathbf{k}_H|}{k_z}$ が $10^{-4} \sim 10^4$ の範囲では、 $\omega_M \gg f$ のときは水平大スケール側で Alfvén 波に、水平小スケール側で慣性内部重力波と Alfvén 波に分裂している。一方、 $f \gg \omega_M$ のときは慣性内部重力波と Alfvén 波に分裂する。ただし、 $\omega_M = f$ で水平大スケールのときは慣性内部重力波の周波数 $\sqrt{\omega_A^2 + \omega_C^2}$ と MAC 波の周波数 $\frac{\omega_M}{\omega_C} \sqrt{\omega_M^2 + \omega_A^2}$ がほとんど同じになっている。

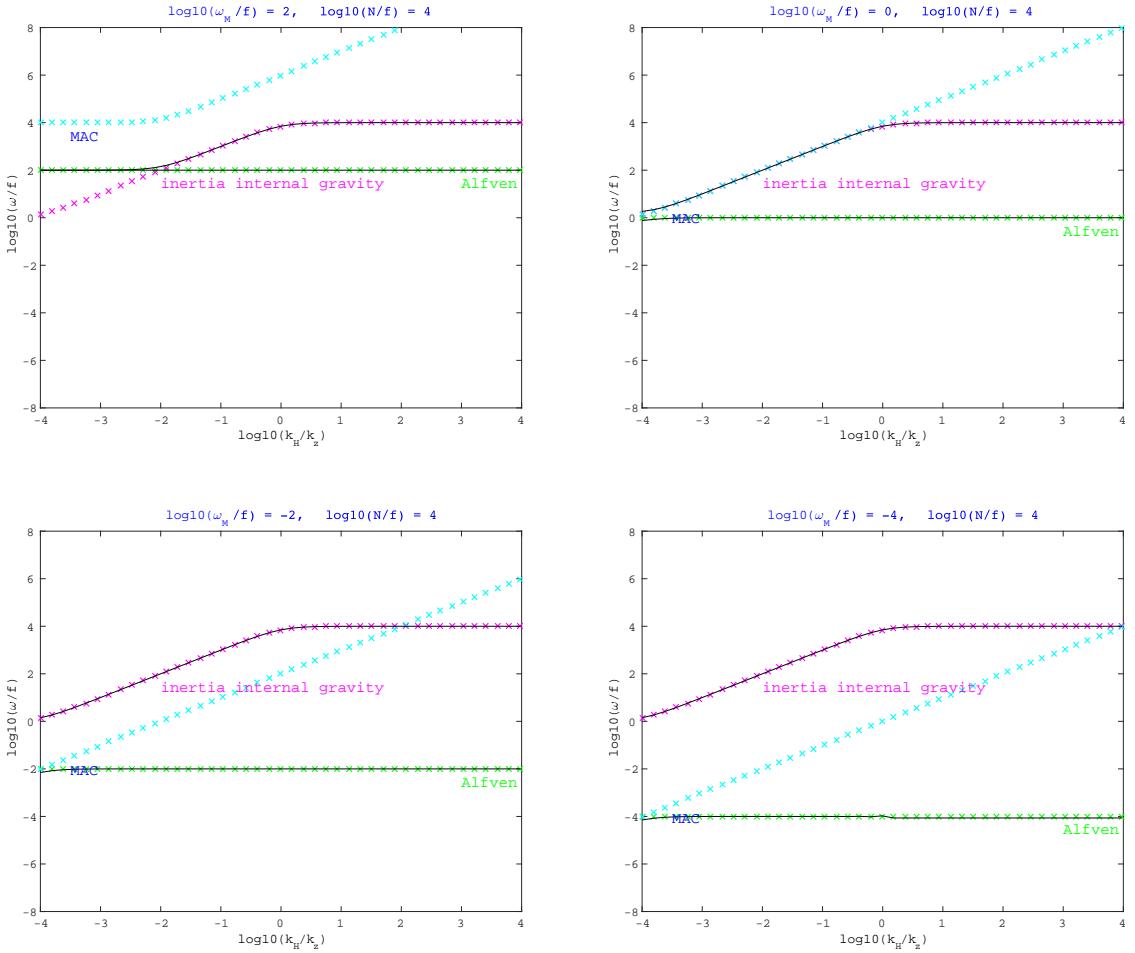


Fig.107 $f = f \hat{e}_z$ で、Alfvén 波周波数を固定したときの分散関係の水平波数 $|k_H|$ と鉛直波数 k_z の比の依存性。縦軸が慣性振動の周波数 f で規格化した周波数、横軸が k_H/k_z （グラフの左側ほど、水平方向に大きなスケール）であり、いずれも自然対数で表している。上のグラフは $\omega_M/f = 10^2, 10^0, 10^{-2}, 10^{-4}$ で $N/f = 10^4$ の場合を示している。上側の黒い線が速いモードの分散関係、下側の黒い線が遅いモードの分散関係である。負の周波数の解は、これらと符合が異なるだけなので、載せていない。緑の線が純粋な Alfvén 波周波数、ピンク色の線が慣性内部重力波 $\sqrt{\omega_A^2 + \omega_C^2}$ の周波数、水色の線が MAC 波の周波数 $|\omega_{MAC}|$ の周波数である。

ただし、成層が回転に比べ、それほど大きくないときは、 $\omega_M \ll f$ のときに、水平方向大スケール側で Alfvén 波から MAC 波につなぎ変わる。これは、慣性波周波数は $\frac{k_z}{k}$ に比例するのに対し、内部重力波周波数は $\frac{|k_H|}{k}$ に比例していることによる。すなわち、 $N \gg f$ であっても、水平大スケールな波であれば、 $\omega_C \gg \omega_A$ になりうる。

Alfvén 波から MAC 波へのつなぎ替えは、 $\omega_M = \omega_{MAC}$ 、すなわち、 $\omega_M^2 = \frac{\omega_M^2}{\omega_C^2}(\omega_M^2 + \omega_A^2)$ の点で起こっている。ゆえに、 $\omega_C^2 = \omega_M^2 + \omega_A^2$ 。さらに、 $\omega_M \ll \omega_C$ とすると、 $\omega_A = \omega_C$ となる波数のとき MAC 波が現れる。すなわち、 $\frac{1}{k_H} = \frac{N}{f} \frac{1}{k_z}$ なので、 $\omega_M \ll \omega_C$ で、水平波長が（長さスケールを鉛直波長としたときの）ロスビーの内部変形半径 $\frac{N k_z^{-1}}{f}$ よりも大きいとき、MAC 波が現れる。

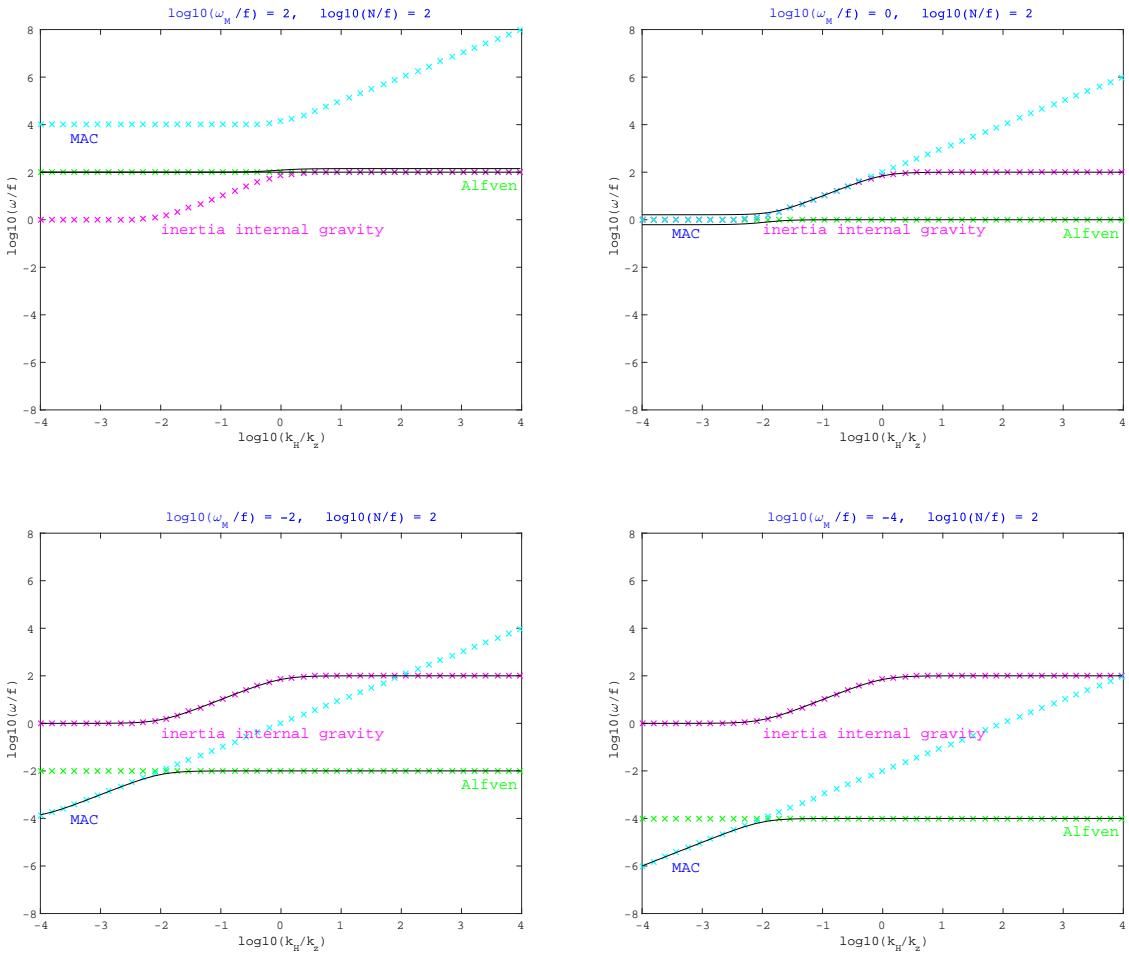


Fig.108 Fig.107と同じだが、 $N/f = 10^2$ の場合。 $\omega_M \ll f$ のときに水平方向大スケール側で遅いモードが Alfvén 波から MAC 波につなぎ変わる。

以下、 N と f が同程度の場合、 $N \ll f$ の場合の結果を示す。

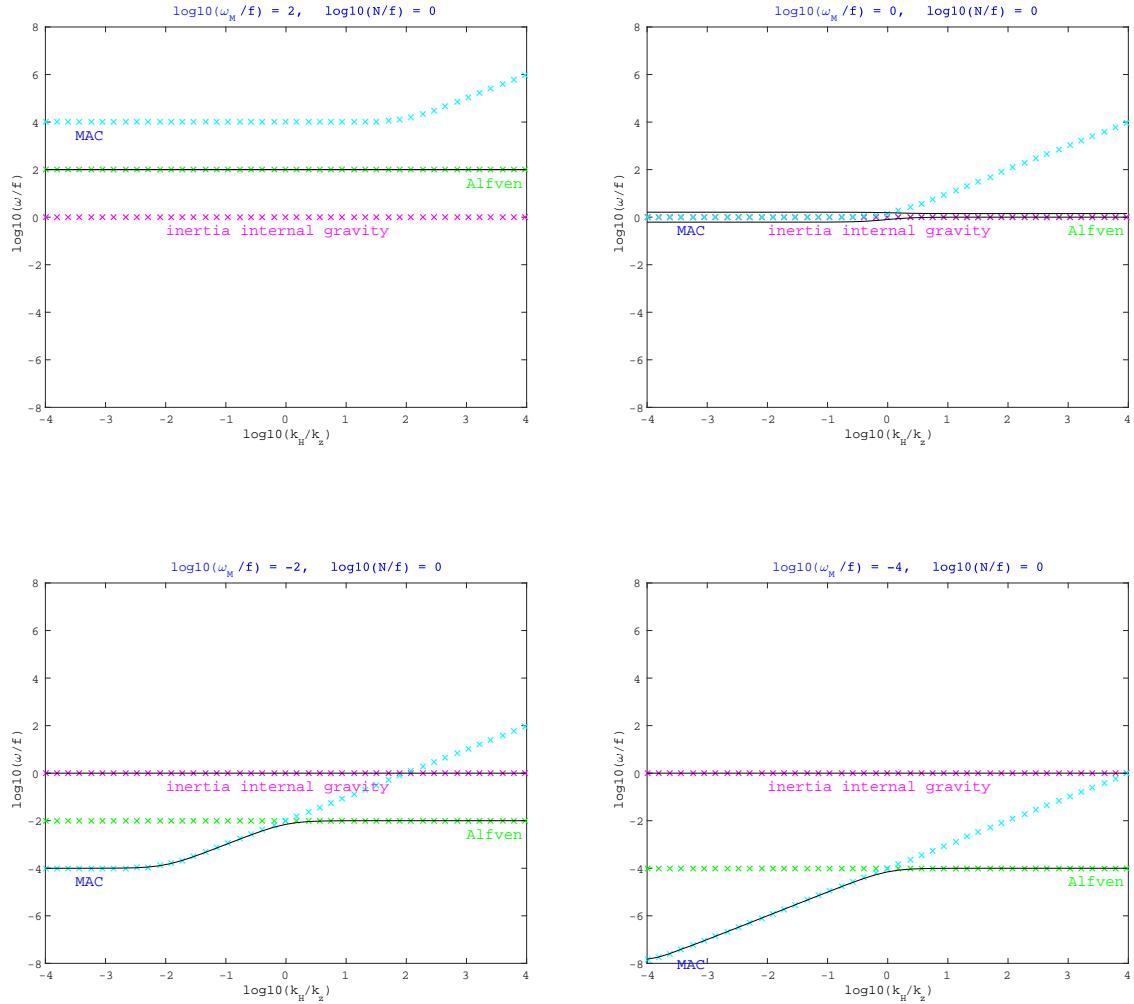


Fig.109 Fig.107 同じだが、 $N/f = 10^0$ の場合。

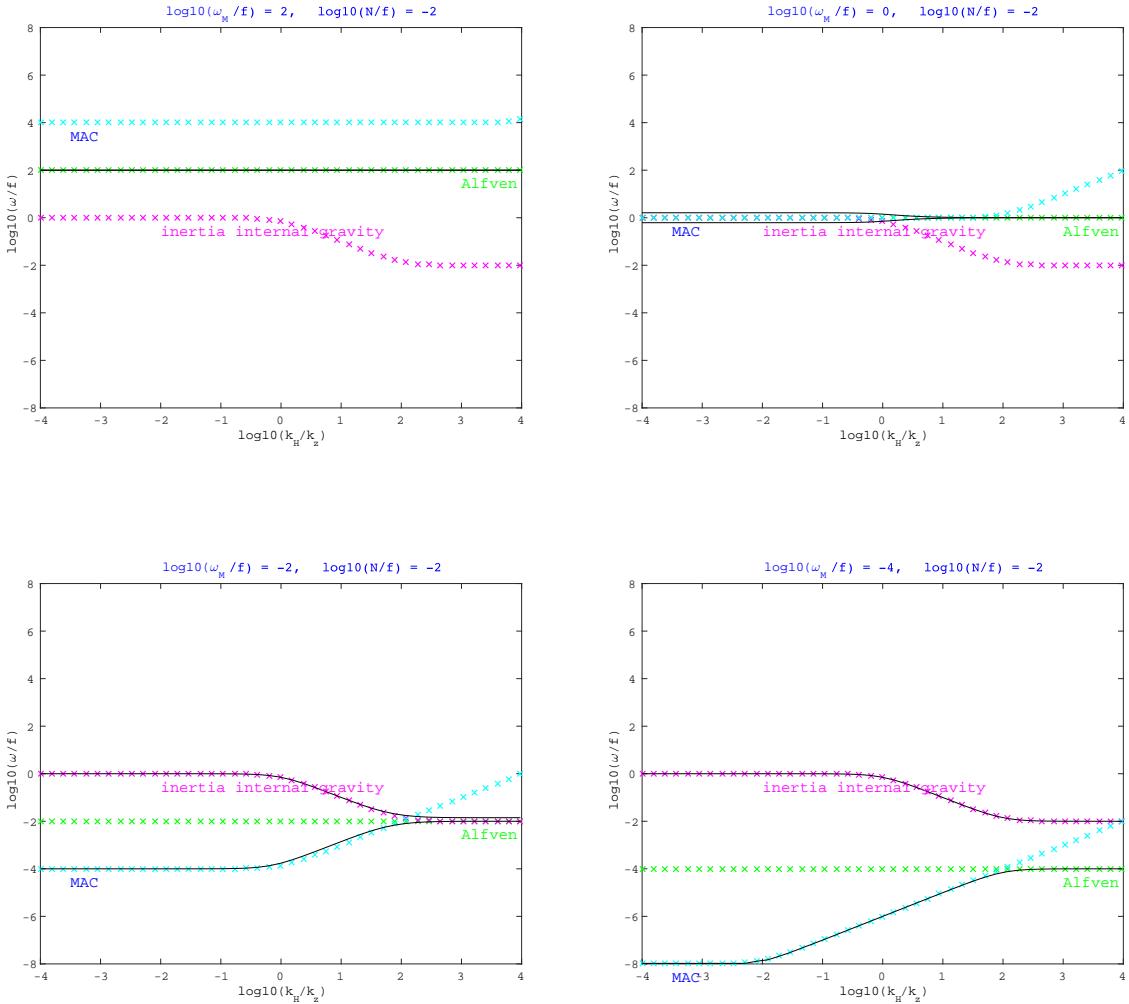


Fig.110 Fig.107 同じだが、 $N/f = 10^{-2}$ の場合。

B.9 線形近似における波のエネルギー

運動方程式 (B.2.6) と \mathbf{u} の内積をとると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}}{\rho_0 \mu} \right) + \frac{[(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{b}] \cdot \mathbf{u}}{\rho_0 \mu} - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g u_z \quad (\text{B.9.1})$$

となり、さらに、連続の式 (B.2.13) より、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}}{\rho_0 \mu} \right) \mathbf{u} \right] = \frac{[(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{b}] \cdot \mathbf{u}}{\rho_0 \mu} - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g u_z \quad (\text{B.9.2})$$

となる。各項の意味は、左から順に、(単位質量あたりの) 運動エネルギーの時間変化、圧力による運動エネルギー フラックス、磁気張力がする仕事、浮力がする仕事である。これらの式より、Coriolis 力は仕事をしないことが分かる。圧力と磁気圧によって、流体粒子どうしで運動エネル

ギーのやり取りを行い、磁気張力による仕事を介して磁場のエネルギーから運動エネルギーへ、浮力による仕事を介して位置エネルギーから運動エネルギーへ変換される。

次に、誘導方程式 (B.2.7) と $\frac{\mathbf{b}}{\rho_0 \mu}$ の内積をとると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\mathbf{b}|^2}{2\rho_0 \mu} \right) = \frac{[(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}] \cdot \mathbf{b}}{\rho_0 \mu} \quad (\text{B.9.3})$$

となり、(単位質量あたりの) 磁場エネルギーの時間変化の式が得られる^{*42}。

最後に、密度の移流の式 (B.3.6) に $\frac{g^2 \Delta \rho}{\rho_0^2 N^2}$ をかけると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{g \Delta \rho}{\rho_0 N} \right)^2 \right] = \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g u_z \quad (\text{B.9.7})$$

となる。左辺は、(単位質量あたりの) 位置エネルギーの時間変化、右辺は移流による運動エネルギーから位置エネルギーへの変換である。

そして、運動エネルギーの式 (B.9.2)、磁場エネルギーの式 (B.9.3)、位置エネルギーの式 (B.9.7) の辺々を足すと、線形近似における全エネルギーの式が得られる^{*43}。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \frac{|\mathbf{b}|^2}{2\rho_0 \mu} + \left(\frac{g \Delta \rho}{\rho_0 N} \right)^2 \right] + \nabla \cdot \left[\left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}}{\rho_0 \mu} \right) \mathbf{u} \right] = \frac{1}{\rho_0 \mu} (\mathbf{B} \cdot \nabla)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) \quad (\text{B.9.8})$$

さらに、右辺を変形して、フラックス形式にすると

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + \frac{|\mathbf{b}|^2}{2\rho_0 \mu} + \left(\frac{g \Delta \rho}{\rho_0 N} \right)^2 \right] + \nabla \cdot \left[\frac{p}{\rho_0} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{b} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})}{\rho_0 \mu} \right] = 0 \quad (\text{B.9.9})$$

となる。また、完全導体の Ohm の法則 (B.2.10) を用いると、(単位質量あたりの) Poynting ベクトル $\frac{1}{\rho_0} \mathbf{e} \times \frac{\mathbf{b}}{\mu}$ のフラックスの項が現れる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{b}|^2}{2\rho_0 \mu} + \left(\frac{g \Delta \rho}{\rho_0 N} \right)^2 \right] + \nabla \cdot \left[\frac{p}{\rho_0} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{b}}{\rho_0 \mu} \right] = 0 \quad (\text{B.9.10})$$

今考えている流体は、非圧縮で非散逸だったので、内部エネルギーは変化せず、(内部エネルギー以外の) 全エネルギーが保存している^{*44}。

^{*42} 誘導方程式の元の式は、Faraday の電磁誘導の法則

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{e} = 0 \quad (\text{B.9.4})$$

であり、この式と $\frac{\mathbf{b}}{\rho_0 \mu}$ の内積をとり、Ampère の法則 (B.2.8) を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\mathbf{b}|^2}{2\rho_0 \mu} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{e} \times \frac{\mathbf{b}}{\rho_0 \mu} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{e} \cdot \mathbf{j} \quad (\text{B.9.5})$$

となり、完全導体の Ohm の法則 (B.2.10) より、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\mathbf{b}|^2}{2\rho_0 \mu} \right) + \nabla \cdot \left(\mathbf{e} \times \frac{\mathbf{b}}{\rho_0 \mu} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \quad (\text{B.9.6})$$

となる。左辺第 2 項は(単位質量あたりの) Poynting ベクトル $\frac{1}{\rho_0} (\mathbf{e} \times \frac{\mathbf{b}}{\mu})$ のフラックス、右辺第 1 項は磁気張力による磁場エネルギーから運動エネルギーへの変換である。(B.9.3) 式の右辺には、この 2 項が含まれている。

^{*43} 線形なので、エネルギーの移流によるフラックスの項は含まれていない。

^{*44} フラックスの項は 1 波長積分すると 0 になる。

B.10 「遅い波の近似」

分散関係の 4 つの解のうち、遅い 2 つのモードに注目したい。ただし、Alfvén 波周波数 ω_M が大きいときは、速いモードと遅いモードは大きく分裂せず、内部重力波周波数 ω_A が大きいときは、遅いモードは Alfvén 波になるので、慣性波周波数が大きい場合 $\omega_C \gg \max(\omega_M, \omega_A)$ に注目する。すなわち、MAC 波（または、「遅い波」）（分散関係： $\omega = \pm \frac{\omega_M}{\omega_A} \sqrt{\omega_M^2 + \omega_A^2}$ ）に注目する。

B.10.1 分散関係

B.7 節で求めた分散関係 (B.7.28) 式

$$[\omega^2 - \omega_M^2][\omega^2 - \omega_M^2 - \omega_A^2] = \omega^2 \omega_C^2 \quad (\text{B.10.1})$$

を見ると、Alfvén 波よりも遅い波だけを取り出したい場合は、

$$\omega \ll \omega_M \quad (\text{B.10.2})$$

とすれば、良さそうである。このとき分散関係は^{*45}、

$$\omega_M^2 (\omega_M^2 + \omega_A^2) = \omega^2 \omega_C^2 \quad (\text{B.10.7})$$

すなわち、

$$\omega^2 = \omega_{\text{slow}}^2 = \frac{\omega_M^2 (\omega_M^2 + \omega_A^2)}{\omega_C^2} \quad (\text{B.10.8})$$

となり、これは慣性波周波数 ω_C が大きい場合の遅いモードの分散関係、すなわち、「遅い波」の分散関係と等しい。つまり、慣性波周波数 ω_C が大きく（言いかえると、回転が速く、水平波長が大きい）さらに、遅い波のみに注目したい場合は、有効な近似であることが分かる。この近似を本書では「遅い波の近似」と呼ぶ。

^{*45} 分散関係の別の近似の方法としては、 ω は小さいとして、分散関係から $\mathcal{O}(\omega^2)$ の項まで取り出すと、

$$\omega^2 = \frac{\omega_M^2 (\omega_M^2 + \omega_A^2)}{2\omega_M^2 + \omega_A^2 + \omega_C^2} \quad (\text{B.10.3})$$

となる。 $\omega_M \ll \min(\omega_A, \omega_C)$ のときは、

$$\omega^2 \simeq \frac{\omega_M^2 \omega_A^2}{\omega_A^2 + \omega_C^2} \quad (\text{B.10.4})$$

であり、さらに、 $\omega_A \gg \omega_C$ のときは、Alfvén 波の分散関係

$$\omega^2 \simeq \omega_M^2 \quad (\text{B.10.5})$$

$\omega_C \gg \omega_A$ のときは、 $\omega_M \ll \omega_A$ とした MAC 波の分散関係

$$\omega^2 \simeq \frac{\omega_M^2 \omega_A^2}{\omega_C^2} \quad (\text{B.10.6})$$

が得られる。

ただし、Alfvén 波よりも遅い波のみを取り出す近似であるので、この近似を用いると Alfvén 波が現れないことに注意。そのため、 $\omega_A \gg \omega_C$ の場合（言いかえると、成層が強く、水平波長が小さいとき）は、この近似は不適切である。

B.10.2 「遅い波の近似」の基礎方程式の上での意味

B.10.1 節で行った「遅い波の近似」は、基礎方程式の上ではどこを無視したことになっているのであろうか。B.7 節での分散関係の導出に戻ると、運動方程式 (B.2.6) のうち、慣性項を無視、つまり、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (\text{B.10.9})$$

に対応していることが分かる。このとき、摂動方程式は、

$$\mathbf{f} \times \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{b}}{\rho_0 \mu} + \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \mathbf{g} \quad (\text{B.10.10})$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (\text{B.10.11})$$

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} = \frac{\rho_0 N^2}{g} u_z \quad (\text{B.10.12})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (\text{B.10.13})$$

になる。回転が速く（慣性波周波数が大きい）、Alfvén 波よりも遅い波であったので、

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \ll \mathbf{f} \times \mathbf{u}, \quad \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{b}}{\rho_0 \mu} \quad (\text{B.10.14})$$

と近似されていることになる。この近似によって、運動方程式は、力の釣り合いの式になっている。このことから、流れがあって Coriolis 力が発生し、それが磁気張力や圧力、浮力とつり合っているが、流れが存在するために、磁場と密度場が変動し、力がつり合った状態がゆっくりと変化するような波が、MAC 波である。

B.10.3 「遅い波」のエネルギー

「遅い波の近似」は、運動方程式の慣性項を無視する近似であったので、「遅い波」の運動エネルギーの式は

$$\nabla \cdot \left[\left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}}{\rho_0 \mu} \right) \mathbf{u} \right] = \frac{[(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{b}] \cdot \mathbf{u}}{\rho_0 \mu} - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g u_z \quad (\text{B.10.15})$$

となる。すなわち、磁気張力や浮力による仕事は運動エネルギーを変化させるのではなく、圧力を介して、その他の流体粒子に仕事をしてエネルギーを受け渡す。そして、エネルギーを受け取った流体粒子は、運動エネルギーを変化させることなく、磁場エネルギーや位置エネルギーとして、エネルギーを蓄える。そして、運動エネルギーは一定なので、

$$\frac{|\mathbf{u}|^2}{2} = C(x, y, z) \quad (\text{B.10.16})$$

となる^{*46*47}。ただし、右辺は座標にのみ依存する関数である。

そして、「遅い波」の全エネルギー保存則は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{|\mathbf{b}|^2}{2\rho_0\mu} + \left(\frac{g\Delta\rho}{\rho_0 N} \right)^2 \right] + \nabla \cdot \left[\frac{p}{\rho_0} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{b}}{\rho_0\mu} \right] = 0 \quad (\text{B.10.17})$$

となる。すなわち、MC 波と MAC 波においては運動エネルギーは伝播できず、MC 波は磁場のエネルギーを、MAC 波は磁場のエネルギーと位置エネルギーのやり取りをしながら伝播する。

B.10.4 $\omega_M \ll \omega_A$ の場合の「遅い波」

「遅い波」の分散関係 (B.10.8)

$$\omega^2 = \frac{\omega_M^2(\omega_M^2 + \omega_A^2)}{\omega_C^2} \quad (\text{B.10.18})$$

に対して、 $\omega_M \ll \omega_A$ とすると、さらに

$$\omega^2 = \frac{\omega_M^2 \omega_A^2}{\omega_C^2} \quad (\text{B.10.19})$$

と近似できる。この近似について考えてみよう。

ζ_{z0} と u_{z0} の関係式 (B.7.25) 式に戻って考える。

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 & \omega(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}) \\ \omega(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}) & \omega^2 k^2 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 k^2 + N^2 \mathbf{k}_H^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{z0} \\ u_{z0} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{B.10.20})$$

これらの式に、「遅い波の近似」を施すと、

$$\begin{pmatrix} -(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 & \omega(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}) \\ \omega(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}) & -(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 k^2 + N^2 \mathbf{k}_H^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{z0} \\ u_{z0} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{B.10.21})$$

となり、慣性内部重力波や Alfvén 波などの速い波は除去される^{*48}。

ここで、 $N = 0$ のときは、MC 波になる。このとき、 ζ_{z0} と u_{z0} の関係式は

$$\begin{pmatrix} -(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 & \omega(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}) \\ \omega(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}) & -(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 k^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_{z0} \\ u_{z0} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{B.10.22})$$

となる。さらに、運動方程式 (B.2.6) にまで戻ると、

$$\mathbf{f} \times \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{b}}{\rho_0\mu} \quad (\text{B.10.23})$$

^{*46} Coriolis 力は仕事をしないが、慣性波の場合は、圧力勾配が存在し、圧力によって他の流体粒子に仕事をして運動エネルギーを伝播するので、一定ではない。ただし、 $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{0}$ の極限である慣性振動は、圧力勾配がないので、「遅い波」と同様、運動エネルギーは一定である。

^{*47} 別の言葉で言うと、慣性項が重要な波はある時刻ある点の速度の絶対値が 0 であっても、別の時刻には絶対値が 0 でない速度をもつるのに対し、「遅い波」はある時刻で速度の絶対値が 0 であった点は、その後すべての時間で 0 のままになる。

^{*48} 言いかえると、これらの波は慣性項が重要な役割をしている波である。

という力のつり合いになっている。このつり合いは、magnetostrophic balance と呼ばれている。ただし、力はつり合っているが、磁場は時間変化しうるので、定常ではない。このつり合いによって MC 波が発生するので、MC 波のことを magnetostrophic wave と呼ぶこともある。

$N \neq 0$ の場合は、(B.10.21) 式の 2 行目の式は、3 項のつり合いの式になっている。波になるためには ζ_{z0} と u_{z0} の関係が必要であるので、近似的なつり合いとして考えられるのは、

$$\omega(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k})\zeta_{z0} \sim -(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 k^2 u_{z0} \quad (\text{B.10.24})$$

または、

$$\omega(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k})\zeta_{z0} \sim N^2 \mathbf{k}_H^2 u_{z0} \quad (\text{B.10.25})$$

である。前者のつり合いは、MC 波のとき成立する。そこで、後者のつり合いが近似的に成り立つ場合、分散関係がどのようになるか調べる。このときの行列式を計算すると、

$$\omega^2 = \frac{\omega_M^2 \omega_A^2}{\omega_C^2} \quad (\text{B.10.26})$$

となり、「遅い波」の分散関係に対して、 $\omega_M \ll \omega_A$ と近似した場合になった。

すなわち、磁場が弱く、 $\omega_M \ll \omega_A$ とできる場合は、ストレッチングによる渦生成は磁気張力のトルクによる渦生成と打ち消し合い、ティルティングによる渦生成 (Coriolis 力のトルクによる渦生成) に関しては浮力のトルクによる渦生成と打ち消し合っている、ということが分かる。Coriolis 力のトルクと浮力のトルクがつり合った状態を温度風平衡という。

さらに、 ω はもともと時間微分であったことを思い出すと、以下のように考えることもできる。磁気張力のトルクをつくるような流れがあったとする。慣性項が重要な時間スケールでは、磁気張力のトルクは渦を生成するが、慣性項が無視できる時間スケールでは、Coriolis 力によって流れが曲げられ、発散・収束が起こる。その発散・収束が新たな磁気張力のトルクをつくると、MC 波になる。ところが、もし強い安定成層があれば、発散・収束による鉛直流の水平不均質は、浮力のトルクをつくる。速い時間スケールでは、そのトルクは新たな流れ場をつくるが、遅い時間スケールでは、再び Coriolis 力によって流れが曲げられ、Coriolis 力のトルクと浮力のトルクがつり合った状態になる。そして、このつり合った状態の流れは、新たな磁気張力のトルクをつくる。

B.10.5 $\omega_M \ll \omega_A$ の場合の「遅い波」と Braginsky(1993) との関係性

運動方程式を、 $\omega_M \ll \omega_A$ の場合の「遅い波」のみが現れるようなつり合いにするのは難しい。可能な方法の 1 つとして、ある一方向が一様な場合（例えば、 x 軸一様とする）は、分散関係に $\omega_M \ll \omega_A$ の場合の「遅い波」のみが現れるような運動方程式をつくることができる。 x 軸方向一様にして、慣性項を無視した運動方程式は、(B.2.6) 式より

$$\mathbf{f} \times \mathbf{u} = -\nabla_m P + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla_m) \mathbf{b}}{\rho_0 \mu} + \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \mathbf{g} \quad (\text{B.10.27})$$

となる。ここで、 $\nabla_m = \nabla - \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x}$ である。さらに、鉛直方向の運動方程式は

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g \quad (\text{B.10.28})$$

が成り立つとする。残りの水平方向の運動方程式は、

$$(\mathbf{f} \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla_m) b_x}{\rho_0 \mu} \quad (\text{B.10.29})$$

$$(\mathbf{f} \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_y = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla_m) b_y}{\rho_0 \mu} \quad (\text{B.10.30})$$

である。ここで、一様方向（ x 方向）の運動方程式に圧力勾配がないことは、浮力のトルクには水平構造が必要であることと関係している。このとき、浮力のトルクは一様方向（ x 方向）成分のみもつようになる。ここで、さらに、水平構造を持った方向（ y 方向）の磁気張力の項を無視すると、運動方程式 3 成分は

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g \quad (\text{B.10.31})$$

$$(\mathbf{f} \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla_m) b_x}{\rho_0 \mu} \quad (\text{B.10.32})$$

$$(\mathbf{f} \times \mathbf{u}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_y = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (\text{B.10.33})$$

となる。ここで、(B.10.31) 式が成り立つとき静水圧平衡、(B.10.33) 式が成り立つとき地衡流平衡といい、さらに、この 2 式が成立するとき温度風平衡と呼ぶ。温度風平衡は、Coriolis 力と浮力のトルクがつり合った状態である。また、(B.10.32) 式は圧力の項を無視した magnetostrophic balance である。ゆえに、ある一方向が一様な場合は、前節でトルクを用いて説明したものと同じ状況を運動方程式でつくることができた。

Braginsky(1993) [5] は、地球外核最上部の安定成層領域での軸対称（東西方向一様）な波動を調べるために、(B.10.31) 式～(B.10.33) 式と、有限の電気伝導度の場合の誘導方程式、連続の式 (B.2.13)、磁場に関する Gauss の法則 (B.2.10) を用いて分散関係を求めた。その論文では、

$$\mathbf{f} = f_0 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{B.10.34})$$

$$\mathbf{B} = B_0 \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{B.10.35})$$

というように余緯度 θ の依存性をもたせて、球面で計算されているが、偶然にも一様場での式とほとんど同じ式の構造になっており、分散関係は

$$\begin{aligned} \omega &= \pm \frac{B_0 N k_y}{\sqrt{\rho_0 \mu} f_0} + (\text{減衰}) \\ &= \pm \frac{\omega_M \omega_A}{\omega_C} + (\text{減衰}) \end{aligned} \quad (\text{B.10.36})$$

と求められている。ただし、電気伝導度は有限にしてあるので、減衰項がある。ここで、 k_y は南北波数で、球面なので離散的な値をとる。

B.10.6 「遅い波」の位相速度・群速度

ここで、「遅い波」の位相速度と群速度を示しておく^{*49}。「遅い波」の周波数は、

$$\omega_{MAC} = \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 k}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}} \sqrt{1 + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{k^2 (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}} \quad (\text{B.10.37})$$

である。 $N = 0$ の場合、すなわち、MC 波の位相速度と群速度は、

$$\mathbf{c}_{p,MC} = \frac{\omega_{MC}}{k} \hat{\mathbf{e}}_k = \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}} \hat{\mathbf{e}}_k \quad (\text{B.10.38})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{g,MC} &= \frac{\partial \omega_{MC}}{\partial \mathbf{k}} = \pm \frac{2(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}) \mathbf{V}_A k}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}} \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 k}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}} \mp \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 k}{(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k})^2} \mathbf{f} \\ &= \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 k}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}} \left(\frac{2\mathbf{V}_A}{\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}} + \frac{\mathbf{k}}{k^2} - \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.10.39})$$

となるので、MAC 波の位相速度と群速度は

$$\mathbf{c}_{p,MAC} = \frac{\omega_{MAC}}{k} \hat{\mathbf{e}}_k = \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}} \sqrt{1 + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{k^2 (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}} \hat{\mathbf{e}}_k \quad (\text{B.10.40})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{g,MAC} &= \frac{\partial \omega_{MAC}}{\partial \mathbf{k}} = \mathbf{c}_{g,MC} \sqrt{1 + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{k^2 (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}} \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 k}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \sqrt{1 + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{k^2 (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}} \\ &= \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 k}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}} \left(\frac{2\mathbf{V}_A}{\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}} + \frac{\mathbf{k}}{k^2} - \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}} \right) \sqrt{1 + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{k^2 (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}} \\ &\quad \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 k}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}} \frac{\frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{k^2 (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}}{\sqrt{1 + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{k^2 (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}}} \left(\frac{\mathbf{k}_H}{|\mathbf{k}_H|^2} - \frac{\mathbf{k}}{k^2} - \frac{\mathbf{V}_A}{\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.10.41})$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{g,MAC} \sqrt{1 + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{k^2 (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}} &= \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2 k}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}} \left\{ \left(\frac{2\mathbf{V}_A}{\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}} + \frac{\mathbf{k}}{k^2} - \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{k^2 (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2} \left(\frac{\mathbf{V}_A}{\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}} + \frac{\mathbf{k}_H}{k_H^2} - \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.10.42})$$

となる。これらは $N = 0$ のとき MC 波の位相速度と群速度に一致する。

^{*49} 周波数が複雑な形をしている場合でも、群速度の方向を視覚的に知ることができる方法がある。群速度は波数空間での勾配 ∇_k を用いて、 $\nabla_k \omega$ と表されるので、波数空間上にいくつかの等 ω 線（面）をプロットすれば、その線（面）に垂直な方向が群速度の方向である。

さらに、 $\omega_M \ll \omega_A$ の場合の「遅い波」の位相速度と群速度を計算する。周波数は

$$\omega = \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})N|\mathbf{k}_H|}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}} \quad (\text{B.10.43})$$

より、位相速度と群速度は、

$$\mathbf{c}_p = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{e}}_k = \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})N|\mathbf{k}_H|}{(\mathbf{f} \cdot \mathbf{k})k} \hat{\mathbf{e}}_k \quad (\text{B.10.44})$$

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})N|\mathbf{k}_H|}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}} \left(\frac{\mathbf{V}_A}{\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}} + \frac{\mathbf{k}_H}{k_H^2} - \frac{\mathbf{f}}{\mathbf{f} \cdot \mathbf{k}} \right) \quad (\text{B.10.45})$$

となる。

B.10.7 位相速度に関する注意

前節では、位相速度を

$$\mathbf{c}_p = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{e}}_k \quad (\text{B.10.46})$$

として計算したが、

$$c_{px} = \frac{\omega}{k_x}, \quad c_{py} = \frac{\omega}{k_y}, \quad c_{pz} = \frac{\omega}{k_z} \quad (\text{B.10.47})$$

とする場合もある。ここで、 k_i は波数ベクトルの $i (= x, y, z)$ 成分である。このとき、

$$|\mathbf{c}_p|^2 = \frac{\omega^2}{k^2} \neq c_{px}^2 + c_{py}^2 + c_{pz}^2 \quad (\text{B.10.48})$$

となってしまって、一見両者は別のものを計算しているように見えるがどちらも間違いではない。それは、位相速度（ベクトル）が波長（ベクトル）と同じ性質を持つものだからである。

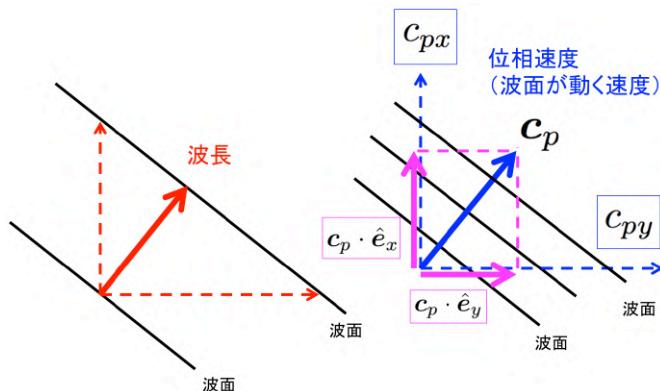


Fig.111 波長ベクトルと位相速度ベクトル

波数ベクトルは

$$|\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (\text{B.10.49})$$

となるので、波数と波長の関係

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}, \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y}, \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda_z} \quad (\text{B.10.50})$$

より、波長ベクトル λ は

$$\frac{1}{|\lambda|^2} = \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_y^2} + \frac{1}{\lambda_z^2} \quad (\text{B.10.51})$$

を満たす。ここで、 λ_i は波長ベクトルの $i (= x, y, z)$ 成分である。同様に、位相速度も

$$\frac{1}{|c_p|^2} = \frac{1}{c_{px}^2} + \frac{1}{c_{py}^2} + \frac{1}{c_{pz}^2} \quad (\text{B.10.52})$$

となる。

B.11 流体粒子の変位を用いた「遅い波」の説明

この節では、速度ベクトルではなく、流体粒子の変位ベクトルに注目する。流体粒子の変位を用いた分散関係の導出は Soward and Dormy(2007) [13] で行われている。変位ベクトルを δr とすると、微小振動のときは線形化して、

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \delta \mathbf{r}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \quad (\text{B.11.1})$$

と書ける。ここでは、簡単のため、

$$\mathbf{f} = f \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{B.11.2})$$

とする。すなわち、重力加速度の向きと回転軸が平行な場合を考える。遅い波の近似を行うと、変位ベクトルを用いた運動方程式 (B.2.6)、誘導方程式 (B.2.7)、密度の式 (B.3.6) は、

$$f \hat{\mathbf{e}}_z \times \frac{\partial \delta \mathbf{r}}{\partial t} = -\nabla P + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{b}}{\rho_0 \mu} + \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \mathbf{g} \quad (\text{B.11.3})$$

$$\mathbf{b} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \delta \mathbf{r} \quad (\text{B.11.4})$$

$$\Delta \rho = \frac{\rho_0 N^2}{g} (\delta \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) \quad (\text{B.11.5})$$

となる。ただし、誘導方程式 (B.11.4)、密度の式 (B.11.5) は、時間依存性を $\delta \mathbf{r} \propto e^{-i\omega t}$ と仮定し、 $\omega \neq 0$ として割り算した。(B.11.3) 式に (B.11.4) 式、(B.11.5) 式を代入すると、

$$f \hat{\mathbf{e}}_z \times \frac{\partial \delta \mathbf{r}}{\partial t} = -\nabla P + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \delta \mathbf{r}}{\rho_0 \mu} - N^2 (\delta \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{B.11.6})$$

となる。さらに、回転をとって、

$$-f (\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \nabla) \frac{\partial \delta \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 (\nabla \times \delta \mathbf{r})}{\rho_0 \mu} - N^2 \nabla (\delta \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) \times \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{B.11.7})$$

となる。ここで、さらに簡単のために y 方向一様にしてみよう。このとき、波数ベクトルは、

$$\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{e}}_x + k_z \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{B.11.8})$$

となる。波型の解 $\delta\mathbf{r} \propto e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$ を仮定すると、2 階微分については、

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \delta\mathbf{r} = -(\mathbf{B} \cdot \mathbf{k})^2 \delta\mathbf{r} \quad (\text{B.11.9})$$

$$(\hat{\mathbf{e}}_z \cdot \nabla) \frac{\partial \delta\mathbf{r}}{\partial t} = \omega k_z \delta\mathbf{r} \quad (\text{B.11.10})$$

が成り立ち、

$$-f\omega k_z \delta\mathbf{r} = -\omega_M^2 (\nabla \times \delta\mathbf{r}) - N^2 \nabla (\delta\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) \times \hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{B.11.11})$$

となる。以下 $f > 0$ とする。

B.11.1 $\delta\mathbf{r}_z = 0$ の場合

変位ベクトルを

$$\delta\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \delta r_{x0} \cos(k_x x + k_z z - \omega t) \\ \delta r_{y0} \sin(k_x x + k_z z - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11.12})$$

とおく。これを (B.11.11) 式に代入すると、

$$f\omega k_z \begin{pmatrix} \delta r_{x0} \cos(k_x x + k_z z - \omega t) \\ \delta r_{y0} \sin(k_x x + k_z z - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = \omega_M^2 \begin{pmatrix} -k_z \delta r_{y0} \cos(k_x x + k_z z - \omega t) \\ -k_z \delta r_{x0} \sin(k_x x + k_z z - \omega t) \\ k_x \delta r_{y0} \cos(k_x x + k_z z - \omega t) \end{pmatrix} \quad (\text{B.11.13})$$

となる。この式が任意の δr_{x0} 、 δr_{y0} で成り立つためには、

$$\omega = \pm \frac{\omega_M^2}{f} \quad (\text{B.11.14})$$

$$k_x = 0 \quad (\text{B.11.15})$$

でなければならない。また、 $\omega = \frac{\omega_M^2}{f}$ のときは、 $k_z > 0$ のとき、時間とともに z 正の方向に波が伝播し、

$$\delta r_{x0} = -\delta r_{y0} \quad (\text{B.11.16})$$

$\omega = -\frac{\omega_M^2}{f}$ のときは、 $k_z > 0$ のとき、時間とともに z 負の方向に波が伝播し、

$$\delta r_{x0} = \delta r_{y0} \quad (\text{B.11.17})$$

となる。ゆえに、変位ベクトルは、

$$\delta\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \delta r_{x0} \cos(k_z z \mp \frac{\omega_M^2}{f} t) \\ \mp \delta r_{x0} \sin(k_z z \mp \frac{\omega_M^2}{f} t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{複合同順}) \quad (\text{B.11.18})$$

と表される。 $z = 0$ の点では、

$$\delta \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \delta r_{x0} \cos\left(\frac{\omega_M^2}{f} t\right) \\ \delta r_{x0} \sin\left(\frac{\omega_M^2}{f} t\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11.19})$$

となっており、反時計回りに円運動していることがわかる^{*50}。次に、 $z = 0$ 近くの領域に注目する。 $z = 0$ で波が発生しているとすると、 $\omega = \frac{\omega_M^2}{f}$ のとき、 $k_z > 0$ の波は $z > 0$ に存在し、 $k_z < 0$ の波は $z < 0$ に存在する。ゆえに、 $k_z z > 0$ である。逆に、 $\omega = -\frac{\omega_M^2}{f}$ のとき、 $k_z z < 0$ となる。すなわち、単に $z = 0$ の点よりも位相が遅れた反時計回りの円運動になる。

この解は、密度成層の影響を受けていないので、MC 波である。鉛直方向の磁力線が曲げられたとしよう。そこには磁気張力がはたらいて、磁力線の曲げを元に戻そうとする。しかし、MC 波の時間スケールから見れば、慣性波は無限の速さで伝播できるので、磁力線が復元する前に、コリオリ力とつり合うような流れが達成されてしまうだろう。このため、Alfvén 波は伝播したくても伝播できず、流れは反時計回りにゆっくりと円運動する (Fig.112)。

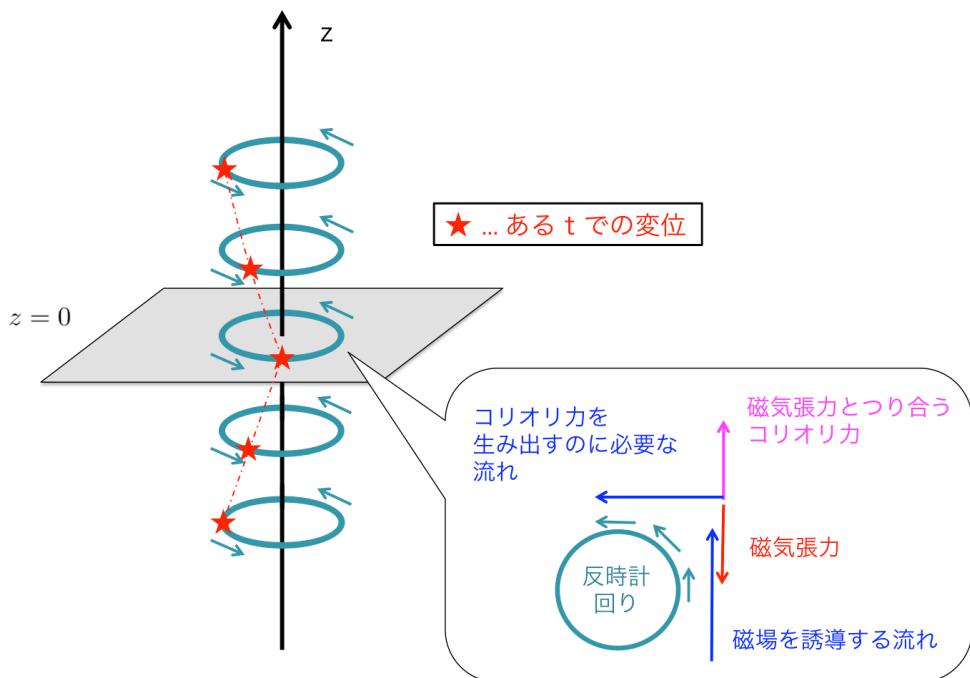


Fig.112 水平波数を持たない MC 波の伝播。 $k_x = 0$ のときは、背景磁場の鉛直成分 B_z のみの影響を受ける。

^{*50} 慣性波や慣性振動は、慣性項とコリオリ力のつり合いなので、時計回りに円運動をする。

B.11.2 $\delta r_z \neq 0$ の場合

変位ベクトルを

$$\delta \mathbf{r} = \begin{pmatrix} \delta r_{x0} \cos(k_x x + k_z z - \omega t) \\ \delta r_{y0} \sin(k_x x + k_z z - \omega t) \\ -\delta r_{x0} \frac{k_x}{k_z} \cos(k_x x + k_z z - \omega t) \end{pmatrix} \quad (\text{B.11.20})$$

とおく。ただし、 δr_z は連続の式を満たすように与えた。これを (B.11.11) 式に代入すると、

$$f \omega k_z \begin{pmatrix} \delta r_{x0} \cos(k_x x + k_z z - \omega t) \\ \delta r_{y0} \sin(k_x x + k_z z - \omega t) \\ -\delta r_{x0} \frac{k_x}{k_z} \cos(k_x x + k_z z - \omega t) \end{pmatrix} = \omega_M^2 \begin{pmatrix} -k_z \delta r_{y0} \cos(k_x x + k_z z - \omega t) \\ -(k_z + \frac{k_x^2}{k_z}) \delta r_{x0} \sin(k_x x + k_z z - \omega t) \\ k_x \delta r_{y0} \cos(k_x x + k_z z - \omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -N^2 \frac{k_x^2}{k_z} \delta r_{x0} \sin(k_x x + k_z z - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11.21})$$

となる。これが成り立つためには、

$$\omega = \pm \frac{\omega_M^2 \sqrt{k_x^2 + k_z^2}}{f k_z} \sqrt{1 + \frac{N^2 k_x^2}{\omega_M^2 (k_x^2 + k_z^2)}} \quad (\text{B.11.22})$$

でなければならない。また、変位の振幅は

$$\delta r_{y0} = \mp \delta r_{x0} \frac{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}}{k_z} \sqrt{1 + \frac{N^2 k_x^2}{\omega_M^2 (k_x^2 + k_z^2)}} \quad ((\text{B.11.22}) \text{ 式と複号同順}) \quad (\text{B.11.23})$$

$$\delta r_{z0} = -\delta r_{x0} \frac{k_x}{k_z} \quad (\text{B.11.24})$$

となる。もし、 $k_x = 0$ であれば、 $\delta r_z = 0$ の場合と一致し、反時計回りの円運動になる。一方、 $k_x \neq 0$ のときは $z = 0$ の面に対して振動面が傾き、 $|\delta r_{x0}| \neq |\delta r_{y0}|$ の橜円運動となる。 $z = 0$ 面に対しての傾きの角度を $\frac{\pi}{2} - \alpha$ とすると (Fig.113)、

$$k_x = k \cos \alpha \quad (\text{B.11.25})$$

$$k_z = k \sin \alpha \quad (\text{B.11.26})$$

$$\delta r_{z0} = -\delta r_{x0} \cot \alpha \quad (\text{B.11.27})$$

$$\frac{\delta r_{x0}}{\delta r_{y0}} = \mp \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \frac{N^2}{\omega_M^2} \cos^2 \alpha}} \quad (\text{B.11.28})$$

$$\omega = \pm \frac{\omega_M^2}{f \sin \alpha} \sqrt{1 + \frac{N^2 \cos^2 \alpha}{\omega_M^2}} \quad (\text{B.11.29})$$

となる。

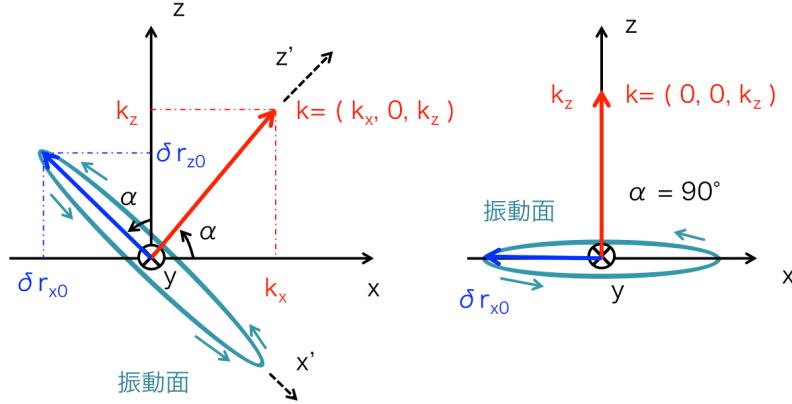


Fig.113 MAC 波の振動面の傾き

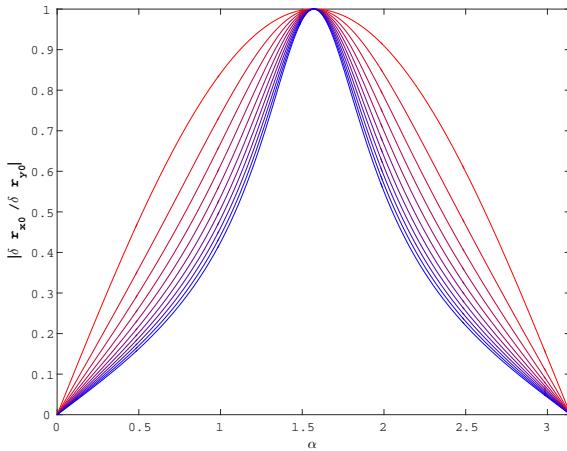


Fig.114 $\frac{\delta r_{x0}}{\delta r_{y0}}$ の大きさ。計算には (B.11.28) 式を用いた。赤から青に変化するにつれ、 $\frac{N^2}{\omega_M^2} = 0, 1, 2, \dots, 10$ と変えている。 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のときは、 $\delta r_{z0} = 0$ となり、成層の影響を受けない MC 波となって、 $\delta r_{x0} = \delta r_{y0}$ となる。 $\delta r_{z0} \neq 0$ の場合は、MAC 波となって、 $\delta r_{x0} < \delta r_{y0}$ となる。すなわち橭円運動をする。

ここで、波数ベクトル \mathbf{k} の方向を z' 、変位ベクトルの xz 平面への射影 $(\delta r_{x0}, 0, \delta r_{z0})$ の方向を x' というふうに新たに座標をとりなおすと、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) & 0 & \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) & 0 & \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha & 0 & -\cos \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (\text{B.11.30})$$

となるので、変位ベクトルは、

$$\delta \mathbf{r}_{(x', y, z')} = \begin{pmatrix} \delta r_{x'} \\ \delta r_y \\ \delta r_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) & 0 & \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) & 0 & \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_x \\ \delta r_y \\ \delta r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \alpha & 0 & -\cos \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_x \\ \delta r_y \\ \delta r_z \end{pmatrix} \quad (\text{B.11.31})$$

と変換される。ゆえに、

$$\delta \mathbf{r}_{(x',y,z')} \text{ 系} = \begin{pmatrix} \frac{\delta r_{x0}}{\sin \alpha} \cos(kz' - \omega t) \\ \delta r_{y0} \sin(kz' - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11.32})$$

というように簡単な形になる。さらに、

$$\delta r_{x'0} = \frac{\delta r_{x0}}{\sin \alpha} \quad (\text{B.11.33})$$

とすると、

$$\delta \mathbf{r}_{(x',y,z')} \text{ 系} = \begin{pmatrix} \delta r_{x'0} \cos(kz' - \omega t) \\ \delta r_{y0} \sin(kz' - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11.34})$$

$$\omega = \pm \frac{\omega_M^2}{f \sin \alpha} \sqrt{1 + \frac{N^2 \cos^2 \alpha}{\omega_M^2}} \quad (\text{B.11.35})$$

$$\delta r_{x'0} = \mp \frac{\delta r_{y0}}{\sqrt{1 + \frac{N^2}{\omega_M^2} \cos^2 \alpha}} \quad (\text{B.11.36})$$

となって、 $x'y$ 面上を、反時計回りに橈円運動していることがわかる。安定成層がある状態で、流体粒子が鉛直方向に動くとき、浮力の影響を受け、その方向に運動しづらくなるので、流体粒子の変位は鉛直方向に潰された橈円軌道を描き、いつも $\delta r_{x'0} < \delta r_{y0}$ となっている (Fig.115)。

安定成層がある場合、流体粒子が鉛直方向に移動するときに浮力が発生する。さらに、水平構造があれば、浮力のトルクが発生する。しかし、回転が速い場合は、そのトルクとつり合うようなコリオリ力のトルクが発生するような流れが、速やかに達成される。このような力のつり合いを保ちながら、MAC 波は伝播する。

一方、成層がとても強く、注目する波数について、内部重力波の周波数の方が、慣性波の周波数より十分大きい場合は、コリオリ力のトルクがつり合う前に、内部重力波となってしまい、MAC 波が存在できない。そのため、遅いモードは成層の影響を受けない水平流モードの Alfvén 波となる。

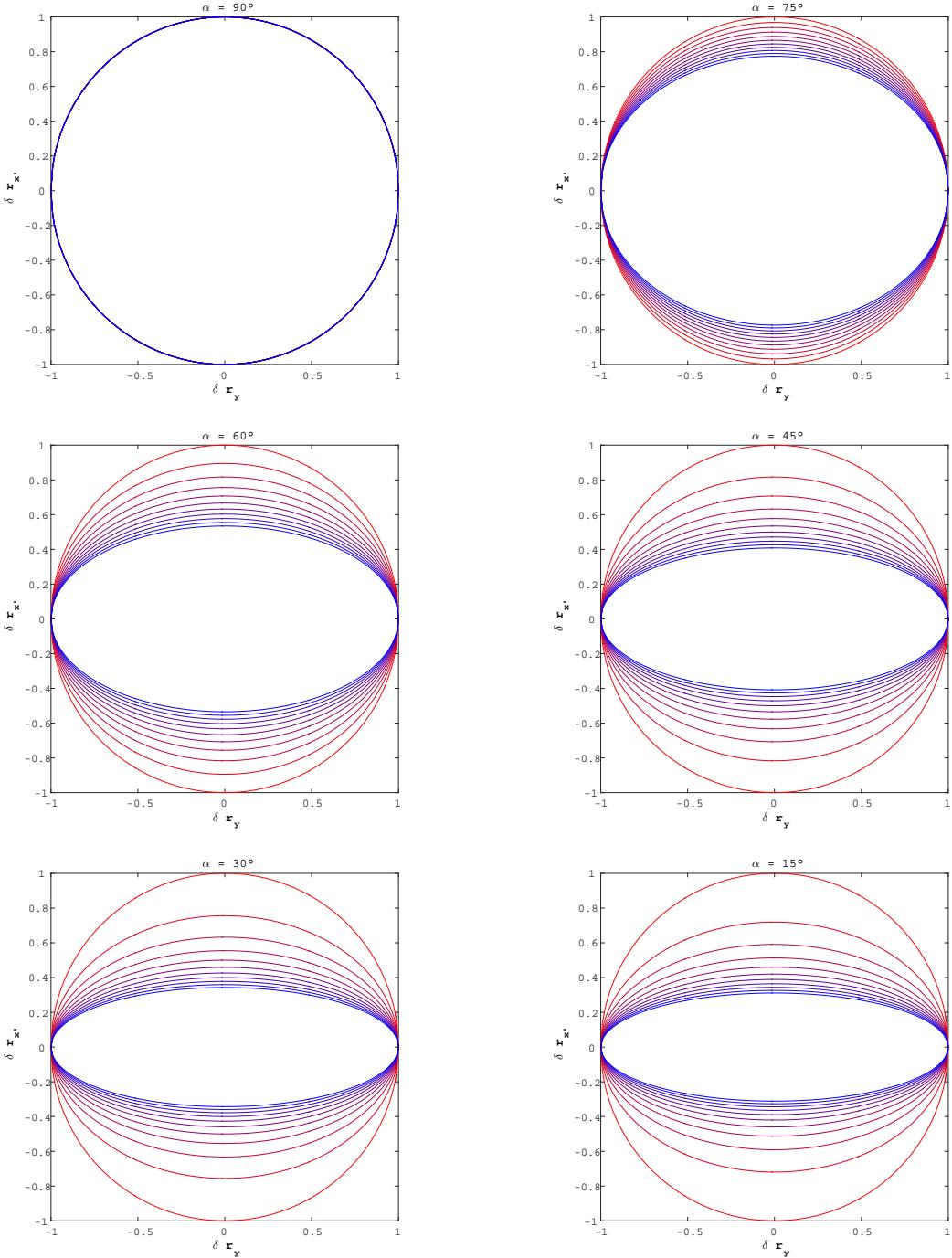


Fig.115 MAC 波による流体粒子の橙円軌道。 $\alpha = 90^\circ, 75^\circ, \dots, 15^\circ$ のものを示しており、赤から青に変化するにつれ、 $\frac{N^2}{\omega_M^2} = 0, 1, 2, \dots, 10$ と変えている（ただし、 $\alpha = 90^\circ$ の場合は、赤から青への全ての線が同じ円になっている）。 $\frac{N^2}{\omega_M^2} = 0$ の場合（最も赤い線）と、 $\alpha = 90^\circ$ の場合（一番左上のグラフ）は、 $\delta r_{x'0} = \delta r_{y0}$ となっていることがわかる。ただし、 $\delta r_{x'0} = \frac{\delta r_{x0}}{\sin \alpha}$ であるので、 $\delta r_{x0} = \delta r_{y0}$ となるのは $\alpha = 90^\circ$ のときのみである。ゆえに、成層していなくても $k_x \neq 0$ であれば、 xy 面上では橙円運動になる。その運動を $x'y$ 面上で見ると円運動になっている。

B.12 magnetostrophic balance への遷移

磁気張力によって、流体は加速される。しかし、成層が非常に強い（内部重力波周波数 ω_A が大きい）場合と、磁場が強い（Alfvén 波周波数 ω_M が大きい）場合には Alfvén 波は存在できるが、回転が速い（慣性波周波数 ω_C が大きい）場合には Alfvén 波は存在できない、すなわち、磁気張力によって加速されない^{*51}。また、回転が速くても、磁気張力は存在するが $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ という状況であれば、コリオリ力がはたらかないので、力がつり合はず、加速されるだろう。これらの様子を知るために、簡単な系の初期値問題を考える。

簡単のため、水平方向一様な無限空間を考える。さらに、自転角速度ベクトルと背景磁場は鉛直方向向き、すなわち、

$$\mathbf{f} = f\hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{B.12.1})$$

$$\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_z \quad (\text{B.12.2})$$

とし、鉛直流速と鉛直磁場は 0 とする。すなわち、鉛直方向に伝播する Alfvén 波、または、慣性振動と MC 波が発生する状況である。このとき、基礎方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}_H}{\partial t} + f\hat{\mathbf{e}} \times \mathbf{u}_H = \frac{B}{\rho_0 \mu} \frac{\partial \mathbf{b}_H}{\partial z} \quad (\text{B.12.3})$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}_H}{\partial t} = B \frac{\partial \mathbf{u}_H}{\partial z} \quad (\text{B.12.4})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_H = \nabla \cdot \mathbf{b}_H = 0 \quad (\text{B.12.5})$$

である。ただし、水平方向一様なので、 $\nabla_H \frac{p}{\rho_0} = \mathbf{0}$ とした。また、水平方向一様より、(B.12.5) 式はいつも成立する。ここで、

$$\begin{pmatrix} u_x(z, t) \\ u_y(z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x(t) \\ U_y(t) \end{pmatrix} \sin(k_z z) \quad (\text{B.12.6})$$

$$\begin{pmatrix} b_x(z, t) \\ b_y(z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x(t) \\ M_y(t) \end{pmatrix} \cos(k_z z) \quad (\text{B.12.7})$$

とすると、基礎方程式は

$$\frac{dU_x}{dt} - fU_y = -\frac{k_z B}{\rho_0 \mu} M_x \quad (\text{B.12.8})$$

$$\frac{dU_y}{dt} + fU_x = -\frac{k_z B}{\rho_0 \mu} M_y \quad (\text{B.12.9})$$

$$\frac{dM_x}{dt} = k_z B U_x \quad (\text{B.12.10})$$

$$\frac{dM_y}{dt} = k_z B U_y \quad (\text{B.12.11})$$

^{*51} 厳密には、磁気張力の加速によって、慣性波の周波数が少し大きくなる。

と簡単になる。さらに、虚数単位 i を用いて

$$\tilde{U} = U_x + iV_y, \quad \tilde{M} = M_x + iM_y \quad (\text{B.12.12})$$

とする。こうすることによって実部が x 成分、虚部が y 成分になる。ゆえに、

$$\frac{d\tilde{U}}{dt} + if\tilde{U} = -\frac{k_z B}{\rho_0 \mu} \tilde{M} \quad (\text{B.12.13})$$

$$\frac{d\tilde{M}}{dt} = k_z B \tilde{U} \quad (\text{B.12.14})$$

と書ける。 $\tilde{U} = \frac{1}{k_z B} \frac{d\tilde{M}}{dt}$ を用いて、 \tilde{U} を消去すると、さらに、

$$\frac{d^2 \tilde{M}}{dt^2} + if \frac{d\tilde{M}}{dt} + \frac{k_z^2 B^2 \tilde{M}}{\rho_0 \mu} = 0 \quad (\text{B.12.15})$$

となる。これは時間に関して定数係数の微分方程式なので、簡単に解けて、

$$\tilde{U} = C_1 \frac{-i(\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{k_z^2 B^2}{\rho_0 \mu}})}{k_z B} e^{-i(\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{k_z^2 B^2}{\rho_0 \mu}})t} + C_2 \frac{-i(\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{k_z^2 B^2}{\rho_0 \mu}})}{k_z B} e^{-i(\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{k_z^2 B^2}{\rho_0 \mu}})t} \quad (\text{B.12.16})$$

$$\tilde{M} = C_1 e^{-i(\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{k_z^2 B^2}{\rho_0 \mu}})t} + C_2 e^{-i(\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{k_z^2 B^2}{\rho_0 \mu}})t} \quad (\text{B.12.17})$$

となる。 C_1 、 C_2 は定数である。そして、2種類の初期条件を考える。

- (1) $t = 0$ で $\tilde{U} = 0$ 、 $\tilde{M} = M_{x0}$ （実数）のとき。すなわち、磁場の摂動を初期に与えた場合。
- (2) $t = 0$ で $\tilde{U} = U_{x0}$ （実数）、 $\tilde{M} = 0$ のとき。すなわち、流れの摂動を初期に与えた場合。

ここで、 $t = 0$ のとき、

$$\tilde{U}(t=0) = C_1 \frac{-i(\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{k_z^2 B^2}{\rho_0 \mu}})}{k_z B} + C_2 \frac{-i(\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{k_z^2 B^2}{\rho_0 \mu}})}{k_z B} \quad (\text{B.12.18})$$

$$\tilde{M}(t=0) = C_1 + C_2 \quad (\text{B.12.19})$$

より、この連立方程式を解くと、

$$C_1 = \frac{k_z B \tilde{U}(t=0) + i \tilde{M}(t=0) \left(\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{k_z^2 B^2}{\rho_0 \mu}} \right)}{-2i \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{k_z^2 B^2}{\rho_0 \mu}}} \quad (\text{B.12.20})$$

$$C_2 = \frac{k_z B \tilde{U}(t=0) + i \tilde{M}(t=0) \left(\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{k_z^2 B^2}{\rho_0 \mu}} \right)}{2i \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{k_z^2 B^2}{\rho_0 \mu}}} \quad (\text{B.12.21})$$

となる。以下では、この初期値問題の極限的なふるまいを調べる。

B.12.1 $\frac{f}{2} \ll \frac{k_z B}{\sqrt{\rho_0 \mu}}$ の場合（磁場が強い、または、波のスケールが小さい場合）

磁場が強い、または、波のスケールが小さいとき、

$$\frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{k_z^2 B^2}{\rho_0 \mu}} \approx \pm \frac{k_z B}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \quad (\text{B.12.22})$$

となるので、水平速度場 \tilde{U} と水平磁場 \tilde{M} は、近似的に

$$\tilde{U} \approx -i \frac{C_1}{\sqrt{\rho_0 \mu}} e^{-i \frac{k_z B}{\sqrt{\rho_0 \mu}} t} + i \frac{C_2}{\sqrt{\rho_0 \mu}} e^{i \frac{k_z B}{\sqrt{\rho_0 \mu}} t} \quad (\text{B.12.23})$$

$$\tilde{M} \approx C_1 e^{-i \frac{k_z B}{\sqrt{\rho_0 \mu}} t} + C_2 e^{i \frac{k_z B}{\sqrt{\rho_0 \mu}} t} \quad (\text{B.12.24})$$

となり、時間的変化は Alfvén 波が主である。ここで、流れと磁場の大きさは $\sqrt{\rho_0 \mu}$ 倍しか違わない。これは Alfvén 波の運動エネルギーと磁場エネルギーの等分配に由来する。そして、(1) と (2) のどちらの初期値においても、位相が違うだけで結果は同じである。また、初期に \tilde{U} または \tilde{M} が実数であったら、すべての時間で \tilde{U} 、 \tilde{M} は実数である。すなわち、 x 成分のみの摂動を初期に与えると、 y 成分の摂動がつくられることはない^{*52}。

回転があるにもかかわらず、回転の影響がほとんど現れていないのは、 $\frac{f}{2} \ll \frac{k_z B}{\sqrt{\rho_0 \mu}}$ であるため、すなわち、磁気張力の復元の方が系の回転よりも速く、流体粒子が回転を感じるよりも速く磁気張力によって引っ張られているからである。

^{*52} これらは近似したのちの結果について述べているので、実際には、多少のズレがある。

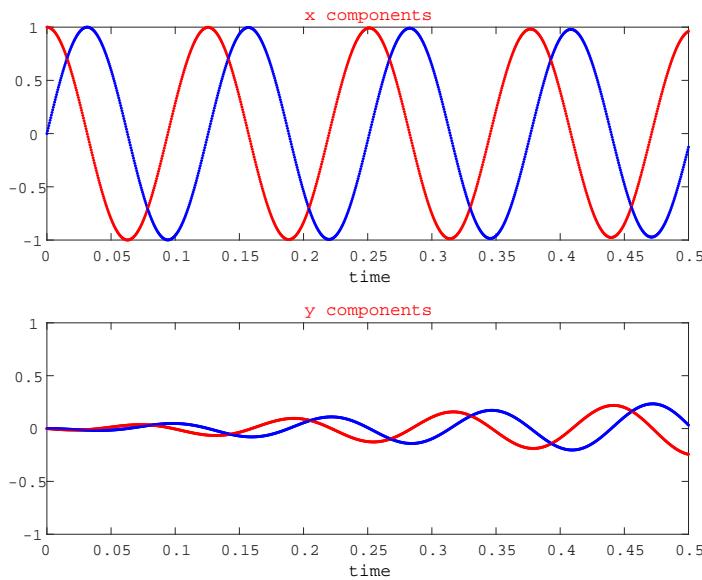


Fig.116 初期に流速を与えたときの、 $f = 1$ 、 $\sqrt{\rho_0 \mu} = 1$ 、 $k_z B = 50$ の場合の結果。横軸は、時間であり（左端が $t = 0$ ）、赤の線は流速、青の線は磁場の摂動を表す。上のグラフが x 成分、下のグラフが y 成分である。計算には、近似する前の式 (B.12.20) と (B.12.21) を用いた。初期に流速の x 成分を与えており、初めのうちは y 成分に比べ、 x 成分の振幅の方が大きい。ただし、弱いコリオリ力によって、徐々に y 成分が大きくなっている。

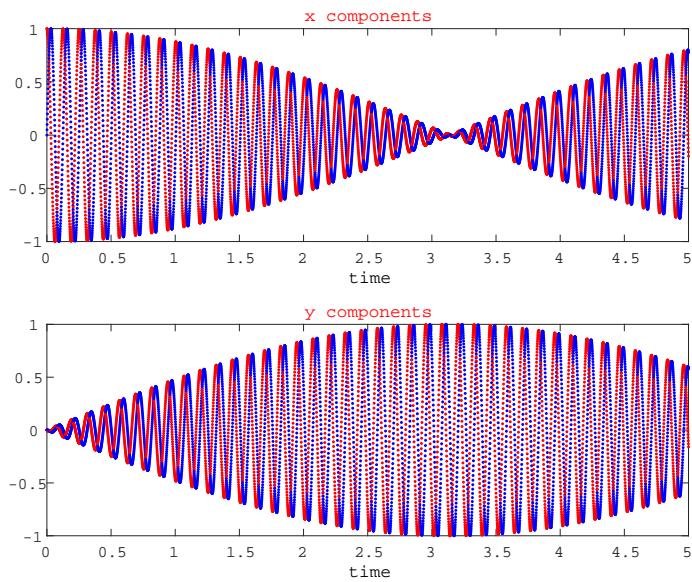


Fig.117 Fig.116と同じ状況だが、より長い時間の範囲で見たもの。周波数が Alfvén 波よりも少し速い fast mode と、Alfvén 波よりも少し遅い slow mode の重ね合わせによって、うなりが生じている。

B.12.2 $\frac{f}{2} \gg \frac{k_z B}{\sqrt{\rho_0 \mu}}$ の場合（回転が速い、または、波のスケールが大きい場合）

回転が速い、または、波のスケールが大きいとき、

$$\frac{f}{2} + \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{k_z^2 B^2}{\rho_0 \mu}} \approx f \quad (\text{B.12.25})$$

$$\frac{f}{2} - \sqrt{\frac{f^2}{4} + \frac{k_z^2 B^2}{\rho_0 \mu}} \approx -\frac{k_z^2 B^2}{f \rho_0 \mu} \quad (\text{B.12.26})$$

となるので、水平速度場 \tilde{U} と水平磁場 \tilde{M} は、近似的に

$$\tilde{U} \approx -iC_1 \frac{f}{k_z B} e^{-ift} + iC_2 \frac{k_z B}{f \rho_0 \mu} e^{i \frac{k_z^2 B^2}{f \rho_0 \mu} t} \quad (\text{B.12.27})$$

$$\tilde{M} \approx C_1 e^{-ift} + C_2 e^{i \frac{k_z^2 B^2}{f \rho_0 \mu} t} \quad (\text{B.12.28})$$

となる。この場合は、異なる 2 つの時間スケールがある。一つは慣性波（この場合は慣性振動）で表される速い時間スケールで、もう一つは MC 波で表されるほとんど定常な（magnetostrophic balance）ゆっくりと変化する時間スケールである。

(1) $t = 0$ で $\tilde{U} = 0$ 、 $\tilde{M} = M_{x0}$ （実数）のとき。すなわち、磁場の摂動を初期に与えた場合。

$t = 0$ で

$$\begin{cases} -C_1 \frac{f}{k_z B} + C_2 \frac{k_z B}{f \rho_0 \mu} = 0 \\ C_1 + C_2 = M_{x0} \end{cases} \quad (\text{B.12.29})$$

より、

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\frac{k_z^2 B^2}{f^2 \rho_0 \mu}}{1 + \frac{k_z^2 B^2}{f^2 \rho_0 \mu}} M_{x0} \\ C_2 = \frac{1}{1 + \frac{k_z^2 B^2}{f^2 \rho_0 \mu}} M_{x0} \end{cases} \quad (\text{B.12.30})$$

となるので、

$$\begin{cases} \tilde{U} = -i \frac{\frac{k_z B}{f \rho_0 \mu}}{1 + \frac{k_z^2 B^2}{f^2 \rho_0 \mu}} M_{x0} e^{-ift} + i \frac{\frac{k_z B}{f \rho_0 \mu}}{1 + \frac{k_z^2 B^2}{f^2 \rho_0 \mu}} M_{x0} e^{i \frac{k_z^2 B^2}{f \rho_0 \mu} t} \\ \tilde{M} = \frac{\frac{k_z^2 B^2}{f^2 \rho_0 \mu}}{1 + \frac{k_z^2 B^2}{f^2 \rho_0 \mu}} M_{x0} e^{-ift} + \frac{1}{1 + \frac{k_z^2 B^2}{f^2 \rho_0 \mu}} M_{x0} e^{i \frac{k_z^2 B^2}{f \rho_0 \mu} t} \end{cases} \quad (\text{B.12.31})$$

さらに、 $1 \gg \frac{k_z^2 B^2}{f^2 \rho_0 \mu}$ より、

$$\begin{cases} \tilde{U} = -i \frac{k_z B}{f \rho_0 \mu} M_{x0} \left(e^{-ift} - e^{i \frac{k_z^2 B^2}{f \rho_0 \mu} t} \right) \\ \tilde{M} = M_{x0} e^{i \frac{k_z^2 B^2}{f \rho_0 \mu} t} \end{cases} \quad (\text{B.12.32})$$

となる。流れ場の式を見ると、半分が慣性振動として変化し、半分が MC 波 (magnetostrophic balance) として変化している。一方、磁場の時間変化はほとんど MC 波で説明される。

すなわち、磁場の摂動が与えられたとき、磁場による復元力によって流体が加速されるのよりも先に、慣性振動によって、コリオリ力と磁気張力がつり合うような流れが達成される。その流れは、新たな磁場の摂動を生じさせるが、慣性振動によって、常につり合った状態になっている。

また、磁場のエネルギーの方が運動エネルギーよりも大きい。

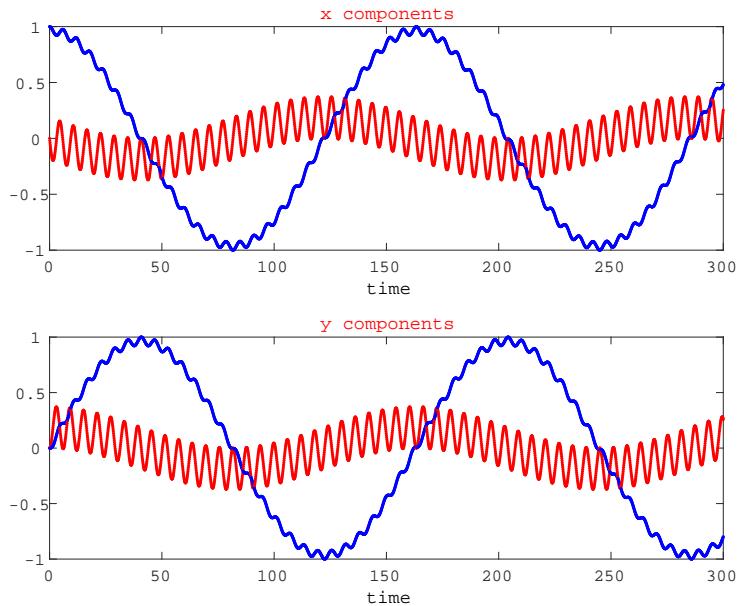


Fig.118 初期に磁場の摂動を与えたときの、 $f = 1$ 、 $\sqrt{\rho_0 \mu} = 1$ 、 $k_z B = 0.2$ の場合の結果。周期が短い波が慣性振動、周期が長い波が MC 波 (magnetostrophic balance) である。

(2) $t = 0$ で $\tilde{U} = U_{x0}$ (実数)、 $\tilde{M} = 0$ のとき。すなわち、流れの摂動を初期に与えた場合。

$t = 0$ で

$$\begin{cases} -iC_1 \frac{f}{k_z B} + iC_2 \frac{k_z B}{f \rho_0 \mu} = U_{x0} \\ C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{B.12.33})$$

より、

$$\begin{cases} C_1 = i \frac{\frac{k_z B}{f}}{1 + \frac{k_z^2 B^2}{f^2 \rho_0 \mu}} U_{x0} \\ C_2 = -i \frac{\frac{k_z B}{f}}{1 + \frac{k_z^2 B^2}{f^2 \rho_0 \mu}} U_{x0} \end{cases} \quad (\text{B.12.34})$$

となるので、

$$\begin{cases} \tilde{U} = \frac{1}{1 + \frac{k_z^2 B^2}{f^2 \rho_0 \mu}} U_{x0} e^{-ift} + \frac{\frac{k_z^2 B^2}{f^2 \rho_0 \mu}}{1 + \frac{k_z^2 B^2}{f^2 \rho_0 \mu}} U_{x0} e^{i \frac{k_z^2 B^2}{f \rho_0 \mu} t} \\ \tilde{M} = i \frac{\frac{k_z B}{f}}{1 + \frac{k_z^2 B^2}{f^2 \rho_0 \mu}} U_{x0} e^{-ift} - i \frac{\frac{k_z B}{f}}{1 + \frac{k_z^2 B^2}{f^2 \rho_0 \mu}} U_{x0} e^{i \frac{k_z^2 B^2}{f \rho_0 \mu} t} \end{cases} \quad (\text{B.12.35})$$

さらに、 $1 \gg \frac{k_z^2 B^2}{f^2 \rho_0 \mu}$ より、

$$\begin{cases} \tilde{U} = U_{x0} e^{-ift} \\ \tilde{M} = i \frac{k_z B}{f} U_{x0} \left(e^{-ift} - e^{i \frac{k_z^2 B^2}{f \rho_0 \mu} t} \right) \end{cases} \quad (\text{B.12.36})$$

となる。流れ場はほとんど慣性振動的で、磁場は半分が慣性振動、半分が MC 波である。また、運動エネルギーの方が磁場エネルギーよりも大きい。

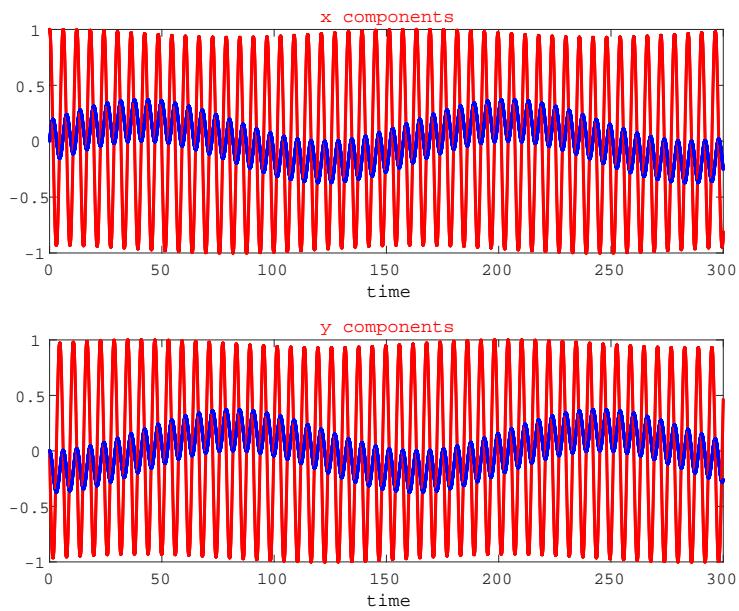


Fig.119 初期に流速を与えたときの、 $f = 1$ 、 $\sqrt{\rho_0 \mu} = 1$ 、 $k_z B = 0.2$ の場合の結果。

付録 C 鉛直方向に回転軸をもつ、無限平板にはさまれた薄い流体層

C.1 考える系

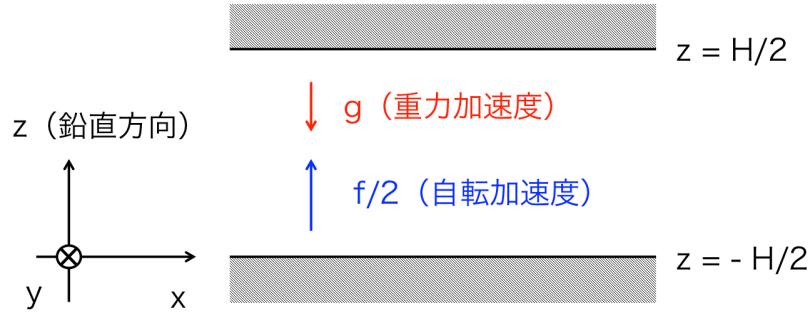


Fig.120 考える系

この章では、付録 B の状況に加え、境界がある場合を考える。境界は、水平方向に無限に広い、平らな固体の壁であるとする。すなわち、境界に地形があったり、境界面が振動するような場合は、この章の結果をそのまま適用することはできない。

そのような固体の壁が $z = \pm \frac{H}{2}$ の位置に、平行に並んでいる状況を考える (Fig.141)。ここで、 H は流体層の（鉛直方向に測った）厚さである。そして、この流体層は水平方向には無限に広いとする。

さらに、簡単のため、回転軸は鉛直上向きを向いているとする。

C.2 基礎方程式

付録 B との違いは、鉛直方向に壁があることと、 $f = f\hat{e}_z$ であることのみである。ゆえに、基礎方程式は、(B.4.14)~(B.4.17) 式より

$$\frac{\partial \zeta_z}{\partial t} - f \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)(\mu j_z)}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.2.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_z + f \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} = \gamma \quad (\text{C.2.2})$$

$$\frac{\partial(\mu j_z)}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \zeta_z \quad (\text{C.2.3})$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \nabla^2}{\rho_0 \mu} - N^2 \nabla_H^2 \right) u_z \quad (\text{C.2.4})$$

となる。その他、連続の式 (B.2.13)、磁場に関する Gauss の法則 (B.2.10)、Ampère の法則 (B.2.8)、Ohm の法則 (B.2.10) は同じ式で、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{C.2.5})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (\text{C.2.6})$$

$$\nabla \times \mathbf{b} = \mu \mathbf{j} \quad (\text{C.2.7})$$

$$\mathbf{e} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0 \quad (\text{C.2.8})$$

である。さらに、境界条件を与えるために必要な式は、誘導方程式に含まれている Faraday の電磁誘導の法則

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{e} = 0 \quad (\text{C.2.9})$$

である。

C.3 鉛直モード展開

付録 B と同じように、フーリエ変換を行う。ただし、鉛直方向には境界があるので、鉛直方向には付録 B のように、任意の波数 k_z を与えることができない。そこで、水平方向と時間に対して、フーリエ変換する。ゆえに、

$$\begin{pmatrix} \zeta_z(\mathbf{r}, t) \\ u_z(\mathbf{r}, t) \\ \mu j_z(\mathbf{r}, t) \\ \gamma(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \Re \left[\begin{pmatrix} \zeta_{z0}(z) \\ u_{z0}(z) \\ \mu j_{z0}(z) \\ \gamma_0(z) \end{pmatrix} e^{i\mathbf{k}_H \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{C.3.1})$$

とする。ここで、 $\zeta_{z0}(z)$ 、 $u_{z0}(z)$ 、 $\mu j_{z0}(z)$ 、 $\gamma_0(z)$ は、付録 B のときとは異なり、 z の関数である。4 つの基礎方程式に代入すると、

$$-i\omega \zeta_{z0}(z) - f \frac{du_{z0}(z)}{dz} = \left(\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H + B_z \frac{d}{dz} \right) \frac{\mu j_{z0}(z)}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.3.2})$$

$$-i\omega \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) u_{z0}(z) + f \frac{d\zeta_{z0}(z)}{dz} = \gamma_0(z) \quad (\text{C.3.3})$$

$$-i\omega \mu j_{z0}(z) = \left(\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H + B_z \frac{d}{dz} \right) \zeta_{z0}(z) \quad (\text{C.3.4})$$

$$-i\omega \gamma_0(z) = \left[\frac{1}{\rho_0 \mu} \left(\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H + B_z \frac{d}{dz} \right)^2 \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] u_{z0}(z) \quad (\text{C.3.5})$$

となる。

C.4 固有方程式の導出

(C.3.2) 式に (C.3.4) 式を代入して、 j_{z0} を消去すると、

$$-\omega^2 \zeta_{z0}(z) + i\omega f \frac{du_{z0}(z)}{dz} = \frac{1}{\rho_0 \mu} \left(\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H + B_z \frac{d}{dz} \right)^2 \zeta_{z0}(z) \quad (\text{C.4.1})$$

となる。Alfvén 波速度ベクトル $\mathbf{V}_A = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{\rho_0 \mu}}$ 、 $V_{Az} = \frac{B_z}{\sqrt{\rho_0 \mu}}$ を用いて、整理すると、

$$i\omega f \frac{du_{z0}(z)}{dz} = \left[\omega^2 + \left(\mathbf{V}_A \cdot i\mathbf{k}_H + V_{Az} \frac{d}{dz} \right)^2 \right] \zeta_{z0}(z) \quad (\text{C.4.2})$$

となる。次に、(C.3.3) 式に (C.3.5) 式を代入して、 γ_0 を消去すると、

$$-\omega^2 \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) u_{z0}(z) - i\omega f \frac{d\zeta_{z0}(z)}{dz} = \left[\left(\mathbf{V}_A \cdot i\mathbf{k}_H + V_{Az} \frac{d}{dz} \right)^2 \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] u_{z0}(z) \quad (\text{C.4.3})$$

となる。さらに、整理すると、

$$-i\omega f \frac{d\zeta_{z0}(z)}{dz} = \left[\left(\omega^2 + \left(\mathbf{V}_A \cdot i\mathbf{k}_H + V_{Az} \frac{d}{dz} \right)^2 \right) \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] u_{z0}(z) \quad (\text{C.4.4})$$

となる。

(C.4.2) 式と (C.4.4) 式を見ると、 $f = 0$ または鉛直構造を持たない ($\frac{d}{dz} = 0$) とき^{*53}に、 u_{z0} のモードと ζ_{z0} のモードに分離するという付録 B で得られた結果が、ここでも確認できる。

そのようなモードの分離がない場合、(C.4.2) 式と (C.4.4) 式より、 ζ_{z0} を消去すると、固有方程式

$$\begin{aligned} & \omega^2 f^2 \frac{d^2 u_{z0}(z)}{dz^2} \\ &= \left[\omega^2 + \left(\mathbf{V}_A \cdot i\mathbf{k}_H + V_{Az} \frac{d}{dz} \right)^2 \right] \left[\left(\omega^2 + \left(\mathbf{V}_A \cdot i\mathbf{k}_H + V_{Az} \frac{d}{dz} \right)^2 \right) \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] u_{z0}(z) \end{aligned} \quad (\text{C.4.5})$$

が得られる。

一方、 $f = 0$ または鉛直構造を持たない ($\frac{d}{dz} = 0$) ときの固有方程式は、(C.4.2) 式と (C.4.4) 式より、

$$\left[\omega^2 + \left(\mathbf{V}_A \cdot i\mathbf{k}_H + V_{Az} \frac{d}{dz} \right)^2 \right] \zeta_{z0}(z) = 0 \quad (\text{C.4.6})$$

$$\left[\left(\omega^2 + \left(\mathbf{V}_A \cdot i\mathbf{k}_H + V_{Az} \frac{d}{dz} \right)^2 \right) \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] u_{z0}(z) = 0 \quad (\text{C.4.7})$$

である。ただし、鉛直構造を持たない場合は、 ζ_{z0} と u_{z0} は z に依存しない。

^{*53} $f \neq 0$ でも鉛直構造がなければ、回転の影響を受けない。このことは、回転軸方向に無限に続く柱状の渦（テイラーブレイン）を考えることで、理解できる。回転軸に垂直な、ある面上に沿った閉曲線を考える。流れは非圧縮かつ鉛直構造を持たない（後の節で示すが、上下の壁の境界条件から、鉛直構造がないとき、全領域で $u_z = 0$ である。）ので、その閉曲線上でコリオリ力の和をとると、力はつり合って 0 になる。すなわち、柱状の渦は回転の影響を受けない。そして、もし背景渦度勾配があれば、鉛直構造がなくてもロスピーウェー波が存在できる（付録 F）。また、もし磁場があれば、地球外核内部の波動として有名な、回転の影響を受けないねじれ波（torsional wave、本質的には Alfvén 波）が存在できる。

C.5 速度と磁場の水平成分を計算する場合

速度と磁場の水平成分が必要な場合は、付録 B と同様に速度ポテンシャル ϕ と流線関数 ψ を定義すれば良い。

z 微分だけフーリエ変換しないこと以外は同様にすると、速度と磁場の水平成分は、

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \Re \left[\left\{ \frac{1}{|\mathbf{k}_H|^2} \begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \end{pmatrix} \frac{du_{z0}(z)}{dz} + \frac{\zeta_{z0}(z)}{|\mathbf{k}_H|^2} \begin{pmatrix} ik_y \\ -ik_x \end{pmatrix} \right\} e^{i\mathbf{k}_H \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{C.5.1})$$

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \Re \left[\left\{ \frac{1}{|\mathbf{k}_H|^2} \begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \end{pmatrix} \frac{db_{z0}(z)}{dz} + \frac{\mu j_{z0}(z)}{|\mathbf{k}_H|^2} \begin{pmatrix} ik_y \\ -ik_x \end{pmatrix} \right\} e^{i\mathbf{k}_H \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{C.5.2})$$

となる。

C.6 境界条件の導出

C.6.1 散逸の有無と境界条件

散逸がある場合の基礎方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \zeta_z - f \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)(\mu j_z)}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.6.1})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 u_z + f \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \nabla^2 b_z}{\rho_0 \mu} - \frac{g \nabla_H^2 \Delta \rho}{\rho_0} \quad (\text{C.6.2})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) (\mu j_z) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \zeta_z \quad (\text{C.6.3})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) b_z = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_z \quad (\text{C.6.4})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \kappa \nabla^2 \right) \Delta \rho = \frac{\rho_0 N^2}{g} u_z \quad (\text{C.6.5})$$

である。ここで、 ν 、 η 、 κ はそれぞれ、動粘性係数 (kinematic viscosity)^{*54}、磁気拡散率、物質の拡散率である。 z に関する境界条件がいくつ必要かは、 z 微分の数による。

まず、非散逸の状況に近づけるために、 $\kappa = \eta$ としよう。このとき、独立な成分は 4 つになって

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \zeta_z - f \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)(\mu j_z)}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.6.7})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 u_z + f \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} = \gamma \quad (\text{C.6.8})$$

*54 粘性係数 η_v (dynamic viscosity) との関係性は、

$$\nu = \frac{\eta_v}{\rho_0} \quad (\text{C.6.6})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right)(\mu j_z) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \zeta_z \quad (\text{C.6.9})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right)\gamma = \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \nabla^2}{\rho_0 \mu} - N^2 \nabla_H^2\right) u_z \quad (\text{C.6.10})$$

となる。独立な成分の数が減ったということは、 $\Delta\rho$ の境界での値はその他の量の境界条件から決まる、ということを表している。

以上の式をまとめると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right)\zeta_z - \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right)f \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \zeta_z}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.6.11})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right)\nabla^2 u_z + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right)f \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} = \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \nabla^2}{\rho_0 \mu} - N^2 \nabla_H^2\right) u_z \quad (\text{C.6.12})$$

となる。

ここで、 $f = 0$ のときは、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right)\zeta_z = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \zeta_z}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.6.13})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right)\nabla^2 u_z = \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \nabla^2}{\rho_0 \mu} - N^2 \nabla_H^2\right) u_z \quad (\text{C.6.14})$$

となるので、 ζ_z については境界条件が 4 つ、 u_z については 6 つ必要である。

一方、 $f \neq 0$ のときは、 ζ_z と u_z は関係しあい、

$$\mathcal{A} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right) - \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.6.15})$$

とおいて、

$$\mathcal{A}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right)\nabla^2 u_z + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right)^2 f^2 \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial z^2} = \mathcal{A}\left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \nabla^2}{\rho_0 \mu} - N^2 \nabla_H^2\right) u_z \quad (\text{C.6.16})$$

となるので、10 個の境界条件が必要になる。

次に、 ν や η を 0 にしたとき、必要な境界条件の数がどのように変化するか見ていく。

(1) 非粘性 ($\nu = 0$) の場合

$\nu = 0$ とすると、 $f = 0$ のときは

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right) \frac{\partial \zeta_z}{\partial t} = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \zeta_z}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.6.17})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right) \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_z = \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \nabla^2}{\rho_0 \mu} - N^2 \nabla_H^2\right) u_z \quad (\text{C.6.18})$$

となって、必要な境界条件が ζ_z と u_z でそれぞれ 2 つずつ少なくなる。 $f \neq 0$ のときは

$$\mathcal{A} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.6.19})$$

$$\mathcal{A} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_z + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right)^2 f^2 \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial z^2} = \mathcal{A} \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \nabla^2}{\rho_0 \mu} - N^2 \nabla_H^2 \right) u_z \quad (\text{C.6.20})$$

となって、必要な境界条件が 4 つ少なくなる。これは、非粘性になったために、境界での粘性応力の条件を与える必要がなくなったからである^{*55}。すなわち、流速の水平成分は、境界で 0 でなくても良い。

(2) 完全導体 ($\sigma_j = 0$) の場合

$\eta = 0$ とすると、 $f = 0$ のときは

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \frac{\partial \zeta_z}{\partial t} = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \zeta_z}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.6.21})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_z = \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \nabla^2}{\rho_0 \mu} - N^2 \nabla_H^2 \right) u_z \quad (\text{C.6.22})$$

となって、必要な境界条件が ζ_z と u_z でそれぞれ 2 つずつ少なくなる。 $f \neq 0$ のときは

$$\mathcal{A} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.6.23})$$

$$\mathcal{A} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u_z + \frac{\partial^2}{\partial t^2} f^2 \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial z^2} = \mathcal{A} \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \nabla^2}{\rho_0 \mu} - N^2 \nabla_H^2 \right) u_z \quad (\text{C.6.24})$$

となって、必要な境界条件が 4 つ少なくなる。これは、完全導体であるために、境界表面に表面電流が流れうることと関係している。これについては、C.6.4 節で述べる。

(3) 非粘性かつ完全導体 ($\nu = \sigma_j = 0$) の場合

$\nu = \eta = 0$ とすると、 $f = 0$ のときは

$$\frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial t^2} = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \zeta_z}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.6.25})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 u_z = \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \nabla^2}{\rho_0 \mu} - N^2 \nabla_H^2 \right) u_z \quad (\text{C.6.26})$$

となる。ただし、このときは単純に必要な境界条件が ζ_z と u_z でそれぞれ $2 \times 2 = 4$ つずつ少なくなるとは限らない。そうなるのは、 $B_z = 0$ の場合であり、 $B_z \neq 0$ のときは、2 つずつ少なくなる。また、 $f \neq 0$ のときは

$$\mathcal{A} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.6.27})$$

$$\mathcal{A} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 u_z + \frac{\partial^2}{\partial t^2} f^2 \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial z^2} = \mathcal{A} \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \nabla^2}{\rho_0 \mu} - N^2 \nabla_H^2 \right) u_z \quad (\text{C.6.28})$$

となって、 $B_z = 0$ のときは、必要な境界条件が 8 つ少くなり、 $B_z \neq 0$ のときは、必要な境界条件が 4 つ少なくなる。非散逸で $B_z \neq 0$ のとき、境界条件の数に注意すべきだということは、Roberts and Scott(1965) [46] にも指摘されている。

^{*55} もし与えてしまうと境界条件の与えすぎになってしまい、自明な解しか存在できなくなってしまう。

C.6.2 壁内部の物理量

境界条件を求めるためには、壁内部の物理量がどのような値をとるかを与えなければならない。

まず、壁は剛体であり、変形しないので、

$$\mathbf{u}_{\text{壁内部}} = \mathbf{0} \quad (\text{C.6.29})$$

となる。

次に、壁の電磁気的な性質について考える。完全導体でない（電気伝導度 σ_j が有限）場合の Ohm の法則は

$$\mathbf{j} = \sigma_j(\mathbf{e} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (\text{C.6.30})$$

である。(C.6.29) 式より、壁内部の場合は

$$\mathbf{j}_{\text{壁内部}} = \sigma_j, \text{壁内部} \mathbf{e}_{\text{壁内部}} \quad (\text{C.6.31})$$

となる。以下では、壁の電磁気学的な性質は以下の二つに限る。

- (i) 完全導体 ($\sigma_j, \text{壁内部} = +\infty$)
- (ii) 絶縁体 ($\sigma_j, \text{壁内部} = 0$)

ゆえに、壁が完全導体のとき、

$$\mathbf{e}_{\text{完全導体の壁内部}} = \mathbf{0} \quad (\text{C.6.32})$$

となる。さらに、Faraday の電磁誘導の法則 (C.2.9) より、

$$\frac{\partial \mathbf{b}_{\text{完全導体の壁内部}}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (\text{C.6.33})$$

である。ここで、 \mathbf{b} は摂動なので、必ずある時間で $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ となるとすれば、

$$\mathbf{b}_{\text{完全導体の壁内部}} = \mathbf{0} \quad (\text{C.6.34})$$

として問題ない。

一方、壁が絶縁体のとき、

$$\mathbf{j}_{\text{絶縁体の壁内部}} = \mathbf{0} \quad (\text{C.6.35})$$

となる。ゆえに、Ampère の法則 (C.2.7) より、

$$(\nabla \times \mathbf{b})_{\text{絶縁体の壁内部}} = \mathbf{0} \quad (\text{C.6.36})$$

となる^{*56}ので、磁場のスカラー ポテンシャル Φ を用いて、

$$\mathbf{b}_{\text{絶縁体の壁内部}} = \nabla \Phi \quad (\text{C.6.38})$$

^{*56} 絶縁体内部では、MHD 近似は使えないの、Ampère の法則は、正しくは変位電流を含んだ

$$\nabla \times \mathbf{b} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \quad (\text{C.6.37})$$

である。ここで、 c は光速である。ただし、電磁波が無限の速さで伝わるような時間のスケールでは、変位電流は無視してよいので、MHD 近似の下での Ampère の法則を用いて良い。

と書ける。ここで、磁場に関する Gauss の法則 (C.2.6) に代入すると、

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (\text{C.6.39})$$

となる。流体内部と同様にフーリエ変換すると、このスカラーポテンシャルの z 依存性部分が満たすべき式は

$$\frac{d^2 \Phi_0(z)}{dz^2} = |\mathbf{k}_H|^2 \phi_0(z) \quad (\text{C.6.40})$$

となる。これは簡単に解けて、

$$\Phi_0(z) = \Phi_0(z=0) e^{\pm |\mathbf{k}_H| z} \quad (\text{C.6.41})$$

となる。ここで、複号は無限遠で $\Phi_0 = 0$ となる方を選ぶ。

C.6.3 速度に関する境界条件

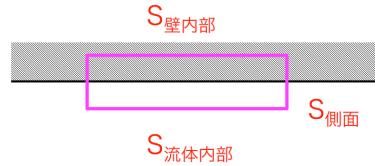


Fig.121 境界をはさんだ非常に薄い閉曲面 S

まずは連続の式 (C.2.5) に注目しよう。境界をはさんだ非常に薄い閉曲面 S を考える。この S は $S_{\text{壁内部}}$ 、 $S_{\text{流体内部}}$ 、 $S_{\text{側面}}$ から構成される (Fig.121)。ここで、 $S_{\text{壁内部}}$ と $S_{\text{流体内部}}$ の面積は等しく、非常に薄いので、 $S_{\text{側面}}$ の面積はとても小さい。ここで、連続の式を S 内部の領域 V で体積積分する。

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{u}) dV = 0 \quad (\text{C.6.42})$$

Gauss の定理より、

$$\int_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_{\text{壁内部}}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{\text{流体内部}}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_{\text{側面}}} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{C.6.43})$$

ここで、 \mathbf{S} は面積ベクトルである。 $S_{\text{側面}}$ の寄与はとても小さいので、

$$\mathbf{u}_{\text{壁内部}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{u}_{\text{流体内部}} \cdot (-\hat{\mathbf{e}}_z) = 0 \quad (\text{C.6.44})$$

さらに、(C.6.29) 式より、

$$u_z, \text{ 流体内部} = 0 \quad (\text{C.6.45})$$

となる。

C.6.4 電磁気学的な境界条件

連続の式から得られた境界条件の結果より、磁場に関するガウスの法則も同様にすると、

$$b_z, \text{壁内部} = b_z, \text{流体内部} \quad (\text{C.6.46})$$

となる。すなわち、完全導体の壁のときは、

$$b_z, \text{流体内部} = 0 \quad (\text{C.6.47})$$

絶縁体の壁のときは、 $b_z, \text{壁内部} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ より、

$$b_z, \text{流体内部} = \Re \left[\pm |\mathbf{k}_H| \Phi_0(z=0) e^{\pm |\mathbf{k}_H| z} e^{i \mathbf{k}_H \cdot \mathbf{r}} e^{-i \omega t} \right] \quad (\text{C.6.48})$$

となる。ただし、複合は無限遠で $\Phi_0 = 0$ となる方を選ぶ。

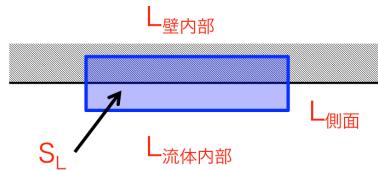


Fig.122 境界をはさんだ細長い面 S_L

次に、Ampère の法則 (C.2.7) を、境界をはさんだ細長い面 S_L で面積分する。 S_L は、非常に細長い長方形で、長辺は $L_{\text{流体内部}}$ と $L_{\text{壁内部}}$ 、短辺は $L_{\text{側面}}$ とする (Fig.131)。

$$\int_{S_L} (\nabla \times \mathbf{b}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_L} \mu \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{C.6.49})$$

Stokes の定理より、 $L_{\text{側面}}$ の寄与は小さいので、

$$\int_L \mathbf{b} \cdot d\mathbf{l} = \int_{L_{\text{壁内部}}} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{l} + \int_{L_{\text{流体内部}}} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_L} \mu \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{C.6.50})$$

となる。ここで、流体は完全導体（非散逸）なので、電流 \mathbf{j} は電場と関係せず存在できる。すなわち、 S_L をどんなに小さくしても

$$\int_{S_L} \mu \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu \mathbf{j}_S \quad (\text{C.6.51})$$

となるような、表面電流 \mathbf{j}_S が存在しうる。ゆえに、

$$b_x, \text{壁内部} \neq b_x, \text{流体内部} \quad (\text{C.6.52})$$

$$b_y, \text{壁内部} \neq b_y, \text{流体内部} \quad (\text{C.6.53})$$

であっても良い⁵⁷。

ところで、Ampère の法則 (C.2.7) の発散をとると、

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{C.6.54})$$

となるので、連続の式などと同様に体積積分して

$$j_z, \text{壁内部} = j_z, \text{流体内部} \quad (\text{C.6.55})$$

となる。絶縁体の壁のときは、(C.6.35) 式より

$$j_z, \text{流体内部} = 0 \quad (\text{C.6.56})$$

となる。

最後に、Faraday の電磁誘導の法則 (C.2.9) を Ampère の法則のときと同様に面積分して

$$\int_{S_L} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_L} (\nabla \times \mathbf{e}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{C.6.57})$$

磁場の時間変化は有限であることと、Stokes の定理より、

$$e_x, \text{壁内部} = e_x, \text{流体内部} \quad (\text{C.6.58})$$

$$e_y, \text{壁内部} = e_y, \text{流体内部} \quad (\text{C.6.59})$$

となる。ここで、 $\mathbf{e}_{\text{流体内部}}$ は完全導体の Ohm の法則に従うので、

$$e_x, \text{壁内部} = -(\mathbf{u}_{\text{流体内部}} \times \mathbf{B})_x = -u_y, \text{流体内部} B_z \quad (\text{C.6.60})$$

$$e_y, \text{壁内部} = -(\mathbf{u}_{\text{流体内部}} \times \mathbf{B})_y = u_x, \text{流体内部} B_z \quad (\text{C.6.61})$$

となる。ここで、最後の等号は (C.6.45) 式を用いた。 $B_z \neq 0$ で、完全導体の壁のときは、(C.6.32) 式より

$$u_x, \text{流体内部} = u_y, \text{流体内部} = 0 \quad (\text{C.6.62})$$

となる。

C.7 境界条件と固有値問題

前節では壁での境界条件が得られた。今、固有方程式はフーリエ変換されているので、境界条件も同様にフーリエ変換する。ゆえに、完全導体の壁のとき

$$u_{z0} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.7.1})$$

$$b_{z0} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.7.2})$$

⁵⁷ 流体が完全導体ではない場合は、電流は電場と関係し、 S_L を小さくとると、電流は 0 に近づくので、磁場の水平成分も連続になる。

さらに、 $B_z \neq 0$ なら、

$$u_{x0}\left(z = \pm\frac{H}{2}\right) = u_{y0}\left(z = \pm\frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{C.7.3})$$

となる。

一方、絶縁体の壁のとき

$$u_{z0}\left(z = \pm\frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{C.7.4})$$

$$j_{z0}\left(z = \pm\frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{C.7.5})$$

$$b_{z0}\left(z = \pm\frac{H}{2}\right) = \mp|\mathbf{k}_H|\Phi_0(z=0)e^{\mp|\mathbf{k}_H|(\pm\frac{H}{2})} \quad (\text{C.7.6})$$

となる。

b_{z0} の境界条件については、(C.7.11) 式に含まれている、誘導方程式の鉛直成分

$$-i\omega b_{z0}(z) = \left(\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H + B_z \frac{d}{dz}\right)u_{z0}(z) \quad (\text{C.7.7})$$

を用いて、 u_z の条件に書き換える。

そして、前節でわかったことは、 f や B_z が 0 か 0 でないかによって、必要な境界条件の数が変わることである。そのことに注意しながら、ここでは、それらの状況について、各々見ていく。

C.7.1 $f = 0$ 、 $B_z = 0$ の場合

Fourier 変換した基礎方程式は

$$-i\omega\zeta_{z0}(z) = \left(\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H\right) \frac{\mu j_{z0}(z)}{\rho_0\mu} \quad (\text{C.7.8})$$

$$-i\omega\left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right)u_{z0}(z) = \gamma_0(z) \quad (\text{C.7.9})$$

$$-i\omega\mu j_{z0}(z) = \left(\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H\right)\zeta_{z0}(z) \quad (\text{C.7.10})$$

$$-i\omega\gamma_0(z) = \left[\frac{1}{\rho_0\mu}\left(\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H\right)^2\left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) + N^2|\mathbf{k}_H|^2\right]u_{z0}(z) \quad (\text{C.7.11})$$

であり、固有方程式は

$$\left[\omega^2 + \left(\mathbf{V}_A \cdot i\mathbf{k}_H\right)^2\right]\zeta_{z0}(z) = 0 \quad (\text{C.7.12})$$

$$\left[\left(\omega^2 + \left(\mathbf{V}_A \cdot i\mathbf{k}_H\right)^2\right)\left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) + N^2|\mathbf{k}_H|^2\right]u_{z0}(z) = 0 \quad (\text{C.7.13})$$

である。すなわち、

$$\zeta_{z0} = j_{z0} = \text{const.} \quad (\text{C.7.14})$$

となり、 u_{z0} については、上下 1 つずつ境界条件が必要である。

まず、 ζ_{z0} について見てみよう。完全導体の壁のときは、境界条件は存在せず、自由な鉛直構造を持った、水平伝播する Alfvén 波が存在できる。しかし、絶縁体の壁のときは、 $j_{z0}(z = \pm \frac{H}{2}) = 0$ より自明な解しか存在できない。これは、この条件が不要であり、境界条件の与えすぎになっていることを意味する。このことについては、C.8.3 節で説明する。ゆえに、どんな境界条件であれ、自由な鉛直構造を持った、水平伝播する（水平流のみなので、成層の影響を受けない）Alfvén 波が存在する。

次に、 u_{z0} に注目する。用いる境界条件は

$$u_{z0}(z = \pm \frac{H}{2}) = 0 \quad (\text{C.7.15})$$

である。さらに、完全導体の壁でも絶縁体の壁でも、 b_{z0} に関する境界条件があるので、一見、境界条件の与えすぎになっているような気がするが、(C.7.7) 式

$$-i\omega b_{z0}(z = \pm \frac{H}{2}) = (\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H) u_{z0}(z = \pm \frac{H}{2}) \quad (\text{C.7.16})$$

より、境界では $b_{z0}(z = \pm \frac{H}{2}) = 0$ となり、完全導体の壁のときの条件を満たす。また、絶縁体の壁のときは、 $\Phi_0(z = 0) = 0$ とすると、境界条件はいつも満たされる。ゆえに、解くべき固有方程式は、

$$\frac{d^2 u_{z0}(z)}{dz^2} = -\frac{N^2 - \omega^2 + (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2}{\omega^2 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2} |\mathbf{k}_H|^2 u_{z0}(z) \quad (\text{C.7.17})$$

であり、境界条件 (C.7.15) を与えると、簡単に解けて、

$$(原点対称モード) \quad u_{z0}(z) = u_{z00} \cos\left(\frac{(2m_c + 1)\pi}{H} z\right) \quad (m_c = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{C.7.18})$$

$$(原点反対称モード) \quad u_{z0}(z) = u_{z00} \sin\left(\frac{2m_s \pi}{H} z\right) \quad (m_s = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{C.7.19})$$

固有値は、

$$\frac{m\pi}{H} = \pm \sqrt{\frac{N^2 - \omega^2 + (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2}{\omega^2 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2}} |\mathbf{k}_H| \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{C.7.20})$$

であり、ゆえに周波数は

$$\omega^2 = (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2 + N^2 \frac{|\mathbf{k}_H|^2}{|\mathbf{k}_H|^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{C.7.21})$$

となる。ここで、 u_{z00} は定数である。これは、鉛直流のみが水平伝播する成層の影響を受けて速くなったり、Alfvén 波である。 $N = 0$ の時は m 依存性がなくなるので、成層が強いほど、鉛直波数依存性が強くなる。そして、鉛直波数が大きいほど遅い波になる。また、水平波数が大きいときは、鉛直波数依存性が小さくなる。

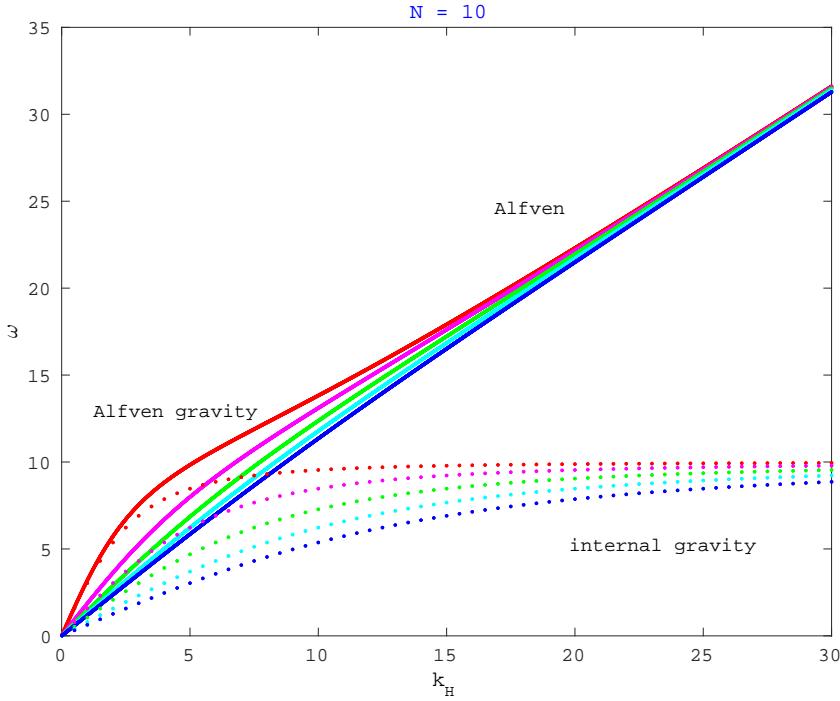


Fig.123 $f = 0, B_z = 0$ の場合の分散関係 (C.7.21)。縦軸が ω 、横軸が $|\mathbf{k}_H|$ である。ただし、磁力線の方向に垂直な水平方向は一様であるとし、 $\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H = |\mathbf{V}_A||\mathbf{k}_H|$ として計算した。ここで、 $|\mathbf{V}_A| = 1, N = 10, H = 1$ としている。また、赤から青にかけて $m = 1, 2, 3, 4, 5$ の場合で、点線は $|\mathbf{V}_A| = 0$ の場合（純粋な内部重力波）の分散関係である。

C.7.2 $f = 0, B_z \neq 0$ の場合

フーリエ変換した基礎方程式は

$$-i\omega\zeta_{z0}(z) = \left(\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H + B_z \frac{d}{dz}\right) \frac{\mu j_{z0}(z)}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.7.22})$$

$$-i\omega \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) u_{z0}(z) = \gamma_0(z) \quad (\text{C.7.23})$$

$$-i\omega\mu j_{z0}(z) = \left(\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H + B_z \frac{d}{dz}\right) \zeta_{z0}(z) \quad (\text{C.7.24})$$

$$-i\omega\gamma_0(z) = \left[\frac{1}{\rho_0 \mu} \left(\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H + B_z \frac{d}{dz}\right)^2 \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2\right] u_{z0}(z) \quad (\text{C.7.25})$$

であり、固有方程式は

$$\left[\omega^2 + \left(\mathbf{V}_A \cdot i\mathbf{k}_H + V_{Az} \frac{d}{dz}\right)^2\right] \zeta_{z0}(z) = 0 \quad (\text{C.7.26})$$

$$\left[\left(\omega^2 + \left(\mathbf{V}_A \cdot i\mathbf{k}_H + V_{Az} \frac{d}{dz}\right)^2\right) \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2\right] u_{z0}(z) = 0 \quad (\text{C.7.27})$$

である。 ζ_{z0} については上下1つずつ、 u_{z0} については上下2つずつ境界条件が必要である。

まず完全導体の壁のときは、 $\mathbf{u}(z = \pm \frac{H}{2}) = \mathbf{0}$ と渦度の定義より、

$$u_{z0}\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{C.7.28})$$

$$\zeta_{z0}\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{C.7.29})$$

そして、水平成分を求める式(C.5.1)より

$$\frac{du_{z0}}{dz} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.7.30})$$

となる。また、

$$b_{z0}\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{C.7.31})$$

であるが、鉛直方向の誘導方程式(C.7.7)より、

$$\left(\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H + B_z \frac{d}{dz}\right) u_{z0} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.7.32})$$

となり、これは(C.7.28)式と(C.7.30)式より、いつも成立する。

次に、絶縁体の壁のときは、まず、

$$u_{z0}\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{C.7.33})$$

で、また、 $j_{z0}\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) = 0$ より、

$$\left(\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H + B_z \frac{d}{dz}\right) \zeta_{z0} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.7.34})$$

となる。次に、(C.7.6)式と(C.7.7)式より、

$$\pm i\omega |\mathbf{k}_H| \Phi_0(z=0) e^{\mp |\mathbf{k}_H|(\pm \frac{H}{2})} = \left(\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H + B_z \frac{d}{dz}\right) u_{z0} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} \quad (\text{C.7.35})$$

となる。

ただし、壁が絶縁体のときの最後の式は、 $\Phi_0(z=0)$ を与えなければ、境界条件として用いることができない。これが前節で示した $B_z \neq 0$ のときに、必要な境界条件が多くなる、ということの表れである。すなわち、 $\nu = 0$ のときは、流速の水平成分は連続でなくともよく、 $\eta = 0$ のときは磁場の水平成分は連続でなくともよいが、 $\nu = \eta = 0$ のときは、流速か磁場の水平成分のいずれかは連続でないと、境界条件が不足してしまう。完全導体の壁のときは、Ohmの法則から、水平流が0になるという条件が加えられ、境界条件は不足しなかつたが、絶縁体のときは、Ohmの法則のような条件がなく、境界条件が不足してしまう。そこで、Roberts and Scott(1965) [46]で示された条件を用いることにする。これに関しては、C.9節で説明する。

C.9 節で示す境界条件は、Alfvén 波より遅い時間スケールに注目するときにしか利用できない。付録 B の結果より、 $f = 0$ の場合は、純粋な Alfvén 波と密度成層の影響を受けた Alfvén 波が現れることが予想されるので、ここではこの境界条件を用いることができず、絶縁体の壁のときは依然として、境界条件が不足し、固有値問題を解くことができない。

そのため、ここでは、完全導体の壁のときのみ考えてみよう。簡単のため、 $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ とする。固有方程式は、

$$\left[\omega^2 + V_{Az}^2 \frac{d^2}{dz^2} \right] \zeta_{z0}(z) = 0 \quad (\text{C.7.36})$$

$$\left[\left(\omega^2 + V_{Az}^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] u_{z0}(z) = 0 \quad (\text{C.7.37})$$

境界条件は、

$$u_{z0} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.7.38})$$

$$\zeta_{z0} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.7.39})$$

$$\frac{du_{z0}}{dz} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.7.40})$$

ζ_{z0} についての固有値問題は簡単に解けて

$$\zeta_{z0}(z) = \zeta_{z00} \cos \left(\frac{(2m_c + 1)\pi}{H} z \right) \quad (m_c = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{C.7.41})$$

$$\zeta_{z0}(z) = \zeta_{z00} \sin \left(\frac{2m_s \pi}{H} z \right) \quad (m_s = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{C.7.42})$$

固有値は、

$$\frac{m\pi}{H} = \pm \frac{\omega}{V_{Az}} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{C.7.43})$$

となる。ここで、 ζ_{z00} は定数である。ゆえに Alfvén 波の周波数が得られる。

次に、 u_{z0} の固有方程式は、4 階の微分方程式で、一般解は、

$$u_{z0}(z) = C_1 e^{\lambda_+ z} + C_2 e^{-\lambda_+ z} + C_3 e^{\lambda_- z} + C_4 e^{-\lambda_- z} \quad (\text{C.7.44})$$

となる。ここで、 $C_1 \sim C_4$ は定数で、

$$\lambda_{\pm} = \sqrt{-\frac{\frac{\omega^2}{V_{Az}^2} - |\mathbf{k}_H|^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{\omega^2}{V_{Az}^2} - |\mathbf{k}_H|^2}{2} \right)^2 + \frac{\omega^2 - N^2}{V_{Az}^2} |\mathbf{k}_H|^2}} \quad (\text{C.7.45})$$

である。さらに、境界条件より、

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & e^{\lambda_- \frac{H}{2}} & e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} \\ \lambda_+ e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & -\lambda_+ e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & \lambda_- e^{\lambda_- \frac{H}{2}} & -\lambda_- e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} \\ e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} & e^{\lambda_- \frac{H}{2}} \\ \lambda_+ e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & -\lambda_+ e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & \lambda_- e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} & -\lambda_- e^{\lambda_- \frac{H}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{C.7.46})$$

となる。ゆえに、固有値は

$$\det \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & e^{\lambda_- \frac{H}{2}} & e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} \\ \lambda_+ e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & -\lambda_+ e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & \lambda_- e^{\lambda_- \frac{H}{2}} & -\lambda_- e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} \\ e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} & e^{\lambda_- \frac{H}{2}} \\ \lambda_+ e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & -\lambda_+ e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & \lambda_- e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} & -\lambda_- e^{\lambda_- \frac{H}{2}} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.7.47})$$

を満たす ω で、それに対する固有ベクトルとして、 $C_1 \sim C_4$ が求まる。この行列式を少し整理すれば、

$$\det \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ H} & 1 & e^{\lambda_- H} & 1 \\ \lambda_+ e^{\lambda_+ H} & -\lambda_+ & \lambda_- e^{\lambda_- H} & -\lambda_- \\ 1 & e^{\lambda_+ H} & 1 & e^{\lambda_- H} \\ \lambda_+ & -\lambda_+ e^{\lambda_+ H} & \lambda_- & -\lambda_- e^{\lambda_- H} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.7.48})$$

となる。

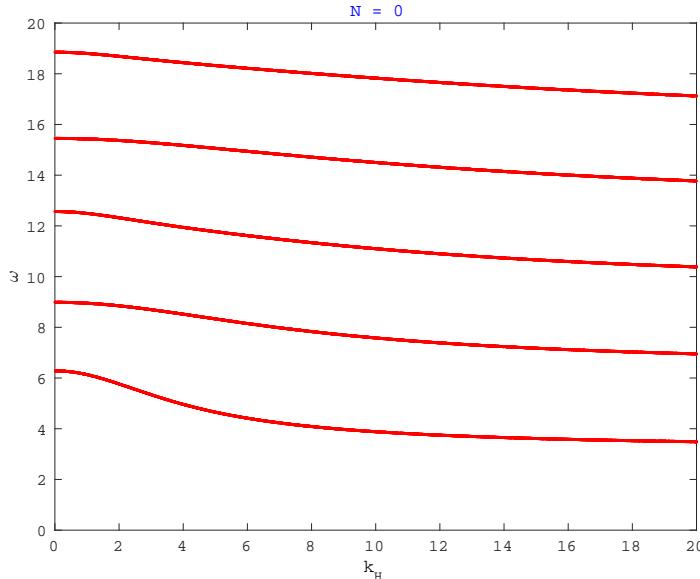


Fig.124 $f = 0$ 、 $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ の場合の分散関係 (C.7.48)。縦軸が ω 、横軸が $|\mathbf{k}_H|$ である。ここで、 $|\mathbf{V}_A| = 1$ 、 $N = 0$ 、 $H = 1$ としている。

Fig.125 は、 $N = 0$ の場合の分散関係 (C.7.48) である。 $N = 0$ のとき、

$$\lambda_+ = |\mathbf{k}_H| \quad (\text{C.7.49})$$

$$\lambda_- = i \frac{\omega}{V_{Az}} \quad (\text{C.7.50})$$

であり、一般解は、

$$u_{z0}(z) = C_1 e^{|\mathbf{k}_H| z} + C_2 e^{-|\mathbf{k}_H| z} + C_3 e^{i \frac{\omega}{V_{Az}} z} + C_4 e^{-i \frac{\omega}{V_{Az}} z} \quad (\text{C.7.51})$$

となる。 $\mathbf{k}_H = \mathbf{0}$ のとき、鉛直波数のみもつ Alfvén 波となるので、Fig.125 の横に伸びる 1 本の線は、水平波数は様々であるが、ある 1 つの鉛直波数を持つモードの集合であると想像できる。ま

た、考えている流体層は、原点 ($z = 0$) に対称なので、原点対称モードと原点反対称モードに分離できるはずである。すなわち、原点対称モード ($u_{z0}^{(e)}$) は、 $C_1 = C_2$ 、 $C_3 = C_4$ 、原点反対称モード ($u_{z0}^{(o)}$) は、 $C_1 = -C_2$ 、 $C_3 = -C_4$ である必要があり、一般解は、

$$u_{z0}^{(e)}(z) = C'_1 \cosh(|\mathbf{k}_H|z) + C'_2 \cos\left(\frac{\omega}{V_{Az}}z\right) \quad (\text{C.7.52})$$

$$u_{z0}^{(o)}(z) = C'_1 \sinh(|\mathbf{k}_H|z) + C'_2 \sin\left(\frac{\omega}{V_{Az}}z\right) \quad (\text{C.7.53})$$

ここで、 $C'_1 \sim C'_4$ は定数である。このように、分離すると、分散関係の計算が比較的容易になる。これを、 $N \neq 0$ の場合にも適用してみよう。

$N \neq 0$ のときは、

$$u_{z0}^{(e)}(z) = C''_1 \cosh(\lambda_+ z) + C''_2 \cosh(\lambda_- z) \quad (\text{C.7.54})$$

$$u_{z0}^{(o)}(z) = C''_3 \sinh(\lambda_+ z) + C''_4 \sinh(\lambda_- z) \quad (\text{C.7.55})$$

となる。ここで、 $C''_1 \sim C''_4$ は定数である。ゆえに、原点対称モードの分散関係は、

$$\det \begin{pmatrix} \cosh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) & \cosh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \\ \lambda_+ \sinh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) & \lambda_- \sinh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.7.56})$$

原点反対称モードの分散関係は、

$$\det \begin{pmatrix} \sinh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) & \sinh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \\ \lambda_+ \cosh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) & \lambda_- \cosh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.7.57})$$

整理すると、

$$\lambda_+ \sinh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) \cosh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) - \lambda_- \sinh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \cosh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{原点対称}) \quad (\text{C.7.58})$$

$$\lambda_+ \cosh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) \sinh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) - \lambda_- \cosh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \sinh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{原点反対称}) \quad (\text{C.7.59})$$

となる。

ただし、この分散関係には λ が重解になるような特別な解が含まれていることに注意しなければならない。重解の場合、一般解は、(C.7.44) のようにはならない。

(i) (C.7.45) 式より、 $\omega = \pm N$ のとき、

$$\lambda_+ = 0 \quad (\text{C.7.60})$$

$$\lambda_-^2 = |\mathbf{k}_H|^2 - \frac{\omega^2}{V_{Az}^2} = |\mathbf{k}_H|^2 - \frac{N^2}{V_{Az}^2} \quad (\text{C.7.61})$$

となり、このとき、すべての水平波数に対して、原点反対称モードの分散関係 (C.7.59) を満たしてしまう。

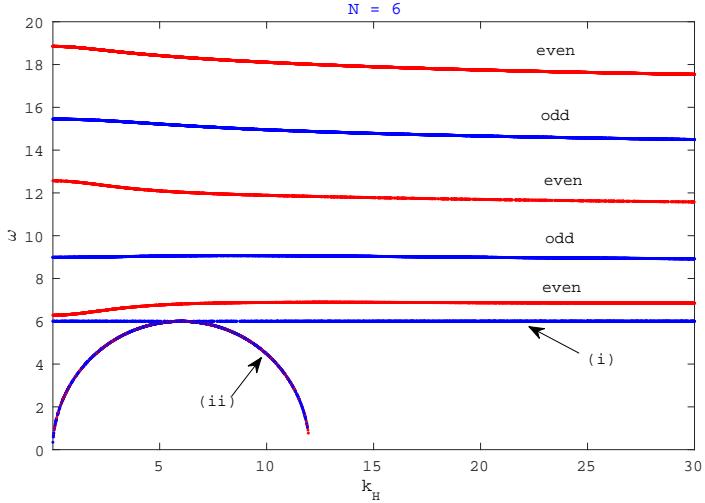


Fig.125 $f = 0$ 、 $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ の場合の分散関係 (C.7.58)、(C.7.59)。縦軸が ω 、横軸が $|\mathbf{k}_H|$ であり、赤が原点対称モードの分散関係、青が原点反対称モードの分散関係である。ここで、 $|\mathbf{V}_A| = 1$ 、 $N = 6$ 、 $H = 1$ としている。 λ が重解を持つ場合の偽の分散関係 (i)、(ii) も含まれている。

このときの一般解は、

$$u_{z0}(z) = (A_1 + A_2 z) + A_3 e^{\lambda_- z} + A_4 e^{-\lambda_- z} \quad (\text{C.7.62})$$

である。原点対称解と原点反対称解に分離すると、

$$u_{z0}^{(e)}(z) = A_1 + A_5 \cosh(\lambda_- z) \quad (\text{C.7.63})$$

$$u_{z0}^{(o)}(z) = A_2 z + A_6 \sinh(\lambda_- z) \quad (\text{C.7.64})$$

となる。ここで、 $A_i (i = 1, 2, 3 \dots)$ は定数である。ゆえに、原点対称モードの分散関係は、

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cosh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \\ 0 & \lambda_- \sinh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.7.65})$$

すなわち、

$$\sinh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{C.7.66})$$

となる。これは、 $\lambda_- \neq 0$ とすると、 λ_- が虚数のときのみ成り立つ。すなわち、 $|\mathbf{k}_H|^2 < \frac{N^2}{V_{Az}^2}$ とする。このとき、(C.7.66) 式は^{*58}

$$\sin\left(\sqrt{\frac{N^2}{V_{Az}^2} - |\mathbf{k}_H|^2} \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{C.7.67})$$

^{*58} $\sin(ix) = i \sinh(x)$

ゆえに、

$$|\mathbf{k}_H|^2 = \frac{N^2}{V_{Az}^2} - \left(\frac{2n\pi}{H}\right)^2 \quad (n \text{ は、 } n \neq 0 \text{ で } |n| \leq \left|\frac{NH}{2\pi V_{Az}}\right| \text{ となる整数}) \quad (\text{C.7.68})$$

が $\omega = \pm N$ のときの原点対称モードの正しい分散関係である。これは、通常の原点対称な解が $\omega = \pm N$ を通過する点の位置を表している。Fig.125 のように、 N が小さいときは、通常の原点対称な解はすべての水平波数で $\omega = \pm N$ よりも絶対値が大きく、 $\omega = \pm N$ のランクを通過しない。

次に、原点反対称モードの分散関係は、

$$\det \begin{pmatrix} \frac{H}{2} & \sinh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \\ 1 & \lambda_- \cosh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.7.69})$$

ゆえに、

$$\tanh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) = \lambda_- \frac{H}{2} \quad (\text{C.7.70})$$

となる。これは、 $\lambda_- \neq 0$ とすると、 λ_- が虚数のときのみ成り立つ。すなわち、 $|\mathbf{k}_H|^2 < \frac{N^2}{V_{Az}^2}$ とする。ゆえに^{*59}、

$$\tan\left(\sqrt{\frac{N^2}{V_{Az}^2} - |\mathbf{k}_H|^2} \frac{H}{2}\right) = \sqrt{\frac{N^2}{V_{Az}^2} - |\mathbf{k}_H|^2} \frac{H}{2} \quad (\text{C.7.71})$$

が $\omega = \pm N$ のときの原点反対称モードの正しい分散関係である。

(ii) (C.7.45) 式より、 $\left(\frac{\frac{\omega^2}{V_{Az}^2} - |\mathbf{k}_H|^2}{2}\right)^2 + \frac{\omega^2 - N^2}{V_{Az}^2} |\mathbf{k}_H|^2 = 0$ 、すなわち、
 $\omega^2 = N^2 - (V_{Az} |\mathbf{k}_H| \pm N)^2$ のとき、

$$\lambda_+ = \lambda_- = \sqrt{-\frac{\frac{\omega^2}{V_{Az}^2} - |\mathbf{k}_H|^2}{2}} = \sqrt{V_{Az} |\mathbf{k}_H| (V_{Az} |\mathbf{k}_H| - N)} \quad (\text{C.7.72})$$

となり、いつも分散関係 (C.7.58) と (C.7.59) の両方を満たしてしまう。

このときの一般解は、

$$u_{z0}(z) = (A_1 + A_2 z)e^{\lambda_+ z} + (A_3 + A_4 z)e^{-\lambda_+ z} \quad (\text{C.7.73})$$

である。原点対称解と原点反対称解に分離すると、

$$u_{z0}^{(e)}(z) = A_5 \cosh(\lambda_+ z) + A_6 z \sinh(\lambda_+ z) \quad (\text{C.7.74})$$

$$u_{z0}^{(o)}(z) = A_7 \sinh(\lambda_+ z) + A_8 z \cosh(\lambda_+ z) \quad (\text{C.7.75})$$

^{*59} $\tan(ix) = i \tanh(x)$

となる。よって、原点対称モードの分散関係は、

$$\det \begin{pmatrix} \cosh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) & \frac{H}{2} \sinh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) \\ \lambda_+ \sinh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) & \sinh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) + \frac{H}{2} \lambda_+ \cosh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.7.76})$$

すなわち、

$$\cosh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) \sinh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) + \frac{H}{2} \lambda_+ \left\{ \cosh^2\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) - \sinh^2\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) \right\} = 0 \quad (\text{C.7.77})$$

となり、さらに、

$$\cosh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) \sinh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) = -\frac{H}{2} \lambda_+ \quad (\text{C.7.78})$$

$$\sinh\left(\lambda_+ H\right) = -H \lambda_+ \quad (\text{C.7.79})$$

となる。これは、 $\lambda_+ = 0$ 、すなわち、 $N = V_{Az} |\mathbf{k}_H|$ のときのみ成立するが、このときすべての z で $u_{z0} = 0$ になってしまう。

原点反対称モードの分散関係は、

$$\det \begin{pmatrix} \sinh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) & \frac{H}{2} \cosh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) \\ \lambda_+ \cosh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) & \cosh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) + \frac{H}{2} \lambda_+ \sinh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.7.80})$$

すなわち、

$$\sinh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) \cosh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) + \frac{H}{2} \lambda_+ \left\{ \sinh^2\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) - \cosh^2\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) \right\} = 0 \quad (\text{C.7.81})$$

となり、さらに、

$$\sinh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) \cosh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) = \frac{H}{2} \lambda_+ \quad (\text{C.7.82})$$

$$\sinh\left(\lambda_+ H\right) = H \lambda_+ \quad (\text{C.7.83})$$

となる。これは、 $\lambda_+ = 0$ 、すなわち、 $N = V_{Az} |\mathbf{k}_H|$ のときのみ成立するが、このときすべての z で $u_{z0} = 0$ になってしまう。

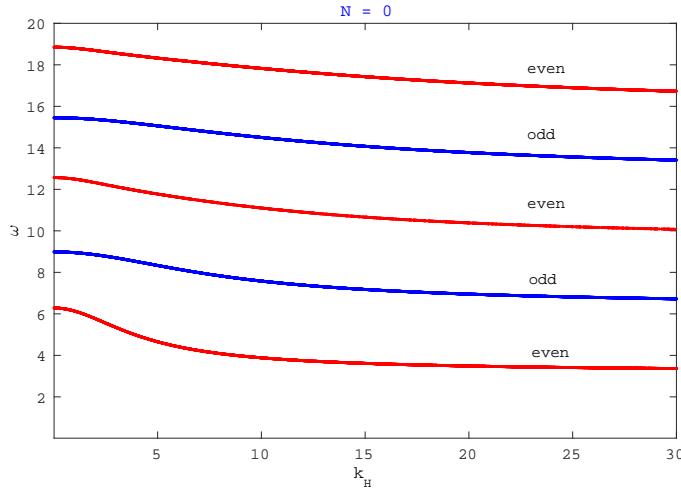


Fig.126 $f = 0$ 、 $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ の場合の正しい分散関係。縦軸が ω 、横軸が $|k_H|$ である。ここで、 $|V_A| = 1$ 、 $N = 0$ 、 $H = 1$ としている。

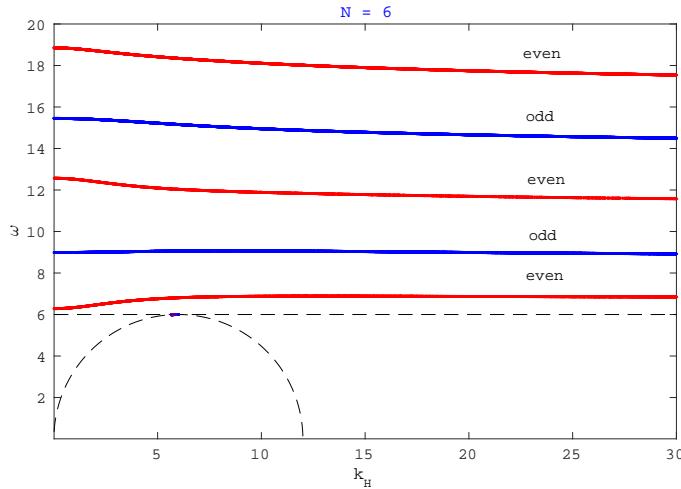


Fig.127 Fig.126と同じであるが、 $N = 6$ の場合。

次に、固有関数を求めてみよう。まず、分散関係から得られた波数 $|k_H|$ と周波数 ω を (C.7.46) 式の行列に代入する。そして、その行列の固有値と固有ベクトルを求める。(C.7.46) 式の行列の固有値が 0 であるときが境界条件を満たす場合なので、そのときの $C_1 \sim C_4$ が正しい固有ベクトルである。ゆえに、固有値 0 に対する固有ベクトルを求め、一般解 (C.7.44) に代入すれば、 u_{z0} が求まる。

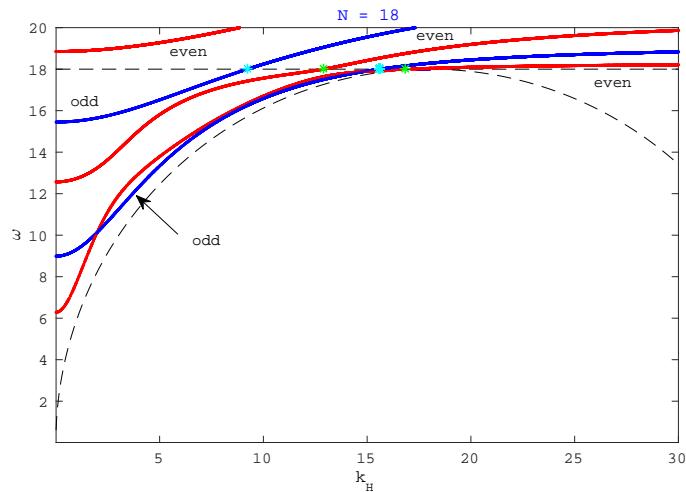
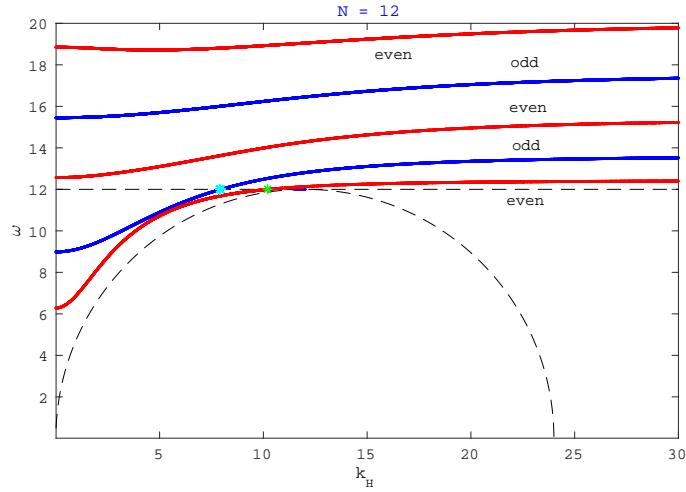


Fig.128 (上図) Fig.126と同じであるが、 $N = 12$ の場合。 $\omega = N$ となる点は、(C.7.68)、(C.7.71)式で計算した。(下図) $N = 18$ の場合。

例えば、 $|\mathbf{V}_A| = 1$ 、 $N = 0$ 、 $H = 1$ のとき、 $|\mathbf{k}_H| = 5$ と $\omega = 4.6542$ は分散関係を満たす。行列のサイズは 4×4 なので、固有値は 4 つ求められるが、そのうち固有値が 0 に対応する固有ベクトルは、

$$C_1 = C_2 = -0.0045 + 0.0047i, \quad C_3 = C_4 = 0.7071 \quad (\text{C.7.84})$$

となる。すなわち、このときの u_{z0} は原点対称であり、分散関係のグラフと矛盾しない。Fig.129 ではより高次のモードの固有関数も示した。

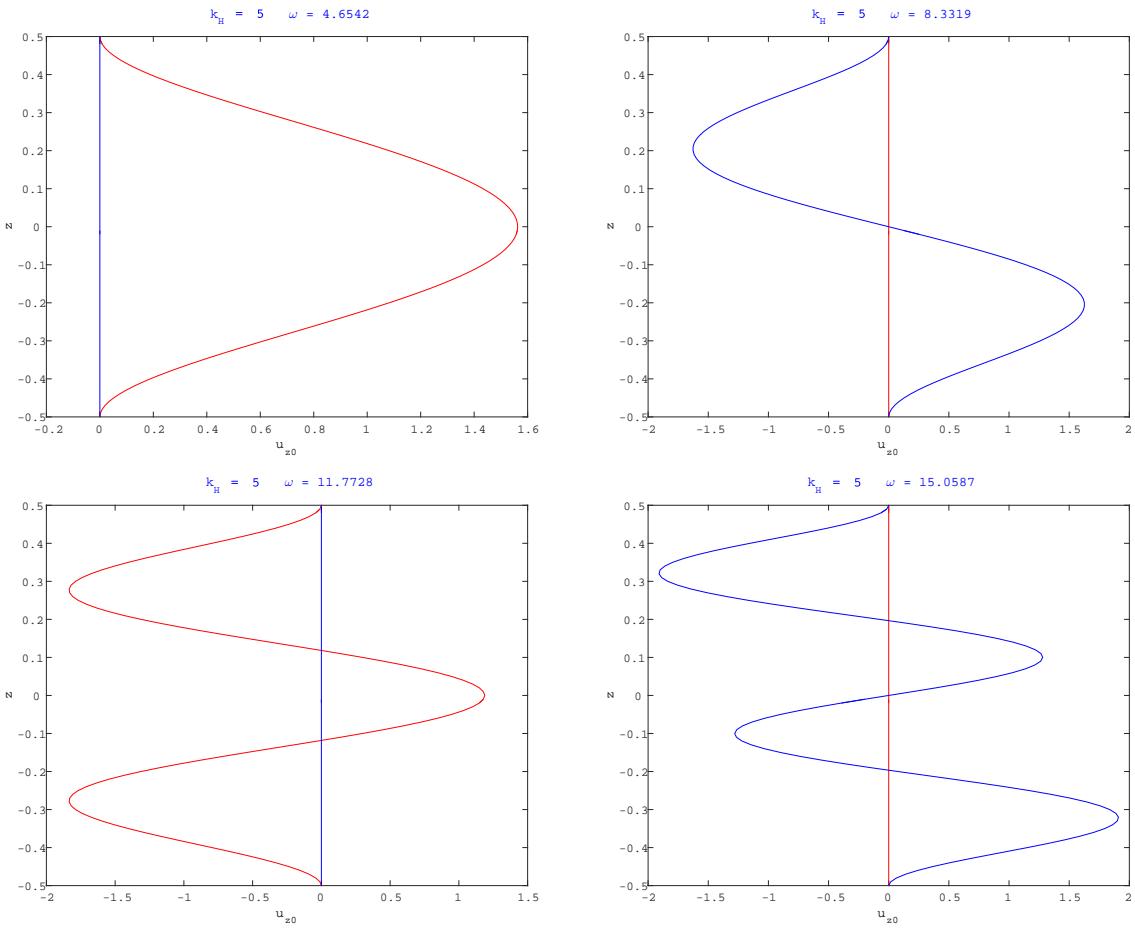


Fig.129 $|V_A| = 1, N = 0, H = 1, |k_H| = 5$ のときの固有関数。縦軸が z 、横軸が u_{z0} の振幅であり、赤が u_{z0} の実部、青が虚部である。(左上図) $\omega = 4.6542$ の場合。原点対称な解の基本モード。(右上図) $\omega = 8.3319$ の場合。原点反対称な解の基本モード(左下図) $\omega = 11.7728$ の場合。原点対称な解の2次のモード。(右下図) $\omega = 15.0587$ の場合。原点反対称な解の2次のモード。

今度は、 $N = 18$ のときの原点対称な解（赤の線）と原点反対称な解（青の線）の分散関係の交差について調べてみよう。Fig.130 の固有関数を見ると、 $|k_H|$ が小さいところ（原点対称な解の分散関係（赤の線）が原点反対称な解の分散関係（青の線）の下にあるとき）では、原点対称な解の固有関数は $N = 0$ のときの基本モードと同じ形をしているが、分散関係の上下が逆になるような（原点反対称な解の分散関係（青の線）が原点対称な解の分散関係（赤の線）の下になるような） $|k_H|$ のときは、固有関数の形が変化する。

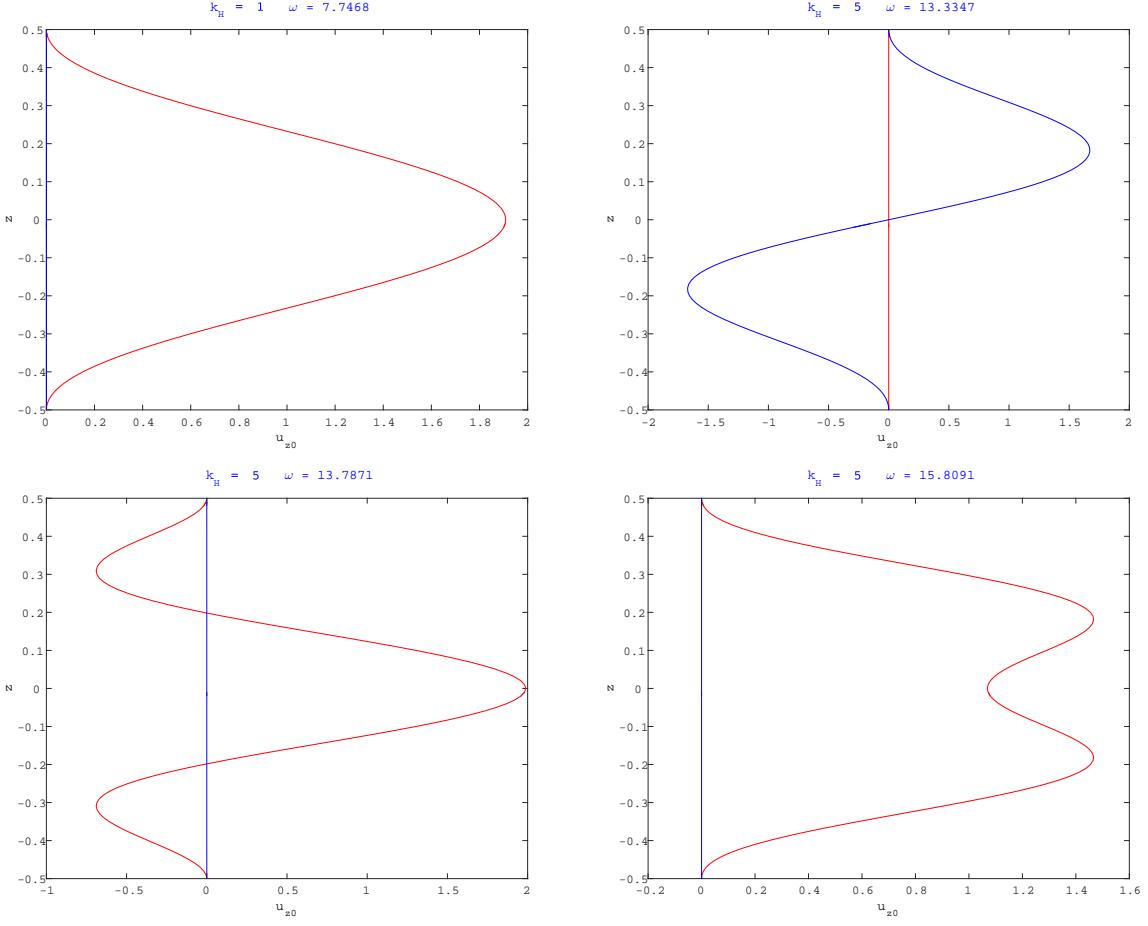


Fig.130 $|V_A| = 1, N = 18, H = 1$ のときの固有関数。縦軸が z 、横軸が u_{z0} の振幅であり、赤が u_{z0} の実部、青が虚部である。(左上図) $|\mathbf{k}_H| = 1, \omega = 7.7468$ の場合。 $|\mathbf{k}_H| = 1$ のときの原点対称な解の基本モード。(右上図) $|\mathbf{k}_H| = 5, \omega = 13.3347$ の場合。原点反対称な解の基本モード。(左下図) $|\mathbf{k}_H| = 5, \omega = 13.7871$ の場合。 $|\mathbf{k}_H| = 5$ のときの原点対称な解の基本モード。(右上図) $|\mathbf{k}_H| = 5, \omega = 15.8091$ の場合。 $|\mathbf{k}_H| = 5$ のときの原点対称な解の2次のモード。

C.7.3 $f \neq 0, B_z = 0$ の場合

フーリエ変換した基礎方程式は

$$-i\omega\zeta_{z0}(z) - f \frac{du_{z0}(z)}{dz} = (\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H) \frac{\mu j_{z0}(z)}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.7.85})$$

$$-i\omega \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) u_{z0}(z) + f \frac{d\zeta_{z0}(z)}{dz} = \gamma_0(z) \quad (\text{C.7.86})$$

$$-i\omega \mu j_{z0}(z) = (\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H) \zeta_{z0}(z) \quad (\text{C.7.87})$$

$$-i\omega \gamma_0(z) = \left[\frac{1}{\rho_0 \mu} (\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H)^2 \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] u_{z0}(z) \quad (\text{C.7.88})$$

であり、固有方程式は

$$\omega^2 f^2 \frac{d^2 u_{z0}(z)}{dz^2} = \left[\omega^2 + (\mathbf{V}_A \cdot i\mathbf{k}_H)^2 \right] \left[\left(\omega^2 + (\mathbf{V}_A \cdot i\mathbf{k}_H)^2 \right) \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] u_{z0}(z) \quad (\text{C.7.89})$$

である。さらに、整理すると、

$$\frac{d^2 u_{z0}(z)}{dz^2} = -\frac{(\omega^2 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2)(\omega^2 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2 - N^2)}{\omega^2 f^2 - (\omega^2 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2)^2} |\mathbf{k}_H|^2 u_{z0}(z) \quad (\text{C.7.90})$$

となる。ここで、 $f = 0$ とすると、(C.7.17) 式に一致する。この式は、 z に関する 2 階の微分方程式であり、用いる境界条件は

$$u_{z0}\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{C.7.91})$$

のみで良い。すなわち、C.7.1 節と同様に、完全導体の壁のときは $b_{z0}\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) = 0$ の条件は常に満たされ、絶縁体のときは $j_{z0}\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) = 0$ の条件を与えててしまうと、境界条件の与えすぎになってしまう。

この固有値問題も簡単に解けて、

$$(原点対称モード) \quad u_{z0}(z) = u_{z00} \cos\left(\frac{(2m_c + 1)\pi}{H} z\right) \quad (m_c = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{C.7.92})$$

$$(原点反対称モード) \quad u_{z0}(z) = u_{z00} \sin\left(\frac{2m_s \pi}{H} z\right) \quad (m_s = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{C.7.93})$$

固有値は、

$$\frac{m\pi}{H} = \pm \sqrt{\frac{(\omega^2 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2)(\omega^2 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2 - N^2)}{\omega^2 f^2 - (\omega^2 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2)^2} |\mathbf{k}_H|} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{C.7.94})$$

となる。また、周波数は

$$\begin{aligned} \omega^4 - \omega^2 &\left(2(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2 + N^2 \frac{|\mathbf{k}_H|^2}{|\mathbf{k}_H|^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} + f^2 \frac{\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2}{|\mathbf{k}_H|^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \right) \\ &+ (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2 \left((\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2 + N^2 \frac{|\mathbf{k}_H|^2}{|\mathbf{k}_H|^2 + \left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \right) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (\text{C.7.95})$$

を満たす。

さらに、「遅い波の近似」

$$\omega^2 \ll (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2 \quad (\text{C.7.96})$$

を用いると、固有値は、

$$\frac{m\pi}{H} = \pm \sqrt{\frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2 ((\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2 + N^2)}{\omega^2 f^2 - (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^4} |\mathbf{k}_H|} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{C.7.97})$$

すなわち、

$$\omega^2 = \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2 \left[(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H)^2 + N^2 \frac{|\mathbf{k}_H|^2}{|\mathbf{k}_H|^2 + \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2} \right]}{f^2 \frac{\left(\frac{m\pi}{H} \right)^2}{|\mathbf{k}_H|^2 + \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2}} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{C.7.98})$$

となり、MAC 波の解が得られる。ここで、 $N = 0$ にすると、MC 波の分散関係になり、MAC 波よりも遅い周波数が得られる。

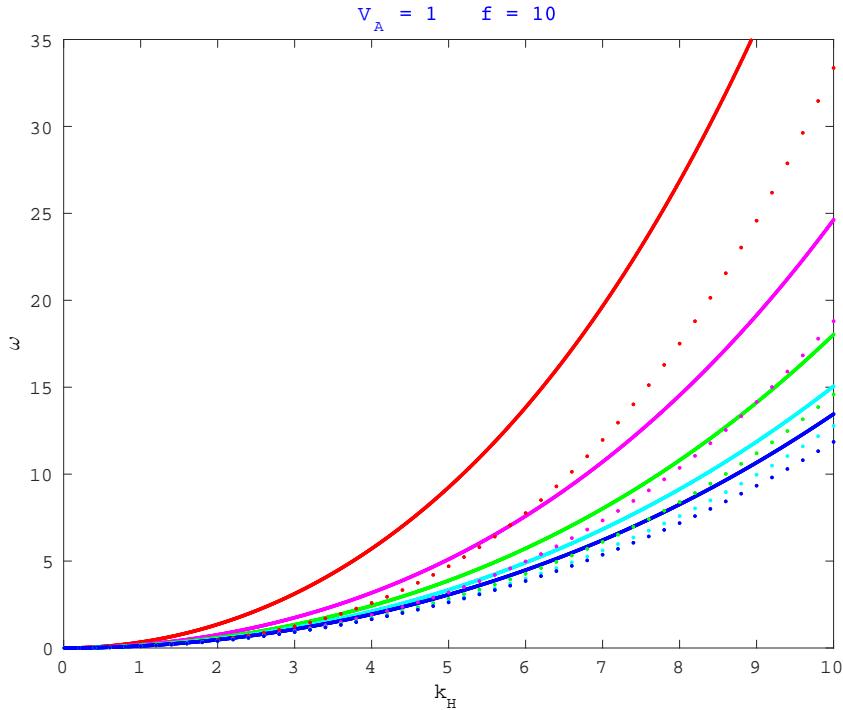


Fig.131 $f \neq 0$ 、 $B_z = 0$ の場合の「遅い波」の分散関係 (C.7.98)。縦軸が ω 、横軸が $|\mathbf{k}_H|$ である。ただし、磁力線の方向に垂直な水平方向は一様であるとし、 $\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H = |\mathbf{V}_A||\mathbf{k}_H|$ として計算した。ここで、 $|\mathbf{V}_A| = 1$ 、 $N = 10$ 、 $f = 10$ 、 $H = 1$ としている。また、赤から青にかけて $m = 1, 2, 3, 4, 5$ の場合で、点線は $N = 0$ の場合 (MC 波) の分散関係である。 $\omega \ll |\mathbf{V}_A||\mathbf{k}_H|$ を仮定しているので、 ω が小さいところのみ良い近似であることに注意。

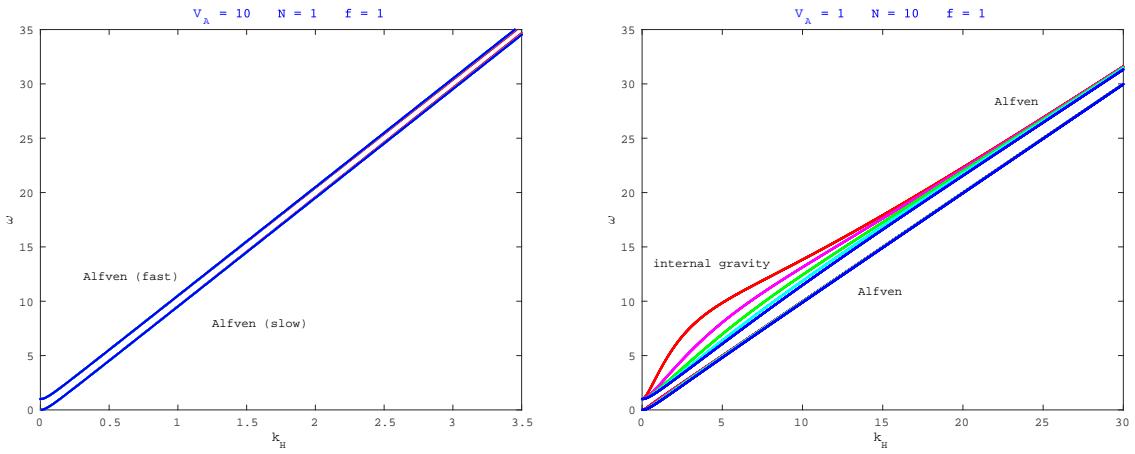


Fig.132 $f \neq 0, B_z = 0$ の場合の「遅い波の近似」を用いていない分散関係 (C.7.95)。縦軸が ω 、横軸が $|k_H|$ である。ただし、磁力線の方向に垂直な水平方向は一様であるとし、 $\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}_H = |\mathbf{V}_A||\mathbf{k}_H|$ として計算した。赤から青にかけて $m = 1, 2, 3, 4, 5$ の場合である。(左図) $|\mathbf{V}_A| = 10, N = 1, f = 1, H = 1$ の場合。少し速い Alfvén 波と少し遅い Alfvén 波に分離している。(右図) $|\mathbf{V}_A| = 1, N = 10, f = 1, H = 1$ の場合。内部重力波と Alfvén 波に分離している。また、水平波数が大きくなると、内部重力波は Alfvén 波的になる。

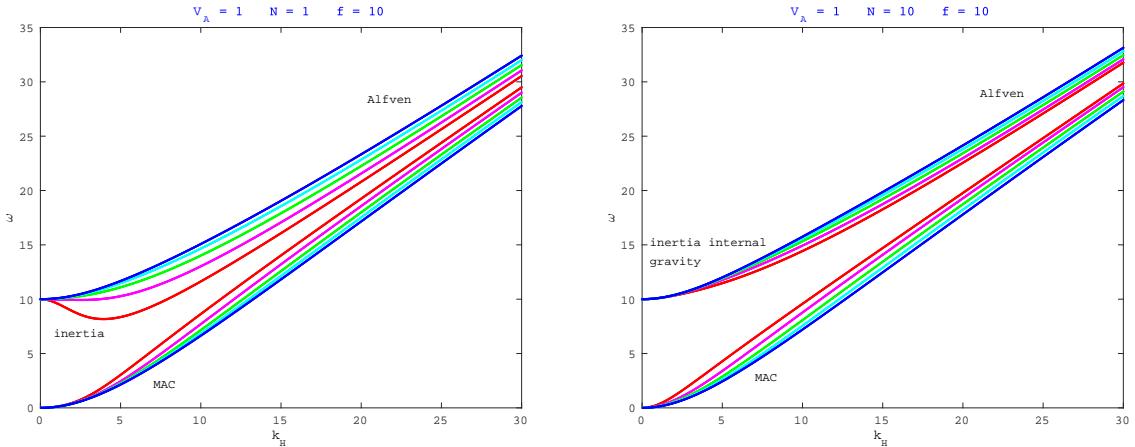


Fig.133 (左図) Fig.132と同じであるが、 $|\mathbf{V}_A| = 1, N = 1, f = 10, H = 1$ の場合。慣性波と MAC 波に分離している。水平波数が大きくなると、どちらのモードも Alfvén 波的になる。(右図) $|\mathbf{V}_A| = 1, N = 10, f = 10, H = 1$ の場合。

C.7.4 $f \neq 0, B_z \neq 0$ の場合

フーリエ変換した基礎方程式は

$$-i\omega\zeta_{z0}(z) - f \frac{du_{z0}(z)}{dz} = \left(\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H + B_z \frac{d}{dz} \right) \frac{\mu j_{z0}(z)}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.7.99})$$

$$-i\omega \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) u_{z0}(z) + f \frac{d\zeta_{z0}(z)}{dz} = \gamma_0(z) \quad (\text{C.7.100})$$

$$-i\omega \mu j_{z0}(z) = \left(\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H + B_z \frac{d}{dz} \right) \zeta_{z0}(z) \quad (\text{C.7.101})$$

$$-i\omega \gamma_0(z) = \left[\frac{1}{\rho_0 \mu} \left(\mathbf{B} \cdot i\mathbf{k}_H + B_z \frac{d}{dz} \right)^2 \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] u_{z0}(z) \quad (\text{C.7.102})$$

であり、固有方程式は

$$\begin{aligned} & \omega^2 f^2 \frac{d^2 u_{z0}(z)}{dz^2} \\ &= \left[\omega^2 + \left(\mathbf{V}_A \cdot i\mathbf{k}_H + V_{Az} \frac{d}{dz} \right)^2 \right] \left[\left(\omega^2 + \left(\mathbf{V}_A \cdot i\mathbf{k}_H + V_{Az} \frac{d}{dz} \right)^2 \right) \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] u_{z0}(z) \end{aligned} \quad (\text{C.7.103})$$

である。この式は、 z についての 6 階の微分方程式なので、上下に 3 つずつ境界条件が必要である。

完全導体の壁のときは、C.7.2 節と同様に、

$$u_{z0} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.7.104})$$

$$\zeta_{z0} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.7.105})$$

$$\frac{du_{z0}}{dz} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.7.106})$$

である。ここで、境界条件 (C.7.105) を u_{z0} の式に変換しなければならない。一般的な場合は難しいので、簡単のために、 $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ とする。ゆえに、フーリエ変換した基礎方程式は、

$$-i\omega\zeta_{z0}(z) - f \frac{du_{z0}(z)}{dz} = B_z \frac{d}{dz} \left(\frac{\mu j_{z0}(z)}{\rho_0 \mu} \right) \quad (\text{C.7.107})$$

$$-i\omega \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) u_{z0}(z) + f \frac{d\zeta_{z0}(z)}{dz} = \gamma_0(z) \quad (\text{C.7.108})$$

$$-i\omega \mu j_{z0}(z) = B_z \frac{d\zeta_{z0}(z)}{dz} \quad (\text{C.7.109})$$

$$-i\omega \gamma_0(z) = \left[V_{Az}^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] u_{z0}(z) \quad (\text{C.7.110})$$

となる。まず、(C.7.105) 式と (C.7.106) 式、(C.7.107) 式より、

$$\frac{dj_{z0}}{dz} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.7.111})$$

を得る。ところで、(C.7.109) 式を z で微分すると、

$$-i\omega\mu \frac{dj_{z0}(z)}{dz} = B_z \frac{d^2\zeta_{z0}(z)}{dz^2} \quad (\text{C.7.112})$$

となるので、境界で

$$\frac{d^2\zeta_{z0}}{dz^2} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.7.113})$$

となる。次に、(C.7.108) 式を z で微分し、(C.7.110) 式より、

$$-i\omega \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \frac{du_{z0}(z)}{dz} + f \frac{d^2\zeta_{z0}(z)}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{-i\omega} \left[V_{Az}^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] u_{z0}(z) \right\} \quad (\text{C.7.114})$$

となるので、境界では、(C.7.106) 式と (C.7.113) 式より、

$$\left(|\mathbf{k}_H|^2 - \frac{\omega^2}{V_{Az}^2} \right) \frac{d^3u_{z0}}{dz^3} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = \frac{d^5u_{z0}}{dz^5} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} \quad (\text{C.7.115})$$

となる。まとめると、完全導体の壁で、 $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ のときは固有方程式が

$$\omega^2 f^2 \frac{d^2u_{z0}(z)}{dz^2} = \left[\omega^2 + V_{Az}^2 \frac{d^2}{dz^2} \right] \left[\left(\omega^2 + V_{Az}^2 \frac{d^2}{dz^2} \right) \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] u_{z0}(z) \quad (\text{C.7.116})$$

で、境界条件が

$$u_{z0} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.7.117})$$

$$\frac{du_{z0}}{dz} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.7.118})$$

$$\left(|\mathbf{k}_H|^2 - \frac{\omega^2}{V_{Az}^2} \right) \frac{d^3u_{z0}}{dz^3} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = \frac{d^5u_{z0}}{dz^5} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} \quad (\text{C.7.119})$$

である⁶⁰。

次に、絶縁体の壁の場合を考えたいのだが、ここでも C.7.2 節に述べたように、境界条件の不足が起こる。 $B_z \neq 0$ で絶縁体の壁のときの境界条件の与え方は C.9 節で示す。

ここでは、完全導体の壁で、 $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ の場合の固有値問題を解いてみよう。固有方程式 (C.7.116) の一般解は、

$$u_{z0}(z) = \sum_{i=1}^6 C_i e^{\lambda_i z} \quad (\text{C.7.120})$$

であり、ここで C_i は定数、6 つの λ_i は、6 次方程式

$$\begin{aligned} & \lambda^6 + \lambda^4 \left(2 \frac{\omega^2}{V_{Az}^2} - |\mathbf{k}_H|^2 \right) \\ & + \lambda^2 \left(\frac{\omega^4}{V_{Az}^4} - 2 \frac{\omega^2}{V_{Az}^2} |\mathbf{k}_H|^2 - \frac{\omega^2}{V_{Az}^2} \frac{f^2}{V_{Az}^2} + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{V_{Az}^2} \right) + \left(-\frac{\omega^4}{V_{Az}^4} |\mathbf{k}_H|^2 + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{V_{Az}^2} \frac{\omega^2}{V_{Az}^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.7.121})$$

⁶⁰ 固有方程式を、 $z = -\frac{H}{2}$ から $z = \frac{H}{2}$ まで積分し、(C.7.118) 式を用いると、(C.7.119) 式を得ることもできる。

の解である。これは λ^2 の 3 次方程式とも言えるので、3 次方程式の解の公式を使えば、 ω や $|\mathbf{k}_H|$ を含んだままの解を原理的には求めることができる。境界条件より、

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \frac{H}{2}} & e^{\lambda_2 \frac{H}{2}} & e^{\lambda_3 \frac{H}{2}} & e^{\lambda_4 \frac{H}{2}} & e^{\lambda_5 \frac{H}{2}} & e^{\lambda_6 \frac{H}{2}} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 \frac{H}{2}} & \lambda_2 e^{\lambda_2 \frac{H}{2}} & \lambda_3 e^{\lambda_3 \frac{H}{2}} & \lambda_4 e^{\lambda_4 \frac{H}{2}} & \lambda_5 e^{\lambda_5 \frac{H}{2}} & \lambda_6 e^{\lambda_6 \frac{H}{2}} \\ \Lambda_1 e^{\lambda_1 \frac{H}{2}} & \Lambda_2 e^{\lambda_2 \frac{H}{2}} & \Lambda_3 e^{\lambda_3 \frac{H}{2}} & \Lambda_4 e^{\lambda_4 \frac{H}{2}} & \Lambda_5 e^{\lambda_5 \frac{H}{2}} & \Lambda_6 e^{\lambda_6 \frac{H}{2}} \\ e^{-\lambda_1 \frac{H}{2}} & e^{-\lambda_2 \frac{H}{2}} & e^{-\lambda_3 \frac{H}{2}} & e^{-\lambda_4 \frac{H}{2}} & e^{-\lambda_5 \frac{H}{2}} & e^{-\lambda_6 \frac{H}{2}} \\ \lambda_1 e^{-\lambda_1 \frac{H}{2}} & \lambda_2 e^{-\lambda_2 \frac{H}{2}} & \lambda_3 e^{-\lambda_3 \frac{H}{2}} & \lambda_4 e^{-\lambda_4 \frac{H}{2}} & \lambda_5 e^{-\lambda_5 \frac{H}{2}} & \lambda_6 e^{-\lambda_6 \frac{H}{2}} \\ \Lambda_1 e^{-\lambda_1 \frac{H}{2}} & \Lambda_2 e^{-\lambda_2 \frac{H}{2}} & \Lambda_3 e^{-\lambda_3 \frac{H}{2}} & \Lambda_4 e^{-\lambda_4 \frac{H}{2}} & \Lambda_5 e^{-\lambda_5 \frac{H}{2}} & \Lambda_6 e^{-\lambda_6 \frac{H}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{C.7.122})$$

ここで、見やすさのため、

$$\Lambda_i = \left[\left(|\mathbf{k}_H|^2 - \frac{\omega^2}{V_{Az}^2} \right) \lambda_i^3 - \lambda_i^5 \right] \quad (\text{C.7.123})$$

とおいた。ゆえに、固有値は、

$$\det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 H} & e^{\lambda_2 H} & e^{\lambda_3 H} & e^{\lambda_4 H} & e^{\lambda_5 H} & e^{\lambda_6 H} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 H} & \lambda_2 e^{\lambda_2 H} & \lambda_3 e^{\lambda_3 H} & \lambda_4 e^{\lambda_4 H} & \lambda_5 e^{\lambda_5 H} & \lambda_6 e^{\lambda_6 H} \\ \Lambda_1 e^{\lambda_1 H} & \Lambda_2 e^{\lambda_2 H} & \Lambda_3 e^{\lambda_3 H} & \Lambda_4 e^{\lambda_4 H} & \Lambda_5 e^{\lambda_5 H} & \Lambda_6 e^{\lambda_6 H} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 & \Lambda_4 & \Lambda_5 & \Lambda_6 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{C.7.124})$$

を満たす ω である。

C.8 境界層と非散逸境界条件

C.6.1 節では、非散逸の場合は、散逸がある場合に必要な境界条件が不要になる、ということを示した。この節では、なぜ不要になるのか、ということを境界層の観点から見ていく。 $\kappa = \eta$ のときの基礎方程式は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \zeta_z - f \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)(\mu j_z)}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.8.1})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 u_z + f \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} = \gamma \quad (\text{C.8.2})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) (\mu j_z) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \zeta_z \quad (\text{C.8.3})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) \gamma = \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 \nabla^2}{\rho_0 \mu} - N^2 \nabla_H^2 \right) u_z \quad (\text{C.8.4})$$

であり、非散逸にすると、水平流や水平磁場の境界における不連続が 0 でなくてもよくなる。

C.8.1 Ekman 層

$\mathbf{B} = \mathbf{0}$ のとき、基礎方程式は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \zeta_z - f \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{C.8.5})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 u_z + f \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} = \gamma \quad (\text{C.8.6})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) \gamma = -N^2 \nabla_H^2 u_z \quad (\text{C.8.7})$$

である。ほとんど定常のとき、境界付近の境界層内部 ($\nabla_H \ll \frac{\partial}{\partial z}$, $u_z \sim 0$) では

$$-\nu \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial z^2} \sim f \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{C.8.8})$$

$$\nu \frac{\partial^4 u_z}{\partial z^4} \sim f \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} \quad (\text{C.8.9})$$

と見積もれる。ゆえに、

$$\frac{\partial^4}{\partial z^4} \sim \mathcal{O}\left(\frac{f^2}{\nu^2}\right) \quad (\text{C.8.10})$$

となるので、Ekman 層の厚さ δ_E は、

$$\delta_E \sim \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\nu}{f}}\right) \quad (\text{C.8.11})$$

となる。粘性がある場合は、固体の壁表面で水平流が 0 となるが、 $\nu \rightarrow 0$ のとき、Ekman 層は無限に薄くなり、境界層内部での水平流の鉛直勾配は無限に大きくなる。そのため、非粘性の場合は、水平流が境界で 0 でなくて良い (Fig.134)。

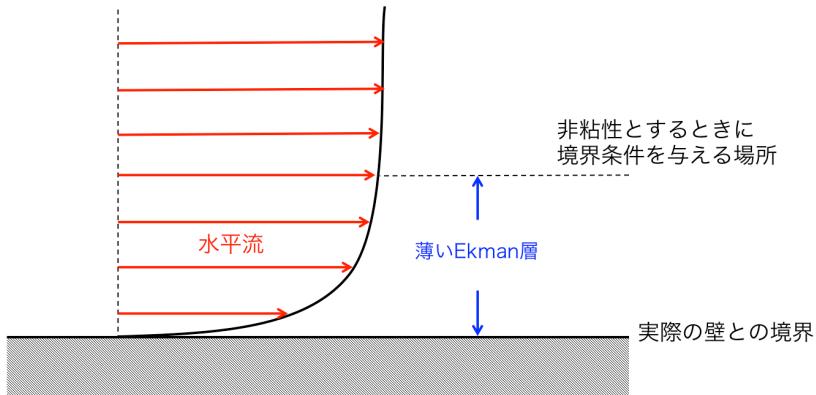


Fig.134 水平流の境界条件

C.8.2 Hartmann 層

$f = 0$ 、 $\mathbf{B} = B_z \hat{e}_z$ のとき、基礎方程式は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \zeta_z = B_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu j_z}{\rho_0 \mu} \right) \quad (\text{C.8.12})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 u_z = \gamma \quad (\text{C.8.13})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) (\mu j_z) = B_z \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} \quad (\text{C.8.14})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right) \gamma = \left(V_{Az}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^2 - N^2 \nabla_H^2\right) u_z \quad (\text{C.8.15})$$

である。ほとんど定常のとき、境界付近の境界層内部では

$$-\nu \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial z^2} \sim B_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu j_z}{\rho_0 \mu} \right) \quad (\text{C.8.16})$$

$$-\eta \frac{\partial^2 (\mu j_z)}{\partial z^2} = B_z \frac{\partial \zeta_z}{\partial z} \quad (\text{C.8.17})$$

と見積もれる。ゆえに、

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \sim \mathcal{O}\left(\frac{B_z^2}{\rho_0 \mu \nu \eta}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{B_z^2 \sigma_j}{\rho_0 \nu}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{B_z^2 \sigma_j}{\eta_v}\right) \quad (\text{C.8.18})$$

となるので、Hartmann 層の厚さ δ_E は、

$$\delta_H \sim \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt{\rho_0 \mu \nu \eta}}{B_z}\right) \quad (\text{C.8.19})$$

となる。散逸がある場合は、固体の壁表面で水平流と水平磁場が 0 となるが、磁場が強く、 $\nu \rightarrow 0$ 、 $\eta \rightarrow 0$ のとき、Hartmann 層は無限に薄くなるので、そのような境界条件を与える必要はない (Fig.135)。

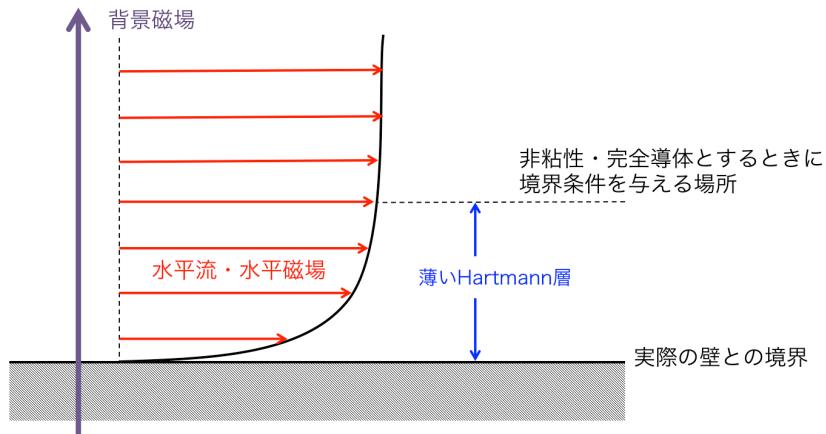


Fig.135 境界に垂直な磁場がある場合の、水平流・水平磁場の境界条件

さらに、磁場 $\mathbf{B} = B_z \hat{e}_z$ に加え、回転がある場合は、境界に Ekman-Hartmann 層が形成される。Ekman-Hartmann 層も同様に、 $\nu \rightarrow 0$ 、 $\eta \rightarrow 0$ のとき無限に薄くなる。

C.8.3 平行層

$f = 0$ 、 $B_z = 0$ のとき、基礎方程式は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \zeta_z = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla_H)(\mu j_z)}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.8.20})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 u_z = \gamma \quad (\text{C.8.21})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) (\mu j_z) = (\mathbf{B} \cdot \nabla_H) \zeta_z \quad (\text{C.8.22})$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) \gamma = \left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla_H)^2 \nabla^2}{\rho_0 \mu} - N^2 \nabla_H^2 \right) u_z \quad (\text{C.8.23})$$

である。ほとんど定常のとき、境界付近の境界層内部では

$$-\nu \frac{\partial^2 \zeta_z}{\partial z^2} = \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla_H)(\mu j_z)}{\rho_0 \mu} \quad (\text{C.8.24})$$

$$-\eta \frac{\partial^2 (\mu j_z)}{\partial z^2} = (\mathbf{B} \cdot \nabla_H) \zeta_z \quad (\text{C.8.25})$$

と見積もれる。ゆえに、

$$\frac{\partial^4}{\partial z^4} \sim \mathcal{O}\left(\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla_H)^2}{\rho_0 \mu \nu \eta}\right) \quad (\text{C.8.26})$$

となるので、平行層の厚さ δ_p は、

$$\delta_p \sim \mathcal{O}\left(\frac{\sqrt[4]{\rho_0 \mu \nu \eta}}{\sqrt{\mathbf{B} \cdot \nabla_H}}\right) \quad (\text{C.8.27})$$

となり、Hartmann 層よりも厚い。

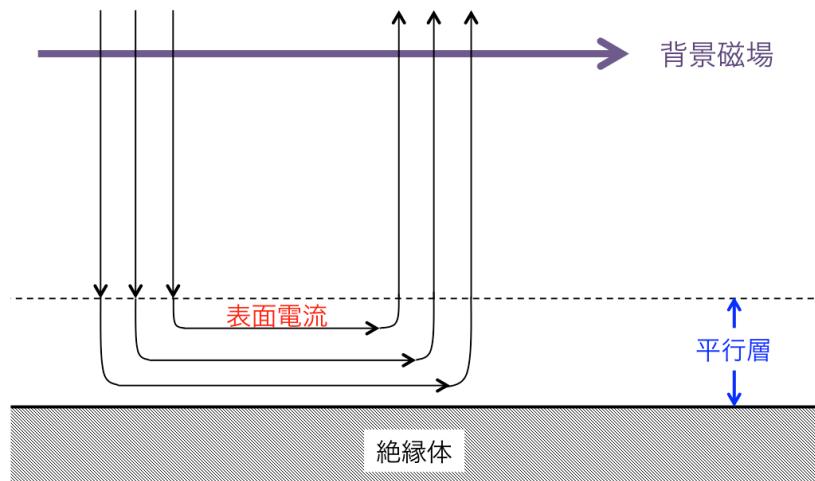


Fig.136 境界に水平な磁場がある場合の、電流の境界条件

さて、 $B_z = 0$ で壁が絶縁体のときを考える。境界層の外側（内部領域）で鉛直方向向きの電流があったとする。しかし、壁は絶縁体であるので、境界では鉛直方向向きの電流は 0 でなければならぬ。また、MHD 近似における電荷の保存則 (B.2.11)

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{C.8.28})$$

より、電流は生成消滅できない。ただし、Fig.136 のように、電流が平行層に沿って流れれば、境界で電流を 0 にすることができる。水平構造があれば、壁に向かう電流と壁から遠ざかる電流のペアが存在しているはずで、そのペアを平行層内の電流で繋げば、境界条件も MHD 近似における電荷の保存則 (B.2.11) も満たすことができる。平行層の厚さが $\frac{1}{\sqrt{|\nabla_H|}}$ に比例するというのは、このことと関係しているかもしれない。平行層内での電流の詳しい説明については、例えば電磁流体力学の教科書、Moreau(2013) [40] を参照せよ。

$\nu \rightarrow 0$ 、 $\eta \rightarrow 0$ のときは、平行層は無限に薄くなり、平行層内の電流は表面電流とみなせる。ゆえに、水平な磁場があるときは、絶縁体の壁の境界では、鉛直方向に電流は不連続でも良い (C.7.1 節、C.7.3 節)。

別の説明の方法として、C.8.1 節、C.8.1 節の結果を用いれば、容易に説明することもできる。 $\eta = 0$ のときは、(C.8.22) 式より

$$\frac{\partial(\mu j_z)}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla_H) \zeta_z = (\mathbf{B} \cdot \nabla_H) \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (\text{C.8.29})$$

となり、 $\nu \rightarrow 0$ のときは、水平流は境界で不連続になるので、 j_z も不連続になりうる。ゆえに、 $B_z = 0$ で絶縁体の壁のときは、境界で $j_z = 0$ である必要はない。

C.8.4 完全導体の壁のときの電場の境界条件

$B_z \neq 0$ で、完全導体の壁のときの境界条件は、

$$u_{z0} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.8.30})$$

$$\left. \frac{du_{z0}}{dz} \right|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.8.31})$$

$$\left(|\mathbf{k}_H|^2 - \frac{\omega^2}{V_{Az}^2} \right) \left. \frac{d^3 u_{z0}}{dz^3} \right|_{z=\pm \frac{H}{2}} = \left. \frac{d^5 u_{z0}}{dz^5} \right|_{z=\pm \frac{H}{2}} \quad (\text{C.8.32})$$

の上下 3 つずつであった。このうち、(C.8.31)、(C.8.32) 式は、境界で水平電場が 0 である、という境界条件である。すなわち、この境界条件は、完全導体の Ohm の法則

$$e_x = -u_y B_z \quad (\text{C.8.33})$$

$$e_y = u_x B_z \quad (\text{C.8.34})$$

に由来している。

しかし、C.8.1、C.8.2 節によると、無限に薄い境界層内部で水平流が変化できるので、それとともに変化する水平電場も、境界層内部で変化できるので、境界で連続である必要はなくなってしまう。すなわち、(C.8.31)、(C.8.32) 式を用いる必要がないことになる。しかしこのようになると、 $B_z \neq 0$ で、絶縁体の壁のときと同様に、境界条件が不足してしまう。

次に、固有方程式 (C.7.116) に「遅い波の近似」を用いてみよう。すると、

$$\omega^2 f^2 \frac{d^2 u_{z0}(z)}{dz^2} = V_{Az}^2 \frac{d^2}{dz^2} \left[V_{Az}^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] u_{z0}(z) \quad (\text{C.8.35})$$

となるが、この式は、

$$\omega^2 f^2 F(z) = V_{Az}^2 \left[V_{Az}^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] F(z) \quad (\text{C.8.36})$$

$$\frac{d^2 u_{z0}(z)}{dz^2} = F(z) \quad (\text{C.8.37})$$

と分解することができる。すなわち、 $F(z)$ についての境界条件が上下 2 つずつ、 u_{z0} についての境界条件が上下 1 つずつ必要になる。しかし、今持ち合わせている u_{z0} についての境界条件は上下 2 つずつあり、 u_{z0} についても境界条件の与えすぎになっている。このことからも、(C.8.31) 式を用いる必要がないことが想像される。

このため、C.9 節では、(壁が完全導体であれ、絶縁体であれ) $B_z \neq 0$ のときに必要になる新たな境界条件を示す。

C.9 $B_z \neq 0$ の場合の境界条件の不足と「遅い波の近似」

C.9.1 Alfvén 波による磁場の接線成分の不連続の解消

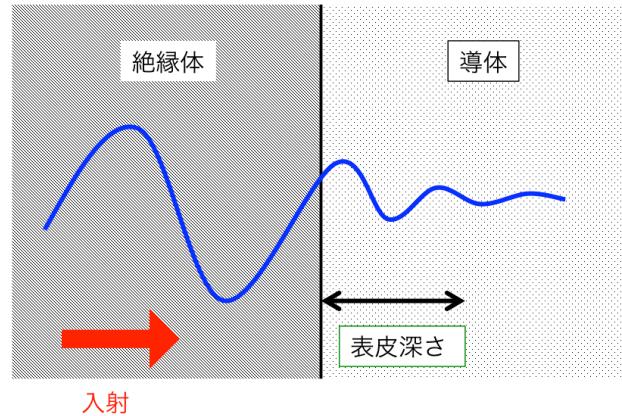


Fig.137 表皮深さ

絶縁体と導体の固体が接触している場合を考える。絶縁体側から磁場の摂動（電磁波）を入射させたとき、その波が導体側に染み込むことが長さは、表皮深さ

$$\delta_\eta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma_j \mu}} \quad (\text{C.9.1})$$

程度である。

完全導体のときは、 $\sigma_j \rightarrow \infty$ より、

$$\delta_\eta \rightarrow 0 \quad (\text{C.9.2})$$

となるので、波はしみ込むことができず、磁場の接線成分は境界面で不連続になって、表面電流が現れる。

固体の場合は、完全導体内部では、磁場は時間変化できないが、液体であれば、Alfvén 波として時間変化できるようになる。Alfvén 波は背景磁場に沿って伝播するので、もし境界に垂直な背景磁場があり、磁場の接線成分の不連続が存在すれば、Alfvén 波が発生し、その不連続は維持されないであろう。これは最初、Stewartson(1957) [50] によって示された。つまり、 $B_z \neq 0$ で、Alfvén 波よりも十分遅い現象を考えるときは、近似的に磁場の接線方向成分が連続だとして良いだろう。特に、地球の外核のように磁気プラントル数

$$Pm = \mu\sigma_j\nu = \frac{\nu}{\eta} \quad (\text{C.9.3})$$

が十分小さい状況でよく成り立つ (Roberts and Scott, 1965) [46]。 $B_z \neq 0$ の場合は、C.7.2 節 (絶縁体の壁) や C.8.4 節 (完全導体の壁) で示したように、境界条件が不足するので、この条件が必要となる (Jault and Finlay, 2015) [34]。

C.9.2 $f = 0$ の場合

$f = 0$ の場合は、完全導体の場合は解くことができたが、絶縁体の場合は境界条件が不足していた。そのため、C.9.1 節の境界条件を用いたいが、C.7.2 節の完全導体の壁のときの結果より、Alfvén 波の周波数程度の解が存在することが予想されるので、Alfvén 波よりも十分遅いという条件と合わない。そのため、この場合は、依然として境界条件が不足し、固有値問題を解くことができない。

C.9.3 $f \neq 0$ の場合

簡単のため、 $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ とする。Alfvén 波よりも十分遅い現象のみを取り出すならば、C.9.1 節の境界条件を用いることができる。すなわち、固有方程式は、「遅い波の近似」を用いた

$$\omega^2 f^2 \frac{d^2 u_{z0}(z)}{dz^2} = V_{Az}^2 \frac{d^2}{dz^2} \left[V_{Az}^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] u_{z0}(z) \quad (\text{C.9.4})$$

を用いる。ただし、この固有方程式は、

$$\omega^2 f^2 F(z) = V_{Az}^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 F(z) \quad (\text{C.9.5})$$

$$\frac{d^2 u_{z0}(z)}{dz^2} = F(z) \quad (\text{C.9.6})$$

と分解できる。すなわち、 $F(z)$ について上下 2 つずつ境界条件を与えて、 $F(z)$ を求め、それを (C.9.6) 式に代入して、 u_{z0} を求める。

フーリエ変換した基礎方程式も「遅い波の近似」を用いて⁶¹、

$$-f \frac{du_{z0}(z)}{dz} = B_z \frac{d}{dz} \left(\frac{\mu j_{z0}(z)}{\rho_0 \mu} \right) \quad (\text{C.9.7})$$

$$f \frac{d\zeta_{z0}(z)}{dz} = \gamma_0(z) \quad (\text{C.9.8})$$

$$-i\omega \mu j_{z0}(z) = B_z \frac{d\zeta_{z0}(z)}{dz} \quad (\text{C.9.9})$$

$$-i\omega \gamma_0(z) = \left[V_{Az}^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] u_{z0}(z) \quad (\text{C.9.10})$$

となる。

そして、C.9.1 節の境界条件を用いるには、壁内部の水平磁場が必要になる。絶縁体の場合は、壁内部の磁場 3 成分は、ポテンシャル磁場になる。完全導体の場合は、(C.6.34) 式より $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ である。ゆえに、境界条件は、

$$u_{z0} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.9.11})$$

$$\text{(完全導体)} \quad \mathbf{b} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = \mathbf{0} \quad (\text{C.9.12})$$

$$\text{(絶縁体)} \quad \mathbf{b} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = \nabla \Phi|_{z=\pm \frac{H}{2}} \quad (\text{C.9.13})$$

$$\text{(絶縁体)} \quad j_{z0} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.9.14})$$

となる。しかし、このままでは壁が完全導体のときの境界条件が不足してしまう。ただし、これは簡単に解決する。Ampère の法則 (C.2.7) より、

$$\mu j_z = \frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \quad (\text{C.9.15})$$

なので、(C.9.12) 式より、完全導体の壁のときも絶縁体の壁と同じ境界条件

$$\text{(完全導体)} \quad j_{z0} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.9.16})$$

が得られる。

次に、(C.9.14)、(C.9.16) 式を u_{z0} の式に変形する。(C.9.8)、(C.9.9)、(C.9.10) 式より、

$$\left[V_{Az}^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] u_{z0} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.9.17})$$

となり、さらに、(C.9.11) 式より、

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) u_{z0} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.9.18})$$

⁶¹ 慣性項の部分を無視する。

となる。

今度は、(C.9.12)、(C.9.13) 式を u_{z0} の式に変換する。ここで、鉛直磁場は、誘導方程式の鉛直成分 (C.7.7) より、

$$-i\omega b_{z0}(z) = B_z \frac{du_{z0}(z)}{dz} \quad (\text{C.9.19})$$

水平磁場は、(C.5.2) 式に (C.9.14)、(C.9.16) 式を用いて、

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \Re \left[\frac{1}{|\mathbf{k}_H|^2} \begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \end{pmatrix} \frac{db_{z0}(z)}{dz} e^{i\mathbf{k}_H \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{C.9.20})$$

であるので、完全導体の壁のときは、

$$\frac{du_{z0}}{dz} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.9.21})$$

$$\frac{db_{z0}}{dz} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.9.22})$$

となる。ここで、(C.9.21) 式は、完全導体の Ohm の法則 (C.8.33)、(C.8.34) の水平回転 ($\nabla_H \times$) をとったものに対応し、C.8.4 節の議論により、境界条件 (C.9.21) は用いないこととする^{*62}。さらに、(C.9.22) 式に (C.9.19) 式を用いれば、

$$\frac{d^2 u_{z0}}{dz^2} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.9.23})$$

となる。これを用いると、境界条件 (C.9.18) はより簡単になり、

$$\frac{d^4 u_{z0}}{dz^4} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.9.24})$$

となる。

また、絶縁体の壁のときは、壁内部のポテンシャル磁場は

$$\begin{pmatrix} b_x, \text{ 壁内部} \\ b_y, \text{ 壁内部} \\ b_z, \text{ 壁内部} \end{pmatrix} = \nabla \Phi = \Re \left[\begin{pmatrix} ik_x \\ ik_y \\ \pm |\mathbf{k}_H| \end{pmatrix} \Phi_0(z=0) e^{\pm |\mathbf{k}_H| z} e^{i\mathbf{k}_H \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{C.9.25})$$

より、

$$\pm i\omega |\mathbf{k}_H| \Phi_0(z=0) e^{\mp |\mathbf{k}_H| (\pm \frac{H}{2})} = B_z \frac{du_{z0}}{dz} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} \quad (\text{C.9.26})$$

$$\Phi_0(z=0) e^{\mp |\mathbf{k}_H| (\pm \frac{H}{2})} = \frac{1}{|\mathbf{k}_H|^2} \frac{db_{z0}}{dz} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} \quad (\text{C.9.27})$$

この 2 式を合わせると、

$$\pm i\omega \frac{1}{|\mathbf{k}_H|} \frac{db_{z0}}{dz} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = B_z \frac{du_{z0}}{dz} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} \quad (\text{C.9.28})$$

^{*62} $\frac{du_{z0}}{dz}$ が境界層内で速やかに変化すると言っているだけで、誘導方程式の鉛直成分 (C.9.19) が使えないという意味ではない。

となる。さらに、鉛直方向の誘導方程式 (C.7.7) より、

$$\mp \frac{1}{|\mathbf{k}_H|} \frac{d^2 u_{z0}}{dz^2} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = \frac{du_{z0}}{dz} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} \quad (\text{C.9.29})$$

となる。次に、(C.9.7)~(C.9.10) 式より、

$$\left[\frac{\omega^2 f^2}{V_{Az}^2} - N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] \frac{du_{z0}(z)}{dz} = V_{Az}^2 \frac{d^3}{dz^3} \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) u_{z0}(z) \quad (\text{C.9.30})$$

となるので、(C.9.29) 式より、

$$\mp \frac{1}{|\mathbf{k}_H|} \left[\frac{\omega^2 f^2}{V_{Az}^2} - N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] \frac{d^2 u_{z0}}{dz^2} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = V_{Az}^2 \frac{d^3}{dz^3} \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) u_{z0} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} \quad (\text{C.9.31})$$

となる。

さて、これらの境界条件を用いて、「遅い波の近似」を用いた場合の固有値問題を解いてみよう。固有方程式を再び書くと、

$$\omega^2 f^2 F(z) = V_{Az}^2 \left[V_{Az}^2 \frac{d^2}{dz^2} \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) + N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] F(z) \quad (\text{C.9.32})$$

$$\frac{d^2 u_{z0}(z)}{dz^2} = F(z) \quad (\text{C.9.33})$$

であり、境界条件は、完全導体の壁のときは、

$$u_{z0} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.9.34})$$

$$\frac{d^2 u_{z0}}{dz^2} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = F \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.9.35})$$

$$\frac{d^4 u_{z0}}{dz^4} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = \frac{d^2 F}{dz^2} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.9.36})$$

絶縁体の壁のときは

$$u_{z0} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.9.37})$$

$$\mp \frac{1}{|\mathbf{k}_H|} \left[\frac{\omega^2 f^2}{V_{Az}^2} - N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] \frac{d^2 u_{z0}}{dz^2} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = V_{Az}^2 \frac{d^3}{dz^3} \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) u_{z0} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} \quad (\text{C.9.38})$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) u_{z0} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.9.39})$$

すなわち、

$$u_{z0} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.9.40})$$

$$\mp \frac{1}{|\mathbf{k}_H|} \left[\frac{\omega^2 f^2}{V_{Az}^2} - N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] F \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = V_{Az}^2 \frac{d}{dz} \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) F \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} \quad (\text{C.9.41})$$

$$|\mathbf{k}_H|^2 F\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) = \frac{d^2 F}{dz^2} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} \quad (\text{C.9.42})$$

である。ここで、 $|\mathbf{k}_H| \rightarrow 0$ の極限では、完全導体の壁と絶縁体の壁の境界条件が同じになる。

完全導体の壁のときは、固有値問題は簡単に解けて、

$$(\text{原点対称モード}) \quad u_{z0} = u_{z00} \cos\left(\frac{(2m_c + 1)\pi}{H} z\right) \quad (m_c = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{C.9.43})$$

$$(\text{原点反対称モード}) \quad u_{z0} = u_{z00} \sin\left(\frac{2m_s\pi}{H} z\right) \quad (m_s = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{C.9.44})$$

周波数は、

$$\omega^2 = \frac{V_{Az}^2 \left[V_{Az}^2 \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2 + N^2 \frac{|\mathbf{k}_H|^2}{|\mathbf{k}_H|^2 + \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2} \right]}{f^2 \frac{1}{|\mathbf{k}_H|^2 + \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2}} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{C.9.45})$$

となり、MAC 波の周波数が得られる。ここで、 u_{z00} は定数である。

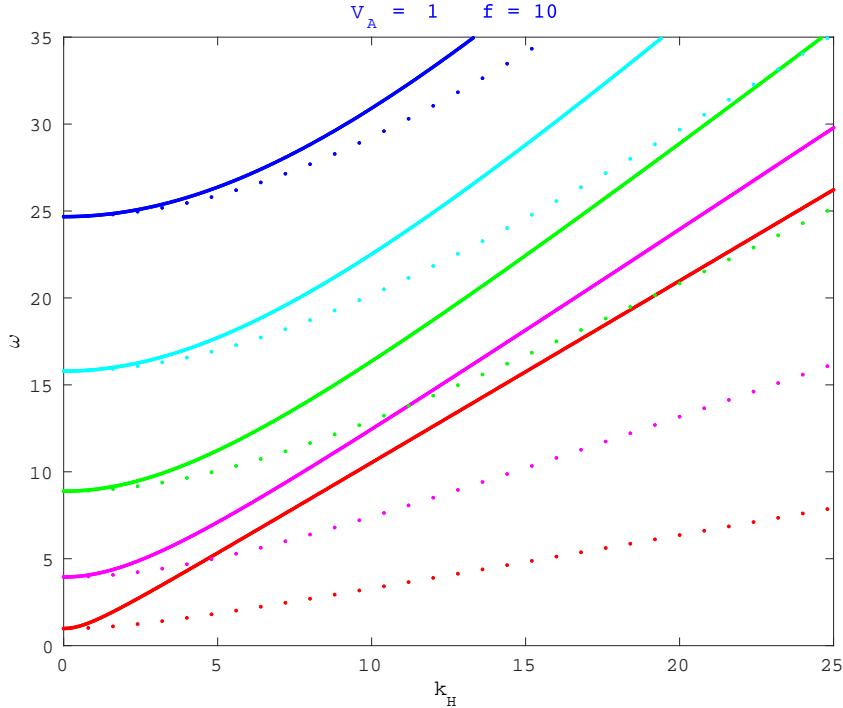


Fig.138 $f \neq 0$, $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ で、壁が完全導体の場合の「遅い波」の分散関係 (C.9.45)。縦軸が ω 、横軸が $|\mathbf{k}_H|$ である。ここで、 $V_{Az} = 1$ 、 $N = 10$ 、 $f = 10$ 、 $H = 1$ としている。また、赤から青にかけて $m = 1, 2, 3, 4, 5$ の場合で、点線は $N = 0$ の場合 (MC 波) の分散関係である。 $\omega \ll V_{Az} k_z$ を仮定しているので、 ω が小さいところのみ良い近似であることに注意。

次に、絶縁体の壁のときを考える。 $F(z)$ についての固有方程式は 4 階の微分方程式で、 $u_{z0}(z)$ については 2 階の非同次の微分方程式なので、一般解は

$$u_{z0}(z) = C_1 + C_2 z + C_3 e^{\lambda_+ z} + C_4 e^{-\lambda_+ z} + C_5 e^{\lambda_- z} + C_6 e^{-\lambda_- z} \quad (\text{C.9.46})$$

となる。ここで、 $C_i (i = 1, 2, 3 \dots)$ は定数であり、

$$\lambda_{\pm} = \sqrt{\frac{|\mathbf{k}_H|^2}{2} \pm \sqrt{\frac{|\mathbf{k}_H|^4}{4} + \frac{\omega^2 f^2 - N^2 |\mathbf{k}_H|^2 V_{Az}^2}{V_{Az}^4}}} \quad (\text{C.9.47})$$

である。固有方程式には偶数回の微分のみ含まれていて、 $z \rightarrow -z$ としても式の形は変わらないので、ここでも C.7.2 節と同様に、原点対称解と反対称解があると予想して、

$$u_{z0}^{(e)}(z) = C_1 + C_7 \cosh(\lambda_+ z) + C_8 \cosh(\lambda_- z) \quad (\text{C.9.48})$$

$$u_{z0}^{(o)}(z) = C_2 z + C_9 \sinh(\lambda_+ z) + C_{10} \sinh(\lambda_- z) \quad (\text{C.9.49})$$

とする。

境界条件より、原点対称解の分散関係は

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \cosh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) & \cosh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \\ 0 & \Lambda_+ \cosh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) & \Lambda_- \cosh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \\ 0 & \varpi_+ \cosh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) + V_{Az}^2 \lambda_+ \Lambda_+ \sinh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) & \varpi_- \cosh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) + V_{Az}^2 \lambda_- \Lambda_- \sinh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.9.50})$$

となる。ここで、見やすさのため、

$$\Lambda_{\pm} = \lambda_{\pm}^2 (\lambda_{\pm}^2 - |\mathbf{k}_H|^2) \quad (\text{C.9.51})$$

$$\varpi_{\pm} = \frac{\omega^2 f^2 - N^2 |\mathbf{k}_H|^2 V_{Az}^2}{V_{Az}^2 |\mathbf{k}_H|} \lambda_{\pm}^2 \quad (\text{C.9.52})$$

とした。少し整理して、

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \Lambda_+ & \Lambda_- \\ 0 & \varpi_+ + V_{Az}^2 \lambda_+ \Lambda_+ \tanh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) & \varpi_- + V_{Az}^2 \lambda_- \Lambda_- \tanh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.9.53})$$

となる。ここで、固有方程式より、

$$\Lambda_{\pm} = \frac{\omega^2 f^2 - N^2 |\mathbf{k}_H|^2 V_{Az}^2}{V_{Az}^4} \quad (\text{C.9.54})$$

なので、

$$\varpi_{\pm} = \frac{\Lambda_{\pm} V_{Az}^2 \lambda_{\pm}^2}{|\mathbf{k}_H|} \quad (\text{C.9.55})$$

となり、分散関係は

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{\lambda_+^2}{|\mathbf{k}_H|} + \lambda_+ \tanh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) & \frac{\lambda_-^2}{|\mathbf{k}_H|} + \lambda_- \tanh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.9.56})$$

となる。さらに、行列式を計算すれば、

$$\lambda_+^2 + \lambda_+ |\mathbf{k}_H| \tanh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) = \lambda_-^2 + \lambda_- |\mathbf{k}_H| \tanh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \quad (\text{C.9.57})$$

となる。

一方、原点反対称解の分散関係は

$$\det \begin{pmatrix} \frac{H}{2} & \sinh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) & \sinh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \\ 0 & \Lambda_+ \sinh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) & \Lambda_- \sinh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \\ 0 & \varpi_+ \sinh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) + V_{Az}^2 \lambda_+ \Lambda_+ \cosh\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) & \varpi_- \sinh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) + V_{Az}^2 \lambda_- \Lambda_- \cosh\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.9.58})$$

となる。ゆえに、分散関係は

$$\lambda_+^2 + \lambda_+ |\mathbf{k}_H| \coth\left(\lambda_+ \frac{H}{2}\right) = \lambda_-^2 + \lambda_- |\mathbf{k}_H| \coth\left(\lambda_- \frac{H}{2}\right) \quad (\text{C.9.59})$$

となる。

ただし、ここで注意すべきことは、 $4N^2 \geq |\mathbf{k}_H|^2 V_{Az}^2$ で

$$\omega^2 = \frac{4N^2 |\mathbf{k}_H|^2 V_{Az}^2 - |\mathbf{k}_H|^4 V_{Az}^4}{4f^2} \quad (\text{C.9.60})$$

のとき、

$$\lambda_+ = \lambda_- = \frac{|\mathbf{k}_H|}{\sqrt{2}} \quad (\text{C.9.61})$$

となり、分散関係を満たしてしまうことである。この場合の一般解は、

$$u_{z0}(z) = C_1 + C_2 z + (C_3 + C_4 z) e^{\frac{|\mathbf{k}_H|}{\sqrt{2}} z} + (C_5 + C_6 z) e^{-\frac{|\mathbf{k}_H|}{\sqrt{2}} z} \quad (\text{C.9.62})$$

とするのが正しく、これを原点対称な解と反対称な解に分けると

$$u_{z0}^{(e)}(z) = C_1 + C_7 \cosh\left(\frac{|\mathbf{k}_H|}{\sqrt{2}} z\right) + C_8 z \sinh\left(\frac{|\mathbf{k}_H|}{\sqrt{2}} z\right) \quad (\text{C.9.63})$$

$$u_{z0}^{(o)}(z) = C_2 z + C_9 \sinh\left(\frac{|\mathbf{k}_H|}{\sqrt{2}} z\right) + C_{10} z \cosh\left(\frac{|\mathbf{k}_H|}{\sqrt{2}} z\right) \quad (\text{C.9.64})$$

となる。ただし、このまま u_{z0} の式で境界条件を計算するのは大変なので、 F の式として考える。 F が全領域で 0 であれば、 u_{z0} も全領域で 0 になるので、 F の式からも分散関係を求めることができる。すなわち、一般解は、

$$F(z) = (C_{11} + C_{12} z) e^{\frac{|\mathbf{k}_H|}{\sqrt{2}} z} + (C_{13} + C_{14} z) e^{-\frac{|\mathbf{k}_H|}{\sqrt{2}} z} \quad (\text{C.9.65})$$

とし、

$$F^{(e)}(z) = C_{15} \cosh\left(\frac{|\mathbf{k}_H|}{\sqrt{2}} z\right) + C_{16} z \sinh\left(\frac{|\mathbf{k}_H|}{\sqrt{2}} z\right) \quad (\text{C.9.66})$$

$$F^{(o)}(z) = C_{17} \sinh\left(\frac{|\mathbf{k}_H|}{\sqrt{2}} z\right) + C_{18} z \cosh\left(\frac{|\mathbf{k}_H|}{\sqrt{2}} z\right) \quad (\text{C.9.67})$$

というように、原点対称な解と反対称な解に分ける。

ゆえに、この場合の原点対称な解の分散関係は

$$\det \begin{pmatrix} \cosh\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) & -\frac{2\sqrt{2}}{|\mathbf{k}_H|} \cosh\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) + \frac{H}{2} \sinh\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) \\ \cosh\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2} \sinh\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) & \left(\frac{H}{2} - \frac{2}{|\mathbf{k}_H|}\right) \sinh\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2} \frac{H}{2} \cosh\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.9.68})$$

となる。さらに、整理すると、

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4\sqrt{2}}{|\mathbf{k}_H| H} \coth\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) + 1 \\ 1 + \sqrt{2} \tanh\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) & \left(1 - \frac{4}{|\mathbf{k}_H| H}\right) + \sqrt{2} \coth\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.9.69})$$

となり、この行列式を計算すると、

$$\left[\tanh\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) \right]^2 - \frac{2}{H} \frac{\sqrt{2}}{|\mathbf{k}_H|} \tanh\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) - \left(\sqrt{2} \frac{2}{H} \frac{\sqrt{2}}{|\mathbf{k}_H|} + 1 \right) = 0 \quad (\text{C.9.70})$$

を得る。ただし、この式は $|\mathbf{k}_H| \rightarrow \infty$ のときのみ成り立ち、今、 $4N^2 \geq |\mathbf{k}_H|^2 V_{Az}^2$ の場合を考えていたので、この式を満たす解は存在しない。

一方、原点反対称な解の分散関係は

$$\det \begin{pmatrix} \sinh\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) & -\frac{2\sqrt{2}}{|\mathbf{k}_H|} \sinh\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) + \frac{H}{2} \cosh\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) \\ \sinh\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2} \cosh\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) & \left(\frac{H}{2} - \frac{2}{|\mathbf{k}_H|}\right) \cosh\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2} \frac{H}{2} \sinh\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{C.9.71})$$

であり、これから、

$$\left[\coth\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) \right]^2 - \frac{2}{H} \frac{\sqrt{2}}{|\mathbf{k}_H|} \coth\left(\frac{|\mathbf{k}_H| H}{\sqrt{2}}\right) - \left(\sqrt{2} \frac{2}{H} \frac{\sqrt{2}}{|\mathbf{k}_H|} + 1 \right) = 0 \quad (\text{C.9.72})$$

を得るが、この式も $|\mathbf{k}_H| \rightarrow \infty$ のときのみ成り立つので、解は存在しない。

最後に、壁が絶縁体のときの固有関数を示しておく。固有関数の求め方は、C.7.2 節を参照。境界条件は、壁が完全導体の場合と比べ、複雑なものであったが、壁が完全導体のときの固有関数は \sin と \cos だったので、固有関数は両者とも似た形をしている。

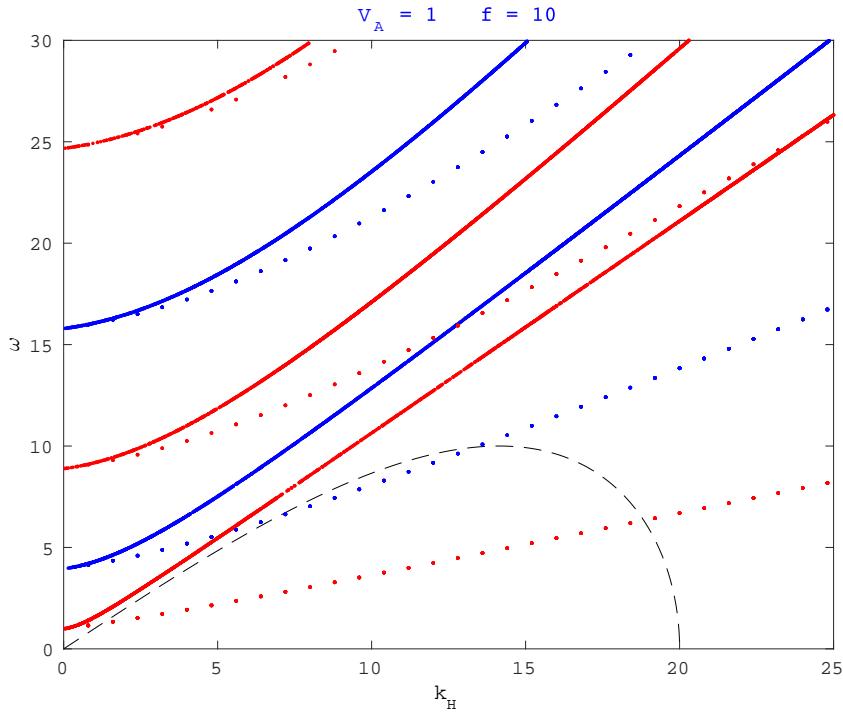


Fig.139 $f \neq 0$ 、 $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ で、壁が絶縁体の場合の「遅い波」の分散関係 (C.9.57)、(C.9.59)。縦軸が ω 、横軸が $|\mathbf{k}_H|$ である。ここで、 $V_{Az} = 1$ 、 $N = 10$ 、 $f = 10$ 、 $H = 1$ としている。また、赤の線が原点対称モード、青の線が原点反対称モードで、点線は $N = 0$ の場合 (MC 波) の分散関係である。黒の破線は $N = 10$ のときに、 $\lambda_+ = \lambda_-$ となるところを表す。 $\omega \ll V_{Az} k_z$ を仮定しているので、 ω が小さいところのみ良い近似であることに注意。

C.10 境界条件のまとめ

用いる境界条件は状況により様々なので、ここで整理しておこう。

- $B_z = 0$ のとき

壁が完全導体か絶縁体かに関わらず

$$u_{z0}\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{C.10.1})$$

$f = 0$ のときの ζ_{z0} のモードについての条件はない。

- $B_z \neq 0$ で $f = 0$ のとき

絶縁体の壁のときは境界条件が不足するので、完全導体の壁のときだけ、解くことができる。

$$u_{z0}\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{C.10.2})$$

$$\zeta_{z0}\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{C.10.3})$$

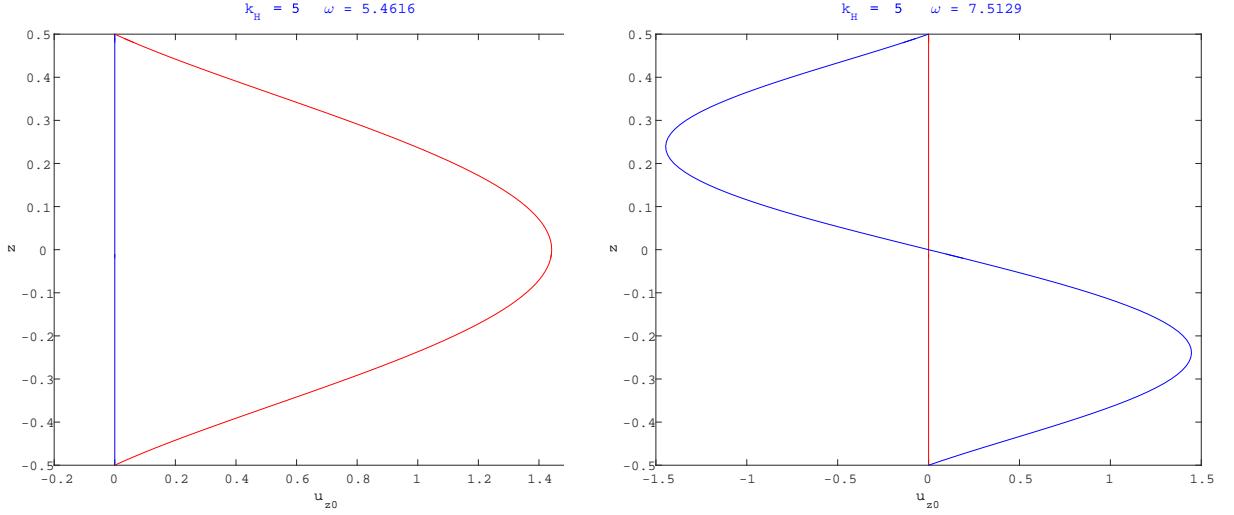


Fig.140 $f \neq 0$ 、 $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ で、壁が絶縁体の場合の「遅い波」の固有関数。 $|\mathbf{V}_A| = 1$ 、 $N = 10$ 、 $H = 1$ 、 $|\mathbf{k}_H| = 5$ とした。縦軸が z 、横軸が u_{z0} の振幅であり、赤が u_{z0} の実部、青が虚部である。(左図) $\omega = 5.4616$ の場合。原点対称な解の基本モード。(右図) $\omega = 7.5129$ の場合。原点反対称な解の基本モード

$$\frac{du_{z0}}{dz} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.10.4})$$

ただし、境界で水平電場は連続であるとしている。

- $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ で $f \neq 0$ のとき（「遅い波の近似」を用いない場合）

絶縁体の壁のときは境界条件が不足するので、完全導体の壁のときだけ、解くことができる。

$$u_{z0} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.10.5})$$

$$\frac{du_{z0}}{dz} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.10.6})$$

$$\left(|\mathbf{k}_H|^2 - \frac{\omega^2}{V_{Az}^2} \right) \frac{d^3 u_{z0}}{dz^3} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = \frac{d^5 u_{z0}}{dz^5} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} \quad (\text{C.10.7})$$

ただし、境界で水平電場は連続であるとしている。

- $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ で $f \neq 0$ のとき（「遅い波の近似」を用いる場合）

完全導体の壁

$$u_{z0} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{C.10.8})$$

$$\frac{d^2 u_{z0}}{dz^2} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.10.9})$$

$$\frac{d^4 u_{z0}}{dz^4} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.10.10})$$

絶縁体の壁

$$u_{z0}\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{C.10.11})$$

$$\mp \frac{1}{|\mathbf{k}_H|} \left[\frac{\omega^2 f^2}{V_{Az}^2} - N^2 |\mathbf{k}_H|^2 \right] \frac{d^2 u_{z0}}{dz^2} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = V_{Az}^2 \frac{d^3}{dz^3} \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) u_{z0} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} \quad (\text{C.10.12})$$

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(-|\mathbf{k}_H|^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) u_{z0} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{C.10.13})$$

C.11 無限空間中の波と、境界がある場合の波の固有モード

付録 B のような無限空間中の波を考える時は、鉛直方向に対してもフーリエ変換を行った。これは、何らかの原因により励起された波^{*63}が伝播していくときの様子を調べる方法である。すなわち、境界があっても、波が境界に到達するまでの様子を知りたい場合は、用いることができる。ただし、このときの波のもつ周波数と波数は自由ではなく、ある関係性（分散関係）を満たしているもののみ存在できる。分散関係を満たさない周波数と波数をもつ波は、ある物理量が別の物理量を変化させるときに、位相がかみ合わず、その変動が伝播されなくなる。

この方法では、分散関係を満たす、ある一つの周波数と波数の組をもつ波を取り出して^{*64}、伝播の様子を調べる。このようにできるのは、振幅が十分に小さく、基礎方程式を線形化できるためである。線形の場合は、ある周波数と波数をもつ波は、別の周波数と波数をもつ波と混じり合わない。そのため、1つの波について考え、必要に応じて、いくつかの波の結果を足し合わせれば良い。ある励起源が存在する場合の物理量の変動の様子は、発生しうるすべての波の足し合わせで表現できる。

次に、境界がある場合を考える。境界がある場合、波は境界で反射する。どのような反射をするかは、波の性質はもちろんあるが、境界層や壁の性質（完全導体か絶縁体か、など）にも影響する。例えば、Schaeffer et al.(2012) [48] と Schaeffer and Jault(2016) [47] は、地球のコア・マントル境界（CMB）での Alfvén 波（ねじれ波）の反射を調べるために、絶縁体壁との境界に Hartmann 層が存在する場合や、壁側に電気伝導度が 0 でない領域が存在する場合の反射の様子を調べている。

波が反射すると、まだ反射していない後ろに続いている波との重ね合わせが起こる。そして、その重ね合わせによって、ある波は打ち消し合い、ある波は強め合う。そして、上下の境界で何度も反射した時、ある構造を持ったものだけが生き残る。これが鉛直固有モードである。波が発生して十分時間が経過した後であれば、鉛直固有モードの形のまま水平方向に伝播する様子が観察できるであろう。特に、鉛直スケールよりも水平スケールの方が大きい場合、上下での反射にそれほど時間を使ないので、鉛直固有モードの形で水平に伝播すると考えても差し支えない。鉛直固有モー

^{*63} 初期に擾乱が存在するだけなのか、連続的または周期的な励起源が存在するのかによって、発生する波は変化するが、ここでは深く立ち入らないことにする。

^{*64} このような波を単色波という。

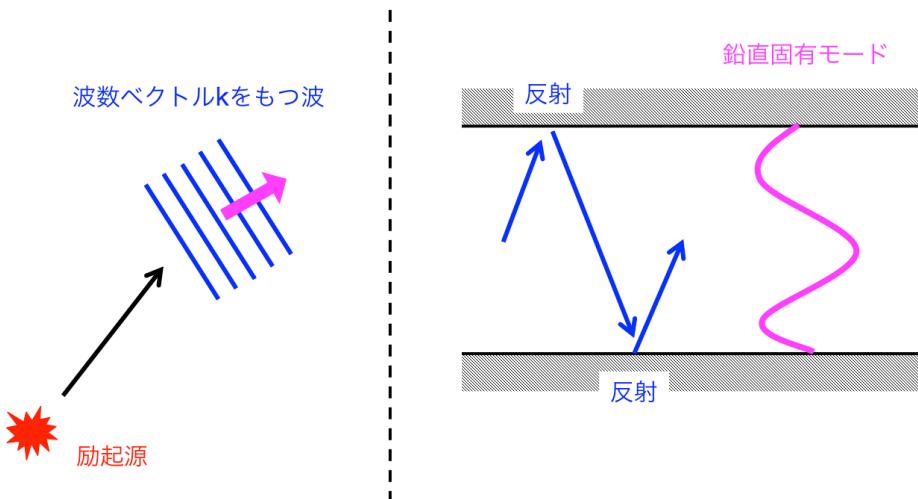


Fig.141 無限空間中の波（左）と、上下に境界がある場合の波の鉛直固有モード（右）

ドは固有値の違いによって複数存在するが、無限空間中の波のときと同様、線形の範囲内では、混じり合うことはないので、必要に応じて足し合わせて良い。

また、無限空間中の場合は、位相速度と群速度は3成分で表現していたが、周波数が $\omega = \dots$ と表現出来る鉛直固有モードに対しては、水平方向の位相速度と群速度を同様に求めることができる。

付録 D 静水圧 f 面近似を用いた無限空間

D.1 考える系と薄い安定成層領域の近似

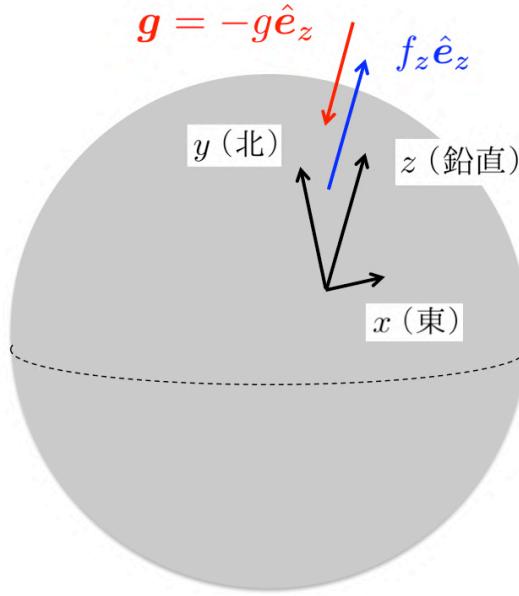


Fig.142 考える系

外核最上部の安定成層領域のジオメトリに近づけるために、次に、球面の中緯度の狭い領域を考える。中緯度の狭い領域を考えるとき、局所 Cartesian 座標で表すことができる。これまでと同様に z 方向を鉛直上向きにとり、 x 方向を東向き、 y 方向を北向きにとる。球面の場合は自転角速度ベクトルの水平成分が現れるので、運動方程式 (B.2.6) は、

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} - f_y u_x = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{B}_H \cdot \mathbf{b}_H}{\rho_0 \mu} + \frac{B_z b_z}{\rho_0 \mu} \right) + \frac{B_z}{\rho_0 \mu} \frac{\partial b_z}{\partial z} + \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla) b_z}{\rho_0 \mu} - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g \quad (\text{D.1.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_H}{\partial t} + f_z \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u}_H + f_y u_z \hat{\mathbf{e}}_x = -\nabla_H \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{B}_H \cdot \mathbf{b}_H}{\rho_0 \mu} + \frac{B_z b_z}{\rho_0 \mu} \right) + \frac{B_z}{\rho_0 \mu} \frac{\partial \mathbf{b}_H}{\partial z} + \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla) \mathbf{b}_H}{\rho_0 \mu} \quad (\text{D.1.2})$$

となる。ここで、自転角速度ベクトルの 2 倍は、 $\mathbf{f} = f_z \hat{\mathbf{e}}_z + f_y \hat{\mathbf{e}}_y$ で、背景磁場は $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{B}_H$ 、速度場と磁場の摂動は $\mathbf{u} = u_z \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{u}_H$ 、 $\mathbf{b} = b_z \hat{\mathbf{e}}_z + \mathbf{b}_H$ とした。

少し整理すると、

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} - f_y u_x = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{B}_H \cdot \mathbf{b}_H}{\rho_0 \mu} \right) + \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla) b_z}{\rho_0 \mu} - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g \quad (\text{D.1.3})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_H}{\partial t} + f_z \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u}_H + f_y u_z \hat{\mathbf{e}}_x = -\nabla_H \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{B}_H \cdot \mathbf{b}_H}{\rho_0 \mu} + \frac{B_z b_z}{\rho_0 \mu} \right) + \frac{B_z}{\rho_0 \mu} \frac{\partial \mathbf{b}_H}{\partial z} + \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla) \mathbf{b}_H}{\rho_0 \mu} \quad (\text{D.1.4})$$

となる。

ここで、成層が十分強く、薄い流体層を仮定しよう。成層が強いとき、鉛直流は浮力によって妨げられるので、水平流の方が鉛直流よりも卓越する。さらに、磁場の摂動は流れからつくれるので、

$$1 \gg \frac{u_z}{|\mathbf{u}_H|} \quad (\text{D.1.5})$$

$$1 \gg \frac{b_z}{|\mathbf{b}_H|} \quad (\text{D.1.6})$$

と近似できる。さらに、薄い流体層なので、鉛直スケールに比べ、水平スケールが大きく、

$$1 \gg \frac{1/|\frac{\partial}{\partial z}|}{1/|\nabla_H|} = \frac{|\nabla_H|}{|\frac{\partial}{\partial z}|} \quad (\text{D.1.7})$$

と近似できる。ゆえに、

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}, \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H) b_z}{\rho_0 \mu} \ll \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{B}_H \cdot \mathbf{b}_H}{\rho_0 \mu} \right), \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g \quad (\text{D.1.8})$$

$$f_y u_z \ll f_z (\hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u}_H) \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \quad (\text{D.1.9})$$

$$\nabla_H \left(\frac{B_z b_z}{\rho_0 \mu} \right) \ll \frac{B_z}{\rho_0 \mu} \frac{\partial \mathbf{b}_H}{\partial z} \quad (\text{D.1.10})$$

を仮定する。このとき、運動方程式は、

$$-f_y u_x = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{B}_H \cdot \mathbf{b}_H}{\rho_0 \mu} \right) - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g \quad (\text{D.1.11})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_H}{\partial t} + f_z \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u}_H = -\nabla_H \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{B}_H \cdot \mathbf{b}_H}{\rho_0 \mu} \right) + \frac{B_z}{\rho_0 \mu} \frac{\partial \mathbf{b}_H}{\partial z} + \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla) \mathbf{b}_H}{\rho_0 \mu} \quad (\text{D.1.12})$$

となる。さらに、新たに、

$$P = \frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{B}_H \cdot \mathbf{b}_H}{\rho_0 \mu} \quad (\text{D.1.13})$$

と、おきなおすと、基礎方程式は

$$-f_y u_x = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g \quad (\text{D.1.14})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_H}{\partial t} + f_z \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u}_H = -\nabla_H P + \frac{1}{\rho_0 \mu} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{b}_H \quad (\text{D.1.15})$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (\text{D.1.16})$$

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} = \frac{\rho_0 N^2}{g} u_z \quad (\text{D.1.17})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (\text{D.1.18})$$

となる。

D.2 伝統的近似 (traditional approximation)

回転成層流体では、回転と成層の強さや流体層の厚さによって、回転軸が重要になる場合と重力の方向が重要になる場合がある。

非散逸で、磁場の効果と浮力が無視できる場合、運動方程式 (B.2.6) の回転をとると（すなわち、渦度方程式 (B.3.2) より）、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{u}) - (\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{u} = 0 \quad (\text{D.2.1})$$

となる。さらに、定常状態を考えると、

$$(\mathbf{f} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{D.2.2})$$

となる。すなわち、このような場合、流れは回転軸に沿って一様になる。これを Taylor-Proudman の定理という。

ゆえに、回転の効果が大きい場合は、回転軸が重要になる。外核最上部の安定成層領域の下にある、外核の大部分を占める厚い流体領域では、回転軸が重要であると考えられており、回転軸に沿った柱状の流体を用いて議論することが多い。

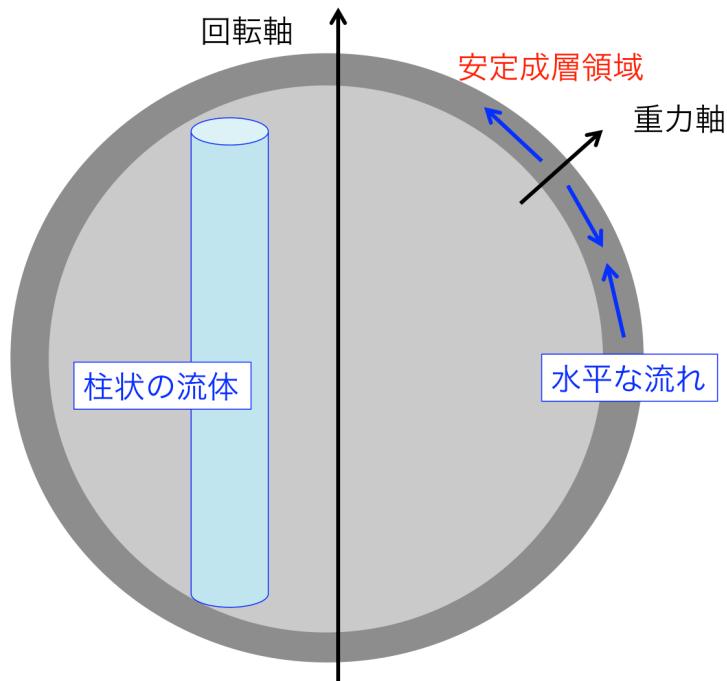


Fig.143 回転軸が重要な内部の領域と、重力の方向が重要な最上部の安定成層領域

回転の効果が大きい場合は柱状の流体を考えると同様に、回転の効果が大きい場合にも強力な近似がある。それは、近似した運動方程式 (D.1.14) にさらに、

$$-f_y u_x \ll \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g \quad (\text{D.2.3})$$

とする、というものである。この近似のように、自転角速度の水平成分 f_y を含む項を無視する近似は、気象学や海洋学でよく用いられており、伝統的近似 (traditional approximation) と呼ばれている。

運動方程式 (D.1.14) を時間で微分し、(D.1.17) 式を代入すると、

$$-f_y \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial t} - N^2 u_z \quad (\text{D.2.4})$$

となる。さらに、 z で微分して、(D.1.18) 式より、

$$-f_y \frac{\partial^2 u_x}{\partial t \partial z} = -\frac{\partial^3 P}{\partial z^2 \partial t} + N^2 (\nabla_H \cdot \mathbf{u}_H) \quad (\text{D.2.5})$$

となるので、

$$\frac{f_y |\frac{\partial}{\partial t}|}{N^2} \frac{|\frac{\partial}{\partial z}|}{|\nabla_H|} \ll 1 \quad (\text{D.2.6})$$

であれば、この近似は成り立つ。ただし、 $\frac{|\frac{\partial}{\partial z}|}{|\nabla_H|}$ は、薄い領域では大きな値を持つので、一般には成り立たない。成層がとても強く $\frac{N}{f_z}$ がかなり大きい場合や、遅い現象を考える場合 ($\frac{|\frac{\partial}{\partial t}|}{N} \ll 1$) は、この近似を用いることができる。

この近似を用いることができる場合、基礎方程式は、

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g \quad (\text{D.2.7})$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_H}{\partial t} + f_z \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u}_H = -\nabla_H P + \frac{1}{\rho_0 \mu} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{b}_H \quad (\text{D.2.8})$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (\text{D.2.9})$$

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} = \frac{\rho_0 N^2}{g} u_z \quad (\text{D.2.10})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (\text{D.2.11})$$

となる。このとき、鉛直方向の運動方程式 (D.2.7) は、磁気圧を含めた静水圧平衡の式になっている。また、基礎方程式に含まれる自転角速度ベクトルは鉛直成分 f_z のみとなった。この各緯度ごとの局所的な（鉛直）自転角速度を Coriolis パラメータという。余緯度 $\theta = \theta_0$ での Coriolis パラメータは、 $f_z = 2\Omega \cos \theta_0$ となる。ここで、 Ω は地球の自転角速度である。

中緯度の狭い領域を考えると、 f_z は一定であると近似できる。これを f 平面近似という。

外核最上部の安定成層領域での回転系電磁流体波動の研究で、鉛直方向に静水圧平衡を仮定しているものとしては Braginsky(1993, 1998) [5, 6] などがある。後の節で、Coriolis パラメータの緯度依存性を考慮する場合（すなわち、 f 平面近似を用いない場合）、この近似により解析的に解くことができるようになるので、付録 D 以降ではこれらの式を用いる。

D.3 静水圧 f 平面近似と磁場の摂動の鉛直成分

基礎方程式 (D.2.7)~(D.2.11) を見ると、 b_z は (D.2.9) 式と (D.2.11) 式にしか含まれていない。さらに、(D.2.9) 式の発散をとると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{D.3.1})$$

となるので、 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ を満たしていれば、自動的に $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ を満たす。すなわち、実質的には、 b_z は (D.2.9) 式にしか含まれていない。これは、 b_z は現象にほとんど影響を与えず、その他の成分から受身的に決まっているということを意味している。ゆえに、(D.2.9) 式の鉛直成分

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)u_z \quad (\text{D.3.2})$$

は b_z を求める式だということになる。

こうすると、 b_z を考える必要がないように見えるが、 b_z は現在の技術で観測できる唯一の成分なので、残しておく。

D.4 基礎方程式の変形

近似によって、付録 B とは違う基礎方程式になったが、同様の式変形をすることができる。まず、(D.2.8) 式を時間で微分して、(D.2.9) 式の水平成分を代入すると、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2}{\rho_0 \mu} \right] \mathbf{u}_H + f_z \hat{\mathbf{e}}_z \times \frac{\partial \mathbf{u}_H}{\partial t} = -\nabla_H \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{D.4.1})$$

となる。さらに、(D.4.1) 式の水平発散をとって、(D.2.11) を用いると、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2}{\rho_0 \mu} \right] \frac{\partial u_z}{\partial z} + f_z \frac{\partial}{\partial t} [\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H)] = \nabla_H^2 \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{D.4.2})$$

となる。次に、(D.4.1) 式の水平回転をとって、(D.2.11) を用いると、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2}{\rho_0 \mu} \right] (\nabla_H \times \mathbf{u}_H) = f_z \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{D.4.3})$$

となり、 $\hat{\mathbf{e}}_z$ との内積をとると、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2}{\rho_0 \mu} \right] [\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H)] = f_z \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{D.4.4})$$

となる。

ゆえに、(D.4.2) 式と (D.4.4) 式より、 $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ を消去すると

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2}{\rho_0 \mu} \right]^2 [\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H)] + f_z^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H)] = f_z \nabla_H^2 \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (\text{D.4.5})$$

一方、 $[\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H)]$ を消去すると、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2}{\rho_0 \mu} \right]^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + f_z^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u_z}{\partial z} = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2}{\rho_0 \mu} \right] \nabla_H^2 \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{D.4.6})$$

となる。ここで、 $[\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H)]$ は付録 B での ζ_z に対応している。

次に、 P に関する式は、(D.2.7) 式を時間で微分して、(D.2.10) 式より、

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t \partial z} = -N^2 u_z \quad (\text{D.4.7})$$

となり、 z で微分して、(D.2.11) 式を用いると、

$$\frac{\partial^3 P}{\partial t \partial z^2} = -N^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} = N^2 (\nabla_H \cdot \mathbf{u}_H) \quad (\text{D.4.8})$$

となる。

D.5 分散関係

D.5.1 静水圧近似の下での分散関係

(D.4.6) 式を z で微分し (D.4.7) 式を代入すると、

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2}{\rho_0 \mu} \right]^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + f_z^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = -N^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2}{\rho_0 \mu} \right] \nabla_H^2 u_z \quad (\text{D.5.1})$$

となる。ここで、波型の解

$$u_z = \Re \left[u_{z0} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{D.5.2})$$

を仮定して、代入すると、分散関係

$$[\omega^2 - \omega_M^2] \left[\omega^2 - \omega_M^2 - N^2 \frac{|\mathbf{k}_H|^2}{k_z^2} \right] = \omega^2 f_z^2 \frac{k_z^2}{k_z^2} \quad (\text{D.5.3})$$

を得る。ここで、 ω_M は付録 B で定義したものと同じもので、Alfvén 波周波数である。

この式は、付録 B で静水圧平衡を仮定しなかった場合の分散関係で、 $k^2 = k_z^2 + k_H^2 \approx k_z^2$ と近似した場合と等しい。これは、磁場がない場合に、水平方向に大きなスケールの現象であれば静水圧近似は有効な近似である、ということが磁場があっても成り立つということを意味している。静水圧平衡の状態での周波数を新たに、

$$\omega_{A(hs)}^2 = N^2 \frac{|\mathbf{k}_H|^2}{k_z^2} \quad (\text{D.5.4})$$

$$\omega_{C(hs)}^2 = f_z^2 \frac{k_z^2}{k_z^2} = f_z^2 \quad (\text{D.5.5})$$

と書けば、同じ形の分散関係

$$[\omega^2 - \omega_M^2][\omega^2 - \omega_M^2 - \omega_{A(hs)}^2] = \omega^2 \omega_{C(hs)}^2 \quad (\text{D.5.6})$$

が得られる。

D.5.2 「遅い波の近似」を用いた場合の分散関係

回転が速く、Alfvén 波よりも遅い現象に注目したいときは、付録 B と同様に、

$$\omega^2 \ll \omega_M^2 \quad (\text{D.5.7})$$

とすれば良い。この近似は、静水圧近似の場合は、(鉛直方向の慣性項はすでに無視されているので、) 水平方向の慣性項を無視することに対応する。ゆえに、非静水圧の場合と同様、遅い波は運動エネルギーを伝播しない。このとき、分散関係は、

$$\omega^2 = \frac{\omega_M^4}{\omega_{C(hs)}^2} + \frac{\omega_M^2 \omega_{A(hs)}^2}{\omega_{C(hs)}^2} = \frac{\omega_M^4}{\omega_{C(hs)}^2} \left(1 + \frac{\omega_{A(hs)}^2}{\omega_M^2} \right) \quad (\text{D.5.8})$$

となる。また、

$$\frac{\omega_{A(hs)}^2}{\omega_{C(hs)}^2} = \frac{\omega_A^2}{\omega_C^2} \quad (\text{D.5.9})$$

が成り立つ。

D.5.3 「遅い波」の群速度、位相速度

静水圧 f 面近似を用いた「遅い波」の周波数は

$$\omega_{MAC(hs)} = \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}{f_z} \sqrt{1 + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{k_z^2 (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}} \quad (\text{D.5.10})$$

である。まず静水圧 f 面近似における MC 波の位相速度と群速度は

$$\mathbf{c}_{p,MC(hs)} = \frac{\omega_{MC(hs)}}{k} \hat{\mathbf{e}}_k = \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}{f_z k} \hat{\mathbf{e}}_k \quad (\text{D.5.11})$$

$$\mathbf{c}_{g,MC(hs)} = \frac{\partial \omega_{MC(hs)}}{\partial \mathbf{k}} = \pm \frac{2(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}) \mathbf{V}_A}{f_z} \quad (\text{D.5.12})$$

となるので、静水圧 f 面近似における MAC 波の位相速度と群速度は

$$\mathbf{c}_{p,MAC(hs)} = \frac{\omega_{MAC(hs)}}{k} \hat{\mathbf{e}}_k = \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}{f_z k} \sqrt{1 + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{k_z^2 (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}} \hat{\mathbf{e}}_k \quad (\text{D.5.13})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{g,MAC(hs)} &= \frac{\partial \omega_{MAC(hs)}}{\partial \mathbf{k}} = \mathbf{c}_{g,MC(hs)} \sqrt{1 + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{k_z^2 (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}} \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}{f_z} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \sqrt{1 + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{k_z^2 (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}} \\ &= \pm \frac{2(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}) \mathbf{V}_A}{f_z} \sqrt{1 + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{k_z^2 (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}} \\ &\quad \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}{f_z} \frac{\frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{k_z^2 (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}}{\sqrt{1 + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{k_z^2 (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}}} \left(\frac{\mathbf{k}_H}{|\mathbf{k}_H|^2} - \frac{\hat{\mathbf{e}}_z}{k_z} - \frac{\mathbf{V}_A}{\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.5.14})$$

ゆえに、

$$\mathbf{c}_{g, MAC(hs)} \sqrt{1 + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{k_z^2 (\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k})^2}} = \pm \frac{2(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}) \mathbf{V}_A}{f_z} \pm \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{f_z k_z^2} \left(\frac{\mathbf{V}_A}{\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}} + \frac{\mathbf{k}_H}{|\mathbf{k}_H|^2} - \frac{\hat{\mathbf{e}}_z}{k_z^2} \right) \quad (\text{D.5.15})$$

となる。

D.5.4 $\omega_M \ll \omega_A$ の場合の「遅い波」

磁場が弱く、 $\omega_M \ll \omega_A$ が成り立つ場合は、「遅い波」の周波数は

$$\omega = \pm \frac{\omega_M \omega_{A(hs)}}{\omega_{C(hs)}} = \pm \frac{\omega_M \omega_A}{\omega_C} = \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}) N |\mathbf{k}_H|}{f_z k_z} \quad (\text{D.5.16})$$

となり、静水圧近似を用いない場合と一致する。このときの位相速度と群速度は、非静水圧のときと同じで、

$$\mathbf{c}_p = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{e}}_k = \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}) N |\mathbf{k}_H|}{f_z k_z k} \hat{\mathbf{e}}_k \quad (\text{D.5.17})$$

$$\mathbf{c}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = \pm \frac{(\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}) N |\mathbf{k}_H|}{f_z k_z} \left(\frac{\mathbf{V}_A}{\mathbf{V}_A \cdot \mathbf{k}} + \frac{\mathbf{k}_H}{k_H^2} - \frac{\hat{\mathbf{e}}_z}{k_z} \right) \quad (\text{D.5.18})$$

となる。

また、このような周波数になるときの式のつり合いは、(D.4.2) 式と (D.4.4) 式より、

$$f_z \frac{\partial}{\partial t} [\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H)] = \nabla_H^2 \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{D.5.19})$$

$$-\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2}{\rho_0 \mu} [\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H)] = f_z \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{D.5.20})$$

である。ここで、(D.5.19) 式は温度風平衡を表し、(D.5.20) 式は magnetostrophic balance を表しているので、静水圧近似を用いても B.10.4 の結果と一致する。

D.6 変数分離

静水圧近似によって、「遅い波」を残したまま、式を簡単にすることことができたが、実は、まださらなる利点がある。それは変数分離をすることで、鉛直構造と水平構造を分離できる、ということである。

用いる式は、運動方程式の水平成分に誘導方程式を代入した (D.4.1) 式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2}{\rho_0 \mu} \right] \mathbf{u}_H + f_z \hat{\mathbf{e}}_z \times \frac{\partial \mathbf{u}_H}{\partial t} = -\nabla_H \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{D.6.1})$$

静水圧平衡の式と密度移流の式から得られた (D.4.7) 式、または、(D.4.8) 式

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t \partial z} = -N^2 u_z \quad (\text{D.6.2})$$

$$\frac{\partial^3 P}{\partial t \partial z^2} = N^2 (\nabla_H \cdot \mathbf{u}_H) \quad (\text{D.6.3})$$

そして、(D.6.1) 式の水平回転と水平発散から得られた (D.4.4) 式、(D.4.2) 式

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2}{\rho_0 \mu} \right] \frac{\partial u_z}{\partial z} + f_z \frac{\partial}{\partial t} [\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H)] = \nabla_H^2 \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{D.6.4})$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2}{\rho_0 \mu} \right] [\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H)] = f_z \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{D.6.5})$$

である。引き続き、誘導方程式の鉛直成分は b_z を求めるときにだけ用いる。

ただし、変数分離できると言っても、一筋縄にはいかない。それは磁場の効果を表す項に ∇ が含まれているからである。この部分によって鉛直微分と水平微分が混じってしまうため、ある条件下でしか変数分離が容易でない。それは (i) 背景磁場が水平成分のみのとき、と (ii) 背景磁場が鉛直成分のみのときである^{*65}。

D.6.1 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_H$ のとき

背景磁場が水平成分のみの場合、(D.6.1) 式と (D.6.3) 式を用いる。

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)^2}{\rho_0 \mu} \right] \mathbf{u}_H + f_z \hat{\mathbf{e}}_z \times \frac{\partial \mathbf{u}_H}{\partial t} = -\nabla_H \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{D.6.6})$$

$$\frac{\partial^3 P}{\partial t \partial z^2} = N^2 (\nabla_H \cdot \mathbf{u}_H) \quad (\text{D.6.7})$$

ここで、時間に関して $e^{-i\omega t}$ の依存性を仮定しよう。すなわち、時間に関してのみ Fourier 変換すると、

$$\left[-\omega^2 - \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)^2}{\rho_0 \mu} \right] \mathbf{u}_H - i\omega f_z \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u}_H = i\omega \nabla_H P \quad (\text{D.6.8})$$

$$-i\omega \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = N^2 (\nabla_H \cdot \mathbf{u}_H) \quad (\text{D.6.9})$$

となる。このとき、(D.6.8) 式には、鉛直微分を含んでおらず、水平微分のみ含まれている。一方、(D.6.9) 式には、左辺は鉛直微分のみ、右辺は水平微分のみになっている。このことから、

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ P \end{pmatrix} = \Re \left[\begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \\ g\Pi(x, y) \end{pmatrix} D(z) e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{D.6.10})$$

というように、水平方向依存部分と鉛直方向依存部分に分離できることがわかる。ここで、 g は重力加速度である。これらを (D.6.8) 式と (D.6.9) 式に代入すると、

$$\left[-\omega^2 - \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)^2}{\rho_0 \mu} \right] D(z) \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix} - i\omega f_z D(z) \begin{pmatrix} -V(x, y) \\ U(x, y) \end{pmatrix} = i\omega g \nabla_H \Pi(x, y) D(z) \quad (\text{D.6.11})$$

^{*65} その他の場合でも、変数分離できるかもしれないが、著者はその方法を見つけていない。

$$-i\omega g \frac{d^2 D(z)}{dz^2} \Pi(x, y) = N^2 D(z) (\nabla_H \cdot \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix}) \quad (\text{D.6.12})$$

となるが、(D.6.11) 式には、水平微分のみ含まれるので、 $D(z) \neq 0$ として、 $D(z)$ で割ることができます。

$$\left[-\omega^2 - \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)^2}{\rho_0 \mu} \right] \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix} - i\omega f_z \begin{pmatrix} -V(x, y) \\ U(x, y) \end{pmatrix} = i\omega g \nabla_H \Pi(x, y) \quad (\text{D.6.13})$$

というように、 x と y のみに依存する式となった。一方、(D.6.12) 式は、 $\Pi(x, y)D(z)$ で割ると、

$$\frac{1}{N^2 D(z)} \frac{d^2 D(z)}{dz^2} = \frac{1}{-i\omega g \Pi(x, y)} (\nabla_H \cdot \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix}) \quad (\text{D.6.14})$$

となり、左辺は z のみの式、右辺は x, y のみの式になったので、両辺は定数でなければならない。すなわち、

$$\frac{1}{N^2 D(z)} \frac{d^2 D(z)}{dz^2} = \frac{1}{-i\omega g \Pi(x, y)} (\nabla_H \cdot \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix}) = -\frac{1}{gh} \quad (\text{D.6.15})$$

となる。ここで、 h は定数である。

ゆえに、 z のみの式

$$\frac{d^2 D(z)}{dz^2} = -\frac{N^2}{gh} D(z) \quad (\text{D.6.16})$$

と x, y の式

$$\left[-\omega^2 - \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)^2}{\rho_0 \mu} \right] \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix} - i\omega f_z \begin{pmatrix} -V(x, y) \\ U(x, y) \end{pmatrix} = i\omega g \nabla_H \Pi(x, y) \quad (\text{D.6.17})$$

$$-i\omega \Pi(x, y) + h(\nabla_H \cdot \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix}) = 0 \quad (\text{D.6.18})$$

に変数分離できた。ここで、(D.6.16) 式を鉛直構造方程式、(D.6.17)、(D.6.18) 式を水平構造方程式といふ。

ここで、 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ のとき、水平構造方程式は

$$-i\omega \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix} + f_z \begin{pmatrix} -V(x, y) \\ U(x, y) \end{pmatrix} = -g \nabla_H \Pi(x, y) \quad (\text{D.6.19})$$

$$-i\omega \Pi(x, y) + h(\nabla_H \cdot \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix}) = 0 \quad (\text{D.6.20})$$

というように、浅水波方程式と同じ式の形になる。すなわち、鉛直方向に構造を持たない場合、(今は、無限空間を考えているが、もし上下に境界があれば、) 分離定数 h は流体層の厚さ H に一致する ($h = H$)。一方、安定成層があって鉛直方向に鉛直波数 k_z で表される構造を持つ場合、鉛直構造方程式は、

$$-k_z^2 D(z) = -\frac{N^2}{gh} D(z) \quad (\text{D.6.21})$$

となり、 $D(z) \neq 0$ のとき、

$$h = \frac{N^2}{gk_z^2} \quad (\text{D.6.22})$$

となって、同様に h は長さの次元をもつ。このように、 h は鉛直構造の長さスケールに関する量であり、等価深度という。そして、 h は鉛直構造方程式の固有値である。

磁場がある場合の水平構造方程式は、MHD 浅水波方程式と呼ばれ、トロイダル磁場がとても強く、十分成層が強いとされる太陽のタコクラインでの波動の研究で近年用いられている (Gilman, 2000; Schecter et al., 2001 など) [19, 49]。

D.6.2 $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{e}}_z$ のとき

背景磁場が鉛直成分のみの場合、(D.6.2)、(D.6.4)、(D.6.5) 式を用いる。

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t \partial z} = -N^2 u_z \quad (\text{D.6.23})$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{B_z^2}{\rho_0 \mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial u_z}{\partial z} + f_z \frac{\partial}{\partial t} [\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H)] = \nabla_H^2 \frac{\partial P}{\partial t} \quad (\text{D.6.24})$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{B_z^2}{\rho_0 \mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] [\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H)] = f_z \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{D.6.25})$$

まず最初に、(D.6.24) 式を z で微分し、(D.6.23) 式を代入する。

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{B_z^2}{\rho_0 \mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + f_z \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} [\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H)] = -N^2 \nabla_H^2 u_z \quad (\text{D.6.26})$$

そして、背景磁場が鉛直成分のみの場合のときは、「遅い波の近似」を用いると変数分離できる^{*66}。もし上下に境界がある場合、非散逸のときは、境界条件は遅い現象でしか与えることができなかった (C.9 節を参照)。そのため、「遅い波の近似」を用いることは適している。すなわち、

$$-\frac{B_z^2}{\rho_0 \mu} \frac{\partial^4 u_z}{\partial z^4} + f_z \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} [\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H)] = -N^2 \nabla_H^2 u_z \quad (\text{D.6.27})$$

$$-\frac{B_z^2}{\rho_0 \mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H)] = f_z \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{D.6.28})$$

を用いて変数分離する。

(D.6.27) 式を z で微分し、(D.6.28) 式を代入すると、

$$\frac{B_z^4}{(\rho_0 \mu)^2} \frac{\partial^5 u_z}{\partial z^5} + f_z^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial u_z}{\partial z} = N^2 \frac{B_z^2}{\rho_0 \mu} \nabla_H^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{D.6.29})$$

^{*66} 背景磁場に鉛直成分が含まれる場合、磁場の効果を表す項に鉛直微分が含まれるので、鉛直微分と水平微分が混ざってしまい変数分離するのが難しくなる。なぜ「遅い波の近似」を使うと変数分離できるようになるかということは、C.9 節で示したように固有方程式が $F(z) = \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}$ の式になることと関係している。すなわち、固有関数の中に鉛直微分を含めることにより、固有方程式から鉛直微分を減らすことができ、うまく変数分離できる。

となる。ここで、

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H) \\ u_z \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \Re \left[\begin{pmatrix} Z(x, y)G(z) \\ X(x, y)\frac{dG(z)}{dz} \\ X(x, y)\frac{d^2G(z)}{dz^2} \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{D.6.30})$$

のような形を仮定し、(D.6.29) 式に代入すると、

$$\frac{B_z^4}{(\rho_0\mu)^2} \frac{d^6G(z)}{dz^6} X(x, y) - \omega^2 f_z^2 \frac{d^2G(z)}{dz^2} X(x, y) = N^2 \frac{B_z^2}{\rho_0\mu} \frac{d^2G(z)}{dz^2} \nabla_H^2 X(x, y) \quad (\text{D.6.31})$$

となる。さらに、

$$F(z) = \frac{d^2G(z)}{dz^2} \quad (\text{D.6.32})$$

とすると、

$$\frac{B_z^4}{(\rho_0\mu)^2} \frac{d^4F(z)}{dz^4} X(x, y) - \omega^2 f_z^2 F(z) X(x, y) = N^2 \frac{B_z^2}{\rho_0\mu} F(z) \nabla_H^2 X(x, y) \quad (\text{D.6.33})$$

となり、C.9 節で用いた固有方程式に対し、 $|\frac{d^2}{dz^2}| \gg |\nabla_H^2|$ という近似を用いた場合の式になつていることが分かる^{*67}。

さらに、 $F(z)X(z)$ で割ると、

$$\frac{1}{F(z)} \frac{B_z^4}{(\rho_0\mu)^2} \frac{d^4F(z)}{dz^4} = \omega^2 f_z^2 + N^2 \frac{B_z^2}{\rho_0\mu} \frac{1}{X(x, y)} \nabla_H^2 X(x, y) \quad (\text{D.6.34})$$

となるので、両辺は定数になる。

$$\frac{1}{F(z)} \frac{B_z^4}{(\rho_0\mu)^2} \frac{d^4F(z)}{dz^4} = \omega^2 f_z^2 + N^2 \frac{B_z^2}{\rho_0\mu} \frac{1}{X(x, y)} \nabla_H^2 X(x, y) = f_z^2 s^2 \quad (\text{D.6.35})$$

ここで、 s は定数である。

ゆえに、 z のみの式

$$\frac{B_z^4}{(\rho_0\mu)^2} \frac{d^4F(z)}{dz^4} = f_z^2 s^2 F(z) \quad (\text{D.6.36})$$

と x, y の式

$$N^2 \frac{B_z^2}{\rho_0\mu} \nabla_H^2 X(x, y) = f_z^2 (s^2 - \omega^2) X(x, y) \quad (\text{D.6.37})$$

に変数分離できた。

^{*67} C.9 節では、 u_z の 6 階の微分方程式であったのに、今の式は u_z の 5 階の微分方程式になっている。これは、この節では、固有方程式を求める前に「遅い波の近似」を用いたからである。渦度方程式での渦度の項（渦度の時間変化の項）は鉛直成分は z についての 0 階微分である。一方、他の式の渦度を含む項は z で微分されている。そのため、代入して固有方程式を求めるときに、渦度方程式を z で微分する。ゆえに、初めから「遅い波の近似」を用いる（渦度の時間変化の項を無視する）場合に比べ z の微分の階数が大きくなる。

D.7 地衡流調節

B.12 節では、慣性項と Coriolis 力、磁気張力の 3 つの項がどのようにつり合うかを調べるため、簡単な初期値問題を考えた。ここでは、それに浮力の効果を入れて考えてみたい。ただし、一般的にすることは難しいので、変数分離できる場合を考える。また、背景磁場が鉛直成分のみの場合は、「遅い波の近似」を用いなければ変数分離できないため、速い現象と遅い現象を含むような定式化ができる背景磁場が水平成分のみの場合を考える。

まず本節では磁場がない場合を考える。磁場がない場合の、流れが変化していく過程は地衡流調節と呼ばれている。

用いる式は、鉛直構造方程式 (D.6.16) 式

$$\frac{d^2 D(z)}{dz^2} = -\frac{N^2}{gh} D(z) \quad (\text{D.7.1})$$

と浅水波方程式 (D.6.19)、(D.6.20) 式

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} U(x, y, t) \\ V(x, y, t) \end{pmatrix} + f_z \begin{pmatrix} -V(x, y, t) \\ U(x, y, t) \end{pmatrix} = -g \nabla_H \Pi(x, y, t) \quad (\text{D.7.2})$$

$$\frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial t} + h(\nabla_H \cdot \begin{pmatrix} U(x, y, t) \\ V(x, y, t) \end{pmatrix}) = 0 \quad (\text{D.7.3})$$

である。ただし、時間微分は Fourier 変換せずに残してある。

鉛直方向に鉛直波数 k_z で表される構造を持つとき、鉛直構造方程式 (D.7.1) 式より、

$$h = \frac{N^2}{gk_z^2} \quad (\text{D.7.4})$$

となる。すなわち、 h は成層が強いほど大きく、鉛直スケールが大きいほど大きい。

次に、ある h が与えられたとして、水平構造方程式 (D.7.2)、(D.7.3) 式を考える。簡単のため、 y 方向一様とする。すると、水平構造方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} U(x, t) \\ V(x, t) \end{pmatrix} + f_z \begin{pmatrix} -V(x, t) \\ U(x, t) \end{pmatrix} = -g \frac{\partial \Pi(x, t)}{\partial x} \hat{e}_x \quad (\text{D.7.5})$$

$$\frac{\partial \Pi(x, t)}{\partial t} + h \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{D.7.6})$$

と書きかえられる。

ここで、

$$\begin{aligned} U(t) &= \tilde{U}(t) \sin(k_x x) \\ V(t) &= \tilde{V}(t) \sin(k_x x) \\ \Pi(t) &= \tilde{\Pi}(t) \cos(k_x x) \end{aligned} \quad (\text{D.7.7})$$

として、水平構造方程式に代入すると、

$$\frac{d\tilde{U}(t)}{dt} - f_z \tilde{V}(t) = gk_x \tilde{\Pi}(t) \quad (\text{D.7.8})$$

$$\frac{d\tilde{V}(t)}{dt} + f_z \tilde{U}(t) = 0 \quad (\text{D.7.9})$$

$$\frac{d\tilde{\Pi}(t)}{dt} + k_x h \tilde{U}(t) = 0 \quad (\text{D.7.10})$$

となる。ここで、(D.7.9)、(D.7.10) 式より、

$$\frac{d}{dt} \left(\tilde{\Pi}(t) - \frac{k_x h}{f_z} \tilde{V}(t) \right) = 0 \quad (\text{D.7.11})$$

すなわち、

$$\tilde{\Pi}(t) - \frac{k_x h}{f_z} \tilde{V}(t) = \text{const.} \quad (\text{D.7.12})$$

となる。

一方、(D.7.8) 式を時間で微分し、(D.7.9)、(D.7.10) 式を代入すると、

$$\frac{d^2 \tilde{U}(t)}{dt^2} = -(f_z^2 + ghk_x^2) \tilde{U}(t) \quad (\text{D.7.13})$$

なるので、

$$\tilde{U}(t) = C_1 \cos(t\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}) + C_2 \sin(t\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}) \quad (\text{D.7.14})$$

を得る。ここで、 $C_i (i = 1, 2, \dots)$ は定数である。また、(D.7.9)、(D.7.10) 式より、

$$\tilde{V}(t) = -\frac{C_1 f_z}{\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}} \sin(t\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}) + \frac{C_2 f_z}{\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}} \cos(t\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}) + C_3 \quad (\text{D.7.15})$$

$$\tilde{\Pi}(t) = -\frac{C_1 k_x h}{\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}} \sin(t\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}) + \frac{C_2 k_x h}{\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}} \cos(t\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}) + C_4 \quad (\text{D.7.16})$$

となる。

また、(D.7.15)、(D.7.16) 式を (D.7.12) 式に代入すると、

$$\tilde{\Pi}(t) - \frac{k_x h}{f_z} \tilde{V}(t) = C_4 - \frac{k_x h}{f_z} C_3 = \text{const.} \quad (\text{D.7.17})$$

となる。

さらに、 $t = 0$ のとき、

$$\tilde{U}(t=0) = C_1 \quad (\text{D.7.18})$$

$$\tilde{V}(t=0) = \frac{C_2 f_z}{\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}} + C_3 \quad (\text{D.7.19})$$

$$\tilde{\Pi}(t=0) = \frac{C_2 k_x h}{\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}} + C_4 \quad (\text{D.7.20})$$

となる。

D.7.1 一様でない方向の流れの摂動を初期に与えた場合

ここで、 $t = 0$ のとき、

$$\tilde{U}(t=0) = \tilde{U}_0, \quad \tilde{V}(t=0) = 0, \quad \tilde{\Pi}(t=0) = 0 \quad (\text{D.7.21})$$

だったとしよう。このとき、(D.7.8) 式より、

$$\frac{d\tilde{U}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad (\text{D.7.22})$$

なので、 $C_2 = 0$ となり、

$$C_3 = 0, \quad C_4 = 0 \quad (\text{D.7.23})$$

となるので、時間変化はすべて波（慣性内部重力波）で表され、与えられた摂動は周囲に伝播する。

逆に、 $t = 0$ で

$$\tilde{V}(t=0) \neq 0, \quad \tilde{\Pi}(t=0) \neq 0 \quad (\text{D.7.24})$$

であった場合、定数部分 (C_3, C_4) は 0 ではなくなるので、波ではない定常的な流れと圧力分布が存在しうる。後的小節では、この場合について細かく見ていく。

D.7.2 圧力の摂動を初期に与えた場合

次に、 $t = 0$ で

$$\tilde{U}(t=0) = 0, \quad \tilde{V}(t=0) = 0, \quad \tilde{\Pi}(t=0) = \tilde{\Pi}_0 \quad (\text{D.7.25})$$

とする。このとき、 $\tilde{U}(t=0) = 0$ より、 $C_1 = 0$ である。次に、(D.7.8) 式より、

$$\frac{d\tilde{U}(t)}{dt} \Big|_{t=0} = gk_x \tilde{\Pi}_0 \quad (\text{D.7.26})$$

となるので、

$$C_2 = \frac{gk_x \tilde{\Pi}_0}{\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}} \quad (\text{D.7.27})$$

である。また、(D.7.12) 式より、

$$C_4 - \frac{k_x h}{f_z} C_3 = \tilde{\Pi}_0 \quad (\text{D.7.28})$$

となる。これらより、

$$\tilde{U}(t) = \frac{gk_x \tilde{\Pi}_0}{\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}} \sin(t\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}) \quad (\text{D.7.29})$$

$$\tilde{V}(t) = \frac{gk_x f_z \tilde{\Pi}_0}{f_z^2 + ghk_x^2} \left(\cos(t\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}) - 1 \right) \quad (\text{D.7.30})$$

$$\tilde{\Pi}(t) = \frac{\tilde{\Pi}_0}{f_z^2 + ghk_x^2} \left(ghk_x^2 \cos(t\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}) + f_z^2 \right) \quad (\text{D.7.31})$$

を得る。 $\tilde{U}(t)$ は波で表せる部分のみを持つのに対し、 $\tilde{V}(t)$ と $\tilde{\Pi}(t)$ は時間変化しない部分も含んでいる。

$\tilde{V}(t)$ の波動成分と定常成分の振幅の比はいつも同じであるが、 $\tilde{\Pi}(t)$ は水平波数 k_x や鉛直方向の構造を表す h に依存する。すなわち、

$$\frac{ghk_x^2}{f_z^2} \gg 1 \quad (\text{D.7.32})$$

のとき、波（慣性内部重力波）が優勢で

$$\frac{ghk_x^2}{f_z^2} \ll 1 \quad (\text{D.7.33})$$

のとき、定常成分（地衡流平衡）が優勢になる。つまり、初期に圧力の摂動を与えた場合は、細かい構造 (hk_x^2 が大) は波として周囲に伝播し、大きな構造 (hk_x^2 が小) は地衡流平衡としてその場にとどまる、ということが分かる。地衡流平衡になるには、与えられた圧力分布につけ合う Coriolis 力をつくる流れが必要になる。初期の圧力の摂動の構造が小さければ、小さな空間スケールで速度が変化するような流れを作らなければならない。逆に、初期の圧力の摂動の構造が大きければ、緩やかな速度変化をもつ流れを作れば、地衡流平衡が達成される。

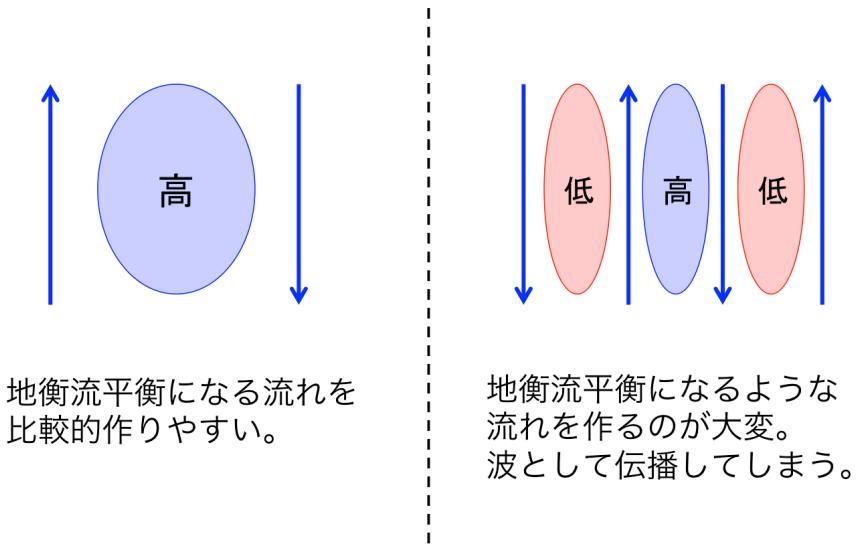


Fig.144 圧力の摂動を初期に与えた場合

また、成層が強くなると (h が大)、地衡流平衡としてつけ合うために大きなコリオリ力が必要となり、地衡流平衡になりにくくなる。

波的になるか定常的になるかを分ける指標となる水平スケールは、(D.7.4) 式の h を用いれば、

$$\lambda_{RI} = \frac{2\pi}{k_{RI}} = 2\pi \frac{N/k_z}{f_z} \quad (\text{D.7.34})$$

となり、これを Rossby の内部変形半径という。流体層の厚さが H だった場合、 $k_z \sim \mathcal{O}\left(\frac{n\pi}{H}\right)$ とすれば、

$$\lambda_{RI} \sim \frac{NH}{f_z} \quad (\text{D.7.35})$$

となる。

もし鉛直方向に構造がない場合（浅水波の場合）、流体層の厚さを H として、 $h = H$ なので、

$$\lambda_{RE} = \frac{2\pi}{k_{RE}} = 2\pi \frac{\sqrt{gH}}{f_z} \quad (\text{D.7.36})$$

となる。これを Rossby の（外部）変形半径という。

D.7.3 一様な方向の流れの摂動を初期に与えた場合

最後に、 $t = 0$ で

$$\tilde{U}(t=0) = 0, \quad \tilde{V}(t=0) = \tilde{V}_0, \quad \tilde{\Pi}(t=0) = 0 \quad (\text{D.7.37})$$

とする。このときも、 $\tilde{U}(t=0) = 0$ より、 $C_1 = 0$ である。（D.7.8）式より、

$$\left. \frac{d\tilde{U}(t)}{dt} \right|_{t=0} = f_z \tilde{V}_0 \quad (\text{D.7.38})$$

となるので、

$$C_2 = \frac{f_z \tilde{V}_0}{\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}} \quad (\text{D.7.39})$$

である。また、（D.7.12）式より、

$$C_4 - \frac{k_x h}{f_z} C_3 = -\frac{k_x h}{f_z} \tilde{V}_0 \quad (\text{D.7.40})$$

となる。これらより、

$$\tilde{U}(t) = \frac{f_z \tilde{V}_0}{\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}} \sin(t\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}) \quad (\text{D.7.41})$$

$$\tilde{V}(t) = \frac{\tilde{V}_0}{f_z^2 + ghk_x^2} \left(f_z^2 \cos(t\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}) + ghk_x^2 \right) \quad (\text{D.7.42})$$

$$\tilde{\Pi}(t) = \frac{f_z k_x h \tilde{V}_0}{f_z^2 + ghk_x^2} \left(\cos(t\sqrt{f_z^2 + ghk_x^2}) - 1 \right) \quad (\text{D.7.43})$$

を得る。

ゆえに、初期に一様な方向の流れを与えた場合、圧力の摂動を与えた場合とは逆の結果となる。すなわち、細かい構造ほど地衡流平衡になりやすい。このようになる理由は、地衡流平衡になるような圧力分布を作るには流れの発散・収束が必要だからである。大きな構造の圧力場を作るには、遠くから流体を運ばなければならない。それに対し、細かい構造であれば、近くから流体を運ぶだけで地衡流平衡になる圧力分布を作ることが出来る。

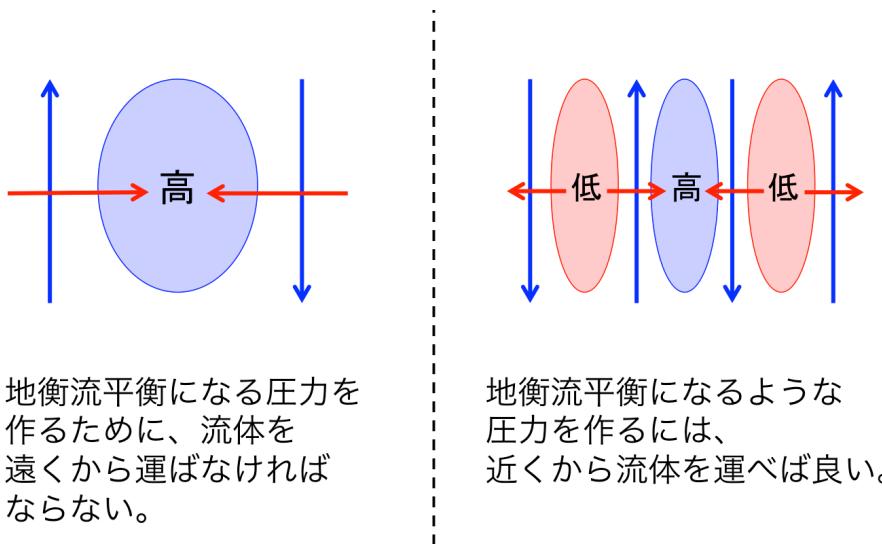


Fig.145 一様な方向の流れの摂動を初期に与えた場合

D.8 背景磁場が水平成分のみの場合の地衡流調節

次に、水平磁場のみが存在する場合に、地衡流平衡がどのように変更されるかを見ていく。用いる式は、鉛直構造方程式 (D.6.16) 式

$$\frac{d^2 D(z)}{dz^2} = -\frac{N^2}{gh} D(z) \quad (\text{D.8.1})$$

と、水平構造方程式 (D.6.17)、(D.6.18)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)^2}{\rho_0 \mu} \right] \begin{pmatrix} U(x, y, t) \\ V(x, y, t) \end{pmatrix} + f_z \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} -V(x, y, t) \\ U(x, y, t) \end{pmatrix} = -g \nabla_H \frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial t} \quad (\text{D.8.2})$$

$$\frac{\partial \Pi(x, y, t)}{\partial t} + h(\nabla_H \cdot \begin{pmatrix} U(x, y, t) \\ V(x, y, t) \end{pmatrix}) = 0 \quad (\text{D.8.3})$$

である。鉛直構造方程式は磁場がない場合と同じである。同様に、鉛直構造方程式の固有値を

$$h = \frac{N^2}{g k_z^2} \quad (\text{D.8.4})$$

としよう。そして、磁場がないときと同様、 y 方向一様とする。

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - V_{Ax}^2 k_x^2 \right] \begin{pmatrix} U(x, t) \\ V(x, t) \end{pmatrix} + f_z \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} -V(x, t) \\ U(x, t) \end{pmatrix} = -g \frac{\partial^2 \Pi(x, t)}{\partial t \partial x} \hat{e}_x \quad (\text{D.8.5})$$

$$\frac{\partial \Pi(x, t)}{\partial t} + h \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (\text{D.8.6})$$

ここで、 $V_{Ax} = \frac{B_x}{\sqrt{\rho_0 \mu}}$ とした。そして、

$$\begin{aligned} U(t) &= \tilde{U}(t) \sin(k_x x) \\ V(t) &= \tilde{V}(t) \sin(k_x x) \\ \Pi(t) &= \tilde{\Pi}(t) \cos(k_x x) \end{aligned} \quad (\text{D.8.7})$$

として、代入すると、

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + V_{Ax}^2 k_x^2 \right] \tilde{U}(t) - f_z \frac{d\tilde{V}(t)}{dt} = gk_x \frac{d\tilde{\Pi}(t)}{dt} \quad (\text{D.8.8})$$

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + V_{Ax}^2 k_x^2 \right] \tilde{V}(t) + f_z \frac{d\tilde{U}(t)}{dt} = 0 \quad (\text{D.8.9})$$

$$\frac{d\tilde{\Pi}(t)}{dt} + k_x h \tilde{U}(t) = 0 \quad (\text{D.8.10})$$

となる。

ここで、磁場がある場合は、磁場がない場合の時のような保存量が存在しないことがわかる。すなわち、地衡流平衡として定常的な状態にはならず、MAC 波が伝播する。

(D.8.8) 式に $\left[\frac{d^2}{dt^2} + V_{Ax}^2 k_x^2 \right]$ を作用し、(D.8.9)、(D.8.10) 式を代入すると、

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + V_{Ax}^2 k_x^2 \right] \left[\frac{d^2}{dt^2} + V_{Ax}^2 k_x^2 + ghk_x^2 \right] \tilde{U}(t) + f_z^2 \frac{d^2 \tilde{U}(t)}{dt^2} = 0 \quad (\text{D.8.11})$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t) &= C_1 \cos \left[t \sqrt{V_{Ax}^2 k_x^2 + \frac{ghk_x^2 + f_z^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{ghk_x^2 + f_z^2}{2} \right)^2 + V_{Ax}^2 k_x^2 f_z^2}} \right] \\ &\quad + C_2 \sin \left[t \sqrt{V_{Ax}^2 k_x^2 + \frac{ghk_x^2 + f_z^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{ghk_x^2 + f_z^2}{2} \right)^2 + V_{Ax}^2 k_x^2 f_z^2}} \right] \\ &\quad + C_3 \cos \left[t \sqrt{V_{Ax}^2 k_x^2 + \frac{ghk_x^2 + f_z^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{ghk_x^2 + f_z^2}{2} \right)^2 + V_{Ax}^2 k_x^2 f_z^2}} \right] \\ &\quad + C_4 \sin \left[t \sqrt{V_{Ax}^2 k_x^2 + \frac{ghk_x^2 + f_z^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{ghk_x^2 + f_z^2}{2} \right)^2 + V_{Ax}^2 k_x^2 f_z^2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.8.12})$$

となる。ここで、 $C_i (i = 1, 2, \dots)$ は定数である。今、静水圧近似を用いていて、水平スケールが大きいことを仮定しているので、

$$f_z^2 \gg \max(V_{Ax}^2 k_x^2, ghk_x^2) \quad (\text{D.8.13})$$

の場合を考えよう^{*68}。ゆえに、B.8.3 節の結果より、

$$\begin{aligned}\tilde{U}(t) &= C_1 \cos\left[t\sqrt{(2V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2}\right] + C_2 \sin\left[t\sqrt{(2V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2}\right] \\ &\quad + C_3 \cos\left[t\frac{V_{Ax}\sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z}k_x^2\right] + C_4 \sin\left[t\frac{V_{Ax}\sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z}k_x^2\right]\end{aligned}\quad (\text{D.8.15})$$

となる。したがって、(D.8.9)、(D.8.10) 式より、

$$\begin{aligned}\tilde{V}(t) &= -\frac{f_z C_1 \sqrt{(2V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2}}{(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2} \sin\left[t\sqrt{(2V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2}\right] \\ &\quad + \frac{f_z C_2 \sqrt{(2V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2}}{(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2} \cos\left[t\sqrt{(2V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2}\right] \\ &\quad - \frac{f_z^2 C_3 \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{V_{Ax}[(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 - f_z^2]} \sin\left[t\frac{V_{Ax}\sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z}k_x^2\right] \\ &\quad + \frac{f_z^2 C_4 \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{V_{Ax}[(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 - f_z^2]} \cos\left[t\frac{V_{Ax}\sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z}k_x^2\right]\end{aligned}\quad (\text{D.8.16})$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Pi}(t) &= -\frac{C_1 k_x h}{\sqrt{(2V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2}} \sin\left[t\sqrt{(2V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2}\right] \\ &\quad + \frac{C_2 k_x h}{\sqrt{(2V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2}} \cos\left[t\sqrt{(2V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2}\right] \\ &\quad - \frac{h f_z C_3}{V_{Ax} k_x \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}} \sin\left[t\frac{V_{Ax}\sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z}k_x^2\right] \\ &\quad + \frac{h f_z C_4}{V_{Ax} k_x \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}} \cos\left[t\frac{V_{Ax}\sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z}k_x^2\right] + C_5\end{aligned}\quad (\text{D.8.17})$$

となる。ここで、 C_5 は圧力以外の物理量に影響を与えない定数である。さらに、近似すれば、

$$\begin{aligned}\tilde{U}(t) &= C_1 \cos(f_z t) + C_2 \sin(f_z t) \\ &\quad + C_3 \cos\left[t\frac{V_{Ax}\sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z}k_x^2\right] + C_4 \sin\left[t\frac{V_{Ax}\sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z}k_x^2\right]\end{aligned}\quad (\text{D.8.18})$$

$$\begin{aligned}\tilde{V}(t) &= -C_1 \sin(f_z t) + C_2 \cos(f_z t) \\ &\quad + \frac{C_3 \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{V_{Ax}} \sin\left[t\frac{V_{Ax}\sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z}k_x^2\right] - \frac{C_4 \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{V_{Ax}} \cos\left[t\frac{V_{Ax}\sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z}k_x^2\right]\end{aligned}\quad (\text{D.8.19})$$

^{*68}

$$h = \frac{N^2}{gk_z^2} \quad (\text{D.8.14})$$

なので、 $k_z^2 \gg k_x^2$ より、 f_z と N は同程度の大きさでも良い。

$$\begin{aligned}
[\tilde{\Pi}(t) - C_5] = & -\frac{C_1 k_x h}{f_z} \sin(f_z t) + \frac{C_2 k_x h}{f_z} \cos(f_z t) \\
& - \frac{h f_z C_3}{V_{Ax} k_x \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}} \sin\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right] + \frac{h f_z C_4}{V_{Ax} k_x \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}} \cos\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right]
\end{aligned} \tag{D.8.20}$$

となる。

ここで、 $t = 0$ のときは、

$$\tilde{U}(t = 0) = C_1 + C_3 \tag{D.8.21}$$

$$\tilde{V}(t = 0) = C_2 - \frac{C_4 \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{V_{Ax}} \tag{D.8.22}$$

$$[\tilde{\Pi}(t = 0) - C_5] = \frac{C_2 k_x h}{f_z} + \frac{h f_z C_4}{V_{Ax} k_x \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}} \tag{D.8.23}$$

である。

D.8.1 一様でない方向の流れの摂動を初期に与えた場合

ここで、 $t = 0$ のとき、

$$\tilde{U}(t = 0) = \tilde{U}_0, \quad \tilde{V}(t = 0) = 0, \quad [\tilde{\Pi}(t = 0) - C_5] = 0 \tag{D.8.24}$$

だったとしよう。このとき、(D.8.22)、(D.8.23) 式より、

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{V_{Ax}^{Ax}} \\ \frac{k_x h}{f_z} & \frac{h f_z}{V_{Ax} k_x \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{D.8.25}$$

であるが、

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{V_{Ax}^{Ax}} \\ \frac{k_x h}{f_z} & \frac{h f_z}{V_{Ax} k_x \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{D.8.26}$$

なので、

$$C_2 = C_4 = 0 \tag{D.8.27}$$

である。また、(D.8.8) 式より、

$$C_1 = \frac{V_{Ax}^2 k_x^2}{f_z^2} C_3 \tag{D.8.28}$$

となるので、

$$C_1 = \frac{V_{Ax}^2 k_x^2}{f_z^2 + V_{Ax}^2 k_x^2} U_0 \tag{D.8.29}$$

$$C_3 = \frac{f_z^2}{f_z^2 + V_{Ax}^2 k_x^2} U_0 \tag{D.8.30}$$

$$(D.8.31)$$

を得る。代入すると、

$$\begin{aligned}\tilde{U}(t) &= \frac{V_{Ax}^2 k_x^2}{f_z^2 + V_{Ax}^2 k_x^2} U_0 \cos(f_z t) + \frac{f_z^2}{f_z^2 + V_{Ax}^2 k_x^2} U_0 \cos\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right] \\ &\approx \frac{V_{Ax}^2 k_x^2}{f_z^2} U_0 \cos(f_z t) + U_0 \cos\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right]\end{aligned}\quad (\text{D.8.32})$$

$$\begin{aligned}\tilde{V}(t) &= -\frac{V_{Ax}^2 k_x^2}{f_z^2 + V_{Ax}^2 k_x^2} U_0 \sin(f_z t) + \frac{f_z^2 \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{(f_z^2 + V_{Ax}^2 k_x^2) V_{Ax}} U_0 \sin\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right] \\ &\approx -\frac{V_{Ax}^2 k_x^2}{f_z^2} U_0 \sin(f_z t) + \frac{\sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{V_{Ax}} U_0 \sin\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right]\end{aligned}\quad (\text{D.8.33})$$

$$\begin{aligned}[\tilde{\Pi}(t) - C_5] &= -\frac{V_{Ax}^2 k_x^3 h}{(f_z^2 + V_{Ax}^2 k_x^2) f_z} U_0 \sin(f_z t) \\ &\quad - \frac{h f_z^3}{(f_z^2 + V_{Ax}^2 k_x^2) V_{Ax} k_x \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}} U_0 \sin\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right] \\ &\approx -\frac{V_{Ax}^2 k_x^3 h}{f_z^3} U_0 \sin(f_z t) - \frac{h f_z}{V_{Ax} k_x \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}} U_0 \sin\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right]\end{aligned}\quad (\text{D.8.34})$$

となる。ここで、 $\frac{V_{Ax}^2 k_x^2}{f_z^2}$ はここでの近似では、小さな量であるので、慣性波的な部分は MAC 波的な部分に比べ小さい。また、

$$L_e = \frac{V_{Ax}}{f_z(1/k_x)} \quad (\text{D.8.35})$$

は、Lehnert 数と呼ばれる無次元数である。

次に、 \tilde{U} と \tilde{V} の MAC 波的な部分の大きさの比は

$$\frac{\sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{V_{Ax}} \quad (\text{D.8.36})$$

であり、 $V_{Ax}^2 \gg gh$ のときは、 \tilde{U} と \tilde{V} の MAC 波的な部分の大きさの比は等しく、 $V_{Ax}^2 \ll gh$ のときは、 \tilde{V} の方が大きくなる。これは、B.11 節で示した、成層がない場合は流体粒子は円運動になるが、成層が強いと、成層の影響を受ける方向（今の場合、 x 方向）に運動しにくくなつて梢円運動になる、ということと同じことを表している。

D.8.2 圧力の摂動を初期に与えた場合

次に、 $t = 0$ で

$$\tilde{U}(t = 0) = 0, \quad \tilde{V}(t = 0) = 0, \quad [\tilde{\Pi}(t = 0) - C_5] = \tilde{\Pi}_0 \quad (\text{D.8.37})$$

とする。まず、 $\tilde{U}(t = 0) = 0$ と (D.8.8) 式より、

$$C_1 + C_3 = 0 \quad (\text{D.8.38})$$

$$C_1 - \frac{V_{Ax}^2 k_x^2}{f_z^2} C_3 = 0 \quad (\text{D.8.39})$$

となるので、

$$C_1 = C_3 = 0 \quad (\text{D.8.40})$$

である。また、 $\tilde{V}(t=0) = 0$, $[\tilde{\Pi}(t=0) - C_5] = \tilde{\Pi}_0$ より、

$$C_2 - \frac{C_4 \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{V_{Ax}} = 0 \quad (\text{D.8.41})$$

$$\frac{C_2 k_x h}{f_z} + \frac{h f_z C_4}{V_{Ax} k_x \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}} = \tilde{\Pi}_0 \quad (\text{D.8.42})$$

なので、

$$C_2 = \frac{f_z k_x (V_{Ax}^2 + gh)}{[(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2]h} \tilde{\Pi}_0 \quad (\text{D.8.43})$$

$$C_4 = \frac{V_{Ax} f_z k_x \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{[(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2]h} \tilde{\Pi}_0 \quad (\text{D.8.44})$$

$$(\text{D.8.45})$$

を得る。代入すると、

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t) &= \frac{f_z k_x (V_{Ax}^2 + gh)}{[(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2]h} \tilde{\Pi}_0 \sin(f_z t) + \frac{V_{Ax} f_z k_x \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{[(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2]h} \tilde{\Pi}_0 \sin\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right] \\ &\approx \frac{k_x (V_{Ax}^2 + gh)}{f_z h} \tilde{\Pi}_0 \sin(f_z t) + \frac{V_{Ax} k_x \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z h} \tilde{\Pi}_0 \sin\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right] \end{aligned} \quad (\text{D.8.46})$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t) &= \frac{f_z k_x (V_{Ax}^2 + gh)}{[(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2]h} \tilde{\Pi}_0 \cos(f_z t) - \frac{f_z k_x (V_{Ax}^2 + gh)}{[(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2]h} \tilde{\Pi}_0 \cos\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right] \\ &\approx \frac{k_x (V_{Ax}^2 + gh)}{f_z h} \tilde{\Pi}_0 \cos(f_z t) - \frac{k_x (V_{Ax}^2 + gh)}{f_z h} \tilde{\Pi}_0 \cos\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right] \end{aligned} \quad (\text{D.8.47})$$

$$\begin{aligned} [\tilde{\Pi}(t) - C_5] &= \frac{(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2}{(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2} \tilde{\Pi}_0 \cos(f_z t) + \frac{f_z^2}{(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2} \tilde{\Pi}_0 \cos\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right] \\ &\approx \frac{(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2}{f_z^2} \tilde{\Pi}_0 \cos(f_z t) + \tilde{\Pi}_0 \cos\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right] \end{aligned} \quad (\text{D.8.48})$$

となる。すなわち、圧力の摂動を初期に与えた場合は、圧力は MAC 波的な成分が支配的であるが、流れは慣性波的な成分と MAC 波的な成分が同程度になる。

さらに、式を見ると、磁場の効果を含んだロスビーの変形半径を、

$$\lambda_{MRI} = \frac{2\pi}{k_{MRI}} = 2\pi \frac{\sqrt{V_{Ax}^2 + N^2/k_z^2}}{f_z} \quad (\text{D.8.49})$$

$$\lambda_{MRE} = \frac{2\pi}{k_{MRE}} = 2\pi \frac{\sqrt{V_{Ax}^2 + gH}}{f_z} \quad (\text{D.8.50})$$

と書くことができそうである。ただし、今は $f_z^2 \gg (V_{Ax}^2 + gh)k_x^2$ を仮定しているので、この節の結果は、磁場の効果を含んだ Rossby の変形半径よりも大きい現象に対してのみ適応できることに注意せよ。より一般の場合の議論については、本文書では省略する。

D.8.3 一様な方向の流れの摂動を初期に与えた場合

最後に、 $t = 0$ で

$$\tilde{U}(t=0) = 0, \quad \tilde{V}(t=0) = \tilde{V}_0, \quad \tilde{\Pi}(t=0) = 0 \quad (\text{D.8.51})$$

とする。まず圧力の摂動を初期に与えた場合と同様にして

$$C_1 = C_3 = 0 \quad (\text{D.8.52})$$

である。また、 $\tilde{V}(t=0) = 0$, $[\tilde{\Pi}(t=0) - C_5] = \tilde{\Pi}_0$ より、

$$C_2 - \frac{C_4 \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{V_{Ax}} = \tilde{V}_0 \quad (\text{D.8.53})$$

$$\frac{C_2 k_x h}{f_z} + \frac{h f_z C_4}{V_{Ax} k_x \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}} = 0 \quad (\text{D.8.54})$$

なので、

$$C_2 = \frac{f_z^2}{(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2} \tilde{V}_0 \quad (\text{D.8.55})$$

$$C_4 = \frac{V_{Ax} k_x^2 \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2} \tilde{V}_0 \quad (\text{D.8.56})$$

$$(\text{D.8.57})$$

を得る。代入すると、

$$\begin{aligned} \tilde{U}(t) &= \frac{f_z^2}{(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2} \tilde{V}_0 \sin(f_z t) + \frac{V_{Ax} k_x^2 \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2} \tilde{V}_0 \sin\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right] \\ &\approx \tilde{V}_0 \sin(f_z t) + \frac{V_{Ax} k_x^2 \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z^2} \tilde{V}_0 \sin\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right] \end{aligned} \quad (\text{D.8.58})$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t) &= \frac{f_z^2}{(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2} \tilde{V}_0 \cos(f_z t) - \frac{(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2}{(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2} \tilde{V}_0 \cos\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right] \\ &\approx \tilde{V}_0 \cos(f_z t) - \frac{(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2}{f_z^2} \tilde{V}_0 \cos\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right] \end{aligned} \quad (\text{D.8.59})$$

$$\begin{aligned} [\tilde{\Pi}(t) - C_5] &= \frac{f_z k_x h}{(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2} \tilde{V}_0 \cos(f_z t) + \frac{f_z k_x h}{(V_{Ax}^2 + gh)k_x^2 + f_z^2} \tilde{V}_0 \cos\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right] \\ &\approx \frac{k_x h}{f_z} \tilde{V}_0 \cos(f_z t) + \frac{k_x h}{f_z} \tilde{V}_0 \cos\left[t \frac{V_{Ax} \sqrt{V_{Ax}^2 + gh}}{f_z} k_x^2\right] \end{aligned} \quad (\text{D.8.60})$$

となる。すなわち、一様な方向の流れの摂動を初期に与えた場合は、流れは慣性波的な成分が支配的であるが、圧力は慣性波的な成分と MAC 波的な成分が同程度になる。

付録 E 静水圧 f 面近似を用いた薄い流体層

E.1 考える系と用いる方程式

付録 D で得られた静水圧 f 面近似を用いた方程式系を用いる。付録 D との違いは、 $z = \pm \frac{H}{2}$ に付録 C と同じように境界が存在することである。境界は、完全導体の壁の場合と絶縁体の壁の場合を考える。付録 D で示したように、背景磁場が水平成分のみの場合と鉛直成分のみの場合について考える。境界条件をみたす鉛直構造方程式の固有値を求め、それを水平構造方程式に代入することで、周波数を得る。

E.1.1 背景磁場が水平成分のみの場合

鉛直構造方程式は、(D.6.16) 式より、

$$\frac{d^2 D(z)}{dz^2} = -\frac{N^2}{gh} D(z) \quad (\text{E.1.1})$$

水平構造方程式は、(D.6.17)、(D.6.18) 式より

$$\left[-\omega^2 - (\mathbf{V}_{AH} \cdot \nabla_H)^2 \right] \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix} - i\omega f_z \begin{pmatrix} -V(x, y) \\ U(x, y) \end{pmatrix} = i\omega g \nabla_H \Pi(x, y) \quad (\text{E.1.2})$$

$$-i\omega \Pi(x, y) + h(\nabla_H \cdot \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix}) = 0 \quad (\text{E.1.3})$$

である。ただし、 $\mathbf{V}_{AH} = \frac{\mathbf{B}_H}{\sqrt{\rho_0 \mu}}$ とした。ここで、

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ P \end{pmatrix} = \Re \left[\begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \\ g\Pi(x, y) \end{pmatrix} D(z) e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{E.1.4})$$

である。さらに、鉛直磁場を求める式は、(D.3.2)、(D.4.7) 式

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_z \quad (\text{E.1.5})$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t \partial z} = -N^2 u_z \quad (\text{E.1.6})$$

より、

$$b_z = \Re \left[-\frac{g[\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H \Pi(x, y)]}{N^2} \frac{dD(z)}{dz} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{E.1.7})$$

となる。

E.1.2 背景磁場が鉛直成分のみの場合

鉛直構造方程式は、(D.6.36) 式より、

$$V_{Az}^4 \frac{d^4 F(z)}{dz^4} = f_z^2 s^2 F(z) \quad (\text{E.1.8})$$

水平構造方程式は、(D.6.37) 式より

$$N^2 V_{Az}^2 \nabla_H^2 X(x, y) = f_z^2 (s^2 - \omega^2) X(x, y) \quad (\text{E.1.9})$$

である。ここで、 $V_{Az} = \frac{B_z}{\sqrt{\rho_0 \mu}}$ とした。ここで、

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H) \\ u_z \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \Re \left[\begin{pmatrix} Z(x, y) G(z) \\ X(x, y) \frac{dG(z)}{dz} \\ X(x, y) \frac{d^2 G(z)}{dz^2} \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{E.1.10})$$

$$F(z) = \frac{d^2 G(z)}{dz^2} \quad (\text{E.1.11})$$

である。鉛直磁場を求める式は、

$$b_z = \Re \left[-\frac{g B_z X(x, y)}{N^2} F(z) e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{E.1.12})$$

となる。

ただし、変数分離を行うときに、「遅い波の近似」を用いていることに注意。

E.2 鉛直構造方程式の境界条件

E.2.1 背景磁場が水平成分のみの場合

背景磁場が水平成分のみの場合の鉛直構造方程式は、 z についての 2 階の微分方程式なので、境界条件が上下に一つずつ必要である。付録 C で示したように、背景磁場が水平成分のみの場合は、壁が絶縁体か完全導体かにかかわらず、同じ境界条件

$$u_z \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{E.2.1})$$

となる。これを鉛直構造関数 $D(z)$ の式に書き直すと、(D.4.7) 式より、

$$\frac{dD(z)}{dz} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{E.2.2})$$

となる。

また、この境界条件から

$$b_z \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{E.2.3})$$

が得られるので、この場合は、壁が絶縁体であっても、外部での磁場観測から波を知ることはできない。

E.2.2 背景磁場が鉛直成分のみの場合

背景磁場が鉛直成分のみの場合の鉛直構造方程式は、 $F(z)$ の式だと思えば、 z についての 4 階の微分方程式、 $G(z)$ の式だと思えば、 z についての 6 階の微分方程式である。境界条件は C.9 節より、

$$u_z \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{E.2.4})$$

$$j_z \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (\text{E.2.5})$$

$$\text{(完全導体)} \quad \mathbf{b} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = \mathbf{0} \quad (\text{E.2.6})$$

$$\text{(絶縁体)} \quad \mathbf{b} \left(z = \pm \frac{H}{2} \right) = \nabla \Phi|_{z=\pm \frac{H}{2}} \quad (\text{E.2.7})$$

である。

まず、(E.2.4) 式より、

$$\frac{dG(z)}{dz} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{E.2.8})$$

となる。ただし、この条件は $F(z)$ の式の固有値を求める場合には不要である。

次に、誘導方程式 (D.2.9) の水平成分に水平回転をとったもの

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla_H \times \mathbf{b}_H) = B_z \frac{\partial}{\partial z} (\nabla_H \times \mathbf{u}_H) \quad (\text{E.2.9})$$

と Ampère の法則 (C.2.7)

$$\nabla \times \mathbf{b} = \mu \mathbf{j} \quad (\text{E.2.10})$$

より、(E.2.5) 式は、

$$\frac{\partial}{\partial z} [\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H)] \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{E.2.11})$$

すなわち、

$$\frac{dG(z)}{dz} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{E.2.12})$$

となる。ただし、これは (E.2.8) 式より、常に成り立っている。また、この条件は、(D.6.27) 式

$$-\frac{B_z^2}{\rho_0 \mu} \frac{\partial^4 u_z}{\partial z^4} + f_z \frac{\partial^2}{\partial t \partial z} [\hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla_H \times \mathbf{u}_H)] = -N^2 \nabla_H^2 u_z \quad (\text{E.2.13})$$

と、(E.2.4) 式より、

$$\frac{d^5 G(z)}{dz^5} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = \frac{d^3 F(z)}{dz^3} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{E.2.14})$$

に対応している。この式は、C.9 節の境界条件に $|\frac{\partial}{\partial z}| \gg |\nabla_H|$ という近似を適用したものと一致する。

最後に、(E.2.6)、(E.2.7) 式を $G(z)$ や $F(z)$ の式に書き直す。まず、誘導方程式 (D.2.9) の鉛直成分

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{E.2.15})$$

より、(E.2.6)、(E.2.7) 式の鉛直成分は、

$$(\text{完全導体}) \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{E.2.16})$$

$$(\text{絶縁体}) \quad B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial t} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} \quad (\text{E.2.17})$$

となる。ここで、C.8.4 節で示したように、(E.2.16) 式は境界条件として用いない。磁場の水平成分の式は、ベクトル解析の公式

$$\nabla_H^2 \mathbf{b}_H = \nabla_H (\nabla_H \cdot \mathbf{b}_H) - \nabla_H \times (\nabla_H \times \mathbf{b}_H) \quad (\text{E.2.18})$$

に、磁場に関する Gauss の法則 (D.2.11) 式と Ampère の法則 (E.2.10) を用いると、

$$\nabla_H^2 \mathbf{b}_H = -\nabla_H \frac{\partial b_z}{\partial z} - \nabla_H \times (j_z \hat{\mathbf{e}}_z) \quad (\text{E.2.19})$$

となるので、境界では、(E.2.5) 式より、

$$\nabla_H^2 \mathbf{b}_H \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = -\nabla_H \frac{\partial b_z}{\partial z} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} \quad (\text{E.2.20})$$

となる。この式を時間で微分して、誘導方程式 (D.2.9) の鉛直成分を代入すれば、

$$\nabla_H^2 \frac{\partial \mathbf{b}_H}{\partial t} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = -B_z \nabla_H \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} \quad (\text{E.2.21})$$

となるので、(E.2.6)、(E.2.7) 式の水平成分は、

$$(\text{完全導体}) \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{E.2.22})$$

$$(\text{絶縁体}) \quad \nabla_H^2 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_H \Phi) \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = -B_z \nabla_H \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} \quad (\text{E.2.23})$$

となる。ゆえに、完全導体の壁のときは、

$$(\text{完全導体}) \quad \frac{d^3 G(z)}{dz^3} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = \frac{dF(z)}{dz} \Big|_{z=\pm\frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{E.2.24})$$

となる。一方、壁が絶縁体の場合の境界条件 (E.2.23) は、(E.2.17) 式を代入して、 Φ を消去すれば、 u_z の条件として得ることができるのだが、境界上での式であり、式を鉛直微分することができないので、そのまま代入することができない。すなわち、 Φ を求めた上で、その Φ を (E.2.17) 式と (E.2.23) 式に代入しなければ、境界条件を得ることができない。

まず、 Φ を

$$\Phi = \Re \left[\Phi_X(x, y) \Phi_G(z) e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{E.2.25})$$

というように変数分離する。 Φ はラプラス方程式 $\nabla^2 \Phi = 0$ を満たすので、

$$\frac{1}{\Phi_X(x, y)} \nabla_H^2 \Phi_X(x, y) = -\frac{1}{\Phi_G(z)} \frac{d^2 \Phi_G(z)}{dz^2} \quad (\text{E.2.26})$$

となる。ここで、境界上では、流体内部の水平構造と絶縁体内部の水平構造は同じであることが予想されるので、

$$\Phi_X(x, y) = X(x, y) \quad (z \text{ は境界の近く}) \quad (\text{E.2.27})$$

としよう。そして、 $X(x, y)$ が水平構造方程式 (E.1.9) を満たすように、分離定数をおく。すなわち、

$$\frac{1}{X(x, y)} \nabla_H^2 X(x, y) = -\frac{1}{\Phi_G(z)} \frac{d^2 \Phi_G(z)}{dz^2} = \frac{f_z^2(s^2 - \omega^2)}{N^2 V_{Az}^2} \quad (\text{E.2.28})$$

ゆえに、磁場のスカラーポテンシャル Φ の鉛直構造関数は、

$$\frac{d^2 \Phi_G(z)}{dz^2} = -\frac{f_z^2(s^2 - \omega^2)}{N^2 V_{Az}^2} \Phi_G(z) \quad (\text{E.2.29})$$

を満たす。 $s^2 < \omega^2$ であれば、

$$\Phi_G = \Phi_G\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) \exp\left(\mp \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}}\left(z \mp \frac{H}{2}\right)\right) \quad (\text{E.2.30})$$

というような Φ_G は無限遠で 0 になる解を得る。ゆえに、

$$\Phi = \Re \left[X(x, y) \Phi_G\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) \exp\left(\mp \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}}\left(z \mp \frac{H}{2}\right)\right) e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{E.2.31})$$

を得る。よって、(E.2.17) 式と (E.2.23) 式より、

$$(絶縁体) \quad B_z \frac{d^2 G(z)}{dz^2} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} X(x, y) = \mp \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} X(x, y) \Phi_G\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) (-i\omega) \quad (\text{E.2.32})$$

$$(絶縁体) \quad -B_z \frac{d^3 G(z)}{dz^3} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} [\nabla_H X(x, y)] = \nabla_H^2 [\nabla_H X(x, y)] \Phi_G\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) (-i\omega) \quad (\text{E.2.33})$$

ゆえに、

$$(絶縁体) \quad \frac{\mp B_z \frac{d^2 G(z)}{dz^2} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}}}{\sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}}} = \frac{-B_z \frac{d^3 G(z)}{dz^3} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} [\nabla_H X(x, y)]}{\nabla_H^2 [\nabla_H X(x, y)]} \quad (\text{E.2.34})$$

を得る。さらに、

$$\nabla_H^2 [\nabla_H X(x, y)] = \nabla_H [\nabla_H^2 X(x, y)] \quad (\text{E.2.35})$$

と水平構造方程式 (E.1.9) より、

$$(絶縁体) \quad \frac{\mp \frac{d^2 G(z)}{dz^2} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}}}{\sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}}} = \frac{-\frac{d^3 G(z)}{dz^3} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}}}{\frac{f_z^2(s^2 - \omega^2)}{N^2 V_{Az}^2}} \quad (E.2.36)$$

となり、最終的に、

$$(絶縁体) \quad \frac{d^2 G(z)}{dz^2} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = \mp \frac{1}{\sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}}} \frac{d^3 G(z)}{dz^3} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} \quad (E.2.37)$$

となる。これは、 $\sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} = |\mathbf{k}_H|$ の時に、(C.9.29) 式の一致する。 $F(z)$ の式で表すと、

$$(絶縁体) \quad F\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) = \mp \frac{1}{\sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}}} \frac{dF(z)}{dz} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} \quad (E.2.38)$$

となる。また、 $\sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} \rightarrow 0$ のときに、完全導体の壁のときの境界条件に一致する。

E.3 鉛直構造方程式の固有値問題

E.3.1 背景磁場が水平成分のみの場合

鉛直構造方程式は (E.1.1) 式より

$$\frac{d^2 D(z)}{dz^2} = -\frac{N^2}{gh} D(z) \quad (E.3.1)$$

であり、境界条件は (E.2.2) 式より、

$$\frac{dD(z)}{dz} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (E.3.2)$$

となる。

この固有値問題は簡単に解けて、

$$(原点対称モード) \quad D(z) = D_0 \cos\left(\frac{2m_c \pi}{H} z\right) \quad (m_c = 1, 2, 3, \dots) \quad (E.3.3)$$

$$(原点反対称モード) \quad D(z) = D_0 \sin\left(\frac{(2m_s + 1)\pi}{H} z\right) \quad (m_s = 0, 1, 2, \dots) \quad (E.3.4)$$

となる。ここで、 D_0 は定数である。ゆえに、固有値は、

$$h = \frac{N^2}{g\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (E.3.5)$$

となる。

E.3.2 背景磁場が鉛直成分のみの場合

鉛直構造方程式は、(E.1.8) 式より、

$$V_{Az}^4 \frac{d^6 G(z)}{dz^6} = f_z^2 s^2 \frac{d^2 G(z)}{dz^2} \quad (\text{E.3.6})$$

または、

$$V_{Az}^4 \frac{d^4 F(z)}{dz^4} = f_z^2 s^2 F(z) \quad (\text{E.3.7})$$

であり、境界条件は、(E.2.8)、(E.2.14)、(E.2.24)、(E.2.38) 式より、

$$\left. \frac{dG(z)}{dz} \right|_{z=\pm\frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{E.3.8})$$

$$\left. \frac{d^5 G(z)}{dz^5} \right|_{z=\pm\frac{H}{2}} = \left. \frac{d^3 F(z)}{dz^3} \right|_{z=\pm\frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{E.3.9})$$

$$\begin{aligned} &(\text{完全導体}) \quad \left. \frac{d^3 G(z)}{dz^3} \right|_{z=\pm\frac{H}{2}} = \left. \frac{dF(z)}{dz} \right|_{z=\pm\frac{H}{2}} = 0 \\ &(\text{絶縁体}) \quad \left. \frac{d^3 G(z)}{dz^3} \right|_{z=\pm\frac{H}{2}} = \left. \frac{dF(z)}{dz} \right|_{z=\pm\frac{H}{2}} = \mp \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} F\left(z = \pm\frac{H}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{E.3.10})$$

$$\begin{aligned} &\left. \frac{d^3 G(z)}{dz^3} \right|_{z=\pm\frac{H}{2}} = \left. \frac{dF(z)}{dz} \right|_{z=\pm\frac{H}{2}} = \mp \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} \left. \frac{d^2 G(z)}{dz^2} \right|_{z=\pm\frac{H}{2}} \end{aligned} \quad (\text{E.3.11})$$

となる。

完全導体の壁のときの固有値問題は簡単に解けて、

$$(\text{原点対称モード}) \quad G(z) = G_0 \cos\left(\frac{2m_c\pi}{H}z\right) \quad (m_c = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{E.3.12})$$

$$(\text{原点反対称モード}) \quad G(z) = G_0 \sin\left(\frac{(2m_s + 1)\pi}{H}z\right) \quad (m_s = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{E.3.13})$$

または、

$$(\text{原点対称モード}) \quad F(z) = F_0 \cos\left(\frac{2m_c\pi}{H}z\right) \quad (m_c = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{E.3.14})$$

$$(\text{原点反対称モード}) \quad F(z) = F_0 \sin\left(\frac{(2m_s + 1)\pi}{H}z\right) \quad (m_s = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{E.3.15})$$

となる。ここで、 G_0 、 F_0 は定数である。ゆえに、固有値は、

$$s^2 = \frac{V_{Az}^4 \left(\frac{m\pi}{H}\right)^4}{f_z^2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{E.3.16})$$

となる。

次に、絶縁体の壁のときの固有値問題を考える。鉛直構造方程式 (E.3.6) の一般解は

$$G(z) = C_1 + C_2 z + C_3 e^{\lambda_+ z} + C_4 e^{-\lambda_+ z} + C_5 e^{\lambda_- z} + C_6 e^{-\lambda_- z} \quad (\text{E.3.17})$$

$$F(z) = C_7 e^{\lambda_+ z} + C_8 e^{-\lambda_+ z} + C_9 e^{\lambda_- z} + C_{10} e^{-\lambda_- z} \quad (\text{E.3.18})$$

である。ここで、

$$\lambda_{\pm} = \frac{\sqrt{\pm f_z s}}{V_{Az}} \quad (\text{E.3.19})$$

であり、 $C_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ は定数である。 $G(z)$ についての境界条件より、

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda_+ e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & -\lambda_+ e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & \lambda_- e^{\lambda_- \frac{H}{2}} & -\lambda_- e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} \\ 0 & 0 & \lambda_+^5 e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & -\lambda_+^5 e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & \lambda_-^5 e^{\lambda_- \frac{H}{2}} & -\lambda_-^5 e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} \\ 0 & 0 & (\lambda_+^3 + \Lambda_+) e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & (-\lambda_+^3 + \Lambda_+) e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & (\lambda_-^3 + \Lambda_-) e^{\lambda_- \frac{H}{2}} & (-\lambda_-^3 + \Lambda_-) e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} \\ 0 & 1 & \lambda_+ e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & -\lambda_+ e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & \lambda_- e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} & -\lambda_- e^{\lambda_- \frac{H}{2}} \\ 0 & 0 & \lambda_+^5 e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & -\lambda_+^5 e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & \lambda_-^5 e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} & -\lambda_-^5 e^{\lambda_- \frac{H}{2}} \\ 0 & 0 & (\lambda_+^3 - \Lambda_+) e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & (-\lambda_+^3 - \Lambda_+) e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & (\lambda_-^3 - \Lambda_-) e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} & (-\lambda_-^3 - \Lambda_-) e^{\lambda_- \frac{H}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{E.3.20})$$

である。ここで、見やすさのため、

$$\Lambda_{\pm} = \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} \lambda_{\pm}^2 \quad (\text{E.3.21})$$

とした。第1列目の成分がすべて0になっているのは、境界条件は C_1 に制約を与えないためである。ゆえに、 $C_1 \sim C_6$ が全て0にならない条件は、

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda_+ e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & -\lambda_+ e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & \lambda_- e^{\lambda_- \frac{H}{2}} & -\lambda_- e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} \\ 0 & 0 & \lambda_+^5 e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & -\lambda_+^5 e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & \lambda_-^5 e^{\lambda_- \frac{H}{2}} & -\lambda_-^5 e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} \\ 0 & 0 & (\lambda_+^3 + \Lambda_+) e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & (-\lambda_+^3 + \Lambda_+) e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & (\lambda_-^3 + \Lambda_-) e^{\lambda_- \frac{H}{2}} & (-\lambda_-^3 + \Lambda_-) e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} \\ 0 & 1 & \lambda_+ e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & -\lambda_+ e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & \lambda_- e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} & -\lambda_- e^{\lambda_- \frac{H}{2}} \\ 0 & 0 & \lambda_+^5 e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & -\lambda_+^5 e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & \lambda_-^5 e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} & -\lambda_-^5 e^{\lambda_- \frac{H}{2}} \\ 0 & 0 & (\lambda_+^3 - \Lambda_+) e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & (-\lambda_+^3 - \Lambda_+) e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & (\lambda_-^3 - \Lambda_-) e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} & (-\lambda_-^3 - \Lambda_-) e^{\lambda_- \frac{H}{2}} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{E.3.22})$$

となり、これは常に成立してしまう。一方、 $F(z)$ についての境界条件より、

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_+^3 e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & -\lambda_+^3 e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & \lambda_-^3 e^{\lambda_- \frac{H}{2}} & -\lambda_-^3 e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} \\ (\lambda_+ + \varpi) e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & (-\lambda_+ + \varpi) e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & (\lambda_- + \varpi) e^{\lambda_- \frac{H}{2}} & (-\lambda_- + \varpi) e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} \\ \lambda_+^3 e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & -\lambda_+^3 e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & \lambda_-^3 e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} & -\lambda_-^3 e^{\lambda_- \frac{H}{2}} \\ (\lambda_+ - \varpi) e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & (-\lambda_+ - \varpi) e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & (\lambda_- - \varpi) e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} & (-\lambda_- - \varpi) e^{\lambda_- \frac{H}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_7 \\ C_8 \\ C_9 \\ C_{10} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{E.3.23})$$

となる。ただし、見やすさのため、

$$\varpi = \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} \quad (\text{E.3.24})$$

とおいた。ゆえに、 $C_7 \sim C_{10}$ が全て0にならない条件は、

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_+^3 e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & -\lambda_+^3 e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & \lambda_-^3 e^{\lambda_- \frac{H}{2}} & -\lambda_-^3 e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} \\ (\lambda_+ + \varpi) e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & (-\lambda_+ + \varpi) e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & (\lambda_- + \varpi) e^{\lambda_- \frac{H}{2}} & (-\lambda_- + \varpi) e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} \\ \lambda_+^3 e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & -\lambda_+^3 e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & \lambda_-^3 e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} & -\lambda_-^3 e^{\lambda_- \frac{H}{2}} \\ (\lambda_+ - \varpi) e^{-\lambda_+ \frac{H}{2}} & (-\lambda_+ - \varpi) e^{\lambda_+ \frac{H}{2}} & (\lambda_- - \varpi) e^{-\lambda_- \frac{H}{2}} & (-\lambda_- - \varpi) e^{\lambda_- \frac{H}{2}} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{E.3.25})$$

となる。ただし、このままでは、行列式を計算するのは大変なので、付録 C の時と同様に、原点対称解と原点反対称解に分離する。

$$\begin{aligned} F^{(e)}(z) &= C_{11} \cosh(\lambda_+ z) + C_{12} \cosh(\lambda_- z) \\ F^{(o)}(z) &= C_{13} \sinh(\lambda_+ z) + C_{14} \sinh(\lambda_- z) \end{aligned} \quad (\text{E.3.26})$$

そして、境界条件より、原点対称解については、

$$\begin{pmatrix} \lambda_+^3 \sinh(\lambda_+ \frac{H}{2}) & \lambda_-^3 \sinh(\lambda_- \frac{H}{2}) \\ \lambda_+ \sinh(\lambda_+ \frac{H}{2}) + \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} \cosh(\lambda_+ \frac{H}{2}) & \lambda_- \sinh(\lambda_- \frac{H}{2}) + \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} \cosh(\lambda_- \frac{H}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{E.3.27})$$

原点反対称解については、

$$\begin{pmatrix} \lambda_+^3 \cosh(\lambda_+ \frac{H}{2}) & \lambda_-^3 \cosh(\lambda_- \frac{H}{2}) \\ \lambda_+ \cosh(\lambda_+ \frac{H}{2}) + \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} \sinh(\lambda_+ \frac{H}{2}) & \lambda_- \cosh(\lambda_- \frac{H}{2}) + \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} \sinh(\lambda_- \frac{H}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{13} \\ C_{14} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{E.3.28})$$

ゆえに、 C_{11} と C_{12} 、または C_{13} と C_{14} が 0 にならない条件は、

$$(\text{原点対称解}) \quad \det \begin{pmatrix} \lambda_+^3 & \lambda_-^3 \\ \lambda_+ + \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} \coth(\lambda_+ \frac{H}{2}) & \lambda_- + \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} \coth(\lambda_- \frac{H}{2}) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{E.3.29})$$

$$(\text{原点反対称解}) \quad \det \begin{pmatrix} \lambda_+^3 & \lambda_-^3 \\ \lambda_+ + \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} \tanh(\lambda_+ \frac{H}{2}) & \lambda_- + \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} \tanh(\lambda_- \frac{H}{2}) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{E.3.30})$$

となる。行列式を計算すれば、

$$(\text{原点対称解}) \quad \lambda_+^3 \left(\lambda_- + \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} \coth(\lambda_- \frac{H}{2}) \right) = \lambda_-^3 \left(\lambda_+ + \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} \coth(\lambda_+ \frac{H}{2}) \right) \quad (\text{E.3.31})$$

$$(\text{原点反対称解}) \quad \lambda_+^3 \left(\lambda_- + \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} \tanh(\lambda_- \frac{H}{2}) \right) = \lambda_-^3 \left(\lambda_+ + \sqrt{\frac{f_z^2(\omega^2 - s^2)}{N^2 V_{Az}^2}} \tanh(\lambda_+ \frac{H}{2}) \right) \quad (\text{E.3.32})$$

を得る。ゆえに、固有値 s は

$$(\text{原点対称解}) \quad -\sqrt{s} + \sqrt{\frac{f_z(\omega^2 - s^2)}{N^2}} \cot\left(\frac{\sqrt{f_z s}}{V_{Az}} \frac{H}{2}\right) = \sqrt{s} + \sqrt{\frac{f_z(\omega^2 - s^2)}{N^2}} \coth\left(\frac{\sqrt{f_z s}}{V_{Az}} \frac{H}{2}\right) \quad (\text{E.3.33})$$

$$(\text{原点反対称解}) \quad -\sqrt{s} - \sqrt{\frac{f_z(\omega^2 - s^2)}{N^2}} \tan\left(\frac{\sqrt{f_z s}}{V_{Az}} \frac{H}{2}\right) = \sqrt{s} + \sqrt{\frac{f_z(\omega^2 - s^2)}{N^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{f_z s}}{V_{Az}} \frac{H}{2}\right) \quad (\text{E.3.34})$$

を満たす。ただし、 $s \neq 0$ とし、

$$\frac{\lambda_-^3}{\lambda_+^3} = -i \quad (\text{E.3.35})$$

などを用いた。

(E.4.22)、(E.4.23) 式は、鉛直構造方程式の固有値 s の他に、別の固有値（周波数） ω も含んでいる。すなわち、鉛直構造は周波数にも依存する。これは、流体内部から絶縁体の壁内部に磁場がどのように漏れ出すかは、周波数に依存しているためである。そのため、鉛直構造方程式だけでは、鉛直構造を決めることができない。

E.4 水平構造方程式の固有値問題（分散関係の導出）

E.4.1 背景磁場が水平成分のみの場合

背景磁場が水平成分のみの場合の鉛直構造の固有値は、(E.3.5) 式より、

$$h = \frac{N^2}{g\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{E.4.1})$$

である。これを水平構造方程式 (E.1.2)、(E.1.3) に代入すると、

$$\left[-\omega^2 - (\mathbf{V}_{AH} \cdot \nabla_H)^2\right] \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix} - i\omega f_z \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} -V(x, y) \\ U(x, y) \end{pmatrix} = i\omega g \nabla_H \Pi(x, y) \quad (\text{E.4.2})$$

$$-i\omega \Pi(x, y) + \frac{N^2}{g\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} (\nabla_H \cdot \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix}) = 0 \quad (\text{E.4.3})$$

となる。(E.4.3) 式を (E.4.2) 式に代入すると、

$$\left[-\omega^2 - (\mathbf{V}_{AH} \cdot \nabla_H)^2\right] \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix} - i\omega f_z \begin{pmatrix} -V(x, y) \\ U(x, y) \end{pmatrix} = \frac{N^2}{\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \nabla_H (\nabla_H \cdot \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix}) \quad (\text{E.4.4})$$

となる。整理すると、

$$\left[-\omega^2 - (\mathbf{V}_{AH} \cdot \nabla_H)^2 - \frac{N^2}{\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] U(x, y) = \left[-i\omega f_z + \frac{N^2}{\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right] V(x, y) \quad (\text{E.4.5})$$

$$\left[-\omega^2 - (\mathbf{V}_{AH} \cdot \nabla_H)^2 - \frac{N^2}{\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] V(x, y) = \left[i\omega f_z + \frac{N^2}{\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right] U(x, y) \quad (\text{E.4.6})$$

となる。さらに、 $U(x, y)$ または、 $V(x, y)$ のみの式にすると、

$$\begin{aligned} & \left[-\omega^2 - (\mathbf{V}_{AH} \cdot \nabla_H)^2 - \frac{N^2}{\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] \left[-\omega^2 - (\mathbf{V}_{AH} \cdot \nabla_H)^2 - \frac{N^2}{\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix} \\ &= \left[i\omega f_z + \frac{N^2}{\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right] \left[-i\omega f_z + \frac{N^2}{\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right] \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.4.7})$$

となり、ゆえに、

$$\left[\omega^2 + (\mathbf{V}_{AH} \cdot \nabla_H)^2\right] \left[\omega^2 + (\mathbf{V}_{AH} \cdot \nabla_H)^2 + \frac{N^2}{\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \nabla_H^2\right] \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix} = \omega^2 f_z^2 \begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix} \quad (\text{E.4.8})$$

を得る。この式は、(f 平面では) x についても y についても定数係数の微分方程式なので、

$$\begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (\text{E.4.9})$$

というように Fourier 変換できる。ここで、 U_0 、 V_0 は定数である。

ゆえに、分散関係は、

$$\left[\omega^2 - (\mathbf{V}_{AH} \cdot \mathbf{k}_H)^2 \right] \left[\omega^2 - (\mathbf{V}_{AH} \cdot \mathbf{k}_H)^2 - \frac{N^2}{\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} |\mathbf{k}_H|^2 \right] = \omega^2 f_z^2 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{E.4.10})$$

となる。これは、静水圧近似を用いた分散関係 (D.5.6) で、

$$k_z = \frac{m\pi}{H} \quad (\text{E.4.11})$$

とした場合に対応する。「遅い波の近似」を用いれば、

$$\omega^2 = \frac{(\mathbf{V}_{AH} \cdot \mathbf{k}_H)^2 \left[(\mathbf{V}_{AH} \cdot \mathbf{k}_H)^2 + \frac{N^2}{\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} |\mathbf{k}_H|^2 \right]}{f_z^2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{E.4.12})$$

となる。

ここで、無次元化を行う。典型的な時間スケールとして、Coriolis パラメータの逆数を、典型的な空間スケールとして、Rossby の内部変形半径をとる^{*69}。

$$\omega = f_z \omega_* \quad (\text{E.4.14})$$

$$\mathbf{k}_H = \frac{\mathbf{k}_{H*}}{\left(\frac{NH}{f_z}\right)} \quad (\text{E.4.15})$$

ゆえに、分散関係 (E.4.10) は、

$$\left[\omega_*^2 - \frac{(\mathbf{V}_{AH} \cdot \mathbf{k}_{H*})^2}{(NH)^2} \right] \left[\omega_*^2 - \frac{(\mathbf{V}_{AH} \cdot \mathbf{k}_{H*})^2}{(NH)^2} - \frac{|\mathbf{k}_{H*}|^2}{(m\pi)^2} \right] = \omega_*^2 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{E.4.16})$$

となる。ここで、無次元数（ベクトル）を

$$\mathbf{L}_{eR} = \frac{\mathbf{V}_{AH}}{NH} \quad (\text{E.4.17})$$

とする。この無次元数は、長さスケールを Rossby の内部変形半径でとった Lehnert 数である。

$$L_{eR} = \frac{V_A}{f_z \left(\frac{NH}{f_z}\right)} \quad (\text{E.4.18})$$

^{*69} 浅水波方程式にするには、鉛直構造方程式の固有値を $h = H$ とすれば良いので、

$$\mathbf{k}_H = \frac{(NH/m\pi)}{f_z} \mathbf{k}_{H*} \quad (\text{E.4.13})$$

と無次元化すれば、浅水波と同じ分散関係を得る。

このようにすると、分散関係 (E.4.16) は、

$$\left[\omega_*^2 - (\mathbf{L}_{eR} \cdot \mathbf{k}_{H*})^2 \right] \left[\omega_*^2 - (\mathbf{L}_{eR} \cdot \mathbf{k}_{H*})^2 - \frac{|\mathbf{k}_{H*}|^2}{(m\pi)^2} \right] = \omega_*^2 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{E.4.19})$$

となる。また、 \mathbf{k}_{H*} と L_{eR} に π を含めると、

$$\left[\omega_*^2 - \left((\mathbf{L}_{eR}\pi) \cdot \frac{\mathbf{k}_{H*}}{\pi} \right)^2 \right] \left[\omega_*^2 - \left((\mathbf{L}_{eR}\pi) \cdot \frac{\mathbf{k}_{H*}}{\pi} \right)^2 - \frac{(|\mathbf{k}_{H*}|/\pi)^2}{m^2} \right] = \omega_*^2 \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{E.4.20})$$

となって、 $m = 1$ のモードは浅水波の場合の分散関係に一致する。

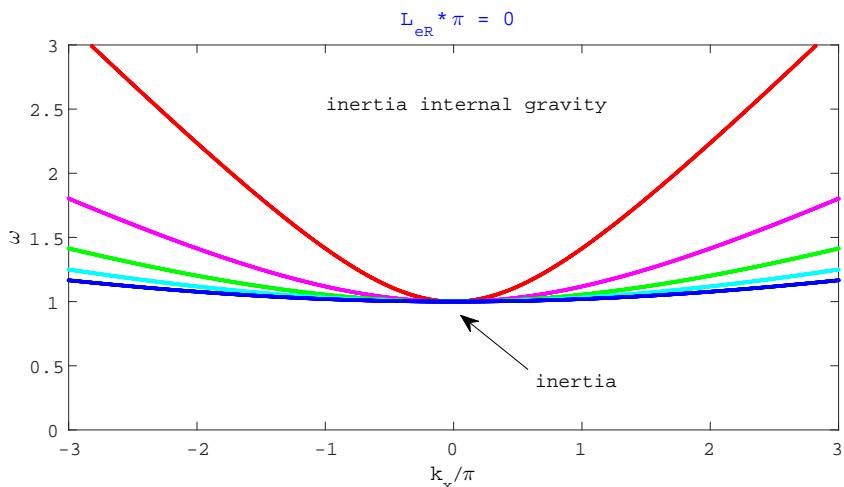


Fig.146 静水圧 f 面近似で、背景磁場が水平成分のみの場合のときの分散関係。ただし、 y 方向一様とし、 $\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{e}}_x$ とした。縦軸が ω_* 、横軸が k_{x*}/π である。また、赤から青にかけて、 $m = 1, 2, 3, 4, 5$ としている。磁場なし ($L_{eR}\pi = 0$) の場合。 $(k_x = 0)$ のときを除き、鉛直波数 (m) が大きくなるほど、上下の変位の大きさが小さくなるので、浮力が弱くなり、周波数が小さくなる。

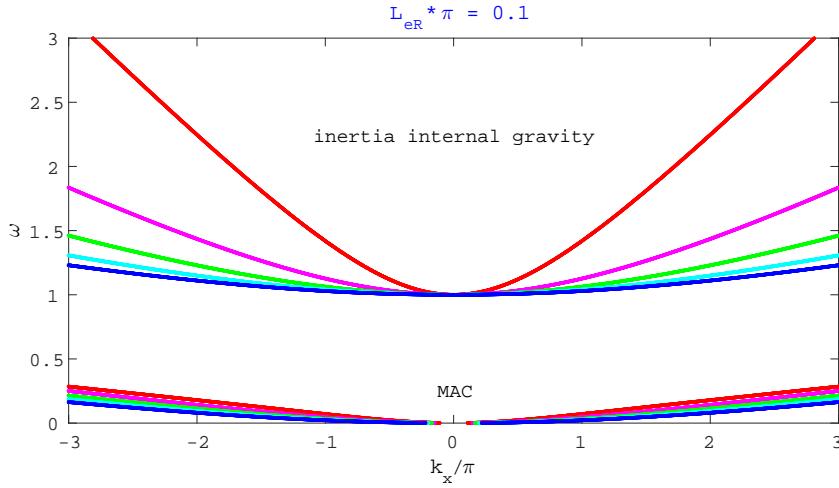


Fig.147 Fig.146と同じであるが、 $L_{eR}\pi = 0.1$ の場合。周波数が小さいところに MAC 波が現れる。

浅水波方程式の場合は、磁場なし ($L_{eR}\pi = 0$) の場合の慣性重力波を Poincaré 波、Sverdrup 波と呼ぶ場合がある。また、MHD 浅水波における慣性重力波は、磁気 Poincaré 波と呼ぶ場合がある [27]。

E.4.2 背景磁場が鉛直成分のみの場合

背景磁場が水平成分のみの場合の鉛直構造の固有値 s は、壁が完全導体の場合は、(E.3.16) 式より、

$$s^2 = \frac{V_{Az}^4 \left(\frac{m\pi}{H}\right)^4}{f_z^2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{E.4.21})$$

であり、壁が絶縁体の場合は、(E.4.22)、(E.4.23) 式より、

$$\text{(原点対称解)} \quad -\sqrt{s} + \sqrt{\frac{f_z(\omega^2 - s^2)}{N^2}} \cot\left(\frac{\sqrt{f_z s}}{V_{Az}} \frac{H}{2}\right) = \sqrt{s} + \sqrt{\frac{f_z(\omega^2 - s^2)}{N^2}} \coth\left(\frac{\sqrt{f_z s}}{V_{Az}} \frac{H}{2}\right) \quad (\text{E.4.22})$$

$$\text{(原点反対称解)} \quad -\sqrt{s} - \sqrt{\frac{f_z(\omega^2 - s^2)}{N^2}} \tan\left(\frac{\sqrt{f_z s}}{V_{Az}} \frac{H}{2}\right) = \sqrt{s} + \sqrt{\frac{f_z(\omega^2 - s^2)}{N^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{f_z s}}{V_{Az}} \frac{H}{2}\right) \quad (\text{E.4.23})$$

を満たす。

一方、水平構造方程式は、(E.1.9) 式より、

$$N^2 V_{Az}^2 \nabla_H^2 X(x, y) = f_z^2 (s^2 - \omega^2) X(x, y) \quad (\text{E.4.24})$$

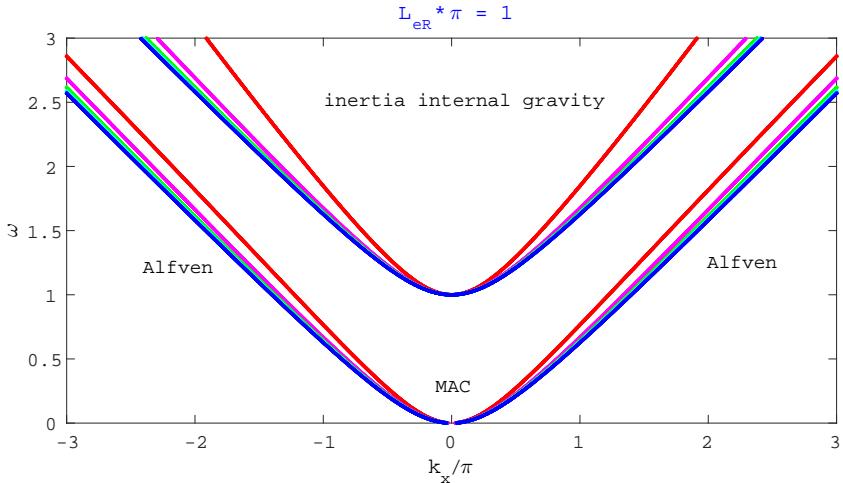


Fig.148 Fig.146と同じであるが、 $L_{eR}\pi=1$ の場合。磁場が強くなると、MAC波のプランチの高波数側がAlfvén波的になる。また、磁気張力の復元が加わるので、慣性内部重力波の周波数が大きくなる。

である。ここで、水平構造方程式の係数に含まれる s と ω は固有値なので、 x と y を含まず、この式は定数係数の微分方程式なので、

$$X(x, y) = X_0 e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (\text{E.4.25})$$

というように Fourier 変換できる。ここで、 X_0 は定数である。ゆえに、

$$\omega^2 = \frac{N^2 V_{Az}^2 |\mathbf{k}_H|^2}{f_z^2} + s^2 \quad (\text{E.4.26})$$

となる。これは、絶縁体の壁の場合に鉛直構造方程式を解いた時に仮定した、 $s^2 < \omega^2$ を満たしている。

したがって、分散関係は、完全導体の壁のときは、

$$\omega^2 = \frac{V_{Az}^4 \left(\frac{m\pi}{H}\right)^4}{f_z^2} \left(1 + \frac{N^2 |\mathbf{k}_H|^2}{V_{Az}^2 \left(\frac{m\pi}{H}\right)^4}\right) \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{E.4.27})$$

であり、これは静水圧近似を用いた「遅い波」の分散関係 (D.5.8) で、

$$k_z = \frac{m\pi}{H} \quad (\text{E.4.28})$$

とした場合に対応する。絶縁体の壁のときは、

$$(原点対称解) -\frac{\sqrt{f_z s}}{V_{Az}} + |\mathbf{k}_H| \cot\left(\frac{\sqrt{f_z s} H}{V_{Az}} \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{f_z s}}{V_{Az}} + |\mathbf{k}_H| \coth\left(\frac{\sqrt{f_z s} H}{V_{Az}} \frac{1}{2}\right) \quad (\text{E.4.29})$$

$$(原点反対称解) -\frac{\sqrt{f_z s}}{V_{Az}} - |\mathbf{k}_H| \tan\left(\frac{\sqrt{f_z s} H}{V_{Az}} \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{f_z s}}{V_{Az}} + |\mathbf{k}_H| \tanh\left(\frac{\sqrt{f_z s} H}{V_{Az}} \frac{1}{2}\right) \quad (\text{E.4.30})$$

を満たす s を (E.4.26) 式に代入すれば、それが分散関係になる。

ここでも、無次元化を行うが、「遅い波の近似」を用いているため、(E.4.14)、(E.4.15) 式とは異なる無次元化をする。典型的な時間スケールとして、MC 波の周期を、空間スケールには、 L_{eR} の逆数を乗じた長さスケールをとる。

$$\omega = \frac{V_{Az}^2}{f_z H^2} \omega_{*slow} \quad (\text{E.4.31})$$

$$s = \frac{V_{Az}^2}{f_z H^2} s_{*slow} \quad (\text{E.4.32})$$

$$\mathbf{k}_H = \frac{\mathbf{k}_{H*slow}}{L_{eR}^{-1} H} = \frac{\mathbf{k}_{H*slow}}{\left(\frac{NH^2}{V_{Az}}\right)} \quad (\text{E.4.33})$$

ここで、 L_{eR} の逆数を乗じた長さスケールは

$$L_{eR}^{-1} H = \frac{NH}{(V_{Az}/H)} \quad (\text{E.4.34})$$

というように、 f_z を Alfvén 波周波数で置き換えた Rossby の内部変形半径ともみなすことができる。 L_{eR} が小さいほど長さスケールは大きくなる。

これらにより、分散関係は、完全導体の壁なら

$$\omega_{*slow}^2 = (m\pi)^4 + |\mathbf{k}_{H*slow}|^2 \quad (\text{E.4.35})$$

絶縁体の壁なら、

$$(原点対称解) -\sqrt{s_{*slow}} + L_{eR} |\mathbf{k}_{H*slow}| \cot\left(\frac{\sqrt{s_{*slow}}}{2}\right) = \sqrt{s_{*slow}} + L_{eR} |\mathbf{k}_{H*slow}| \coth\left(\frac{\sqrt{s_{*slow}}}{2}\right) \quad (\text{E.4.36})$$

$$(原点反対称解) -\sqrt{s_{*slow}} - L_{eR} |\mathbf{k}_{H*slow}| \tan\left(\frac{\sqrt{s_{*slow}}}{2}\right) = \sqrt{s_{*slow}} + L_{eR} |\mathbf{k}_{H*slow}| \tanh\left(\frac{\sqrt{s_{*slow}}}{2}\right) \quad (\text{E.4.37})$$

$$\omega_{*slow}^2 = |\mathbf{k}_{H*slow}|^2 + s_{*slow}^2 \quad (\text{E.4.38})$$

となる。

また、 ω_{*slow} 、 s_{*slow} 、 $|\mathbf{k}_{H*slow}|$ に π^2 を含めると、完全導体の壁のときに、

$$\left(\frac{\omega_{*slow}}{\pi^2}\right)^2 = m^4 + \left(\frac{|\mathbf{k}_{H*slow}|}{\pi^2}\right)^2 \quad (\text{E.4.39})$$

となって、 $m = 1$ のモードは浅水波の場合の分散関係に一致する。同様に、絶縁体の壁のときも

$$\begin{aligned} \text{(対称解)} \quad & -\sqrt{\frac{s_{\text{slow}}}{\pi^2}} + (L_{eR}\pi) \frac{|\mathbf{k}_{H\text{slow}}|}{\pi^2} \cot\left(\sqrt{\frac{s_{\text{slow}}}{\pi^2}} \frac{\pi}{2}\right) \\ & = \sqrt{\frac{s_{\text{slow}}}{\pi^2}} + (L_{eR}\pi) \frac{|\mathbf{k}_{H\text{slow}}|}{\pi^2} \coth\left(\sqrt{\frac{s_{\text{slow}}}{\pi^2}} \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{E.4.40})$$

$$\begin{aligned} \text{(反対称解)} \quad & -\sqrt{\frac{s_{\text{slow}}}{\pi^2}} - (L_{eR}\pi) \frac{|\mathbf{k}_{H\text{slow}}|}{\pi^2} \tan\left(\sqrt{\frac{s_{\text{slow}}}{\pi^2}} \frac{\pi}{2}\right) \\ & = \sqrt{\frac{s_{\text{slow}}}{\pi^2}} + (L_{eR}\pi) \frac{|\mathbf{k}_{H\text{slow}}|}{\pi^2} \tanh\left(\sqrt{\frac{s_{\text{slow}}}{\pi^2}} \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (\text{E.4.41})$$

$$\left(\frac{\omega_{\text{slow}}}{\pi^2}\right)^2 = \left(\frac{|\mathbf{k}_{H\text{slow}}|}{\pi^2}\right)^2 + \left(\frac{s_{\text{slow}}}{\pi^2}\right)^2 \quad (\text{E.4.42})$$

としておく。

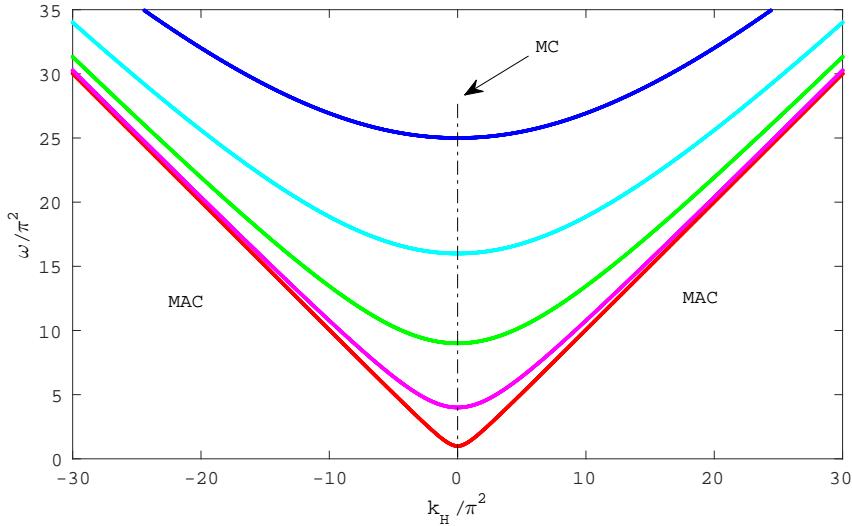


Fig.149 静水圧 f 面近似で、背景磁場が鉛直成分のみの場合のときの「遅い波」の分散関係。完全導体の壁の場合。縦軸が $\omega_{\text{slow}}/\pi^2$ 、横軸が $|\mathbf{k}_{H\text{slow}}|/\pi^2$ である。また、赤から青にかけて、 $m = 1, 2, 3, 4, 5$ としている。鉛直波数 (m) が大きくなるほど、周波数が大きくなる。

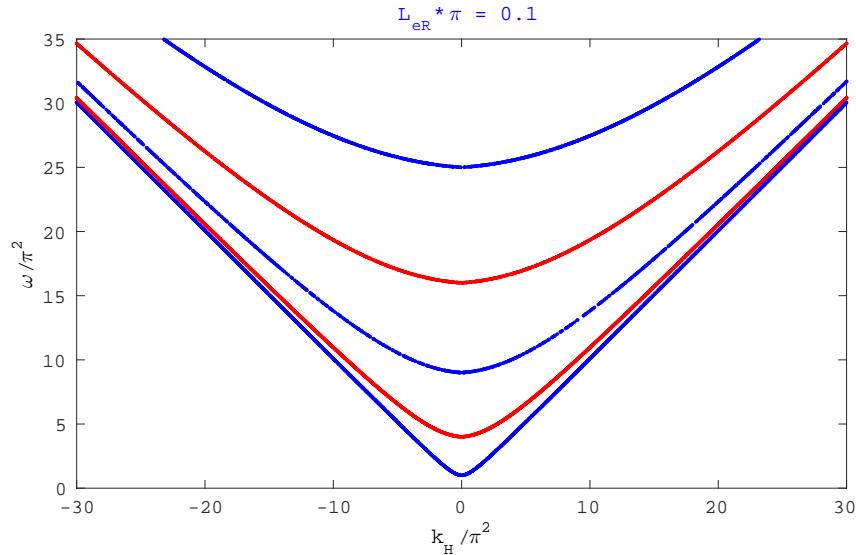


Fig.150 静水圧 f 面近似で、背景磁場が鉛直成分のみの場合のときの「遅い波」の分散関係。絶縁体の壁の場合。縦軸が $\omega_{\text{slow}}/\pi^2$ 、横軸が $|k_{H\text{slow}}|/\pi^2$ である。また、赤が原点対称モード、青が原点反対称モードである。また、 $L_{eR}\pi = 0.1$ とした。 L_{eR} を変化させると、周波数は変化するが、グラフの形はそれほど変化しない。

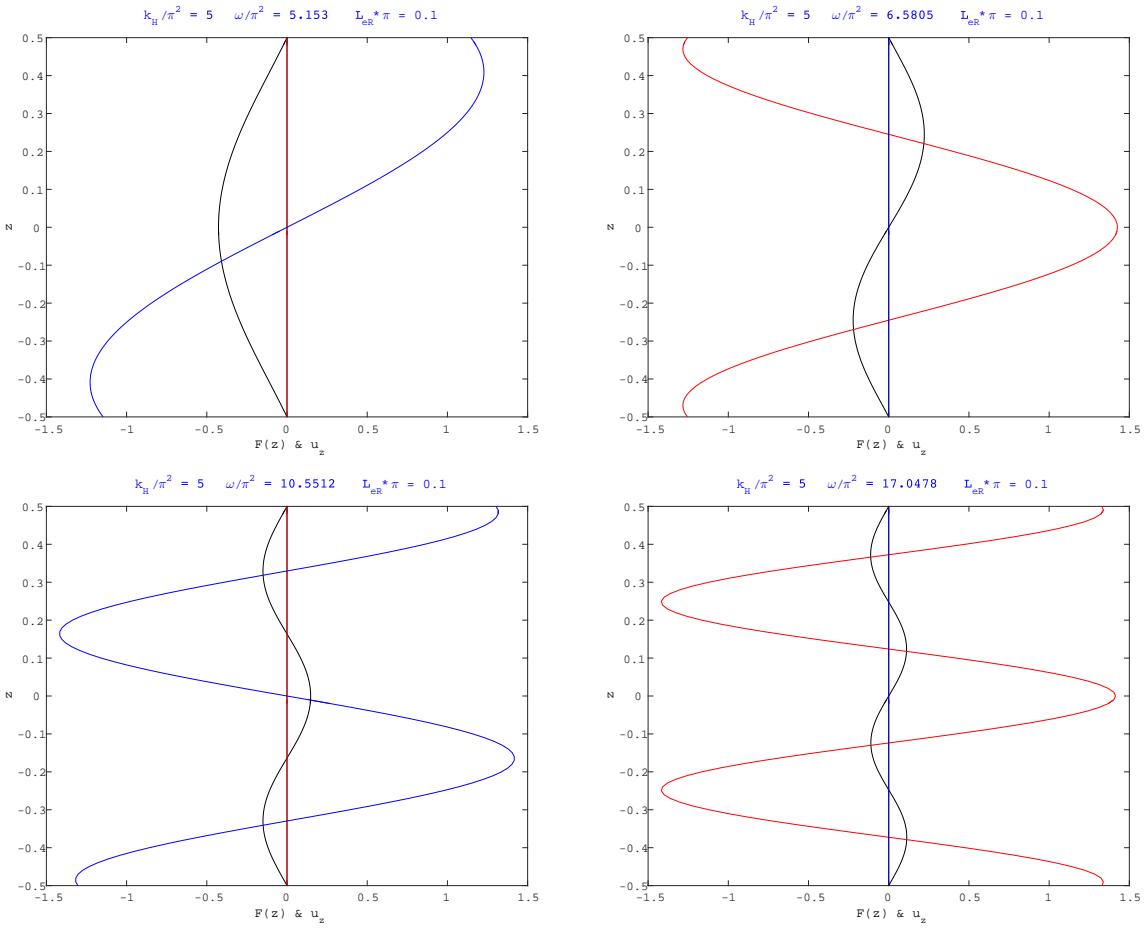


Fig.151 静水圧 f 面近似で、背景磁場が鉛直成分のみ、壁が絶縁体の場合のときの「遅い波」の固有関数。 $|k_{H\text{slow}}|/\pi^2 = 5$ 、 $L_{eR}\pi = 0.1$ とした。縦軸が z 、横軸が $F(z)$ と $u_z \propto \int F(z)dz$ の振幅であり、赤が $F(z)$ の実部、青が虚部、黒が u_z である。(左上図) $\omega/\pi^2 = 5.153$ の場合。原点反対称な解の基本モード。(右上図) $\omega/\pi^2 = 6.5805$ の場合。原点対称な解の基本モード。(左下図) $\omega/\pi^2 = 10.5512$ の場合。原点対称な解の2次のモード。(右下図) $\omega/\pi^2 = 17.0478$ の場合。原点反対称な解の2次のモード。

付録 F 静水圧近似を用いた中緯度 β 平面

F.1 球座標系での運動方程式

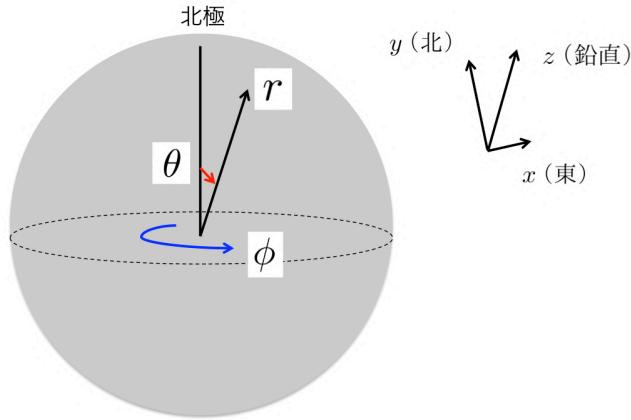


Fig.152 球座標系と局所デカルト座標系の対応関係

これまででは、(局所) Cartesian 座標系を用いていたが、地球が球であることの効果を考慮するために、基礎方程式を球座標で表す。ただし、この節では、後で β 面近似という近似を行い、Cartesian 座標系に書き直す。また、ここでは背景磁場 \mathbf{B} が空間で一様でない場合を考える。ただし、背景磁場について、磁場に関する Gauss の法則

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{F.1.1})$$

が成り立つ。まず静止した状況での力のつり合いの式は

$$\mathbf{0} = -\nabla \left(p_0 + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} \right) + \bar{\rho}(z) \nabla \left(\frac{|(\mathbf{f}/2) \times \mathbf{r}|^2}{2} \right) + \bar{\rho}(z) \mathbf{g} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{\mu} \quad (\text{F.1.2})$$

となる。付録 B のときと比べ、背景磁場の空間勾配は 0 ではないので、背景磁場による磁気圧と磁気張力が加わっている。厳密には、このつり合いが成り立つような、背景磁場の空間勾配を与えるなければならないが、地球外核では、磁場の寄与は小さいとし、このつり合いが成り立っているものとする。また、これまでと同様に、

$$P = \frac{p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{b}}{\rho_0 \mu} \quad (\text{F.1.3})$$

とおく。

ここから速度場と磁場、密度場に摂動を与えると、（線形化と Boussinesq 近似は用いるが、自転角速度の水平成分は無視しない）球座標系における摂動方程式は^{*70}

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + 2\Omega \sin \theta u_\phi = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) b_r}{\rho_0 \mu} + \frac{(\mathbf{b} \cdot \nabla) B_r}{\rho_0 \mu} - \frac{2(B_\theta b_\theta + B_\phi b_\phi)}{r \rho_0 \mu} - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g \quad (\text{F.1.7})$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} - 2\Omega \cos \theta u_\phi = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) b_\theta}{\rho_0 \mu} + \frac{(\mathbf{b} \cdot \nabla) B_\theta}{\rho_0 \mu} + \frac{B_\theta b_r + b_\theta B_r - 2B_\phi b_\phi \cot \theta}{r \rho_0 \mu} \quad (\text{F.1.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + 2\Omega \cos \theta u_\theta - 2\Omega \sin \theta u_r &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) b_\phi}{\rho_0 \mu} + \frac{(\mathbf{b} \cdot \nabla) B_\phi}{\rho_0 \mu} \\ &\quad + \frac{B_\phi b_r + b_\phi B_r}{r \rho_0 \mu} + \frac{B_\phi b_\theta + b_\phi B_\theta}{r \rho_0 \mu} \cot \theta \end{aligned} \quad (\text{F.1.9})$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_r - (\mathbf{u} \cdot \nabla) B_r \quad (\text{F.1.10})$$

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_\theta - (\mathbf{u} \cdot \nabla) B_\theta + \frac{B_\theta u_r - u_\theta B_r}{r} \quad (\text{F.1.11})$$

$$\frac{\partial b_\phi}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_\phi - (\mathbf{u} \cdot \nabla) B_\phi + \frac{B_\phi u_r - u_\phi B_r}{r} + \frac{B_\phi u_\theta - u_\phi B_\theta}{r} \cot \theta \quad (\text{F.1.12})$$

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} = \frac{\rho_0 N^2}{g} u_r \quad (\text{F.1.13})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \begin{pmatrix} u_r \\ b_r \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \begin{pmatrix} u_\theta \\ b_\theta \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\begin{pmatrix} u_\phi \\ b_\phi \end{pmatrix} \right) = \mathbf{0} \quad (\text{F.1.14})$$

である。ここで、 (r, θ, ϕ) はそれぞれ動径方向、余緯度、経度である。これらに、伝統的近似（自転角速度ベクトルの水平成分を無視）、静水圧近似、また、流体層が薄いとして、 $r \sim a$ (a は外核

^{*70} 導出の際、単位ベクトルの空間微分は 0 でないことに注意。

$$\frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\phi \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{F.1.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \begin{pmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{e}_\theta \\ -\hat{e}_r \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{F.1.5})$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \hat{e}_\phi \\ \cos \theta \hat{e}_\phi \\ -\sin \theta \hat{e}_r - \cos \theta \hat{e}_\theta \end{pmatrix} \quad (\text{F.1.6})$$

半径)^{*71}が成り立つと仮定して、式を簡単化すると、

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}g \quad (\text{F.1.15})$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} - 2\Omega \cos\theta u_\phi = -\frac{1}{a} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) b_\theta}{\rho_0 \mu} + \frac{(\mathbf{b} \cdot \nabla) B_\theta}{\rho_0 \mu} + \frac{B_\theta b_r + b_\theta B_r - 2B_\phi b_\phi \cot\theta}{a \rho_0 \mu} \quad (\text{F.1.16})$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + 2\Omega \cos\theta u_\theta = -\frac{1}{a \sin\theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) b_\phi}{\rho_0 \mu} + \frac{(\mathbf{b} \cdot \nabla) B_\phi}{\rho_0 \mu} + \frac{B_\phi b_r + b_\phi B_r}{a \rho_0 \mu} + \frac{B_\phi b_\theta + b_\phi B_\theta}{a \rho_0 \mu} \cot\theta \quad (\text{F.1.17})$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_r - (\mathbf{u} \cdot \nabla) B_r \quad (\text{F.1.18})$$

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_\theta - (\mathbf{u} \cdot \nabla) B_\theta + \frac{B_\theta u_r - u_\theta B_r}{a} \quad (\text{F.1.19})$$

$$\frac{\partial b_\phi}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_\phi - (\mathbf{u} \cdot \nabla) B_\phi + \frac{B_\phi u_r - u_\phi B_r}{a} + \frac{B_\phi u_\theta - u_\phi B_\theta}{a} \cot\theta \quad (\text{F.1.20})$$

$$\frac{\partial \Delta\rho}{\partial t} = \frac{\rho_0 N^2}{g} u_r \quad (\text{F.1.21})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} u_r \\ b_r \end{pmatrix} + \frac{1}{a \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \begin{pmatrix} u_\theta \\ b_\theta \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{a \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} u_\phi \\ b_\phi \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{F.1.22})$$

となる。

さらに、背景磁場 \mathbf{B} は θ (南北方向) にのみ依存するとすると、

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}g \quad (\text{F.1.23})$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} - 2\Omega \cos\theta u_\phi = -\frac{1}{a} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) b_\theta}{\rho_0 \mu} + \frac{b_\theta}{a \rho_0 \mu} \frac{dB_\theta}{d\theta} + \frac{B_\theta b_r + b_\theta B_r - 2B_\phi b_\phi \cot\theta}{a \rho_0 \mu} \quad (\text{F.1.24})$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + 2\Omega \cos\theta u_\theta = -\frac{1}{a \sin\theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) b_\phi}{\rho_0 \mu} + \frac{b_\phi}{a \rho_0 \mu} \frac{dB_\phi}{d\theta} + \frac{B_\phi b_r + b_\phi B_r}{a \rho_0 \mu} + \frac{B_\phi b_\theta + b_\phi B_\theta}{a \rho_0 \mu} \cot\theta \quad (\text{F.1.25})$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_r - \frac{u_\theta}{a} \frac{dB_r}{d\theta} \quad (\text{F.1.26})$$

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_\theta - \frac{u_\theta}{a} \frac{dB_\theta}{d\theta} + \frac{B_\theta u_r - u_\theta B_r}{a} \quad (\text{F.1.27})$$

$$\frac{\partial b_\phi}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_\phi - \frac{u_\theta}{a} \frac{dB_\phi}{d\theta} + \frac{B_\phi u_r - u_\phi B_r}{a} + \frac{B_\phi u_\theta - u_\phi B_\theta}{a} \cot\theta \quad (\text{F.1.28})$$

$$\frac{\partial \Delta\rho}{\partial t} = \frac{\rho_0 N^2}{g} u_r \quad (\text{F.1.29})$$

^{*71} このように、 r が陽に出てきたら、地球半径（外核半径） a などでおきかえる近似を、気象学では気象学的近似（meteorological approximation）という。これは、流体層が地球半径（外核半径）に比べ十分薄いときに、有効な近似である。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r}{b_r} \right) + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \left(\frac{u_\theta}{b_\theta} \right) \right) + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{u_\phi}{b_\phi} \right) = \mathbf{0} \quad (\text{F.1.30})$$

となる。また、背景磁場 \mathbf{B} が θ にのみ依存する場合、磁場に関する Gauss の法則より、

$$\frac{dB_\theta(\theta)}{d\theta} = -\cot \theta B_\theta \quad (\text{F.1.31})$$

を満たさないといけない。すなわち、

$$B_\theta(\theta) = \frac{A}{\sin \theta} \quad (\text{F.1.32})$$

となる。ここで、 A は定数である。 $A \neq 0$ のとき、 $B_\theta(\theta)$ が極 ($\theta = 0, \pi$) で発散するのは、背景磁場の r 依存性がないためである。

F.2 β 面近似

球面のうち、ある (θ_0, ϕ_0) 近傍の領域に注目する。このとき、式は局所 Cartesian 座標で表すことができる。

まず、磁気張力や連続の式で、空間微分が含まれていない項は、単位ベクトルの空間微分によって現れた曲率項であるので、局所 Cartesian 座標にするときはそれらの項は 0 とする。ゆえに、

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g \quad (\text{F.2.1})$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} - 2\Omega \cos \theta u_\phi = -\frac{1}{a} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) b_\theta}{\rho_0 \mu} + \frac{b_\theta}{a \rho_0 \mu} \frac{dB_\theta}{d\theta} \quad (\text{F.2.2})$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + 2\Omega \cos \theta u_\theta = -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) b_\phi}{\rho_0 \mu} + \frac{b_\phi}{a \rho_0 \mu} \frac{dB_\phi}{d\theta} \quad (\text{F.2.3})$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_r - \frac{u_\theta}{a} \frac{dB_r}{d\theta} \quad (\text{F.2.4})$$

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_\theta - \frac{u_\theta}{a} \frac{dB_\theta}{d\theta} \quad (\text{F.2.5})$$

$$\frac{\partial b_\phi}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_\phi - \frac{u_\phi}{a} \frac{dB_\phi}{d\theta} \quad (\text{F.2.6})$$

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} = \frac{\rho_0 N^2}{g} u_r \quad (\text{F.2.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r}{b_r} \right) + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_\theta}{b_\theta} \right) + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{u_\phi}{b_\phi} \right) = \mathbf{0} \quad (\text{F.2.8})$$

である。さらに、背景磁場は、

$$\frac{dB_\theta(\theta)}{d\theta} = 0 \quad (\text{F.2.9})$$

すなわち、

$$B_\theta = \text{const.} \quad (\text{F.2.10})$$

でなければならない。

そして、Coriolis 力と背景磁場の θ (南北) 依存性の効果を調べるために、 β 面近似を用いる。コリオリパラメータを $\theta = \theta_0$ 近くで 1 次まで泰ラー展開すると、

$$2\Omega \cos \theta = 2\Omega \cos \theta_0 - 2\Omega(\theta - \theta_0) \sin \theta_0 + \mathcal{O}((\theta - \theta_0)^2) \quad (\text{F.2.11})$$

となる。背景磁場も同様に $(\theta - \theta_0)$ で展開したとする。

局所デカルト座標に変換するには

$$r \rightarrow z \quad (\text{F.2.12})$$

$$-a(\theta - \theta_0) \rightarrow y \quad (\text{F.2.13})$$

$$a(\phi - \phi_0) \sin \theta_0 \rightarrow x \quad (\text{F.2.14})$$

とすればよく、このときコリオリ力の係数部分は、

$$2\Omega \cos \theta \simeq 2\Omega \cos \theta_0 - \frac{2\Omega \sin \theta_0}{a} a(\theta - \theta_0) = f + \beta y \quad (\text{F.2.15})$$

と書ける。ここで、

$$f = 2\Omega \cos \theta_0 \quad (\text{F.2.16})$$

$$\beta = \frac{2\Omega \sin \theta_0}{a} > 0 \quad (\text{F.2.17})$$

であり、 f はコリオリパラメータ、 β はベータパラメータと言う。コリオリパラメータは、北半球と南半球で符号が異なるが、ベータパラメータは、北半球でも南半球でも正である。

$$u_\theta = -u_y \quad (\text{F.2.18})$$

$$b_\theta = -b_y \quad (\text{F.2.19})$$

などに注意すると、摂動方程式は、

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g \quad (\text{F.2.20})$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + (f + \beta y)u_x = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)b_y}{\rho_0 \mu} + \frac{b_y}{\rho_0 \mu} \frac{dB_y}{dy} \quad (\text{F.2.21})$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} - (f + \beta y)u_y = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)b_x}{\rho_0 \mu} + \frac{b_y}{\rho_0 \mu} \frac{dB_x}{dy} \quad (\text{F.2.22})$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)u_z - u_y \frac{dB_z}{dy} \quad (\text{F.2.23})$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)u_y - u_y \frac{dB_y}{dy} \quad (\text{F.2.24})$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)u_x - u_y \frac{dB_x}{dy} \quad (\text{F.2.25})$$

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} = \frac{\rho_0 N^2}{g} u_z \quad (\text{F.2.26})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} u_z \\ b_z \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u_y \\ b_y \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_x \\ b_x \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{F.2.27})$$

となる。さらに、背景磁場は、

$$\frac{dB_y}{dy} = 0 \quad (\text{F.2.28})$$

を満たさないといけないので、

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\Delta\rho}{\rho_0} g \quad (\text{F.2.29})$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + (f + \beta y)u_x = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)b_y}{\rho_0\mu} \quad (\text{F.2.30})$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} - (f + \beta y)u_y = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)b_x}{\rho_0\mu} + \frac{b_y}{\rho_0\mu} \frac{dB_x}{dy} \quad (\text{F.2.31})$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)u_z - u_y \frac{dB_z}{dy} \quad (\text{F.2.32})$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)u_y \quad (\text{F.2.33})$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)u_x - u_y \frac{dB_x}{dy} \quad (\text{F.2.34})$$

$$\frac{\partial \Delta\rho}{\partial t} = \frac{\rho_0 N^2}{g} u_z \quad (\text{F.2.35})$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} u_z \\ b_z \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} u_y \\ b_y \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} u_x \\ b_x \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{F.2.36})$$

となる。

F.3 基礎方程式の変形

(F.2.30) 式と (F.2.31) 式を時間で微分して、(F.2.33) 式と (F.2.34) 式を代入すると、

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + (f + \beta y) \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial t} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)}{\rho_0\mu} [(\mathbf{B} \cdot \nabla)u_y] \quad (\text{F.3.1})$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - (f + \beta y) \frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)}{\rho_0\mu} [(\mathbf{B} \cdot \nabla)u_x - u_y \frac{dB_x}{dy}] + \frac{1}{\rho_0\mu} [(\mathbf{B} \cdot \nabla)u_y] \frac{dB_x}{dy} \quad (\text{F.3.2})$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)}{\rho_0\mu} [(\mathbf{B} \cdot \nabla)u_y] &= \frac{1}{\rho_0\mu} \left(B_z \frac{\partial}{\partial z} + B_y \frac{\partial}{\partial y} + B_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(B_z \frac{\partial u_y}{\partial z} + B_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + B_x \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ &= \frac{B_y}{\rho_0\mu} \left(\frac{dB_z}{dy} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{dB_x}{dy} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 u_y}{\rho_0\mu} \end{aligned} \quad (\text{F.3.3})$$

より、

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + (f + \beta y) \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial t} + \frac{B_y}{\rho_0 \mu} \left(\frac{dB_z}{dy} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{dB_x}{dy} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 u_y}{\rho_0 \mu} \quad (\text{F.3.4})$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - (f + \beta y) \frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} + \frac{B_y}{\rho_0 \mu} \left(\frac{dB_z}{dy} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{dB_x}{dy} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 u_x}{\rho_0 \mu} - \frac{u_y B_y}{\rho_0 \mu} \frac{d^2 B_x}{dy^2} \quad (\text{F.3.5})$$

となる。また、

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)^2 = B_z^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + B_y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + B_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_z B_y \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} + 2B_y B_x \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + 2B_x B_z \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \quad (\text{F.3.6})$$

である。次に、(F.2.29) 式と (F.2.35) 式より、

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z \partial t} = -N^2 u_z \quad (\text{F.3.7})$$

となり、さらに、 z で微分して、(F.2.36) 式より、

$$\frac{\partial^3 P}{\partial z^2 \partial t} = N^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad (\text{F.3.8})$$

となる。最後に残った (F.2.32) 式は、 f 面近似の時と同様に、 b_z を求めるときに用いる。

F.4 鉛直方向の電流と水平方向の電場

この節では、境界条件を与えるときに必要となる量を計算しておく。

まず、電流の鉛直成分を計算する。(F.2.33) 式の x 微分は

$$\frac{\partial^2 b_y}{\partial t \partial x} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (\text{F.4.1})$$

また、(F.2.34) 式の y 微分は

$$\frac{\partial^2 b_x}{\partial t \partial y} = \left(\frac{d\mathbf{B}}{dy} \cdot \nabla \right) u_x + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{dB_x}{dy} - u_y \frac{d^2 B_x}{dy^2} \quad (\text{F.4.2})$$

なので、電流の鉛直成分の時間変化は、

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) - \left(\frac{d\mathbf{B}}{dy} \cdot \nabla \right) u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{dB_x}{dy} + u_y \frac{d^2 B_x}{dy^2} \quad (\text{F.4.3})$$

となり、渦度による電流だけではなく、背景磁場の緯度依存性に起因する電流もある。

次に、電場の水平成分は、オームの法則より、

$$\mathbf{e}_H = -(\mathbf{u} \times \mathbf{B})_H = -(u_y B_z - u_z B_y) \hat{\mathbf{e}}_x - (u_z B_x - u_x B_z) \hat{\mathbf{e}}_y \quad (\text{F.4.4})$$

である。

F.5 背景磁場が水平成分のみの場合

背景磁場が水平成分のみの場合は、(F.3.4)、(F.3.5)、(F.3.8) 式を用いる。

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} + (f + \beta y) \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial t} + \frac{B_y}{\rho_0 \mu} \frac{dB_x}{dy} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)^2 u_y}{\rho_0 \mu} \quad (\text{F.5.1})$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - (f + \beta y) \frac{\partial u_y}{\partial t} = -\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t} + \frac{B_y}{\rho_0 \mu} \frac{dB_x}{dy} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)^2 u_x}{\rho_0 \mu} - \frac{u_y B_y}{\rho_0 \mu} \frac{d^2 B_x}{dy^2} \quad (\text{F.5.2})$$

$$\frac{\partial^3 P}{\partial z^2 \partial t} = N^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad (\text{F.5.3})$$

ここで、

$$(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)^2 = B_y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + B_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_y B_x \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \quad (\text{F.5.4})$$

である。

F.5.1 変数分離

(F.5.1)、(F.5.2) 式を見ると、 $B_z = 0$ のときは、 z 微分を含まない式になる。また、(F.5.3) 式は、左辺は z （と時間）微分の項、右辺は水平方向微分の項になっており、 f 面近似のときと同じ状況になっている。ゆえに、

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ P \end{pmatrix} = \Re \left[\begin{pmatrix} U(x, y) \\ V(x, y) \\ g\Pi(x, y) \end{pmatrix} D(z) e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{F.5.5})$$

として、変数分離することができる。分離定数を f 面のときと同じようにすれば、鉛直構造方程式は、

$$\frac{d^2 D(z)}{dz^2} = -\frac{N^2}{gh} D(z) \quad (\text{F.5.6})$$

となり、水平構造方程式は、

$$\left[-\omega^2 - \frac{B_y}{\rho_0 \mu} \frac{dB_x}{dy} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)^2}{\rho_0 \mu} \right] V(x, y) - i\omega(f + \beta y) U(x, y) = i\omega g \frac{\partial \Pi(x, y)}{\partial y} \quad (\text{F.5.7})$$

$$\left[-\omega^2 - \frac{B_y}{\rho_0 \mu} \frac{dB_x}{dy} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)^2}{\rho_0 \mu} \right] U(x, y) + \left[i\omega(f + \beta y) + \frac{B_y}{\rho_0 \mu} \frac{d^2 B_x}{dy^2} \right] V(x, y) = i\omega g \frac{\partial \Pi(x, y)}{\partial x} \quad (\text{F.5.8})$$

$$-i\omega \Pi(x, y) + h \left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{F.5.9})$$

となる。この水平構造方程式に対し、 $h = H$ とすれば、 β 面における MHD 浅水波方程式になる (Zaqarashvili, 2007) [56]。

F.5.2 鉛直構造方程式の境界条件

これまでと同様、完全導体の壁、もしくは、絶縁体の壁を考える。鉛直構造方程式 (F.5.6) 式は z について 2 階の微分方程式なので、上下に 1 つずつ境界条件が必要になる。まず共通の条件は、

$$u_z\left(z = \pm \frac{H}{2}\right) = 0 \quad (\text{F.5.10})$$

である。これを $D(z)$ についての式に変換すると、(F.3.7) 式より、

$$\frac{dD(z)}{dz} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{F.5.11})$$

となる。

(i) 完全導体の壁のとき

境界で、

$$b_z = 0 \quad (\text{F.5.12})$$

$$\mathbf{e}_H = \mathbf{0} \quad (\text{F.5.13})$$

でなければならないが、 $b_z = 0$ は、(F.2.32) 式より $B_z = 0$ と (F.5.10) 式より常に成立。

$\mathbf{e}_H = \mathbf{0}$ は (F.4.4) 式より、 $B_z = 0$ と (F.5.10) 式より常に成立。

(ii) 絶縁体の壁のとき境界で、

$$j_z = 0 \quad (\text{F.5.14})$$

$$b_z \text{ が壁内部のポテンシャル磁場と連続} \quad (\text{F.5.15})$$

でなければならないが、まず、無限に薄い平行層内の電流の不連続、または、(F.4.4) 式と無限に薄い境界層内の水平流速の不連続による電流の不連続より、 $j_z = 0$ である必要はない。また、(F.2.32) 式より $B_z = 0$ と (F.5.10) 式から、境界では常に $b_z = 0$ であり、壁内部のポテンシャル磁場といつも連続である。

結局、背景磁場が水平成分のみのときは、境界条件は (F.5.11) 式

$$\frac{dD(z)}{dz} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{F.5.16})$$

のみ用いれば良い。

F.5.3 鉛直構造方程式の固有値問題

鉛直構造方程式 (F.5.6)

$$\frac{d^2 D(z)}{dz^2} = -\frac{N^2}{gh} D(z) \quad (\text{F.5.17})$$

を、境界条件 (F.5.16)

$$\frac{dD(z)}{dz} \Big|_{z=\pm \frac{H}{2}} = 0 \quad (\text{F.5.18})$$

をもとに解く。

この固有値問題は簡単に解けて、

$$(原点対称モード) \quad D(z) = D_0 \cos\left(\frac{2m_c\pi}{H}z\right) \quad (m_c = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{F.5.19})$$

$$(原点反対称モード) \quad D(z) = D_0 \sin\left(\frac{(2m_s+1)\pi}{H}z\right) \quad (m_s = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{F.5.20})$$

となる。ここで、 D_0 は定数である。ゆえに、固有値は、

$$h = \frac{N^2}{g\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (\text{F.5.21})$$

となる。これを水平構造方程式 (F.5.7)~(F.5.9) 式に代入すると、

$$\left[-\omega^2 - \frac{B_y}{\rho_0\mu} \frac{dB_x}{dy} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)^2}{\rho_0\mu}\right] V(x, y) - i\omega(f + \beta y)U(x, y) = i\omega g \frac{\partial\Pi(x, y)}{\partial y} \quad (\text{F.5.22})$$

$$\left[-\omega^2 - \frac{B_y}{\rho_0\mu} \frac{dB_x}{dy} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)^2}{\rho_0\mu}\right] U(x, y) + \left[i\omega(f + \beta y) + \frac{B_y}{\rho_0\mu} \frac{d^2B_x}{dy^2}\right] V(x, y) = i\omega g \frac{\partial\Pi(x, y)}{\partial x} \quad (\text{F.5.23})$$

$$-i\omega\Pi(x, y) + \frac{N^2}{g\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2} \left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{F.5.24})$$

となる。

F.5.4 $B_y = 0$ のときの水平構造方程式

(F.5.24) 式を (F.5.22)、(F.5.23) 式に代入すると、

$$\left[-\omega^2 - \frac{B_y}{\rho_0\mu} \frac{dB_x}{dy} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)^2}{\rho_0\mu} - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] V(x, y) = \left[i\omega(f + \beta y) + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right] U(x, y) \quad (\text{F.5.25})$$

$$\begin{aligned} \left[-\omega^2 - \frac{B_y}{\rho_0\mu} \frac{dB_x}{dy} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)^2}{\rho_0\mu} - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right] U(x, y) \\ = \left[-i\omega(f + \beta y) - \frac{B_y}{\rho_0\mu} \frac{d^2B_x}{dy^2} + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right] V(x, y) \end{aligned} \quad (\text{F.5.26})$$

というように 2 つの式になる。ただし、これを一般に解くのは難しい。

この式は、 x と y についての微分方程式である。ただし、各項の係数には y は含まれているが、 x は含まれていない。すなわち、 x については容易に Fourier 変換できる。そこで、少し戻って

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ P \end{pmatrix} = \Re \left[\begin{pmatrix} U(y) \\ V(y) \\ g\Pi(y) \end{pmatrix} D(z) e^{ik_x x} e^{-i\omega t} \right] \quad (\text{F.5.27})$$

と変数分離したことにしよう。すると、水平構造方程式 (F.5.25)、(F.5.26) は

$$\left[-\omega^2 - ik_x \frac{B_y}{\rho_0 \mu} \frac{dB_x}{dy} - \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)^2}{\rho_0 \mu} - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d^2}{dy^2} \right] V(y) = \left[i\omega(f + \beta y) + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] U(y) \quad (\text{F.5.28})$$

$$\begin{aligned} & \left[-\omega^2 - ik_x \frac{B_y}{\rho_0 \mu} \frac{dB_x}{dy} - \frac{(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)^2}{\rho_0 \mu} + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right] U(y) \\ &= \left[-i\omega(f + \beta y) - \frac{B_y}{\rho_0 \mu} \frac{d^2 B_x}{dy^2} + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] V(y) \end{aligned} \quad (\text{F.5.29})$$

となる。ここで、(F.5.28)、(F.5.29) 式の両辺には y 微分と係数の中に y を含んでいる。そのため、 x 方向に Fourier 変換したとしても、この 2 式を 1 つの式にまとめることは難しい^{*72}。

そこで、

$$B_y = 0 \quad (\text{F.5.30})$$

すなわち、

$$\mathbf{B}(y) = B_x(y) \hat{\mathbf{e}}_x \quad (\text{F.5.31})$$

の場合を考えよう^{*73}。このとき、水平構造方程式 (F.5.28)、(F.5.29) は

$$\left[-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d^2}{dy^2} \right] V(y) = \left[i\omega(f + \beta y) + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] U(y) \quad (\text{F.5.32})$$

$$\left[-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right] U(y) = \left[-i\omega(f + \beta y) + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] V(y) \quad (\text{F.5.33})$$

となり、かなり簡単になる。ただし、

$$V_{Ax}(y) = \frac{B_x(y)}{\sqrt{\rho_0 \mu}} \quad (\text{F.5.34})$$

とした。ここで、(F.5.32)、(F.5.33) 式の両辺を見ると、 y 微分を含まないのは、(F.5.33) 式の左辺のみである。ゆえに、 $V(y) \neq 0$ のときは、 $\left[-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right]$ で割って、

$$U(y) = \frac{1}{\left[-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right]} \left[-i\omega(f + \beta y) + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] V(y) \quad (\text{F.5.35})$$

となり、これを (F.5.32) 式に代入すると、

$$\left[-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d^2}{dy^2} \right] V(y) = \left[i\omega(f + \beta y) + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] \frac{\left[-i\omega(f + \beta y) + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] V(y)}{\left[-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right]} \quad (\text{F.5.36})$$

^{*72} このまま、1 つの式にまとめめる方法があるかもしれないが、著者はその方法を見つけていない。

^{*73} こうすることで、 $(\mathbf{B}_H \cdot \nabla_H)$ の中の y 微分が消えるので、計算しやすくなる。

となり、 $V(y)$ のみの式となる。右辺を整理すると、

$$\begin{aligned} \left[-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d^2}{dy^2} \right] V(y) &= \frac{\left[i\omega(f + \beta y) + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] \left[-i\omega(f + \beta y) + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] V(y)}{\left[-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right]} \\ &\quad + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{\left[-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right]} \right) \left[-i\omega(f + \beta y) + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] V(y) \end{aligned} \quad (\text{F.5.37})$$

となる。次に、 $\left[-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right]$ をかけると、

$$\begin{aligned} &\left[-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right] \left[-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d^2}{dy^2} \right] V(y) \\ &= \left[i\omega(f + \beta y) + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] \left[-i\omega(f + \beta y) + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] V(y) \\ &\quad - ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{2[V_{Ax}(y)] \frac{d[V_{Ax}(y)]}{dy} k_x^2}{\left[-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right]} \left[-i\omega(f + \beta y) + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] V(y) \end{aligned} \quad (\text{F.5.38})$$

となり、展開して、

$$\begin{aligned} &\left[\left(-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 \right)^2 + \left(-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 \right) \left(\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d^2}{dy^2} \right) - \frac{N^4 H^4}{(m\pi)^4} k_x^2 \frac{d^2}{dy^2} \right] V(y) \\ &= \left[\omega^2(f + \beta y)^2 + \omega k_x \beta \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} - k_x^2 \frac{N^4 H^4}{(m\pi)^4} \frac{d^2}{dy^2} \right] V(y) \\ &\quad - ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{2[V_{Ax}(y)] \frac{d[V_{Ax}(y)]}{dy} k_x^2}{\left[-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right]} \left[-i\omega(f + \beta y) + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] V(y) \end{aligned} \quad (\text{F.5.39})$$

となる。整理して、 $(-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}$ で割ると、

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\left(-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 \right)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} + k_x^2 - \frac{d^2}{dy^2} - \frac{\omega^2(f + \beta y)^2}{(-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - \frac{\omega k_x \beta}{(-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2)} \right] V(y) \\ &+ k_x \frac{2[V_{Ax}(y)] \frac{d[V_{Ax}(y)]}{dy} k_x^2}{(-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2) \left[-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right]} \left[\omega(f + \beta y) - k_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] V(y) = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.5.40})$$

ゆえに、 $V(y)$ のみの式

$$\begin{aligned} \frac{d^2V(y)}{dy^2} + 2[V_{Ax}(y)] \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^4 & \left[\frac{\frac{d[V_{Ax}(y)]}{dy}}{\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2} \right] \frac{dV(y)}{dy} \\ & + \left[\frac{(\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2) - k_x^2}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - \frac{\omega^2(f + \beta y)^2}{(\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - \frac{\omega k_x \beta}{\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2} \right. \\ & \left. - 2[V_{Ax}(y)] \omega(f + \beta y) k_x^3 \frac{\frac{d[V_{Ax}(y)]}{dy}}{\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2} \right] V(y) = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.5.41})$$

を得る。

また、この式には $V(y) = 0$ となる解は含まれていない。 $V(y) = 0$ となる解を調べる場合は、水平構造方程式 (F.5.32)、(F.5.33) で $V(y) = 0$ とした、

$$\left[\omega(f + \beta y) + k_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] U(y) = 0 \quad (\text{F.5.42})$$

$$\left[-\omega^2 + [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right] U(y) = 0 \quad (\text{F.5.43})$$

を用いる。

(F.5.41) 式を見て、まず分かることは、 $V_{Ax}(y) \neq \text{const.}$ のとき、

$$\omega^2 = [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 \quad (\text{F.5.44})$$

$$\omega^2 = \left([V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \right) k_x^2 \quad (\text{F.5.45})$$

となるような y で特異点になっている、ということである。前者の特異点は、固有モードの位相速度がその緯度での Alfvén 波速度に一致し、共鳴が起こっている場所である。後者の特異点では、 $V(y) = 0$ になっている。

付録 F と付録 G では、これらの式について詳しく調べる。

F.5.5 中緯度 β 面近似

中高緯度のある緯度周辺に注目する。このとき、

$$f + \beta y \approx f \quad (= \text{const.}) \quad (\text{F.5.46})$$

$$V_{Ax} = V_{Ax0} + \frac{d[V_{Ax}(y)]}{dy} \Big|_{y=0} y + \dots \approx V_{Ax0} \quad (= \text{const.}) \quad (\text{F.5.47})$$

と近似できる。また、 $\beta = \text{const.}$ であるのと同様に、

$$V'_{Ax} = \frac{d[V_{Ax}(y)]}{dy} \Big|_{y=0} = \text{const.} \quad (\text{F.5.48})$$

だと仮定しよう。このとき、(F.5.41) 式より、

$$\begin{aligned} \frac{d^2V(y)}{dy^2} + 2V_{Ax0}\frac{N^2H^2}{(m\pi)^2}k_x^4 & \left[\frac{V'_{Ax}}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} \right] \left[\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2 - \frac{N^2H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right] \frac{dV(y)}{dy} \\ & + \left[\frac{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)}{\frac{N^2H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{\omega^2 f^2}{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2) \frac{N^2H^2}{(m\pi)^2}} - \frac{\omega k_x \beta}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} \right. \\ & \quad \left. - 2V_{Ax0}\omega f k_x^3 \frac{V'_{Ax}}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} \left[\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2 - \frac{N^2H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right] \right] V(y) = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.5.49})$$

となる。ただし、中緯度 β 面近似を用いる場合は、 $\left[\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2 \right] \left[\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2 - \frac{N^2H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right] \neq 0$ に注意しなければならない。

(i) $\omega = \pm V_{Ax0} k_x$ のときは、中緯度 β 面近似を行った (F.5.39) 式に代入して、

$$\left[V_{Ax0} f^2 \pm \beta \frac{N^2H^2}{(m\pi)^2} \right] V(y) = 2V'_{Ax} \left[\pm V_{Ax0} f - \frac{N^2H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] V(y) \quad (\text{F.5.50})$$

となる。ただし、複号は、 $\omega = \pm V_{Ax0} k_x$ と同順である。

(ii) $\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2 - \frac{N^2H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 = 0$ 、すなわち、 $V(y) = 0$ のときは、(F.5.42)、(F.5.43) 式より、

$$\left[\omega f + k_x \frac{N^2H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] U(y) = 0 \quad (\text{F.5.51})$$

$$\left[-\omega^2 + V_{Ax0}^2 k_x^2 + \frac{N^2H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right] U(y) = 0 \quad (\text{F.5.52})$$

となる。

これらの近似を用いると、 y についても定数係数の微分方程式になるので、 y (南北) 方向にも容易に Fourier 変換できるようになる。すなわち、 y 依存性を $e^{ik_y y}$ として、 $V(y) \neq 0$ の解の分散関係は、

$$\begin{aligned} 2iV_{Ax0}\frac{N^2H^2}{(m\pi)^2}k_x^4 k_y & \left[\frac{V'_{Ax}}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} \right] \left[\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2 - \frac{N^2H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right] \\ & + \left[\frac{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)}{\frac{N^2H^2}{(m\pi)^2}} - (k_x^2 + k_y^2) - \frac{\omega^2 f^2}{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2) \frac{N^2H^2}{(m\pi)^2}} - \frac{\omega k_x \beta}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} \right. \\ & \quad \left. - 2V_{Ax0}\omega f k_x^3 \frac{V'_{Ax}}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} \left[\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2 - \frac{N^2H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right] \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{F.5.53})$$

となる。これを見ると、少なくとも $V'_{Ax} \neq 0$ かつ $k_y \neq 0$ のときは、周波数が虚部を持つことがわかる。

次に、 $\omega = \pm V_{Ax0} k_x$ のときは、(F.5.50) 式より、

$$V_{Ax0} f^2 \pm \beta \frac{N^2H^2}{(m\pi)^2} = 2V'_{Ax} \left[\pm V_{Ax0} f - \frac{N^2H^2}{(m\pi)^2} (ik_y) \right] \quad (\text{F.5.54})$$

となり、 $k_y = 0$ でなければ、この式は成立しない。 $k_y = 0$ のとき

$$\frac{2V'_{Ax}V_{Ax0}f - \beta \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}}{V_{Ax0}f^2} = \pm 1 \quad (\text{F.5.55})$$

であれば、 $\omega = \pm V_{Ax0}k_x$ になりうる。ただし、複号は、 $\omega = \pm V_{Ax0}k_x$ と同順である。これの意味することは、パラメータの関係性が、(F.5.55) 式を満たすとき、偶然 $\omega = \pm V_{Ax0}k_x$ になる、ということである。ただし、どちらの符号に対しても成立することはない。

$V(y) = 0$ の解の分散関係は、

$$\omega f + ik_x k_y \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} = 0 \quad (\text{F.5.56})$$

$$-\omega^2 + V_{Ax0}^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 = 0 \quad (\text{F.5.57})$$

となる。ただし、(F.5.56)、(F.5.57) 式はともに満たさないので⁷⁴、 $V(y) = 0$ の解は中高緯度には存在しないことがわかる。

まずは、簡単な場合の分散関係から見ていく。

F.5.6 分散関係 - (i) 磁場も回転もない場合

$f = 0$ 、 $\beta = 0$ 、 $V_{Ax0} = 0$ 、 $V'_{Ax} = 0$ のとき、分散関係 (F.5.53) 式は、

$$\frac{\omega^2}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - (k_x^2 + k_y^2) = 0 \quad (\text{F.5.58})$$

すなわち、静水圧近似における内部重力波の分散関係

$$\omega^2 = \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) \quad (\text{F.5.59})$$

を得る。

F.5.7 分散関係 - (ii) 磁場なしで、 f 面の場合

$\beta = 0$ 、 $V_{Ax0} = 0$ 、 $V'_{Ax} = 0$ のとき、分散関係 (F.5.53) 式は、

$$\frac{\omega^2}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - (k_x^2 + k_y^2) - \frac{f^2}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} = 0 \quad (\text{F.5.60})$$

すなわち、静水圧近似における慣性内部重力波の分散関係

$$\omega^2 = \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) + f^2 \quad (\text{F.5.61})$$

を得る。

⁷⁴ $k_x = 0$ であれば、2つの式を満たすが、その場合、 $\omega = 0$ を得る。

F.5.8 分散関係 - (iii) 回転なしで、背景磁場が一様な場合

$f = 0$ 、 $\beta = 0$ 、 $V'_{Ax} = 0$ のとき、分散関係 (F.5.53) 式は、

$$\frac{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - (k_x^2 + k_y^2) = 0 \quad (\text{F.5.62})$$

すなわち、静水圧近似における磁気重力波（成層の影響を受けた Alfvén 波、磁場の影響を受けた 内部重力波）の分散関係

$$\omega^2 = \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) + V_{Ax0}^2 k_x^2 \quad (\text{F.5.63})$$

を得る。

F.5.9 分散関係 - (iv) 背景磁場が一様で、 f 面の場合

$\beta = 0$ 、 $V'_{Ax} = 0$ のとき、分散関係 (F.5.53) 式は、

$$\frac{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - (k_x^2 + k_y^2) - \frac{\omega^2 f^2}{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} = 0 \quad (\text{F.5.64})$$

すなわち、

$$\left(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2 \right) \left(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) \right) = \omega^2 f^2 \quad (\text{F.5.65})$$

となって、 ω の 4 次式になる。この式は、 f 面近似での結果 (E.4.10) 式と一致する。

F.5.10 分散関係 - (v) 磁場なしの場合

$V_{Ax0} = 0$ 、 $V'_{Ax} = 0$ のとき、分散関係 (F.5.53) 式は、

$$\frac{\omega^2}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - (k_x^2 + k_y^2) - \frac{f^2}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - \frac{k_x \beta}{\omega} = 0 \quad (\text{F.5.66})$$

すなわち、

$$\omega^3 - \omega \left(\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) + f^2 \right) - \beta \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x = 0 \quad (\text{F.5.67})$$

となって、 ω の 3 次式になる。

β は小さい値であるので、最後の項を無視すれば、2 つの速いモードである慣性内部重力波の分散関係

$$\omega^2 = \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) + f^2 \quad (\text{F.5.68})$$

を得る。もう一つのモードは、 ω が小さい遅いモードで、(F.5.67) 式に対して

$$\omega^2 \ll \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) + f^2 \quad (\text{F.5.69})$$

という近似、すなわち、最初の項を無視すれば、

$$\omega = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2 + f^2 \frac{(m\pi)^2}{N^2 H^2}} \quad (\text{F.5.70})$$

を得る。これは、(内部) Rossby 波の分散関係である^{*75}。ここで、Rossby の内部変形半径

$$\lambda_{RI} = \frac{NH}{f} \quad (\text{F.5.71})$$

を用いれば、

$$\omega = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2 + (m\pi)^2 \lambda_{RI}^{-2}} \quad (\text{F.5.72})$$

と表せる。

F.5.11 分散関係 - (vi) 背景磁場が一様な場合

$V'_{Ax} = 0$ のとき、分散関係 (F.5.53) 式は、

$$\frac{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - (k_x^2 + k_y^2) - \frac{\omega^2 f^2}{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - \frac{\omega k_x \beta}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} = 0 \quad (\text{F.5.73})$$

すなわち、

$$(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)^2 - (\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) - \omega^2 f^2 - \omega \beta \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x = 0 \quad (\text{F.5.74})$$

となって、 ω の 4 次式になる。さらに、整理すると、

$$\omega^4 - \omega^2 \left(2V_{Ax0}^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) + f^2 \right) - \omega \beta \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x + V_{Ax0}^2 k_x^2 \left(V_{Ax0}^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) \right) = 0 \quad (\text{F.5.75})$$

となる。

ここで、 β は小さい値であり、速いモードに注目するために

$$\omega^2 \gg V_{Ax0}^2 k_x^2 \quad (\text{F.5.76})$$

という近似、すなわち、(F.5.75) 式の後半の 2 項を無視すると、

$$\omega^2 = 2V_{Ax0}^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) + f^2 \quad (\text{F.5.77})$$

という分散関係を得る。これは、磁場の影響を受けた慣性内部重力波^{*76}の分散関係である。

^{*75} Rossby 波は、分散関係にマイナスの符号がつくモードのみ存在する、ということが重要なので、2 乗してはいけない。

^{*76} $\omega^2 \gg V_{Ax0}^2 k_x^2$ を仮定している。

一方、残り 2 つの遅いモードは、

$$\omega^2 \ll 2V_{Ax0}^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) + f^2 \quad (\text{F.5.78})$$

という近似をして、(F.5.75) 式の最初の項を無視すると、

$$\omega^2 \left(2V_{Ax0}^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) + f^2 \right) + \omega \beta \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x - V_{Ax0}^2 k_x^2 \left(V_{Ax0}^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) \right) = 0 \quad (\text{F.5.79})$$

という分散関係を得る。さらに、整理すると、

$$\omega^2 + \omega \frac{\beta \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x}{2V_{Ax0}^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) + f^2} - \frac{V_{Ax0}^2 k_x^2 \left(V_{Ax0}^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) \right)}{2V_{Ax0}^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) + f^2} = 0 \quad (\text{F.5.80})$$

となる。ここで、Rossby の内部変形半径と、長さスケールを Rossby の内部変形半径でとった Lehnert 数

$$L_{eR} = \frac{V_A}{NH} \quad (\text{F.5.81})$$

を用いれば、

$$\omega^2 + \omega \frac{\beta k_x}{(1 + 2(m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2 + (m\pi)^2 \lambda_{RI}^{-2}} - \frac{V_{Ax0}^2 k_x^2 \left((1 + (m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2 \right)}{(1 + 2(m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2 + (m\pi)^2 \lambda_{RI}^{-2}} = 0 \quad (\text{F.5.82})$$

となる。ここで、

$$\omega_R = - \frac{\beta k_x}{(1 + 2(m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2 + (m\pi)^2 \lambda_{RI}^{-2}} \quad (\text{F.5.83})$$

は $L_{eR} = 0$ のとき、磁場なしの場合の内部 Rossby 波の分散関係 (F.5.72) に一致するので、仮に ω_R を磁場の影響を受けた内部 Rossby 波の分散関係だと仮定しよう。これを用いると、

$$\omega^2 - \omega \omega_R - \frac{V_{Ax0}^2 k_x^2 \left((1 + (m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2 \right)}{(1 + 2(m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2 + (m\pi)^2 \lambda_{RI}^{-2}} = 0 \quad (\text{F.5.84})$$

となる。さらに、2 次方程式の解の公式より、

$$\omega = \frac{\omega_R}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_R}{2} \right)^2 + \frac{V_{Ax0}^2 k_x^2 \left((1 + (m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2 \right)}{(1 + 2(m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2 + (m\pi)^2 \lambda_{RI}^{-2}}} \quad (\text{F.5.85})$$

を得る。

ここで、 $k_x \rightarrow \infty$ の極限を考えてみよう。このとき、

$$\omega_R \rightarrow 0 \quad (\text{F.5.86})$$

となり、

$$\omega \rightarrow \pm V_{Ax0} k_x \quad (\text{F.5.87})$$

を得る。すなわち、遅いモードは Alfvén 波になる。

一方、

$$\left(\frac{\omega_R}{2}\right)^2 \gg \frac{V_{Ax0}^2 k_x^2 ((1 + (m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2)}{(1 + 2(m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2 + (m\pi)^2 \lambda_{RI}^{-2}} \quad (\text{F.5.88})$$

となるような、 k_x があまり大きくななく、磁場が回転に比べ小さい状況では、

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\omega_R}{2} \pm \frac{\omega_R}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{\omega_R} \frac{V_{Ax0}^2 k_x ((1 + (m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2)}{\beta}} \\ &\approx \frac{\omega_R}{2} \pm \frac{\omega_R}{2} \left(1 - \frac{2}{\omega_R} \frac{V_{Ax0}^2 k_x ((1 + (m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2)}{\beta}\right) \end{aligned} \quad (\text{F.5.89})$$

ゆえに、

$$\omega_+ = \omega_R - \frac{V_{Ax0}^2 k_x ((1 + (m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2)}{\beta} \quad (\text{F.5.90})$$

$$\omega_- = \frac{V_{Ax0}^2 k_x ((1 + (m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2)}{\beta} \quad (\text{F.5.91})$$

となって、2つの遅いモードも2つのモードに分離する。比較的速い ω_+ のモードは磁場の影響を受けた（内部）Rossby 波の分散関係、比較的遅い ω_- のモードは、（内部）MC Rossby 波（磁気 Rossby 波）^{*77}の分散関係である。

ここで、元の分散関係 (F.5.74) を無次元化してみよう。今、 f 面近似のときと比べ、 β という量が増えたので、無次元数がもう一つ必要になる。まず、 f 面近似のときと同様に、

$$\omega = f\omega_* \quad (\text{F.5.92})$$

$$k_x = \frac{k_{x*}}{\lambda_{RI}} = \frac{k_{x*}}{\left(\frac{NH}{f}\right)} \quad (\text{F.5.93})$$

$$k_y = \frac{k_{y*}}{\lambda_{RI}} = \frac{k_{y*}}{\left(\frac{NH}{f}\right)} \quad (\text{F.5.94})$$

$$L_{eR} = \frac{V_{Ax0}}{NH} \quad (\text{F.5.95})$$

とすると、

$$\left[\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2\right] \left[\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2 - \frac{k_{x*}^2 + k_{y*}^2}{(m\pi)^2}\right] - \omega_*^2 - \frac{\omega_* \beta}{f^2} \frac{NH}{(m\pi)^2} k_{x*} = 0 \quad (\text{F.5.96})$$

となる。ここで、新たな無次元数

$$\mathcal{F}^2 = \frac{\beta NH}{f^2} = \frac{\beta \lambda_{RI}}{f} \quad (\text{F.5.97})$$

^{*77} 成層の影響を含んでいるので、MAC Rossby 波と呼んでもいいかもしれない。

を定義すれば、

$$\left[\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2 \right] \left[\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2 - \frac{k_{x*}^2 + k_{y*}^2}{(m\pi)^2} \right] - \omega_*^2 - \frac{\mathcal{F}^2 \omega_* k_{x*}}{(m\pi)^2} = 0 \quad (\text{F.5.98})$$

となる。また、 k_x と L_{eR} 、 \mathcal{F} に π を含めると、

$$\left[\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\pi} \right)^2 \right] \left[\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\pi} \right)^2 - \frac{(k_{x*}/\pi)^2 + (k_{y*}/\pi)^2}{m^2} \right] - \omega_*^2 - \frac{(\mathcal{F}^2/\pi)\omega_*(k_{x*}/\pi)}{m^2} = 0 \quad (\text{F.5.99})$$

となって、 $m = 1$ のモードは浅水波の場合の分散関係に一致する。

無次元数 \mathcal{F}^2 に関して、注意すべきことは、今は中緯度 β 面近似をしているので、 $f \gg \beta y$ であることを忘れてはいけない。 y を y_* に無次元化すると、

$$f \gg \beta \frac{NH}{f} y_* \quad (\text{F.5.100})$$

すなわち、

$$(\mathcal{F}^2)^{-1} \gg y_* \quad (\text{F.5.101})$$

となり、 \mathcal{F}^2 が大きいときは、南北スケールが大きいモードに対して、悪い近似になる。

最後に、 $k_y = 0$ のときに $\omega = \pm V_{Ax0} k_x$ となるのは、(F.5.55) 式より、

$$-\frac{\beta \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}}{V_{Ax0} f^2} = \pm 1 \quad (\text{F.5.102})$$

である。これを無次元化すると、

$$-\frac{\mathcal{F}^2}{L_{eR}} = \pm (m\pi)^2 \quad (\text{F.5.103})$$

または、

$$-\frac{\mathcal{F}^2/\pi}{L_{eR}\pi} = \pm m^2 \quad (\text{F.5.104})$$

となる。 $\omega = \pm V_{Ax0} k_x$ を無次元化すると、

$$\omega_* = \pm L_{eR} k_{x*} \quad (\text{F.5.105})$$

または、

$$\omega_* = \pm (L_{eR}\pi) \left(\frac{k_{x*}}{\pi} \right) \quad (\text{F.5.106})$$

であるので、 $k_y = 0$ かつ (F.5.106) 式を満たす場合の分散関係は、(F.5.106) 式を含む。

まずは、磁場なし ($L_{eR}\pi = 0$) の場合と、その分散関係の \mathcal{F}^2 依存性を示す (Fig.153~155)。

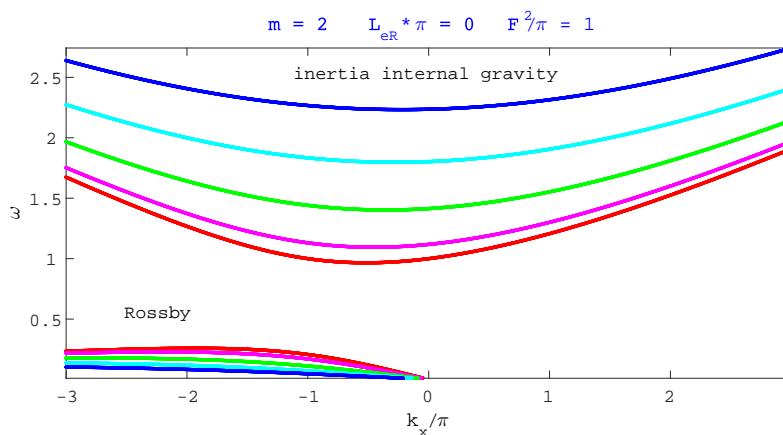
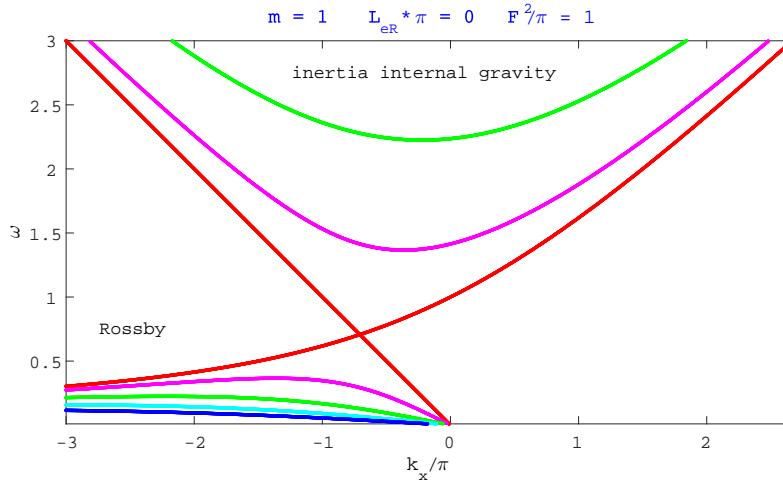


Fig.153 β 面近似で、 $L_{eR}\pi = 0$ 、 $\mathcal{F}^2/\pi = 1$ のときの分散関係。縦軸が ω_* 、横軸が k_{x*}/π であり、赤から青にかけて南北波数 $k_{y*} = 0, 1, 2, 3, 4$ としている。(今まででは、鉛直波数を色で分けていたが、今は南北波数であることに注意。)(上図) 鉛直波数 $m = 1$ の場合(浅水波と同じ分散関係)。中高緯度では、 β は f に比べ小さいので、 \mathcal{F}^2 はあまり大きくならないが、仮に大きくすると、赤道のように(付録 G 参照)、慣性内部重力波と内部 Rossby 波の線がぶつかる。(下図) 鉛直波数 $m = 2$ の場合。

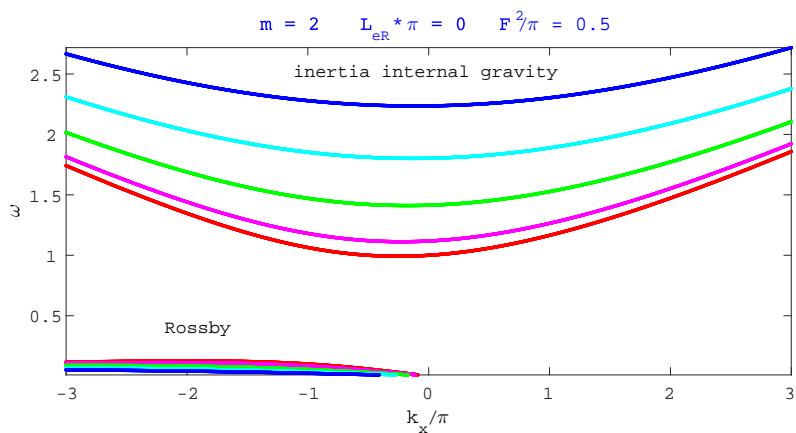
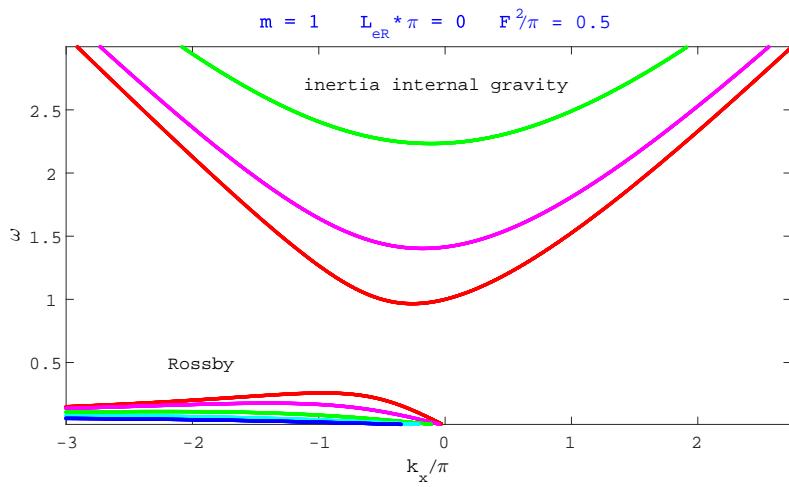


Fig.154 Fig.153と同じであるが、 $L_{eR}\pi = 0$ 、 $F^2/\pi = 0.5$ のときの分散関係（上図）鉛直波数 $m = 1$ の場合。（下図）鉛直波数 $m = 2$ の場合。

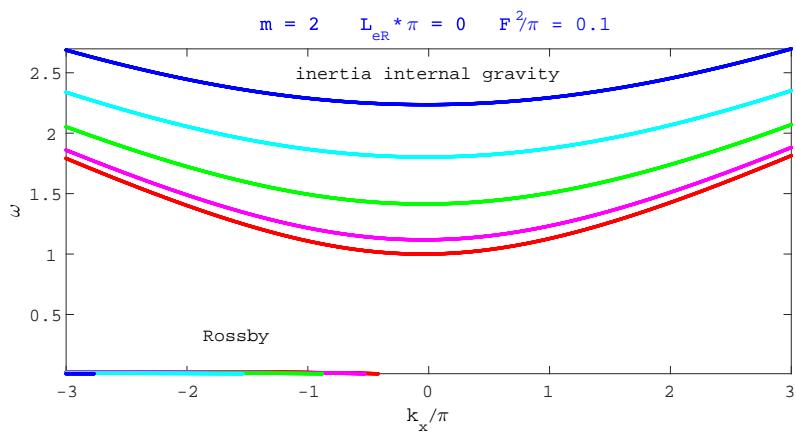
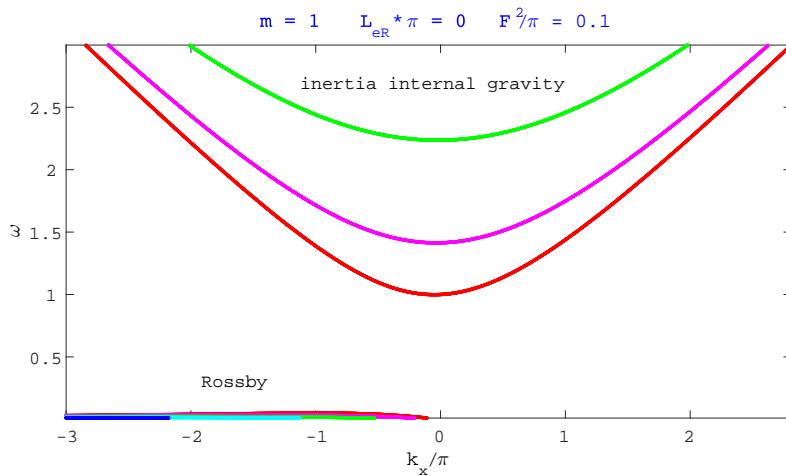


Fig.155 Fig.153と同じであるが、 $L_{eR}\pi = 0$ 、 $F^2/\pi = 0.1$ のときの分散関係（上図）鉛直波数 $m = 1$ の場合。（下図）鉛直波数 $m = 2$ の場合。

次に、背景磁場が存在するが、弱い場合 ($L_{eR}\pi = 0.1$) を示す (Fig.156、157)。

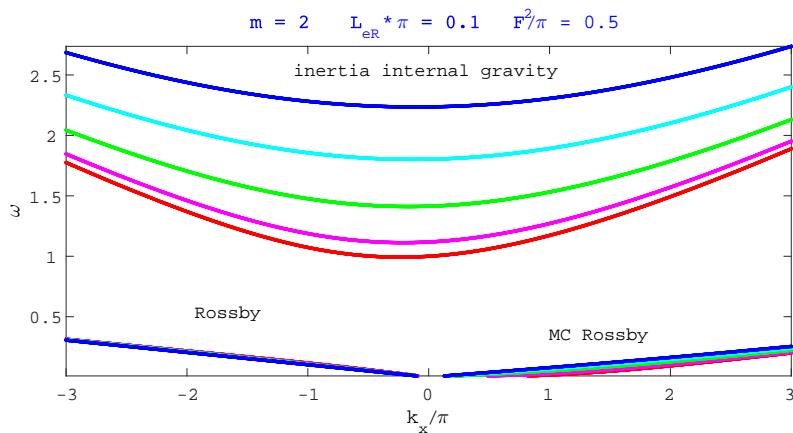
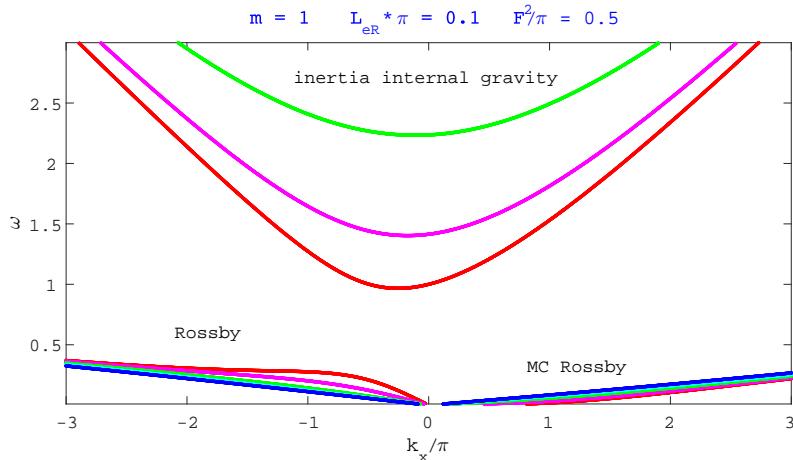


Fig.156 Fig.153と同じであるが、 $L_{eR}\pi = 0.1$ 、 $\mathcal{F}^2/\pi = 0.5$ のときの分散関係。Rossby 波と MC Rossby 波の違いは、 k_{x*} の正側にあるか負側にあるかだけでなく、南北波数の依存性も逆である。南北波数が大きくなると、Rossby 波は遅くなるのに対し、MC Rossby 波は速くなる。また、 k_{x*} の絶対値が大きくなると、Alfvén 波のような線形的な分散関係に近づく。(上図) 鉛直波数 $m = 1$ の場合。(下図) 鉛直波数 $m = 2$ の場合。

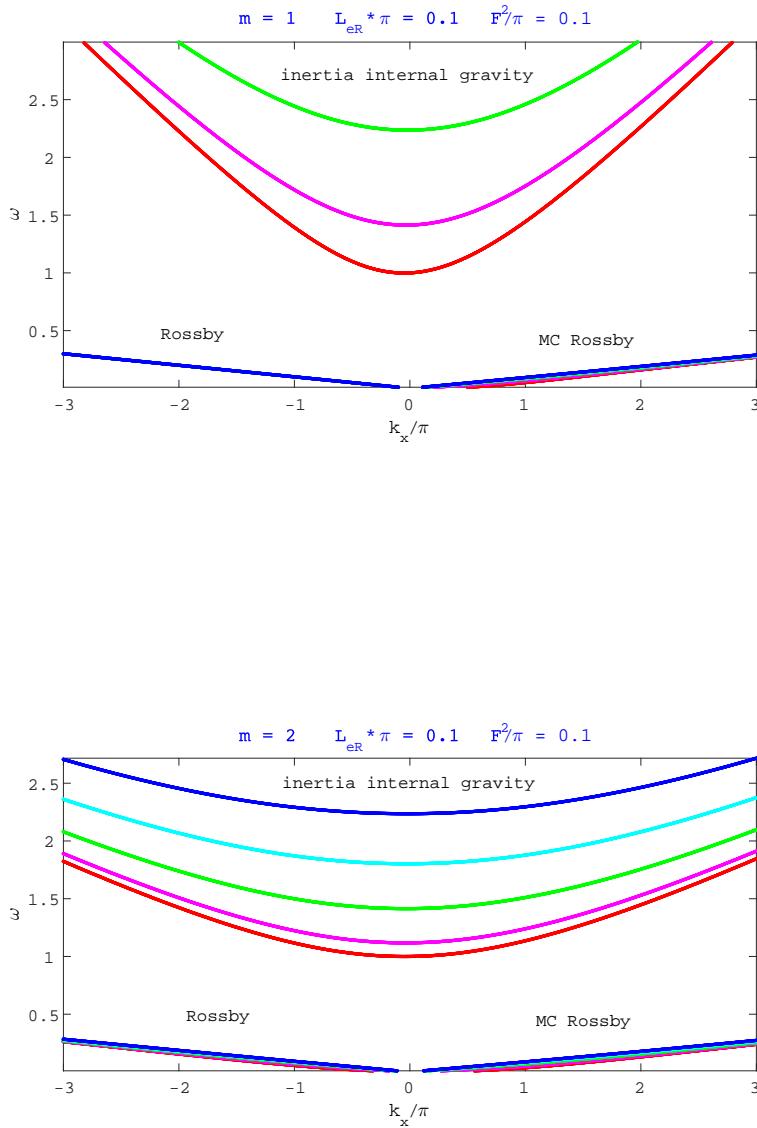


Fig.157 Fig.153と同じであるが、 $L_{eR}\pi = 0.1$ 、 $F^2/\pi = 0.1$ のときの分散関係。 F^2/π が小さいということは、 β が f に比べ、小さいことに対応し、Rossby 波と MC Rossby 波が Alfvén 波的になってきている。（上図）鉛直波数 $m = 1$ の場合。この場合は、(F.5.155) 式を満たしているので、 $k_{y*} = 0$ （赤の線）の時に $\omega_* = -(L_{eR}\pi)\left(\frac{k_{x*}}{\pi}\right)$ となっている。ただし、この図では、青の線と重なっていて見えない。（下図）鉛直波数 $m = 2$ の場合。Rossby 波の南北波数依存性が逆になってきている。

次は、背景磁場が強い場合 ($L_{eR}\pi = 0.5$) を示す (Fig.158、159)。

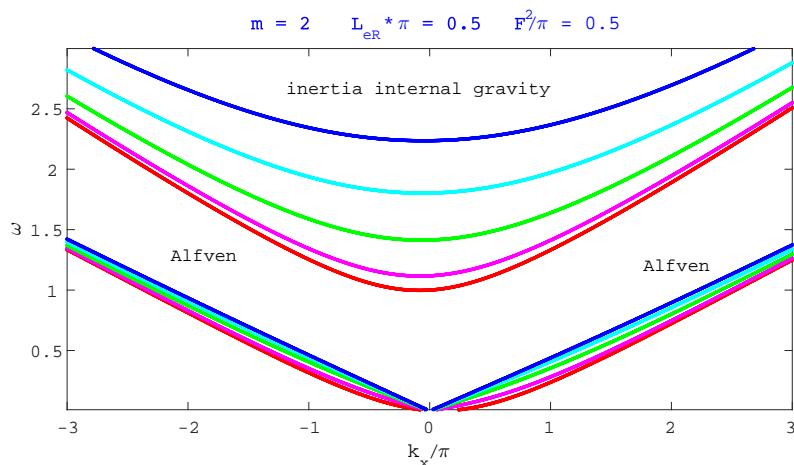
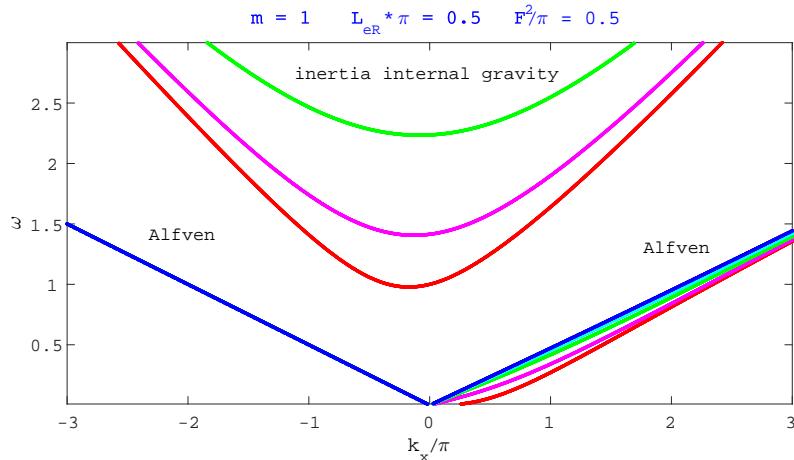


Fig.158 Fig.153と同じであるが、 $L_{eR}\pi = 0.5$ 、 $\mathcal{F}^2/\pi = 0.5$ のときの分散関係。 $L_{eR}\pi$ が大きい（磁場が強い）と、より Alfvén 波的になる。（上図）鉛直波数 $m = 1$ の場合。この場合は、(F.5.155) 式を満たしているので、 $k_{y*} = 0$ （赤の線）の時に $\omega_* = -(L_{eR}\pi)(\frac{k_{x*}}{\pi})$ となっている。ただし、この図では、青の線と重なっていて見えない。（下図）鉛直波数 $m = 2$ の場合。

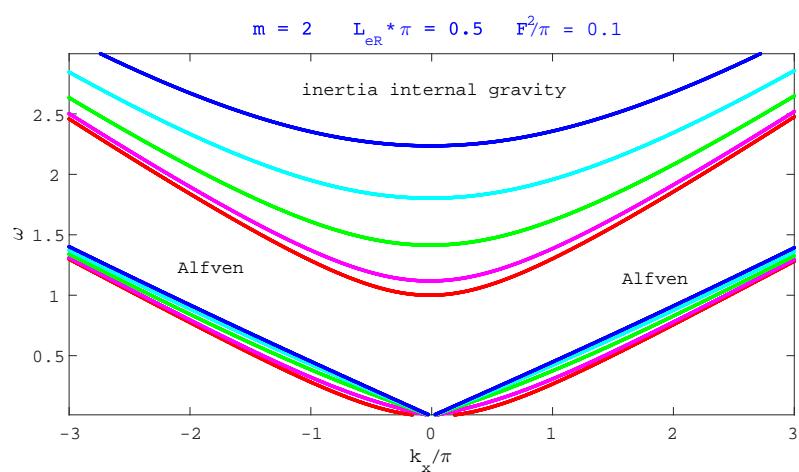
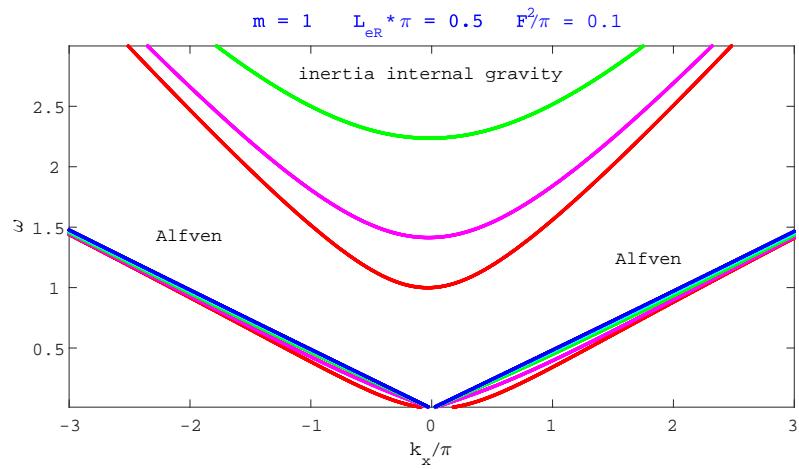


Fig.159 Fig.153と同じであるが、 $L_{eR}\pi = 0.5$ 、 $F^2/\pi = 0.1$ のときの分散関係。(上図) 鉛直波数 $m = 1$ の場合。(下図) 鉛直波数 $m = 2$ の場合。

最後に、磁場が非常に弱くても、(F.5.87) 式の結果のように、Rossby 波と MC Rossby 波は、東西波数が大きい極限では、Alfvén 波的になると示す (Fig.160)。

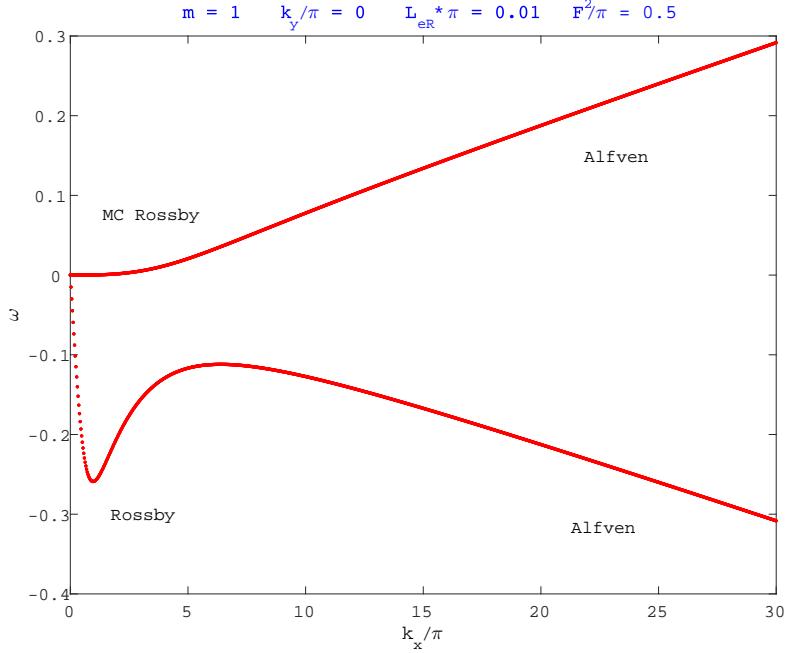


Fig.160 β 面近似で、 $L_{eR}\pi = 0.01$ 、 $F^2/\pi = 0.5$ のときの分散関係。縦軸が ω 、横軸が k_x/π であり、鉛直波数 $m = 1$ 、南北波数 $k_y/\pi = 0$ としている。また、このグラフでは、 k_x は正に限っているが、 ω が負になることを許している。東西波数 k_x が大きくなるほど線形的な変化になり、Alfvén 波の分散関係に近づく。同様の結果は、Zaqarashvili (2007) [56] にも示されている。

L_{eR} か k_{x*} が大きいと、Rossby 波と MC Rossby 波は Alfvén 波的になると述べたが、少し注意が必要である。それは、

$$L_{eR} = \frac{V_{Ax0}}{NH} \quad (\text{F.5.107})$$

$$k_{x*} = \frac{k_x}{\left(\frac{NH}{f}\right)} \quad (\text{F.5.108})$$

であるので、 $N \rightarrow \infty$ のとき、 $L_{eR} \rightarrow 0$ 、 $k_{x*} \rightarrow 0$ になってしまうので、Alfvén 波的ではなくなる、と思ってしまうことである。しかし、そんなことはない。それは、分散関係中の L_{eR} は $L_{eR}k_{x*}$ の形で現れるので、 $N \rightarrow \infty$ のときであっても、磁場が強い、または、東西波数が大きければ、Alfvén 波的になる。実際、分散関係 (F.5.75) に対し、 $N \rightarrow \infty$ とすると、

$$\omega^4 - \omega^2 \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) - \omega \beta \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x + V_{Ax0}^2 k_x^2 \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) = 0 \quad (\text{F.5.109})$$

となり、速い 2 つのモードは、内部重力波の周波数

$$\omega^2 = \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) \quad (\text{F.5.110})$$

となり、遅い 2 つモードは、

$$\omega^2 + \omega\beta \frac{k_x}{k_x^2 + k_y^2} - V_{Ax0}^2 k_x^2 = 0 \quad (\text{F.5.111})$$

すなわち、

$$\omega = -\frac{1}{2} \frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2}\right)^2 + V_{Ax0}^2 k_x^2} \quad (\text{F.5.112})$$

となる。ゆえに、 N が非常に大きくても、 V_{Ax0} か k_x が大きければ、Alfvén 波的になる。ここで、

$$\omega_{R(nd)} = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2} \quad (\text{F.5.113})$$

は、非発散の Rossby 波の周波数で、

$$\omega_{MCR(nd)} = \frac{V_{Ax0}^2 k_x (k_x^2 + k_y^2)}{\beta} \quad (\text{F.5.114})$$

は、非発散の MC Rossby 波の周波数である。これらは、(F.5.83) 式と (F.5.91) 式で、 $N \rightarrow \infty$ 、すなわち、 $\lambda_{RI} \rightarrow \infty$ 、 $L_{eR} \rightarrow 0$ とした場合に対応する。

F.5.12 Rossby 波・MC Rossby 波の位相速度・群速度

ここで、Rossby 波と MC Rossby 波の位相速度と群速度を示す。ただし、波数が大きいときに Alfvén 波的になるという効果までは明示的に入れない。

まず、Rossby 波の位相速度と群速度を示す。Rossby 波の周波数は、

$$\omega_R = -\frac{\beta k_x}{(1 + 2(m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2 + (m\pi)^2 \lambda_{RI}^{-2}} \quad (\text{F.5.115})$$

として計算する。

位相速度は

$$\mathbf{c}_{p,R} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = \frac{\omega_R}{k} (\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) = \frac{\omega_R}{k} \frac{k_x}{k} = -\frac{1}{k^2} \frac{\beta k_x^2}{(1 + 2(m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2 + (m\pi)^2 \lambda_{RI}^{-2}} < 0 \quad (\text{F.5.116})$$

$$\mathbf{c}_{p,R} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y = \frac{\omega_R}{k} (\hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_y) = \frac{\omega_R}{k} \frac{k_y}{k} = -\frac{1}{k^2} \frac{\beta k_x k_y}{(1 + 2(m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2 + (m\pi)^2 \lambda_{RI}^{-2}} \quad (\text{F.5.117})$$

であり、位相は東西方向ではいつも西向き ($x < 0$ の向き) に伝播する。一方、南北方向は、 $-k_x k_y$ の符号で決まる。すなわち、 k_x と k_y が同符号のときは南向き ($y < 0$ の向き) に伝播し、異符号のときは北向き ($y > 0$ の向き) に伝播する^{*78}。

^{*78} 厚い球殻の柱状対流の場合は、薄い球殻の場合と違って、背景渦度場の大小関係が異なる（内核より外側の柱状対流の場合は上下の壁の傾きによる地形性ベータ効果で Rossby 波が発生するのに対し、薄い球殻の場合は惑星ベータ効果で Rossby 波が発生する、つまり、 β の符号が異なる）ので、位相の進み方が逆になる。

また、群速度は、

$$\mathbf{c}_{g,R} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = \frac{\partial \omega_R}{\partial k_x} = \frac{\beta [(1 + 2(m\pi)^2 L_{eR}^2)k_x^2 - k_y^2 - (m\pi)^2 \lambda_{RI}^{-2}]}{[(1 + 2(m\pi)^2 L_{eR}^2)k_x^2 + k_y^2 + (m\pi)^2 \lambda_{RI}^{-2}]^2} \quad (\text{F.5.118})$$

$$\mathbf{c}_{g,R} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y = \frac{\partial \omega_R}{\partial k_y} = \frac{2\beta k_x k_y}{[(1 + 2(m\pi)^2 L_{eR}^2)k_x^2 + k_y^2 + (m\pi)^2 \lambda_{RI}^{-2}]^2} \quad (\text{F.5.119})$$

である。東西方向の群速度は、 $k_x^2(1 + 2(m\pi)^2 L_{eR}^2) > k_y^2 + (m\pi)^2 \lambda_{RI}^{-2}$ ならば東向き ($x > 0$ の向き)、 $k_x^2(1 + 2(m\pi)^2 L_{eR}^2) < k_y^2 + (m\pi)^2 \lambda_{RI}^{-2}$ ならば西向き ($x < 0$ の向き) である。すなわち、南北に長い波 (k_x が大きく、 k_y が小さい) は東向きにエネルギーを運び、東西に長い波 (k_x が小さく、 k_y が大きい) は西向きにエネルギーを運ぶ。一方、南北方向の群速度は、位相速度の逆向きである。

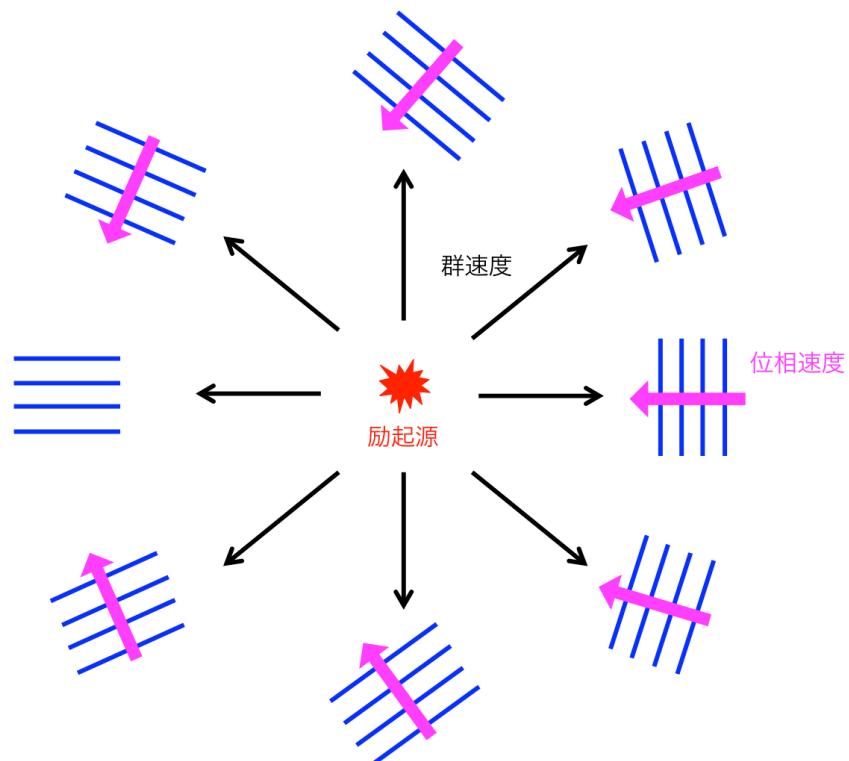


Fig.161 Rossby 波の位相速度と群速度（インパルス応答問題）。Rossby 波の分散関係 (F.5.115) より、 k_x が大きな東側の方が周期が短い。

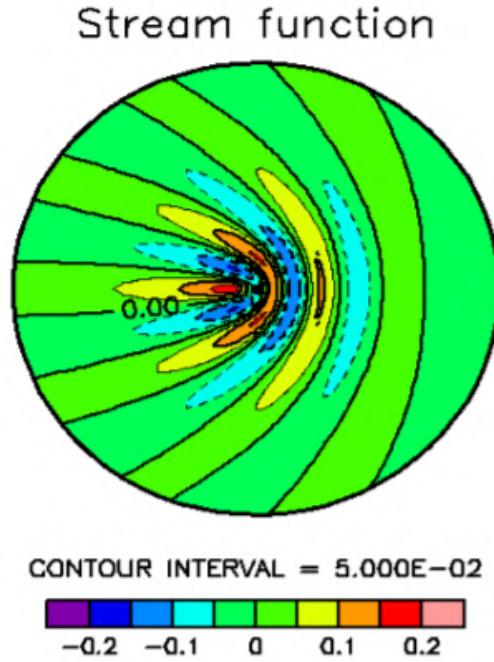


Fig.162 初期に Gaussian 型の擾乱を与えた時の Rossby 波の伝播の数値計算（竹広, 2016) [1]。詳しい条件設定は竹広 (2016) を参照せよ。

次に、MC Rossby 波の位相速度と群速度を示す。MC Rossby 波の周波数は、

$$\omega_{MCR} = \frac{V_{Ax0}^2 k_x \left((1 + (m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2 \right)}{\beta} \quad (\text{F.5.120})$$

として計算する。

位相速度は、

$$c_{p,MCR} \cdot \hat{e}_x = \frac{\omega_{MCR}}{k} (\hat{e}_k \cdot \hat{e}_x) = \frac{\omega_{MCR}}{k} \frac{k_x}{k} = \frac{V_{Ax0}^2 k_x^2 \left((1 + (m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2 \right)}{\beta k^2} > 0 \quad (\text{F.5.121})$$

$$c_{p,MCR} \cdot \hat{e}_y = \frac{\omega_{MCR}}{k} (\hat{e}_k \cdot \hat{e}_y) = \frac{\omega_{MCR}}{k} \frac{k_y}{k} = \frac{V_{Ax0}^2 k_x k_y \left((1 + (m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2 \right)}{\beta k^2} \quad (\text{F.5.122})$$

となり、位相は東西方向ではいつも東向き ($x > 0$ の向き) に伝播し、南北方向では、 $k_x k_y$ の符号で決まる。すなわち、 k_x と k_y が同符号のときは北向き ($y > 0$ の向き) に伝播し、異符号のときは南向き ($y < 0$ の向き) に伝播する。

群速度は、

$$\mathbf{c}_{g,MCR} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = \frac{\partial \omega_{MCR}}{\partial k_x} = \frac{V_{Ax0}^2 (3(1 + (m\pi)^2 L_{eR}^2)k_x^2 + k_y^2)}{\beta} > 0 \quad (\text{F.5.123})$$

$$\mathbf{c}_{g,MCR} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y = \frac{\partial \omega_{MCR}}{\partial k_y} = \frac{2V_{Ax0}^2 k_x k_y}{\beta} \quad (\text{F.5.124})$$

となる。つまり、東西方向の群速度は、いつも東向き ($x > 0$ の向き) で、南北方向の群速度は、位相速度と同じ向きである。

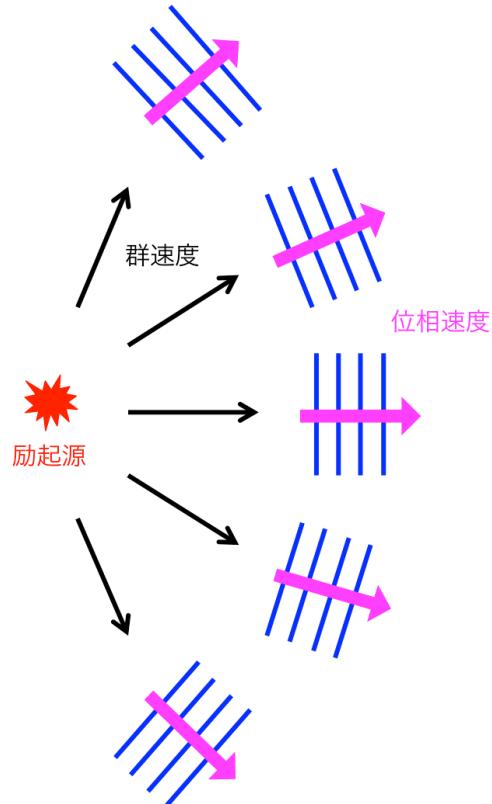


Fig.163 MC Rossby 波の位相速度と群速度（インパルス応答問題）。

F.5.13 Rossby 波の伝播メカニズム

Rossby 波の位相速度は、なぜ西向きなのかを理解するために、水平構造方程式 (F.5.22)~(F.5.24) に戻って考える。磁場なしにすると、

$$-i\omega V(x, y) + (f + \beta y)U(x, y) = -g \frac{\partial \Pi(x, y)}{\partial y} \quad (\text{F.5.125})$$

$$-i\omega U(x, y) - (f + \beta y)V(x, y) = -g \frac{\partial \Pi(x, y)}{\partial x} \quad (\text{F.5.126})$$

$$-i\omega \Pi(x, y) + \frac{N^2}{g(\frac{m\pi}{H})^2} \left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{F.5.127})$$

となる。(F.5.125) 式の x 微分と(F.5.126)式の y 微分より、渦度方程式をつくると、

$$-i\omega \left(\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right) + (f + \beta y) \left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \right) + \beta V(y) = 0 \quad (\text{F.5.128})$$

となる。簡単のために、成層が非常に強く ($N^2 \rightarrow \infty$)、鉛直流がほとんどない状況を考えれば、

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \approx 0 \quad (\text{F.5.129})$$

と近似でき、

$$-i\omega \left(\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right) = -\beta V(y) \quad (\text{F.5.130})$$

となる。この近似により、慣性内部重力波モードが除かれる。 y (南北) 方向には、惑星ベータ効果による背景渦度場の勾配があるため、南北流 $V(y)$ は背景渦度場を移流し、渦度を変化させる。 $\beta > 0$ なので、北向きの流れは正の渦度（反時計回りの渦）をつくり、南向きの流れは負の渦度（時計回りの渦）をつくる。そして、Fig.164 のようにして、Rossby 波は西に伝播する。

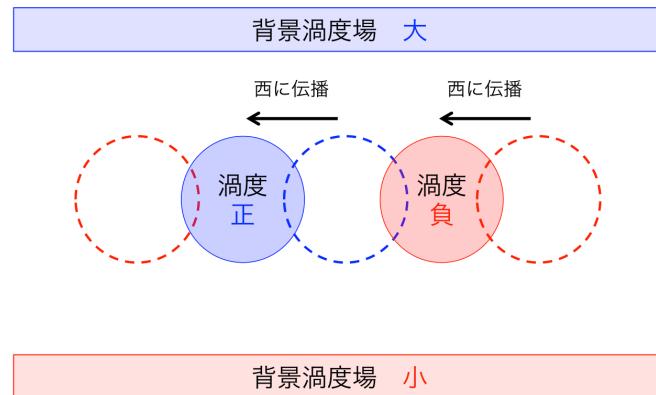
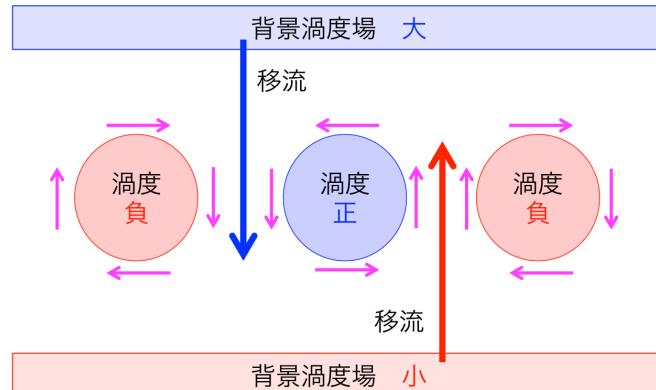


Fig.164 Rossby 波の伝播メカニズム。

また、Rossby 波の伝播の説明として、Coriolis 力の大きさが南北で違うことを用いることもできる。すなわち、背景渦度場が大きいところでは、Coriolis 力は強く、背景渦度場が小さいところで

は、Coriolis 力は弱くなる。背景渦度場の正負が逆向きなら、Coriolis 力がはたらく向きも逆になる。そして、その Coriolis 力の南北勾配がトルクになり、新たな渦度の摂動をつくる (Fig.165)。

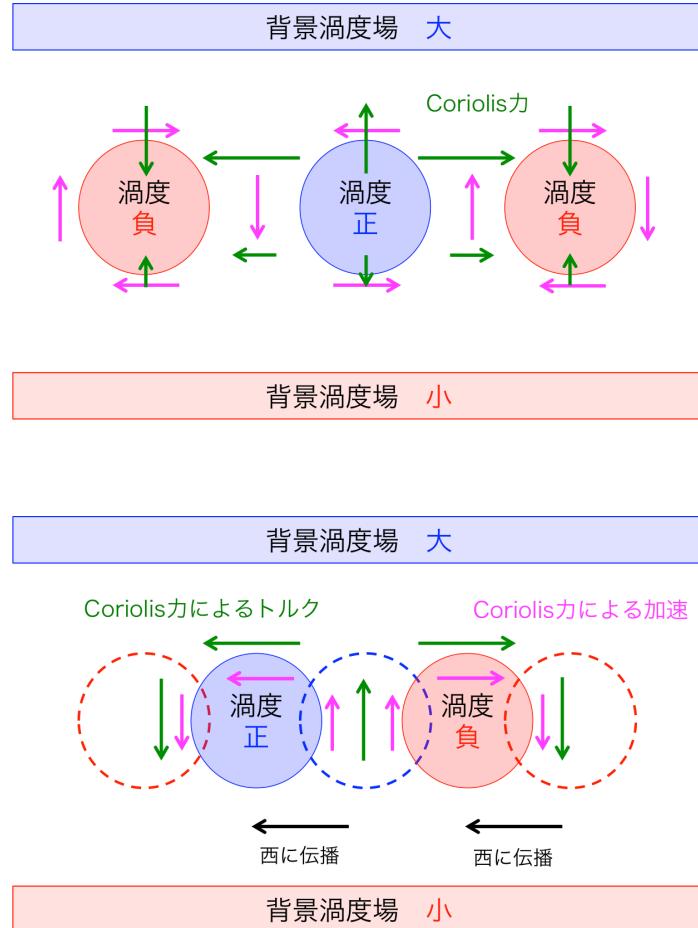


Fig.165 Rossby 波の伝播メカニズム。Coriolis 力を使った説明。

F.5.14 「遅い波の近似」と MC Rossby 波の伝播メカニズム

$V'_{Ax} = 0$ のときの分散関係 (F.5.74) を変形して、

$$(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2) \left[\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) - f^2 \right] - V_{Ax0}^2 k_x^2 f^2 - \omega \beta \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x = 0 \quad (\text{F.5.131})$$

とする。この式に「遅い波の近似」

$$\omega^2 \ll V_{Ax0}^2 k_x^2 \quad (\text{F.5.132})$$

を用いると、

$$V_{Ax0}^2 k_x^2 \left[V_{Ax0}^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} (k_x^2 + k_y^2) \right] - \omega \beta \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x = 0 \quad (\text{F.5.133})$$

ゆえに、

$$\omega = \frac{V_{Ax0}^2 k_x \left((1 + (m\pi)^2 L_{eR}^2) k_x^2 + k_y^2 \right)}{\beta} \quad (\text{F.5.134})$$

となって、MC Rossby 波の分散関係が得られる。すなわち、MC Rossby 波は、 f 面近似のときに現れる MAC 波と同様に、慣性項が効かず、力がつり合いながら伝播する波である。

MC Rossby 波の位相速度は、なぜ東向きなのかを理解するために、水平構造方程式 (F.5.22)～(F.5.24) に戻って考える。背景磁場は一様で、 x 成分のみだとすると、

$$\left[-\omega^2 - V_{Ax0}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] V(x, y) - i\omega(f + \beta y) U(x, y) = i\omega g \frac{\partial \Pi(x, y)}{\partial y} \quad (\text{F.5.135})$$

$$\left[-\omega^2 - V_{Ax0}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] U(x, y) + i\omega(f + \beta y) V(x, y) = i\omega g \frac{\partial \Pi(x, y)}{\partial x} \quad (\text{F.5.136})$$

$$-i\omega \Pi(x, y) + \frac{N^2}{g \left(\frac{m\pi}{H} \right)^2} \left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{F.5.137})$$

となる。(F.5.135) 式の x 微分と (F.5.136) 式の y 微分より、渦度方程式をつくると、

$$\left[-\omega^2 - V_{Ax0}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \left(\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right) - i\omega(f + \beta y) \left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \right) + i\omega \beta V(y) = 0 \quad (\text{F.5.138})$$

さらに、Rossby 波の時と同様に、成層が十分強い場合を考えるとすると、

$$\left[-\omega^2 - V_{Ax0}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \left(\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right) = -i\omega \beta V(y) \quad (\text{F.5.139})$$

となる。

もし、

$$\left[-\omega^2 - V_{Ax0}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \left(\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right) \approx 0 \quad (\text{F.5.140})$$

のつり合いが成り立ていれば、渦によってつくられた磁気張力によって、Alfvén 波が東西の両方に伝播する (Fig.166)。

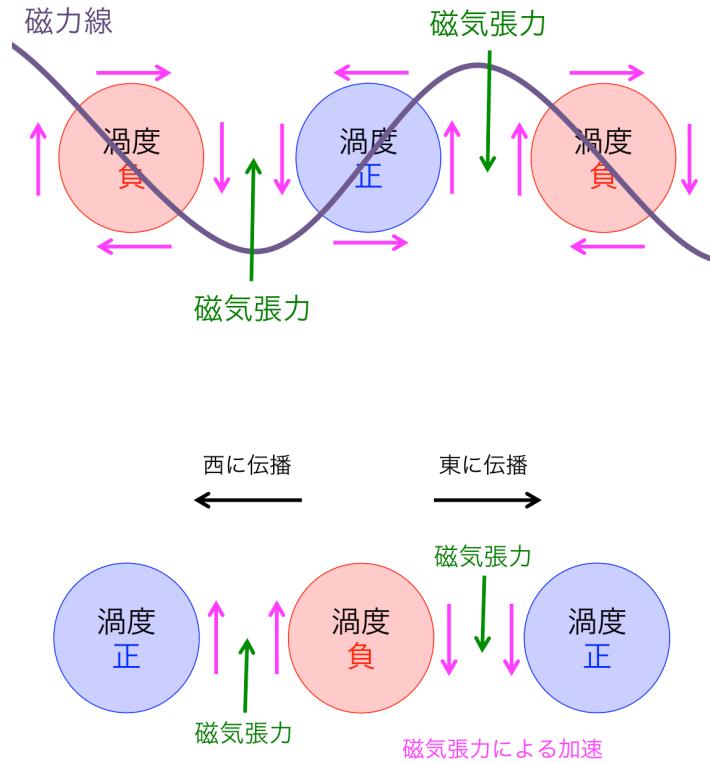


Fig.166 Alfvén 波の伝播メカニズム。

一方、

$$-V_{Ax0}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right) \approx -i\omega\beta V(y) \quad (\text{F.5.141})$$

のつり合いが成り立てば、MC Rossby 波が伝播する。慣性項を無視できるとき、力（渦についてならトルク）がつり合っているはずであり、今の場合は磁気張力のトルクと Coriolis 力のトルクがつり合う、と考えることができる。渦が存在すれば、Alfvén 波のときと同様に、磁気張力が生じる。しかし、磁場よりも回転の効果が大きいときは、磁気張力の復元よりも、慣性内部重力波や Rossby 波の伝播の方が速いので、磁気張力とつり合うような Coriolis 力が速やかに生じる。磁気張力とつり合うような Coriolis 力をつくるには、南北流があれば良い。なぜなら、コリオリ力の南北勾配のために、Coriolis 力のトルクを生み出すことができるからである。このようにして、MC Rossby 波は東に伝播する (Fig.167)。

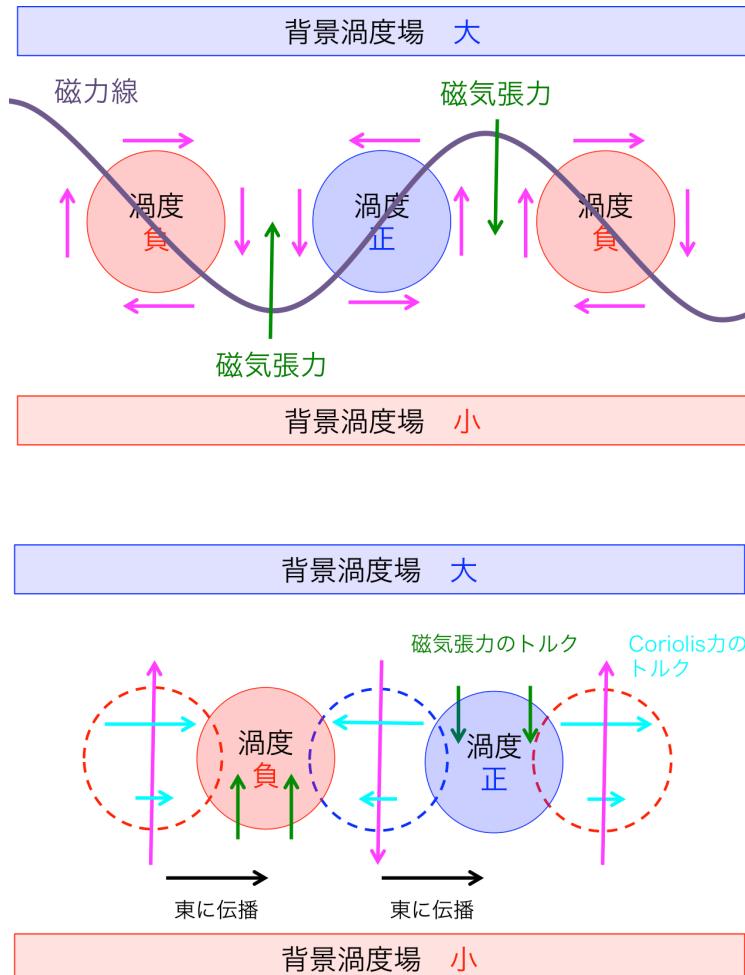


Fig.167 MC Rossby 波の伝播メカニズム。

F.5.15 磁場勾配がある場合

磁場勾配がある場合、分散関係が複雑になるので、最初に数値的に調べておく。まず、分散関係(F.5.53)を

$$\omega = f\omega_* \quad (\text{F.5.142})$$

$$k_x = \frac{k_{x*}}{\lambda_{RI}} = \frac{k_{x*}}{\left(\frac{NH}{f}\right)} \quad (\text{F.5.143})$$

$$k_y = \frac{k_{y*}}{\lambda_{RI}} = \frac{k_{y*}}{\left(\frac{NH}{f}\right)} \quad (\text{F.5.144})$$

$$L_{eR} = \frac{V_{Ax0}}{NH} \quad (\text{F.5.145})$$

$$\mathcal{F}^2 = \frac{\beta NH}{f^2} = \frac{\beta \lambda_{RI}}{f} \quad (\text{F.5.146})$$

によって無次元化する。

$$2iL_{eR} \frac{k_{x*}^4 k_{y*}}{(m\pi)^4} \frac{V'_{Ax}/f}{\left[\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2 \right] \left[\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2 - \frac{k_{x*}^2}{(m\pi)^2} \right]} \\ + (\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2) - \frac{k_{x*}^2 + k_{y*}^2}{(m\pi)^2} - \frac{\omega_*^2}{\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2} - \frac{\omega_* k_{x*} \mathcal{F}^2}{(m\pi)^2 (\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2)} \\ - 2 \frac{k_{x*}^3}{(m\pi)^2} L_{eR} \omega_* \frac{V'_{Ax}/f}{\left[\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2 \right] \left[\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2 - \frac{k_{x*}^2}{(m\pi)^2} \right]} = 0 \quad (\text{F.5.147})$$

ここで、新たに無次元数を

$$\mathcal{V} = \frac{V'_{Ax}}{f} \quad (\text{F.5.148})$$

と定義すれば、

$$2iL_{eR} \frac{k_{x*}^4 k_{y*}}{(m\pi)^4} \frac{\mathcal{V}}{\left[\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2 \right] \left[\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2 - \frac{k_{x*}^2}{(m\pi)^2} \right]} \\ + (\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2) - \frac{k_{x*}^2 + k_{y*}^2}{(m\pi)^2} - \frac{\omega_*^2}{\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2} - \frac{\omega_* k_{x*} \mathcal{F}^2}{(m\pi)^2 (\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2)} \\ - 2 \frac{k_{x*}^3}{(m\pi)^2} L_{eR} \omega_* \frac{\mathcal{V}}{\left[\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2 \right] \left[\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2 - \frac{k_{x*}^2}{(m\pi)^2} \right]} = 0 \quad (\text{F.5.149})$$

というように、すべて無次元数で表すことができた。さらに、無次元数に π を含めて、

$$2i(L_{eR}\pi) \frac{(k_{x*}/\pi)^4 (k_{y*}/\pi)}{m^4} \frac{\mathcal{V}}{\left[\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2 (k_{x*}/\pi)^2 \right] \left[\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2 (k_{x*}/\pi)^2 - \frac{(k_{x*}/\pi)^2}{m^2} \right]} \\ + (\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2 (k_{x*}/\pi)^2) - \frac{(k_{x*}/\pi)^2 + (k_{y*}/\pi)^2}{m^2} \\ - \frac{\omega_*^2}{\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2 (k_{x*}/\pi)^2} - \frac{\omega_* (k_{x*}/\pi) (\mathcal{F}^2/\pi)}{m^2 \left[\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2 (k_{x*}/\pi)^2 \right]} \\ - 2 \frac{(k_{x*}/\pi)^3}{m^2} (L_{eR}\pi) \omega_* \frac{\mathcal{V}}{\left[\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2 (k_{x*}/\pi)^2 \right] \left[\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2 (k_{x*}/\pi)^2 - \frac{(k_{x*}/\pi)^2}{m^2} \right]} = 0 \quad (\text{F.5.150})$$

となる。ただし、 $\left[\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2 (k_{x*}/\pi)^2 \right] \left[\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2 (k_{x*}/\pi)^2 - \frac{(k_{x*}/\pi)^2}{m^2} \right] \neq 0$ である。

ここで、中緯度 β 面近似を用いているので、 $V_{Ax0} \gg V'_{Ax} y$ であることに注意。すなわち、

$$\frac{\left(\frac{V_{Ax0}}{NH} \right)}{\left(\frac{V'_{Ax}}{f} \right)} = \frac{L_{eR}}{\mathcal{V}} \gg y_* \quad (\text{F.5.151})$$

かつ

$$(\mathcal{F}^2)^{-1} \gg y_* \quad (\text{F.5.152})$$

を仮定している。

また、 $k_y = 0$ のときに $\omega = \pm V_{Ax0} k_x$ となるのは、(F.5.55) 式より、

$$\frac{2V'_{Ax} V_{Ax0} f - \beta \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}}{V_{Ax0} f^2} = \pm 1 \quad (\text{F.5.153})$$

である。これを無次元化すると、

$$2\mathcal{V} - \frac{\mathcal{F}^2}{L_{eR}(m\pi)^2} = \pm 1 \quad (\text{F.5.154})$$

または、

$$2\mathcal{V} - \frac{\mathcal{F}^2/\pi}{L_{eR}\pi} \frac{1}{m^2} = \pm 1 \quad (\text{F.5.155})$$

となり、これを満たすとき、 $\omega_* = \pm (L_{eR}\pi)(k_{x*}/\pi)$ となる解を含む。

ここで、回転がない場合 ($f = 0, \beta = 0$) は、分散関係 (F.5.53) は、

$$2iV_{Ax0} \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^4 k_y \frac{V'_{Ax}}{\left[\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2\right] \left[\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2\right]} + \frac{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - (k_x^2 + k_y^2) = 0 \quad (\text{F.5.156})$$

となるので、違う無次元化

$$\omega = N\omega_* \quad (\text{F.5.157})$$

$$k_x = \frac{k_{x*}}{\lambda_{RI}} = \frac{k_{x*}}{H} \quad (\text{F.5.158})$$

$$k_y = \frac{k_{y*}}{\lambda_{RI}} = \frac{k_{y*}}{H} \quad (\text{F.5.159})$$

$$L_{eR} = \frac{V_{Ax0}}{NH} \quad (\text{F.5.160})$$

$$\mathcal{V} = \frac{V'_{Ax}}{N} \quad (\text{F.5.161})$$

により、

$$2iL_{eR} \frac{k_x^4 k_y}{(m\pi)^4} \frac{\mathcal{V}}{\left[\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2\right] \left[\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2 - \frac{k_{x*}^2}{(m\pi)^2}\right]} + (\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2) - \frac{k_{x*}^2 + k_{y*}^2}{(m\pi)^2} = 0 \quad (\text{F.5.162})$$

とする。さらに、無次元数の中に π を含めれば、

$$2i(L_{eR}\pi) \frac{(k_x/\pi)^4 (k_y/\pi)}{m^4} \frac{\mathcal{V}}{\left[\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2 (k_{x*}/\pi)^2\right] \left[\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2 (k_{x*}/\pi)^2 - \frac{(k_{x*}/\pi)^2}{m^2}\right]} + (\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2 (k_{x*}/\pi)^2) - \frac{(k_{x*}/\pi)^2 + (k_{y*}/\pi)^2}{m^2} = 0 \quad (\text{F.5.163})$$

を得る。このようにすれば、一般の場合の分散関係 (F.5.150) の最初の 3 項の和が 0 である、という式になる。ただし、 $\left[\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2(k_{x*}/\pi)^2 \right] \left[\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2(k_{x*}/\pi)^2 - \frac{(k_{x*}/\pi)^2}{m^2} \right] \neq 0$ である。また、回転がないときは、(F.5.50) 式より、 $k_y = 0$ であれば、常に、

$$\omega_* = \pm(L_{eR}\pi)(k_{x*}/\pi) \quad (\text{F.5.164})$$

となる。これは、Alfvén 波は磁力線に沿って伝播するので、磁場勾配がある方向（今の場合 y 方向）に構造がなければ、磁場勾配の影響を受けないことを表している。

F.5.16 分散関係 - (vii) 回転はないが、磁場勾配がある場合

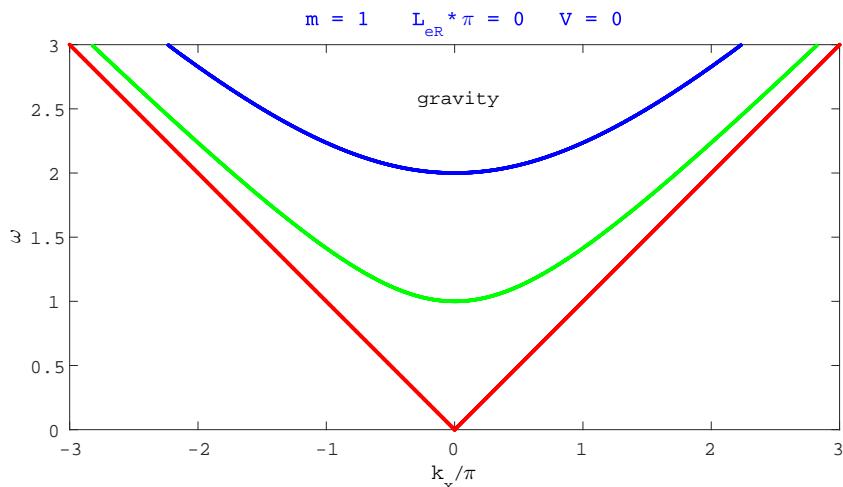
分散関係は、(F.5.163) 式

$$2i(L_{eR}\pi) \frac{(k_x/\pi)^4(k_y/\pi)}{m^4} \frac{\mathcal{V}}{\left[\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2(k_{x*}/\pi)^2 \right] \left[\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2(k_{x*}/\pi)^2 - \frac{(k_{x*}/\pi)^2}{m^2} \right]} + (\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2(k_{x*}/\pi)^2) - \frac{(k_{x*}/\pi)^2 + (k_{y*}/\pi)^2}{m^2} = 0 \quad (\text{F.5.165})$$

かつ、

$$\left[\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2(k_{x*}/\pi)^2 \right] \left[\omega_*^2 - (L_{eR}\pi)^2(k_{x*}/\pi)^2 - \frac{(k_{x*}/\pi)^2}{m^2} \right] \neq 0 \quad (\text{F.5.166})$$

であり、 $\mathcal{V} = 0$ のときは、F.5.8 節で示した分散関係になる。



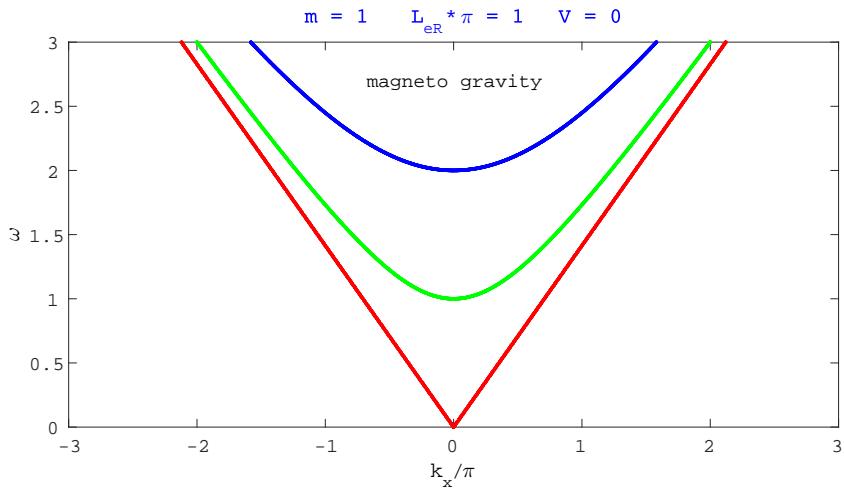


Fig.168 回転はないが、磁場勾配があるときの分散関係。縦軸が ω 、横軸が k_x/π であり、赤から青にかけて南北波数 $k_y = 0, 1, 2$ としている。また、鉛直波数 $m = 1$ である。(上図) $L_{eR}\pi = 0$ 、 $V = 0$ の場合。内部重力波の分散関係。(下図) $L_{eR}\pi = 1$ 、 $V = 0$ の場合。磁気重力波の分散関係。

$V \neq 0$ のときは、周波数に虚部が現れる。

付録 G 静水圧近似を用いた赤道 β 平面

G.1 赤道 β 面近似

この節では、赤道付近を考える。赤道付近では、

$$f \ll \beta y \quad (\text{G.1.1})$$

と近似できる。これを赤道 β 面近似という。それ以外は、付録 F と同じ状況を考える。ゆえに、(F.5.41) 式に (G.1.1) 式を用いた

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V(y)}{dy^2} + 2[V_{Ax}(y)] \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^4 & \frac{\frac{d[V_{Ax}(y)]}{dy}}{\left[\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2\right] \left[\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2\right]} \frac{dV(y)}{dy} \\ & + \left[\frac{(\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{\omega^2 \beta^2 y^2}{(\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - \frac{\omega k_x \beta}{\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2} \right. \\ & \left. - 2[V_{Ax}(y)] \omega \beta y k_x^3 \frac{\frac{d[V_{Ax}(y)]}{dy}}{\left[\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2\right] \left[\omega^2 - [V_{Ax}(y)]^2 k_x^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2\right]} \right] V(y) = 0 \end{aligned} \quad (\text{G.1.2})$$

について考える。また、 $V_{Ax}(y)$ が一定でないときは、特異点が現れ複雑になるので、

$$V_{Ax}(y) = V_{Ax0} = \text{const.} \quad (\text{G.1.3})$$

とする。ゆえに、

$$\frac{d^2 V(y)}{dy^2} + \left[\frac{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{\omega^2 \beta^2 y^2}{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - \frac{\omega k_x \beta}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} \right] V(y) = 0 \quad (\text{G.1.4})$$

となる。ここで、注意すべきことは、中緯度 β 面のときと同様に、 $\omega = \pm V_{Ax0} k_x$ と $V(y) = 0$ の場合は、この式を用いることができないことである。

(i) $\omega = \pm V_{Ax0} k_x$ のときは、

$$\left[V_{Ax0} \beta^2 y^2 \pm \beta \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \right] V(y) = 0 \quad (\text{G.1.5})$$

となる。ただし、複号は、 $\omega = \pm V_{Ax0} k_x$ と同順である。この式は、 $V(y) = 0$ でない限り成立しないので、 $\omega = \pm V_{Ax0} k_x$ とはならない。

(ii) $V(y) = 0$ のときは、

$$\left[\omega \beta y + k_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] U(y) = 0 \quad (\text{G.1.6})$$

$$\left[-\omega^2 + V_{Ax0}^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right] U(y) = 0 \quad (\text{G.1.7})$$

となる。このとき、 $U(y) \neq 0$ となるようなモードが存在する。これに関しては後に述べる。

G.2 磁場なしの場合

G.2.1 磁場なし赤道波の微分方程式

まずは、磁場なしの場合、すなわち一般的な赤道波について確認しておく。 $V_{Ax0} = 0$ のとき、(G.1.4) 式は、

$$\frac{d^2V(y)}{dy^2} + \left[\frac{\omega^2}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{\beta^2 y^2}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - \frac{k_x \beta}{\omega} \right] V(y) = 0 \quad (\text{G.2.1})$$

となる。少し式変形して、

$$\frac{d^2V(y)}{dy^2} + \frac{\beta^2}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} \left[\frac{\omega^2}{\beta^2} - \frac{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}}{\beta^2} k_x^2 - y^2 - \frac{k_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}}{\omega \beta} \right] V(y) = 0 \quad (\text{G.2.2})$$

とする。この式から、この微分方程式のふるまいは

$$\frac{\omega^2}{\beta^2} - \frac{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}}{\beta^2} k_x^2 - y^2 - \frac{k_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}}{\omega \beta} \quad (\text{G.2.3})$$

の符号で決まることが分かる。特に、

$$y_c(\omega, k_x) = \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{\beta^2} - \frac{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}}{\beta^2} k_x^2 - \frac{k_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}}{\omega \beta}} \quad (\text{G.2.4})$$

という ω と k_x に依存する南北座標 y_c よりも、赤道から離れているかどうかで式の性質が異なる。ここで、赤道（内部）変形半径

$$\lambda_{EQ} = \sqrt{\frac{NH}{\beta}} \quad (\text{G.2.5})$$

を用いて、南北座標を

$$y = \frac{\lambda_{EQ}}{\sqrt{(m\pi)}} \tilde{y} = \sqrt{\frac{\frac{NH}{(m\pi)}}{\beta}} \tilde{y}, \quad y_c(\omega, k_x) = \frac{\lambda_{EQ}}{\sqrt{(m\pi)}} \tilde{y}_c(\omega, k_x) = \sqrt{\frac{\frac{NH}{(m\pi)}}{\beta}} \tilde{y}_c(\omega, k_x) \quad (\text{G.2.6})$$

と無次元化すると、(G.2.2) 式は、

$$\frac{d^2V(\tilde{y})}{d\tilde{y}^2} + \left([\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - \tilde{y}^2 \right) V(\tilde{y}) = 0 \quad (\text{G.2.7})$$

となる。この微分方程式の無限遠で発散しない解は、 $[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2$ がある条件を満たすときのみ存在する。その条件を満たすとき、 $[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2$ を固有値と呼び、解 $V(\tilde{y})$ は固有関数と呼ばれる完全系をなす関数の足し合わせで表現できる。このとき、この微分方程式は、Weber の微分方程式と呼ばれ、その固有関数は放物柱関数である。

ここで、 $[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2$ をエネルギー、 \tilde{y}^2 をポテンシャルだと思うと、(G.2.7) 式は、調和振動子についての時間に依存しない Schrödinger 方程式と同じであることが分かる。調和振動子の場合は、

$\tilde{y} = 0$ でポテンシャルが最も低いため、粒子は $\tilde{y} = 0$ 付近で存在しやすいが、原点から離れるにつれ存在しにくくなる。また、エネルギーが大きいほど、粒子が存在しやすい領域は広範囲になる。これと同様のことが赤道付近の波にも起こっていることが予想される。すなわち、赤道付近では振幅が大きく、赤道から離れるにつれ振幅が小さくなるような解が存在するだろう。このような波を赤道にトラップされた波と呼ぶ。

このような解釈は、Schrödinger 方程式を知らなくても、微分方程式を眺めれば可能である。 \tilde{y} が定数と見なせるような狭い領域を考えよう。このとき、

$$C(\omega, k_x) = [\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - \tilde{y}^2 \approx \text{const.} \quad (\text{G.2.8})$$

となり、微分方程式は、

$$\frac{d^2 V(\tilde{y})}{d\tilde{y}^2} + C(\omega, k_x)V(\tilde{y}) = 0 \quad (\text{G.2.9})$$

となる。もし、 $C(\omega, k_x) = [\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - \tilde{y}^2 > 0$ となるような赤道から近い領域を考えていたのなら、解は

$$V(\tilde{y}) \approx C_1 \sin\left(\sqrt{C(\omega, k_x)}\tilde{y}\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{C(\omega, k_x)}\tilde{y}\right) \quad (\text{G.2.10})$$

というような振動解になることが予想される。ここで、 C_1, C_2 は定数である。このように $C(\omega, k_x) > 0$ となる \tilde{y} を波の伝播領域という。一方、 $C(\omega, k_x) = [\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - \tilde{y}^2 < 0$ となるような赤道から遠い領域を考えていたのなら、解は

$$V(\tilde{y}) \approx C_3 \exp\left(\sqrt{-C(\omega, k_x)}\tilde{y}\right) + C_4 \exp\left(-\sqrt{-C(\omega, k_x)}\tilde{y}\right) \quad (\text{G.2.11})$$

というような指数関数型の解になることが予想される。すなわち、物理的に意味のある解は、無限遠で振幅が 0 になる解である。ここで、 C_3, C_4 は定数である。このように $C(\omega, k_x) < 0$ となる \tilde{y} をエバネッセント（禁止）領域という。そして、この波の伝播領域とエバネッセント領域の境界が \tilde{y}_c である。

微分方程式の大雑把な性質はわかったが、まだ、無限遠で発散しないための $[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2$ の条件がわかっていない。この条件を満たす ω, k_x をもつ波が、物理的に意味のある波であり、その条件が分散関係に対応する。分散関係を得るために、この微分方程式をもう少し丁寧に調べる。

G.2.2 微分方程式の局所漸近解析

微分方程式の係数が定数でない場合、その係数が考える領域の途中で発散する可能性があり、注意が必要である。特に微分方程式 (G.2.7) は、 $\tilde{y} \rightarrow \infty$ で発散する。ただし、微分方程式の発散する点は、微分方程式の解を調べるのに利用することができる^{*79}。ここで、発散する点が原点になるよう

$$\tilde{\eta} = \frac{1}{\tilde{y}} \quad (\text{G.2.12})$$

^{*79} この節で用いる方法は、柴田 (2010)[58] で紹介されているのを参考にした。

と変数変換する。このとき、

$$\frac{d}{d\tilde{y}} = \frac{d\tilde{\eta}}{d\tilde{y}} \frac{d}{d\tilde{\eta}} = -\frac{1}{\tilde{y}^2} \frac{d}{d\tilde{\eta}} = -\tilde{\eta}^2 \frac{d}{d\tilde{\eta}} \quad (\text{G.2.13})$$

$$\frac{d^2}{d\tilde{y}^2} = \frac{d}{d\tilde{y}} \left(-\frac{1}{\tilde{y}^2} \frac{d}{d\tilde{\eta}} \right) = \frac{2}{\tilde{y}^3} \frac{d}{d\tilde{\eta}} + \frac{1}{\tilde{y}^4} \frac{d^2}{d\tilde{\eta}^2} = 2\tilde{\eta}^3 \frac{d}{d\tilde{\eta}} + \tilde{\eta}^4 \frac{d^2}{d\tilde{\eta}^2} \quad (\text{G.2.14})$$

より、微分方程式 (G.2.7) は、

$$\tilde{\eta}^4 \frac{d^2V(\tilde{\eta})}{d\tilde{\eta}^2} + 2\tilde{\eta}^3 \frac{dV(\tilde{\eta})}{d\tilde{\eta}} + \left([\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - \frac{1}{\tilde{\eta}^2} \right) V(\tilde{y}) = 0 \quad (\text{G.2.15})$$

となる。微分方程式の最高階の係数が 1 になるように整理すると、

$$\frac{d^2V(\tilde{\eta})}{d\tilde{\eta}^2} + \frac{2}{\tilde{\eta}} \frac{dV(\tilde{\eta})}{d\tilde{\eta}} + \left(\frac{[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2}{\tilde{\eta}^4} - \frac{1}{\tilde{\eta}^6} \right) V(\tilde{y}) = 0 \quad (\text{G.2.16})$$

となる。そして、 $\tilde{\eta} \rightarrow 0$ のとき、この微分方程式の係数は発散する。このような点を微分方程式の係数特異点という。さらに、1 階微分の係数に $\tilde{\eta}$ と 0 階微分の係数に $\tilde{\eta}^2$ をかけたものが正則かどうか調べるという動作を行う。この両者が正則の場合、係数特異点は発散しても比較的緩やかに無限大に近づくので、Frobenius 級数展開によって解を調べることができる。一方、今の場合のようにいずれか、もしくは両方が正則でない場合は、係数が比較的急激に無限大に近づくことを意味し、別の方針によって解を調べる。

さて、元の \tilde{y} の式に戻る。ここで、無限遠点での解を、べき級数よりも急激に無限大に近づくことを表すため、

$$V(\tilde{y}) = \Re[V_0 e^{Q(\tilde{y})}] \quad (\tilde{y} \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.2.17})$$

と仮定する。ここで、 V_0 は定数である。これを (G.2.7) 式に代入すると、

$$\left[\frac{d^2Q(\tilde{y})}{d\tilde{y}^2} + \left(\frac{dQ(\tilde{y})}{d\tilde{y}} \right)^2 \right] V_0 e^{Q(\tilde{y})} + \left([\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - \tilde{y}^2 \right) V_0 e^{Q(\tilde{y})} = 0 \quad (\text{G.2.18})$$

となり、 $V_0 e^{Q(\tilde{y})} \neq 0$ より、

$$\frac{d^2Q(\tilde{y})}{d\tilde{y}^2} + \left(\frac{dQ(\tilde{y})}{d\tilde{y}} \right)^2 + [\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - \tilde{y}^2 = 0 \quad (\text{G.2.19})$$

を得る。ここで、さらに

$$\left| \frac{d^2Q(\tilde{y})}{d\tilde{y}^2} \right| \ll \left(\frac{dQ(\tilde{y})}{d\tilde{y}} \right)^2 \quad (\tilde{y} \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.2.20})$$

を仮定する。この不等式は不確定特異点において、多くの場合成り立つ漸近関係である。この仮定を用いて $Q(\tilde{y})$ を求めた後、この仮定の妥当性を確かめる。この仮定が適切であれば、解の一意性より正しい $Q(\tilde{y})$ が求められたことになる。さて、仮定 (G.2.20) を $\tilde{y} \rightarrow \pm\infty$ における (G.2.19) 式に用いれば、

$$\left(\frac{dQ(\tilde{y})}{d\tilde{y}} \right)^2 - \tilde{y}^2 \approx 0 \quad (\tilde{y} \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.2.21})$$

となる。ゆえに、

$$\frac{dQ(\tilde{y})}{d\tilde{y}} \approx \pm \tilde{y} \quad (\tilde{y} \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.2.22})$$

となる。これを \tilde{y} で微分すれば、

$$\frac{d^2Q(\tilde{y})}{d\tilde{y}^2} \approx \pm 1 \quad (\tilde{y} \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.2.23})$$

となるので、仮定 (G.2.20) は成り立っている。(G.2.22) 式を積分すれば、

$$Q(\tilde{y}) \approx \pm \frac{1}{2}\tilde{y}^2 + C \quad (\tilde{y} \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.2.24})$$

となる。ここで、 C は定数である。ゆえに、

$$V(\tilde{y}) \approx \Re[V_0 e^{\pm \frac{1}{2}\tilde{y}^2 + C}] \quad (\tilde{y} \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.2.25})$$

を得るが、無限遠で $V(\tilde{y}) \rightarrow 0$ とすれば、

$$V(\tilde{y}) \approx \Re[V_0 e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2}] \quad (\tilde{y} \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.2.26})$$

となる。

G.2.3 微分方程式のべき級数解と固有関数

次に、赤道付近の解の形を調べる。解の無限遠での振る舞いがわかったので、それを考慮して、解を

$$V(\tilde{y}) = V_0 H(\tilde{y}) e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2} \quad (\text{G.2.27})$$

と仮定する。ここで、 V_0 は定数で、 $H(\tilde{y})$ は、

$$H(\tilde{y}) \ll e^{\frac{1}{2}\tilde{y}^2} \quad (\tilde{y} \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.2.28})$$

を満たさなければならない。この条件を満たさない場合、無限遠で発散する解となってしまい、物理的には興味のないものになってしまう。一方、(G.2.28) 式を満たす場合は、その条件が分散関係に対応する。

さて、(G.2.27) 式を (G.2.7) 式に代入し、 $e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2} \neq 0$ を用いると、

$$\frac{d^2H(\tilde{y})}{d\tilde{y}^2} - 2\tilde{y} \frac{dH(\tilde{y})}{d\tilde{y}} + \left([\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - 1\right)H(\tilde{y}) = 0 \quad (\text{G.2.29})$$

となる。これは Hermite の微分方程式であり、 $[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2$ がある条件を満たすとき、無限遠で発散しない解が存在する。その固有関数は Hermite 多項式と呼ばれる。

この微分方程式の係数は、無限遠を除けば正則である。今、赤道 ($\tilde{y} = 0$) 付近の解に興味があり、その周辺では正則なので、 $H(\tilde{y})$ を原点まわりでべき級数展開できる。

$$H(\tilde{y}) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \tilde{y}^i \quad (\text{G.2.30})$$

ここで、 $a_i (i = 0, 1, 2, \dots)$ はすべてが 0 にはならないとする。これを、(G.2.47) 式に代入すると、

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i i(i-1)\tilde{y}^{i-2} - 2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i i\tilde{y}^i + ([\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - 1) \sum_{i=0}^{\infty} a_i \tilde{y}^i = 0 \quad (\text{G.2.31})$$

となる。左辺第一項の \tilde{y}^{-2} と \tilde{y}^{-1} の項の係数は 0 となり、整理すると、

$$\sum_{i=0}^{\infty} [a_{i+2}(i+2)(i+1) - (2i - [\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 + 1)a_i] \tilde{y}^i = 0 \quad (\text{G.2.32})$$

を得る。 \tilde{y} は任意なので、この式が成り立つには、すべての $i = 0, 1, 2, \dots$ に対して、

$$a_{i+2} = \frac{2i - [\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 + 1}{(i+2)(i+1)} a_i \quad (\text{G.2.33})$$

であれば良い。この漸化式は、 a_0 を与えると、 $a_{\text{偶数}}$ が小さい方から順々に決まり、 a_1 を与えると、 $a_{\text{奇数}}$ が小さい方から順々に決まる、ということを表している。ゆえに、

$$H(\tilde{y}) = a_0 + a_1 \tilde{y} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2i - [\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 + 1}{(i+2)(i+1)} a_i \tilde{y}^{i+2} \quad (\text{G.2.34})$$

を得る。

ここで、この $H(\tilde{y})$ は、 \tilde{y} が大きいところで、(G.2.28) 式を満たしてなければならない。 \tilde{y} が大きいところでは、 \tilde{y} のべき数が大きい項が主要項になり、それは $i \rightarrow \infty$ に対応する。 $i \rightarrow \infty$ のときの係数の比は

$$\frac{a_{i+2}}{a_i} = \frac{2}{i} \quad (i \rightarrow \infty) \quad (\text{G.2.35})$$

となる。ところで、 e^{cy^2} (c は定数) を原点まわりで Taylor 展開すると、

$$e^{cy^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (cy^2)^n = \sum_{n=0, n \text{ は偶数}}^{\infty} \frac{\sqrt{c}^n}{(n/2)!} y^n \quad (\text{G.2.36})$$

であり、これを、

$$e^{cy^2} = \sum_{n=0, n \text{ は偶数}}^{\infty} a_n y^n \quad (\text{G.2.37})$$

とすると、係数の比は

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{\frac{\sqrt{c}^{n+2}}{(n/2+1)!}}{\frac{\sqrt{c}^n}{(n/2)!}} = \frac{c}{n/2 + 1} \quad (\text{G.2.38})$$

となる。 $n \rightarrow \infty$ のときは、

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{2c}{n} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\text{G.2.39})$$

となる。この係数の比の振る舞いは、 $c = 1$ のときに、(G.2.35) 式と一致する。 $\tilde{y} \rightarrow \infty$ では、 \tilde{y} のべき数が大きい項が主要項になることと、係数の比の振る舞いが同じことを考えると、

$$H(\tilde{y}) \approx e^{\tilde{y}^2} \quad (\tilde{y} \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.2.40})$$

であることがわかる。しかし、これは (G.2.28) 式を満たしていないことになる。

$H(\tilde{y})$ が (G.2.40) 式のような振る舞いをしないようにする方法が一つだけある。それは、級数が有限個の項で打ち切られれば良い。すなわち、ある $i_*(i_* = 0, 1, 2 \dots)$ で

$$2i_* - [\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 + 1 = 0 \quad (\text{G.2.41})$$

となれば、

$$a_{i_*+2} = a_{i_*+4} = \dots = 0 \quad (\text{G.2.42})$$

となるので、

$$\begin{aligned} (i_* \text{が偶数}) \quad & a_{\text{奇数}} = 0 \\ (i_* \text{が奇数}) \quad & a_{\text{偶数}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{G.2.43})$$

とすると、 $i \rightarrow \infty$ とはならず、条件 (G.2.28) 式が満たされる。(G.2.41) 式が無限遠で発散しないための $[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2$ の条件である。そして、このように求められた $H(\tilde{y})$ を Hermite 多項式という。

ゆえに、磁場なし赤道波の微分方程式の固有関数は、

$$\begin{aligned} (i_* \text{が偶数}) \quad V(\tilde{y}) &= V_0 e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2} \left(a_0 + \sum_{i=0}^{i_*/2} \frac{4i - (2i_* + 1) + 1}{(2i+2)(2i+1)} a_{2i} \tilde{y}^{2i+2} \right) \\ (i_* \text{が奇数}) \quad V(\tilde{y}) &= V_0 e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2} \left(a_1 \tilde{y} + \sum_{i=0}^{(i_*-1)/2} \frac{4i - (2i_* + 1) + 3}{(2i+3)(2i+2)} a_{2i+1} \tilde{y}^{2i+3} \right) \end{aligned} \quad (\text{G.2.44})$$

となる。ここで、 a_0 と a_1 、 V_0 は必要ならば規格化されるべき定数である。この関数を放物柱関数という。また、 i_* が偶数のとき固有関数は偶関数、 i_* が奇数のとき固有関数は奇関数となっており、それぞれ赤道対称モード、赤道反対称モードと呼ぶことにする。

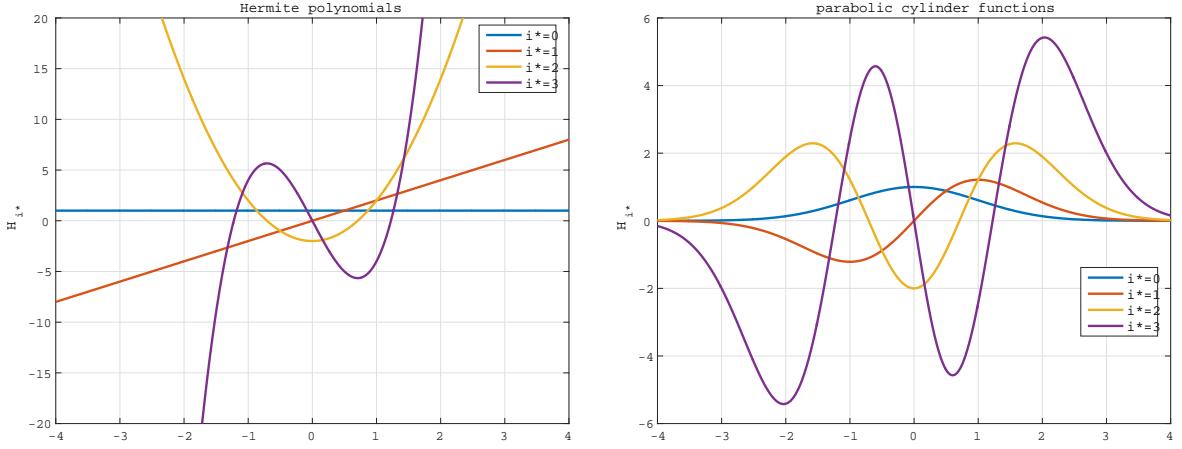


Fig.169 (左図) $i_* = 0, 1, 2, 3$ の Hermite 多項式 $H_{i_*}(\tilde{y})$ 。 $a_0 = 1$ または $a_1 = 1$ としている。(右図) Hermite 多項式 $H_{i_*}(\tilde{y})$ に $e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2}$ をかけたもの（放物柱関数）。無限遠で 0 になっていることが分かる。

Hermite の微分方程式 (G.2.47) の解は、有限個の級数和でなければ、無限遠で発散する、ということは前節で用いた局所漸近解析の方法からも知ることができる。 $\tilde{\eta} = \frac{1}{\tilde{y}}$ という変換により、(G.2.47) 式は

$$\frac{d^2 H(\tilde{\eta})}{d\tilde{\eta}^2} + \frac{2}{\tilde{\eta}} \left(1 + \frac{1}{\tilde{\eta}^2}\right) \frac{dH(\tilde{\eta})}{d\tilde{\eta}} + \frac{[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - 1}{\tilde{\eta}^4} H(\tilde{\eta}) = 0 \quad (\text{G.2.45})$$

となるので、 $\tilde{\eta} = 0$ 、すなわち、 $\tilde{y} = \pm\infty$ は不確定特異点である。無限遠での解を

$$H(\tilde{y}) = e^{Q(\tilde{y})} \quad (\tilde{y} \rightarrow \infty) \quad (\text{G.2.46})$$

と仮定すると、(G.2.47) 式は、

$$\frac{d^2 Q(\tilde{y})}{d\tilde{y}^2} + \left(\frac{dQ(\tilde{y})}{d\tilde{y}}\right)^2 - 2\tilde{y} \frac{dQ(\tilde{y})}{d\tilde{y}} + \left([\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - 1\right) H(\tilde{y}) = 0 \quad (\tilde{y} \rightarrow \infty) \quad (\text{G.2.47})$$

となる。さらに、不確定特異点でよく成立する仮定 (G.2.20) を用いると、

$$\frac{dQ(\tilde{y})}{d\tilde{y}} = \tilde{y} \pm \sqrt{\tilde{y}^2 - [\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 + 1} = \tilde{y} \pm \operatorname{sgn}(\tilde{y}) \tilde{y} \sqrt{1 - \frac{[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - 1}{\tilde{y}^2}} \quad (\tilde{y} \rightarrow \infty) \quad (\text{G.2.48})$$

となり、これは仮定 (G.2.20) を満たす。ここで、 $\pm \operatorname{sgn}(\tilde{y}) = 1$ のときは、

$$\frac{dQ(\tilde{y})}{d\tilde{y}} \approx 2\tilde{y} \quad (\tilde{y} \rightarrow \infty) \quad (\text{G.2.49})$$

となる。これを積分すると、

$$Q(\tilde{y}) \approx \tilde{y}^2 + \text{const.} \quad (\tilde{y} \rightarrow \infty) \quad (\text{G.2.50})$$

すなわち、

$$H(\tilde{y}) \approx e^{\tilde{y}^2 + \text{const.}} \quad (\tilde{y} \rightarrow \infty) \quad (\text{G.2.51})$$

となり、(G.2.28) 式を満たさないので不適である。一方、 $\pm \text{sgn}(\tilde{y}) = -1$ のときは、

$$\frac{dQ(\tilde{y})}{d\tilde{y}} \approx \frac{[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - 1}{2\tilde{y}} \quad (\tilde{y} \rightarrow \infty) \quad (\text{G.2.52})$$

となり、積分すると、

$$Q(\tilde{y}) \approx \frac{[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - 1}{2} \ln |\tilde{y}| + \text{const.} \quad (\tilde{y} \rightarrow \infty) \quad (\text{G.2.53})$$

を得る。このとき、

$$H(\tilde{y}) \approx e^{\frac{[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - 1}{2} \ln |\tilde{y}|} = |\tilde{y}|^{\frac{[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - 1}{2}} \quad (\tilde{y} \rightarrow \infty) \quad (\text{G.2.54})$$

となり、この場合は、(G.2.28) 式を満たし、 $V(\tilde{y})$ は無限遠で収束する。そして、このときの Hermite の微分方程式の解のうち、無限遠での主要項は $\tilde{y}^{\frac{[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - 1}{2}}$ の項である。すなわち、 $V(\tilde{y})$ が無限遠で発散しないような $H(\tilde{y})$ は有限個の級数和になることを意味している。この解析では知りえないが、

$$[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 = 2i_* + 1 \quad (\text{G.2.55})$$

のときに $V(\tilde{y})$ が無限遠で収束するので、 $H(\tilde{y})$ の主要項は \tilde{y}^{i_*} となる。これはベキ級数展開の結果 (G.2.44) と一致する。

G.2.4 分散関係

分散関係は (G.2.41) 式、すなわち、

$$2i_* + 1 = \frac{\lambda_{EQ}^2}{(m\pi)} \left[\frac{\omega^2}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{\beta k_x}{\omega} \right] \quad (\text{G.2.56})$$

である。この式は ω の 3 次式であり、ある k_x と i_* に対し、最大 3 つのモードが存在する^{*80}。

分散関係は $i_* = 0$ 、 $k_x = 0$ のときは

$$\omega = \pm \frac{\beta \lambda_{EQ}}{\sqrt{m\pi}} = \pm \sqrt{\beta \frac{NH}{(m\pi)}} \quad (\text{G.2.57})$$

という解を持つ。この周波数を用いて無次元化すると、磁場なしの赤道波の場合は、成層や回転の強さを表す無次元パラメータが不要になることが知られている。周波数と波数を

$$\omega = \beta \lambda_{EQ} \omega_* = \sqrt{\beta NH} \omega_* \quad (\text{G.2.58})$$

$$k_x = \frac{k_{x*}}{\lambda_{EQ}} = \frac{k_{x*}}{\sqrt{\frac{NH}{\beta}}} \quad (\text{G.2.59})$$

^{*80} $k_x = 0$ のときは分散関係の右辺第三項が 0 となるので、 ω の 2 次式となり、2 つのモードが存在する。

と無次元化すると、

$$2i_* + 1 = \omega_*^2(m\pi) - \frac{k_{x*}^2}{(m\pi)} - \frac{k_{x*}}{\omega_*(m\pi)} \quad (\text{G.2.60})$$

となる。さらに、 ω_* と k_{x*} に π を含めると、

$$2i_* + 1 = (\omega_*\sqrt{\pi})^2 m - \frac{(k_{x*}/\sqrt{\pi})^2}{m} - \frac{(k_{x*}/\sqrt{\pi})}{(\omega_*\sqrt{\pi})m} \quad (\text{G.2.61})$$

となって、 $m = 1$ のモードは浅水波の場合の分散関係に一致する。式変形すれば、

$$(\omega_*\sqrt{\pi})^3 m^2 - \left[\left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 + (2i_* + 1)m \right] (\omega_*\sqrt{\pi}) - \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) = 0 \quad (\text{G.2.62})$$

を得る。分散関係のグラフは Fig.170 に示す。

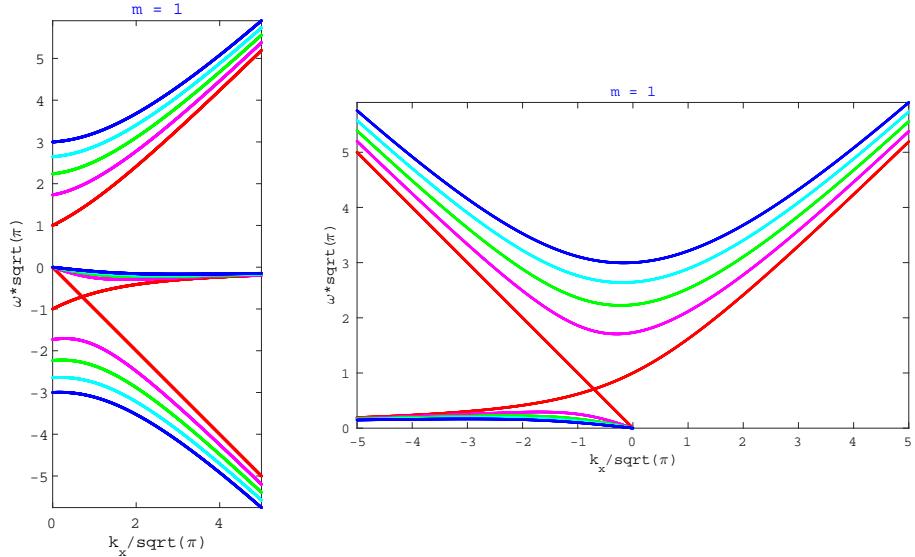


Fig.170 磁場なし赤道波の分散関係。縦軸が $\omega_*\sqrt{\pi}$ 、横軸が $k_{x*}/\sqrt{\pi}$ であり、赤から青にかけて $i_* = 0, 1, 2, 3, 4$ としている。鉛直波数 $m = 1$ の場合（浅水波と同じ分散関係）。（左図） $k_{x*} > 0$ に限ったグラフ。（右図） $\omega_* > 0$ に限ったグラフ。 $i_* = 0$ （赤の線）のとき、分散関係が交差する。

Fig.170 を見ると、 $i_* = 1, 2, 3, 4 \dots$ のときは、同じようなグラフの形をしていることが分かる。そして、それぞれ、周波数が大きいモードと小さいモードに分離している。一方、 $i_* = 0$ （赤の線）のときは、分散関係のグラフが交差している。そのため、これらは別に考える必要がある。

まず、 $i_* = 1, 2, 3, 4 \dots$ のとき、分散関係 (G.2.62) より、

$$(\omega_*\sqrt{\pi}) \left\{ (\omega_*\sqrt{\pi})^2 m^2 - \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 - (2i_* + 1)m \right\} - \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) = 0 \quad (\text{G.2.63})$$

となるが、 ω_* が大きいとき、

$$(\omega_{*,\text{fast}}\sqrt{\pi})^2 m^2 \approx \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 + (2i_* + 1)m \quad (\text{G.2.64})$$

となり、一方、 ω_* が小さいときは、 $(\omega_*\sqrt{\pi})^2 m^2 \ll \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + (2i_* + 1)m$ として、

$$(\omega_{*,\text{slow}}\sqrt{\pi}) = -\frac{\left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)}{\left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + (2i_* + 1)m} \quad (\text{G.2.65})$$

となる。次元のある形で書くと、

$$\omega_{\text{fast}}^2 = \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 + (2i_* + 1) \frac{(\beta\lambda_{EQ})^2}{(m\pi)} \quad (\text{G.2.66})$$

$$\omega_{\text{slow}} = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + (2i_* + 1)(m\pi)^2 \lambda_{EQ}^{-2}} \quad (\text{G.2.67})$$

となる。 ω_{fast} モードは、赤道における慣性内部重力波、 ω_{slow} は赤道における Rossby 波である。

G.2.5 $i_* = 0$ の場合（混合 Rossby 重力波）

次に、 $i_* = 0$ の場合を考える。 $i_* = 0$ のとき、分散関係 (G.2.62) より、

$$(\omega_*\sqrt{\pi})^3 m^2 - \left[\left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 + m \right] (\omega_*\sqrt{\pi}) - \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) = 0 \quad (\text{G.2.68})$$

となるが、 $m = 1$ の場合の Fig.170 で $(\omega_*\sqrt{\pi}) = -\left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)$ の解があることが予想されるように、

$$\left[(\omega_*\sqrt{\pi})m + \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) \right] \left[(\omega_*\sqrt{\pi})^2 m - \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) (\omega_*\sqrt{\pi}) - 1 \right] = 0 \quad (\text{G.2.69})$$

と因数分解することができる。よって、解は、

$$\begin{aligned} (\omega_*\sqrt{\pi}) &= -\frac{1}{m} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) \\ (\omega_*\sqrt{\pi}) &= \frac{1}{2m} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4m^2} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 + \frac{1}{m}} \end{aligned} \quad (\text{G.2.70})$$

の 3 つがある。次元のある形になおすと、

$$\begin{aligned} \omega &= -\frac{NH}{(m\pi)} k_x \\ \omega &= \frac{1}{2} \frac{NH}{(m\pi)} k_x \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{NH}{(m\pi)} k_x \right)^2 + \frac{(\beta\lambda_{EQ})^2}{m\pi}} \end{aligned} \quad (\text{G.2.71})$$

となる。

まず、 $\omega = -\frac{NH}{(m\pi)} k_x$ の解について考える。この解について考えるには、 $V(y)$ と $U(y)$ の連立方程式まで戻らなければならない。(F.5.32)、(F.5.33) 式で、 $f + \beta y \approx \beta y$ 、 $V_{Ax}(y) = 0$ より、

$$\left[-\omega^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d^2}{dy^2} \right] V(y) = \left[i\omega\beta y + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] U(y) \quad (\text{G.2.72})$$

$$\left[-\omega^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right] U(y) = \left[-i\omega\beta y + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] V(y) \quad (\text{G.2.73})$$

に、 $\omega = -\frac{NH}{(m\pi)}k_x$ を代入すると、

$$\frac{NH}{(m\pi)} \left[-k_x^2 - \frac{d^2}{dy^2} \right] V(y) = \left[-ik_x \beta y + ik_x \frac{NH}{(m\pi)} \frac{d}{dy} \right] U(y) \quad (\text{G.2.74})$$

$$0 = \left[\beta y + \frac{NH}{(m\pi)} \frac{d}{dy} \right] V(y) \quad (\text{G.2.75})$$

となる。さらに、 $i_* = 0$ のとき、(G.2.44) 式より、 $a_0 = 1$ とすれば、 $V(y) = V_0 \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda_{EQ}^2}(m\pi)\right)$ なので、代入すると、(G.2.75) 式は $0 = 0$ となり、(G.2.74) 式は、

$$\frac{dU(y)}{dy} - \frac{y}{\lambda_{EQ}^2(m\pi)} U(y) = \frac{\left[-k_x^2 - \frac{(m\pi)}{\lambda_{EQ}^2} - \frac{(m\pi)^2}{\lambda_{EQ}^4} y^2 \right] V_0 \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda_{EQ}^2}(m\pi)\right)}{ik_x} \quad (\text{G.2.76})$$

となる。この非同次の微分方程式を解けば $U(y)$ が得られるが、無限遠では、この式は、

$$\frac{dU(y)}{dy} - \frac{y}{\lambda_{EQ}^2(m\pi)} U(y) \approx 0 \quad (y \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.2.77})$$

となり、

$$U(y) \sim \exp\left(\frac{y^2}{2\lambda_{EQ}^2(m\pi)}\right) \rightarrow \infty \quad (y \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.2.78})$$

となって、東西流が発散してしまうので、 $\omega = -\frac{NH}{(m\pi)}k_x$ の解は物理的に意味のない解であることがわかる。

次に、 $\omega = \frac{1}{2}\frac{NH}{(m\pi)}k_x \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{NH}{(m\pi)}k_x\right)^2 + \frac{(\beta\lambda_{EQ})^2}{m\pi}}$ の解について考える。以下では、混乱しないように、 k_x は正負を許し、 $\omega > 0$ に限る。すなわち、

$$\omega = \frac{1}{2}\frac{NH}{(m\pi)}k_x + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{NH}{(m\pi)}k_x\right)^2 + \frac{(\beta\lambda_{EQ})^2}{m\pi}} \quad (\text{G.2.79})$$

とする。 k_x が小さいときは、先述したように、

$$\omega \approx \frac{\beta\lambda_{EQ}}{\sqrt{(m\pi)}} \quad (\text{G.2.80})$$

という周波数になる。一方、 k_x が大きいときは、 k_x の符号によって周波数が大きく異なる。 k_x が大きく、 $k_x > 0$ (位相速度が東向き) のときは、

$$\omega \simeq \frac{1}{2}\frac{NH}{(m\pi)}(k_x + |k_x|) + \frac{\beta|k_x|}{k_x^2} \approx \frac{NH}{(m\pi)}k_x \quad (\text{G.2.81})$$

となって、内部重力波的になる。また、 k_x が大きく、 $k_x < 0$ (位相速度が西向き) のときは、

$$\omega \simeq \frac{1}{2}\frac{NH}{(m\pi)}(k_x + |k_x|) + \frac{\beta|k_x|}{k_x^2} \approx -\frac{\beta k_x}{k_x^2} \quad (\text{G.2.82})$$

となって、Rossby 波的になる。このように $i_* = 0$ のときの分散関係は、Fig.170 の交点付近で内部重力波と Rossby 波がつなぎ変わる。このつなぎ変わるモードは混合 Rossby 重力波（柳井・丸山波）と呼ばれている。

G.2.6 $V(y) = 0$ の場合（赤道 Kelvin 波）

分散関係 (G.2.62) は $V(y)$ の式 (G.2.7) から得られたものであり、 $V(y) = 0$ となる解は含まれていない。その場合というのは、(G.1.6)、(G.1.7) 式で $V_{Ax0} = 0$ としたものより、

$$\left[\omega\beta y + k_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] U(y) = 0 \quad (\text{G.2.83})$$

$$\left[-\omega^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right] U(y) = 0 \quad (\text{G.2.84})$$

を満たす。この場合のモードの周波数は、(G.2.84) 式から $U(y) \neq 0$ より、

$$\omega = \pm \frac{NH}{(m\pi)} k_x \quad (\text{G.2.85})$$

となる。これを (G.2.83) 式に代入すると、

$$\left[\pm\beta y + \frac{NH}{(m\pi)} \frac{d}{dy} \right] U(y) = 0 \quad (\text{G.2.86})$$

となる。ここで、複号は (G.2.85) 式と同順である。この式は $U(y)$ についての微分方程式になっており、これを解くと、

$$U(y) = U_0 \exp\left(\mp \frac{y^2}{2\lambda_{EQ}^2} (m\pi)\right) \quad (\text{G.2.87})$$

を得る。ここで、 U_0 は定数である。ここで、物理的に意味のある解は、無限遠で発散しない

$$\omega = \frac{NH}{(m\pi)} k_x \quad (\text{G.2.88})$$

$$U(y) = U_0 \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda_{EQ}^2} (m\pi)\right) \quad (\text{G.2.89})$$

である。このモードは赤道 Kelvin 波と呼ばれる^{*81}。 $\omega > 0$ に限ると、 $k_x > 0$ でなければならず、赤道 kelvin 波は東向きに伝播する。

赤道 Kelvin 波は $V(y) = 0$ のモードであるので、運動方程式の水平成分は、(F.2.30)、(F.2.31) 式で、 $f + \beta y \approx \beta y$ 、 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ としたものより、

$$\beta y u_x = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (\text{G.2.92})$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{G.2.93})$$

^{*81} 分散関係 (G.2.62) で $i_* = -1$ としたものは、

$$\left[(\omega_* \sqrt{\pi}) m - \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) \right] \left[(\omega_* \sqrt{\pi})^2 m + \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) (\omega_* \sqrt{\pi}) + 1 \right] = 0 \quad (\text{G.2.90})$$

と因数分解できるので、赤道 Kelvin 波

$$(\omega_* \sqrt{\pi}) = \frac{1}{m} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) \quad (\text{G.2.91})$$

は、 $i_* = -1$ の場合のモードだと言われることがよくある。これは便宜的なものであることに注意。

というつり合いの下で伝播している。 $(G.2.93)$ 式を見ると、赤道 Kelvin 波が内部重力波の周波数に似た周波数なのは、東西方向の流れは圧力勾配によって加速されているからだということがわかる。また、 $(G.2.93)$ 式から、南北流がないのは、南北方向にコリオリ力と圧力勾配がつり合っているためであり、このつり合いが達成されるためには、波が西ではなく東向きに伝播しなければならない。

以下に、混合 Rossby 重力波と赤道 Kelvin 波を加えた分散関係のグラフを示す。

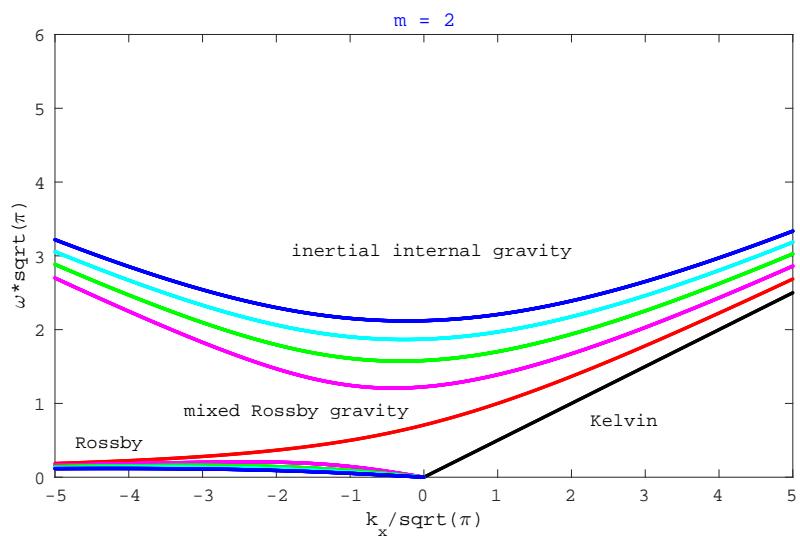
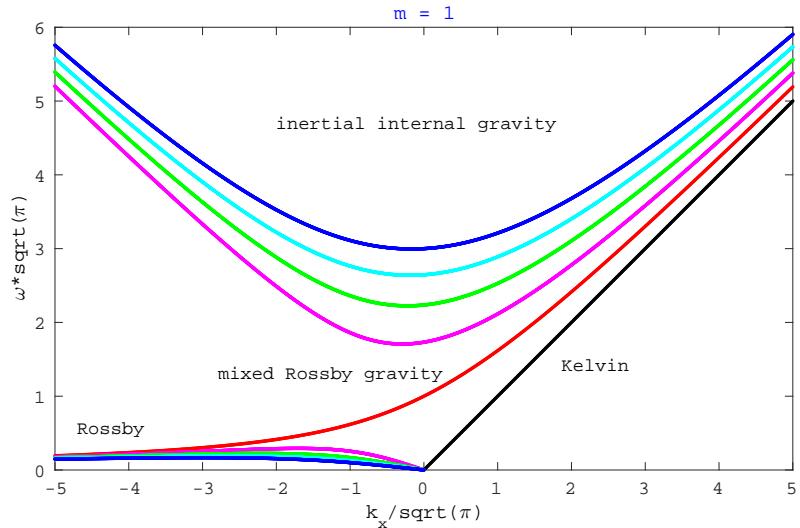


Fig.171 物理的に意味のある解のみを図示した磁場なし赤道波の分散関係。縦軸が $\omega_* \sqrt{\pi}$ 、横軸が $k_{x*} / \sqrt{\pi}$ であり、赤から青にかけて $i_* = 0, 1, 2, 3, 4$ としている。(上図) 鉛直波数 $m = 1$ の場合(浅水波と同じ分散関係)。(下図) $m = 2$ の場合。

G.2.7 赤道波の安定性

分散関係 (G.2.56) の周波数 ω は実数であるかどうかは自明ではない。周波数 ω が虚部を持ちうるかを調べるために、

$$\omega = \omega_R + i\omega_I \quad (\text{G.2.94})$$

とする。ここで、 ω_R と ω_I は実数である。このとき、分散関係 (G.2.56) は

$$2i_* + 1 = \frac{\lambda_{EQ}^2}{(m\pi)} \left[\frac{\omega_R^2 - \omega_I^2 + 2i\omega_R\omega_I}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{\beta k_x}{\omega_R^2 + \omega_I^2} (\omega_R - i\omega_I) \right] \quad (\text{G.2.95})$$

となる。この式を実部と虚部に分けると、

$$(実部) \quad 2i_* + 1 = \frac{\lambda_{EQ}^2}{(m\pi)} \left[\frac{\omega_R^2 - \omega_I^2}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{\beta k_x}{\omega_R^2 + \omega_I^2} \omega_R \right] \quad (\text{G.2.96})$$

$$(虚部) \quad 0 = \omega_I \left[\frac{2\omega_R}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} + \frac{\beta k_x}{\omega_R^2 + \omega_I^2} \right] \quad (\text{G.2.97})$$

となる。もし、 $\omega_I = 0$ であれば、実部の式より、

$$2i_* + 1 = \frac{\lambda_{EQ}^2}{(m\pi)} \left[\frac{\omega_R^2}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{\beta k_x}{\omega_R} \right] \quad (\text{G.2.98})$$

となって、元の分散関係 (G.2.56) に戻る。一方、 $\omega_I \neq 0$ のときは、虚部の式より、

$$\omega_I^2 = -\omega_R^2 - k_x \beta \frac{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}}{2\omega_R} > 0 \quad (\text{G.2.99})$$

となる。ここで、最後の不等号は ω_I が実数である条件である。 $\omega_R > 0$ に限るとすると、この不等式を満たすには、 $k_x < 0$ でなければならない。これを実部の式に代入すると、

$$2i_* + 1 = \frac{\lambda_{EQ}^2}{(m\pi)} \left[\frac{4\omega_R^2}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 + \frac{k_x \beta}{2\omega_R} \right] \quad (\text{G.2.100})$$

を得る。元の分散関係と同様な無次元化をすると、

$$8(\omega_{R*}\sqrt{\pi})^3 m^2 - 2 \left[\left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 + (2i_* + 1)m \right] (\omega_{R*}\sqrt{\pi}) + \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) = 0 \quad (\text{G.2.101})$$

となる。ゆえに、 $\omega_I \neq 0$ となるためには、この式の解となる ω_{R*} が、(G.2.99) 式を無次元化した

$$(\omega_{R*}\sqrt{\pi})^2 m^2 < -\frac{1}{2} \frac{(k_{x*}/\sqrt{\pi})}{(\omega_{R*}\sqrt{\pi})} \quad (\text{G.2.102})$$

を満たせば良い。

Fig.172 では、そのような解が存在するかを示している。このグラフから、 $\omega_I \neq 0$ となる解は存在しないことがわかる。ゆえに、 $\omega_I = 0$ 。

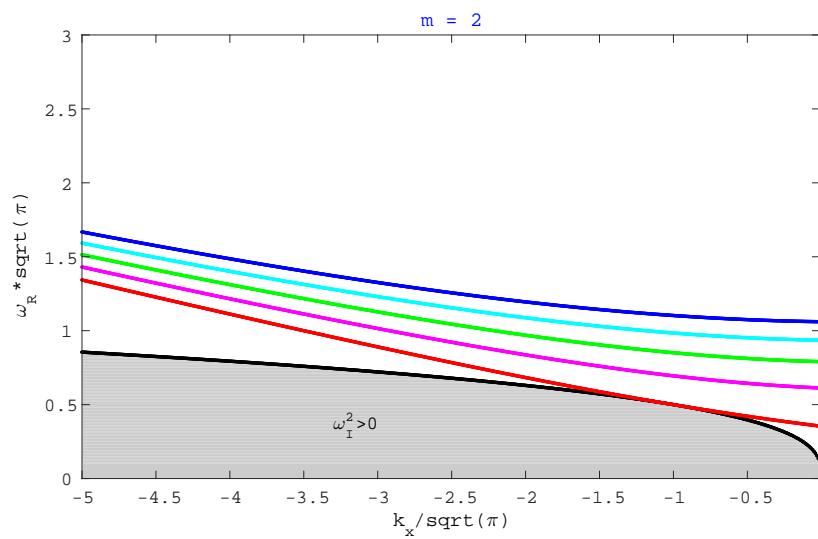
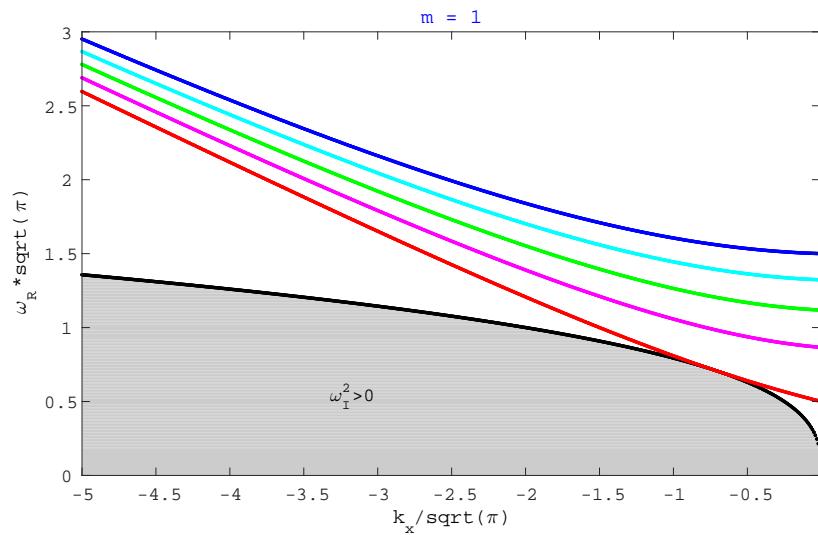


Fig.172 色つきの曲線が (G.2.101) 式の解。縦軸が $\omega_* \sqrt{\pi}$ 、横軸が $k_{x*} / \sqrt{\pi}$ であり、赤から青にかけて $i_* = 0, 1, 2, 3, 4$ としている。灰色の領域が、 ω_I が実数である条件 (G.2.101) を満たすところ。(上図) 鉛直波数 $m = 1$ の場合。(下図) $m = 2$ の場合。

G.2.8 変分法による分散関係の導出

微分方程式 (G.2.7) に戻る。

$$\frac{d^2V(\tilde{y})}{d\tilde{y}^2} + ([\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 - \tilde{y}^2)V(\tilde{y}) = 0 \quad (\text{G.2.103})$$

前節の結果より、周波数 ω は実数であるとする。すなわち、 $[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2$ も実数である。 $V(\tilde{y})$ の複素共役 $V^*(\tilde{y})$ をかけて、 \tilde{y} 方向に $-\infty$ から ∞ まで積分すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2V(\tilde{y})}{d\tilde{y}^2} V^*(\tilde{y}) d\tilde{y} + [\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 \int_{-\infty}^{\infty} |V(\tilde{y})|^2 d\tilde{y} - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^2 |V(\tilde{y})|^2 d\tilde{y} = 0 \quad (\text{G.2.104})$$

となる。ここで、 $|V(\tilde{y})|^2 = V(\tilde{y})V^*(\tilde{y})$ である。さらに、境界条件

$$V(\tilde{y}) = V^*(\tilde{y}) = 0 \quad \text{at } \tilde{y} = \pm\infty \quad (\text{G.2.105})$$

を用いれば、部分積分により、

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dV(\tilde{y})}{d\tilde{y}} \right|^2 d\tilde{y} + [\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 \int_{-\infty}^{\infty} |V(\tilde{y})|^2 d\tilde{y} - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^2 |V(\tilde{y})|^2 d\tilde{y} = 0 \quad (\text{G.2.106})$$

ゆえに、

$$[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dV(\tilde{y})}{d\tilde{y}} \right|^2 d\tilde{y} + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^2 |V(\tilde{y})|^2 d\tilde{y}}{\int_{-\infty}^{\infty} |V(\tilde{y})|^2 d\tilde{y}} \quad (\text{G.2.107})$$

を得る。これを満たす $[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2$ が、 $V(\tilde{y})$ が無限遠で発散しないための条件である。ただし、普通、 $V(\tilde{y})$ の正しい形は、問題を解く段階ではわからない。

$V(\tilde{y})$ の正しい形はわからなくとも、 $[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2$ を精度よく計算する方法がある。それが Rayleigh-Ritz の変分原理である。この方法は、 $V(\tilde{y})$ の近似として、境界条件を満たす $V'(\tilde{y})$ を (G.2.107) 式に代入すると、

$$[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dV'(\tilde{y})}{d\tilde{y}} \right|^2 d\tilde{y} + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^2 |V'(\tilde{y})|^2 d\tilde{y}}{\int_{-\infty}^{\infty} |V'(\tilde{y})|^2 d\tilde{y}} \quad (\text{G.2.108})$$

となることを利用する。等号が成り立つのは、 $V(\tilde{y}) = V'(\tilde{y})$ のときのみである。そして、 $V'(\tilde{y})$ のことを試行関数という。今、試行関数を N 個の完全系の関数の組 $V'_n(\tilde{y})$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$) の足し合わせとして、

$$V'(\tilde{y}) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n V'_n(\tilde{y}) \quad (\text{G.2.109})$$

とすることにしよう。ここで、 c_n を変分パラメータという。この試行関数を用いて計算した $[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2$ の近似値

$$[\tilde{y}'_c]^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dV'(\tilde{y})}{d\tilde{y}} \right|^2 d\tilde{y} + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^2 |V'(\tilde{y})|^2 d\tilde{y}}{\int_{-\infty}^{\infty} |V'(\tilde{y})|^2 d\tilde{y}} \quad (\text{G.2.110})$$

が最小になるような c_n の組み合わせのとき、この近似値は、今用いている試行関数に対する最も $[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2$ に近い値になる。近似値 $[\tilde{y}'_c]^2$ が最小になるのは、 N 本の連立方程式

$$\frac{\partial [\tilde{y}'_c]^2}{\partial c_n^*} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (\text{G.2.111})$$

が満たされるときである。 c_n が自明でない解となるには、連立方程式 (G.2.111) の係数行列の行列式が 0 でなければならない。この行列式は $[\tilde{y}'_c]^2$ の N 次式であり、小さい方から N 個の固有値が求められる。また、 N が大きいほど精度よく $[\tilde{y}'_c]^2$ が求まる。ここで注意すべきことは、 $V(\tilde{y})$ は、 $[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2$ ほどは精度よく求められない、ということである。

ここでは、試行関数を

$$V'(\tilde{y}) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n H_n(\tilde{y}) e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2} \quad (\text{G.2.112})$$

$$V'^*(\tilde{y}) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n^* H_n(\tilde{y}) e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2} \quad (\text{G.2.113})$$

としよう。ここで、 $H_n(\tilde{y})$ は n 次の Hermite 多項式である。この解は、微分方程式 (G.2.7) の固有関数であったが、そのことは忘れてほしい。この試行関数は、微分方程式の無限遠でのふるまい (G.2.26) 式

$$V(\tilde{y}) \approx \Re[V_0 e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2}] \quad (\tilde{y} \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.2.114})$$

を満たし、直交性^{*82}

$$\int_{-\infty}^{\infty} (H_n(\tilde{y}) e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2})(H_m(\tilde{y}) e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2}) d\tilde{y} = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\tilde{y}) H_m(\tilde{y}) e^{-\tilde{y}^2} d\tilde{y} = \delta_{nm} 2^n \sqrt{\pi} n! \quad (\text{G.2.115})$$

を持つので、微分方程式 (G.2.7) に似た形の微分方程式に対する試行関数として有用である。また、試行関数の微分^{*83}は、

$$\frac{dV'(\tilde{y})}{d\tilde{y}} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n (\tilde{y} H_n(\tilde{y}) - H_{n+1}(\tilde{y})) e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2} \quad (\text{G.2.118})$$

$$\frac{dV'^*(\tilde{y})}{d\tilde{y}} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n^* (\tilde{y} H_n(\tilde{y}) - H_{n+1}(\tilde{y})) e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2} \quad (\text{G.2.119})$$

^{*82} Hermite 多項式はそれ自身だけの積分では直交ではない。 $e^{-\tilde{y}^2}$ のような関数を重み関数という。

^{*83} Rodrigues の公式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (\text{G.2.116})$$

より、

$$\begin{aligned} \frac{dH_n(x)}{dx} &= (-1)^n 2x e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} + (-1)^n e^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{-x^2} \\ &= 2x H_n(x) - H_{n+1}(x) \end{aligned} \quad (\text{G.2.117})$$

となる。ゆえに、各積分は、直交性 (G.2.115) 式より、

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |V'(\tilde{y})|^2 d\tilde{y} &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} c_n H_n(\tilde{y}) e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2} \sum_{m=0}^{N-1} c_m^* H_m(\tilde{y}) e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2} d\tilde{y} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} c_n c_m^* \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\tilde{y}) H_m(\tilde{y}) e^{-\tilde{y}^2} d\tilde{y} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} c_n c_m^* \delta_{nm} 2^n \sqrt{\pi} n! \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 2^n \sqrt{\pi} n!
\end{aligned} \tag{G.2.120}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^2 |V'(\tilde{y})|^2 d\tilde{y} &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^2 \sum_{n=0}^{N-1} c_n H_n(\tilde{y}) e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2} \sum_{m=0}^{N-1} c_m^* H_m(\tilde{y}) e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2} d\tilde{y} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} c_n c_m^* \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^2 H_n(\tilde{y}) H_m(\tilde{y}) e^{-\tilde{y}^2} d\tilde{y} \\
&= |c_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^2 H_0(\tilde{y}) H_0(\tilde{y}) e^{-\tilde{y}^2} d\tilde{y} + c_0 c_1^* \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^2 H_0(\tilde{y}) H_1(\tilde{y}) e^{-\tilde{y}^2} d\tilde{y} \\
&\quad + c_1 c_0^* \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^2 H_1(\tilde{y}) H_0(\tilde{y}) e^{-\tilde{y}^2} d\tilde{y} + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} c_n c_m^* \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^2 H_n(\tilde{y}) H_m(\tilde{y}) e^{-\tilde{y}^2} d\tilde{y} \\
&= |c_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^2 e^{-\tilde{y}^2} d\tilde{y} + (c_0 c_1^* + c_1 c_0^*) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^3 e^{-\tilde{y}^2} d\tilde{y} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} c_n c_m^* \int_{-\infty}^{\infty} \left(n H_{n-1}(\tilde{y}) + \frac{1}{2} H_{n+1}(\tilde{y}) \right) \left(m H_{m-1}(\tilde{y}) + \frac{1}{2} H_{m+1}(\tilde{y}) \right) e^{-\tilde{y}^2} d\tilde{y} \\
&= |c_0|^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} c_n c_m^* \left(n m \delta_{n-1, m-1} 2^{n-1} \sqrt{\pi} (n-1)! + \frac{n}{2} \delta_{n-1, m+1} 2^{n-1} \sqrt{\pi} (n-1)! \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{m}{2} \delta_{n+1, m-1} 2^{n+1} \sqrt{\pi} (n+1)! + \frac{1}{4} \delta_{n+1, m+1} 2^{n+1} \sqrt{\pi} (n+1)! \right) \\
&= |c_0|^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} \left(n^2 2^{n-1} \sqrt{\pi} (n-1)! + \frac{1}{4} 2^{n+1} \sqrt{\pi} (n+1)! \right) |c_n|^2 \\
&\quad + \sum_{m=1}^{N-1} c_{m+2} c_m^* (m+2) 2^m \sqrt{\pi} (m+1)! + \sum_{n=1}^{N-1} c_n c_{n+2}^* (n+2) 2^n \sqrt{\pi} (n+1)! \\
&= |c_0|^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} 2^{n-1} \sqrt{\pi} (n(n!) + (n+1)!) |c_n|^2 \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N-1} (c_{n+2} c_n^* + c_n c_{n+2}^*) (n+2) 2^n \sqrt{\pi} (n+1)!
\end{aligned} \tag{G.2.121}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dV'(\tilde{y})}{d\tilde{y}} \right|^2 d\tilde{y} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} c_n \left(\tilde{y} H_n(\tilde{y}) - H_{n+1}(\tilde{y}) \right) e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2} \sum_{m=0}^{N-1} c_m^* \left(\tilde{y} H_m(\tilde{y}) - H_{m+1}(\tilde{y}) \right) e^{-\frac{1}{2}\tilde{y}^2} d\tilde{y} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} c_n c_m^* \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tilde{y} H_n(\tilde{y}) - H_{n+1}(\tilde{y}) \right) \left(\tilde{y} H_m(\tilde{y}) - H_{m+1}(\tilde{y}) \right) e^{-\tilde{y}^2} d\tilde{y} \\
&= |c_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tilde{y} H_0(\tilde{y}) - H_1(\tilde{y}) \right) \left(\tilde{y} H_0(\tilde{y}) - H_1(\tilde{y}) \right) e^{-\tilde{y}^2} d\tilde{y} \\
&\quad + c_0 c_1^* \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tilde{y} H_0(\tilde{y}) - H_1(\tilde{y}) \right) \left(\tilde{y} H_1(\tilde{y}) - H_2(\tilde{y}) \right) e^{-\tilde{y}^2} d\tilde{y} \\
&\quad + c_1 c_0^* \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tilde{y} H_1(\tilde{y}) - H_2(\tilde{y}) \right) \left(\tilde{y} H_0(\tilde{y}) - H_1(\tilde{y}) \right) e^{-\tilde{y}^2} d\tilde{y} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} c_n c_m^* \int_{-\infty}^{\infty} \left(n H_{n-1}(\tilde{y}) - \frac{1}{2} H_{n+1}(\tilde{y}) \right) \left(m H_{m-1}(\tilde{y}) - \frac{1}{2} H_{m+1}(\tilde{y}) \right) e^{-\tilde{y}^2} d\tilde{y} \\
&= |c_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}^2 e^{-\tilde{y}^2} d\tilde{y} + (c_0 c_1^* + c_1 c_0^*) \int_{-\infty}^{\infty} 2(\tilde{y}^3 - \tilde{y}) e^{-\tilde{y}^2} d\tilde{y} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} c_n c_m^* \left(nm \delta_{n-1, m-1} 2^{n-1} \sqrt{\pi} (n-1)! - \frac{n}{2} \delta_{n-1, m+1} 2^{n-1} \sqrt{\pi} (n-1)! \right. \\
&\quad \quad \left. - \frac{m}{2} \delta_{n+1, m-1} 2^{n+1} \sqrt{\pi} (n+1)! + \frac{1}{4} \delta_{n+1, m+1} 2^{n+1} \sqrt{\pi} (n+1)! \right) \\
&= |c_0|^2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0 + \sum_{n=1}^{N-1} 2^{n-1} \sqrt{\pi} (n(n!) + (n+1)!) |c_n|^2 \\
&\quad - \sum_{n=1}^{N-1} (c_{n+2} c_n^* + c_n c_{n+2}^*) (n+2) 2^n \sqrt{\pi} (n+1)!
\end{aligned} \tag{G.2.122}$$

となる。ここで、試行関数は関数の有限和であるので、項別に積分できる。また、(G.2.121) 式や (G.2.122) 式の計算の途中で、

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2 \tag{G.2.123}$$

Hermite 多項式の漸化式

$$x H_n(x) = n H_{n-1}(x) + \frac{1}{2} H_{n+1}(x) \quad (n \geq 1) \tag{G.2.124}$$

Gauss 積分の公式 (a は定数)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} dx dy} = \sqrt{\int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-ar^2} r dr d\theta} \\ &= \sqrt{2\pi \int_{r^2=0}^{\infty} e^{-ar^2} \frac{d(r^2)}{2}} = \sqrt{\pi \left[-\frac{1}{a} e^{-r^2} \right]_{r^2=0}^{\infty}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{aligned} \quad (\text{G.2.125})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{\partial}{\partial a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{G.2.126})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 e^{-ax^2} dx = 0 \quad (\because \text{奇関数}) \quad (\text{G.2.127})$$

を用いた。

ゆえに、 $[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2$ の近似値は、

$$[\tilde{y}'_c]^2 = \frac{|c_0|^2 + \sum_{n=1}^{N-1} 2^n (n(n!) + (n+1)!) |c_n|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 2^n n!} \quad (\text{G.2.128})$$

となる。実際に小さい N で計算してみよう。正しい分散関係は、

$$[\tilde{y}_c(\omega, k_x)]^2 = 2i_* + 1 = 2(N-1) + 1 \quad (\text{G.2.129})$$

である。 $N = 1$ のときは、

$$[\tilde{y}'_c]^2 = \frac{|c_0|^2}{|c_0|^2 2^0 0!} = 1 \quad (\text{G.2.130})$$

となって、正しい分散関係が求められている。これは試行関数が正しい固有関数であったからである。また、試行関数が一つの関数のみ ($N = 1$) の場合は、変分パラメータの変分を取る必要なく固有値（分散関係）が求まる。次に、 $N = 2$ のときは、

$$[\tilde{y}'_c]^2 = \frac{|c_0|^2 + 2^1 (1(1!) + 2!) |c_1|^2}{|c_0|^2 2^0 0! + |c_1|^2 2^1 1!} = \frac{|c_0|^2 + 6|c_1|^2}{|c_0|^2 + 2|c_1|^2} \quad (\text{G.2.131})$$

となる。すなわち、

$$[\tilde{y}'_c]^2 (|c_0|^2 + 2|c_1|^2) = |c_0|^2 + 6|c_1|^2 \quad (\text{G.2.132})$$

である。今回の場合は、試行関数として正しい固有関数を選んでいたので、 c_0 と c_1 の積の項は含まれていない。 c_0^* と c_1^* について変分をとると、

$$\frac{\partial [\tilde{y}'_c]^2}{\partial c_0^*} (|c_0|^2 + 2|c_1|^2) + 4[\tilde{y}'_c]^2 c_0 = 2c_0 \quad (\text{G.2.133})$$

$$\frac{\partial [\tilde{y}'_c]^2}{\partial c_1^*} (|c_0|^2 + 2|c_1|^2) + 4[\tilde{y}'_c]^2 c_1 = 12c_1 \quad (\text{G.2.134})$$

となり、 $[\tilde{y}'_c]^2$ が極値を持つ条件

$$\frac{\partial [\tilde{y}'_c]^2}{\partial c_0^*} = \frac{\partial [\tilde{y}'_c]^2}{\partial c_1^*} = 0 \quad (\text{G.2.135})$$

より、2つの近似値

$$[\tilde{y}_c']^2 = 1, 3 \quad (\text{G.2.136})$$

が得られる。この場合も正しい分散関係が得られた。さらに、一般の N のとき、

$$[\tilde{y}_c']^2 \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 2^n n! = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{N-1} 2^n \left(n(n!) + (n+1)! \right) |c_n|^2 \quad (\text{G.2.137})$$

に対して、 c_l^* ($l = 0, 1, 2, \dots, N-1$) の変分を取ると、

$$2[\tilde{y}_c']^2 c_0 = 2c_0 \quad (l=0) \quad (\text{G.2.138})$$

$$2[\tilde{y}_c']^2 c_l 2^l l! = 2c_l 2^l \left(l(l!) + (l+1)! \right) \quad (l \geq 1) \quad (\text{G.2.139})$$

となって、

$$[\tilde{y}_c']^2 = l + (l+1) = 2l + 1 \quad (\text{G.2.140})$$

を得る。

G.3 一様な東西磁場がある場合

G.3.1 磁場の影響を受けた赤道波の微分方程式と局所漸近解析

一様磁場がある場合の赤道波の式を再掲しておく。

$$\frac{d^2 V(y)}{dy^2} + \left[\frac{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{\omega^2 \beta^2 y^2}{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - \frac{\omega k_x \beta}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} \right] V(y) = 0 \quad (\text{G.3.1})$$

この微分方程式の無限遠でのふるまいを調べるために、

$$\eta = \frac{1}{y} \quad (\text{G.3.2})$$

と変換すると、

$$\frac{d^2 V(\eta)}{d\eta^2} + \frac{2}{\eta} \frac{dV(\eta)}{d\eta} + \frac{1}{\eta^4} \left[\frac{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{\omega^2 \beta^2}{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} \frac{1}{\eta^2} - \frac{\omega k_x \beta}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} \right] V(\eta) = 0 \quad (\text{G.3.3})$$

となるので、無限遠点 ($\eta = 0, y = \pm\infty$) は不確定特異点である。 y の式に戻り、無限遠での解を

$$V(y) = \Re[V_0 e^{Q(y)}] \quad (y \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.3.4})$$

と仮定する。代入すると、 $V_0 e^{Q(y)} \neq 0$ より、

$$\frac{d^2 Q(y)}{dy^2} + \left(\frac{dQ(y)}{dy} \right)^2 + \left[\frac{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{\omega^2 \beta^2 y^2}{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - \frac{\omega k_x \beta}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} \right] = 0 \quad (y \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.3.5})$$

となる。不確定特異点で多くの場合に成り立つ

$$\left| \frac{d^2 Q(y)}{dy^2} \right| \ll \left(\frac{dQ(y)}{dy} \right)^2 \quad (y \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.3.6})$$

という仮定を用いると、

$$\frac{dQ(y)}{dy} \simeq \pm \sqrt{-\frac{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} + k_x^2 + \frac{\omega^2 \beta^2 y^2}{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} + \frac{\omega k_x \beta}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}} \quad (y \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.3.7})$$

を得る。これは、確かに仮定 (G.3.6) を満たしている。無限遠で重要になる項は、

$$\frac{dQ(y)}{dy} \approx \pm |y| \sqrt{\frac{\omega^2 \beta^2}{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}}} \quad (y \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.3.8})$$

であり、これを積分すると、

$$\begin{aligned} Q(y) &\approx \pm \frac{y^2}{2} \sqrt{\frac{\omega^2 \beta^2}{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}}} + \text{const.} \\ &\simeq \pm \frac{y^2}{2} \sqrt{\frac{\omega^2 \beta^2}{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2) \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}}} \quad (y \rightarrow \pm\infty) \end{aligned} \quad (\text{G.3.9})$$

となる。ここで、(G.3.8) 式と (G.3.9) 式の複号は同順ではない。赤道変形半径を用いれば、

$$Q(y) \approx \pm \frac{y^2}{2\lambda_{EQ}^2} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}} \quad (y \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.3.10})$$

となる。

ここで、 $V(y)$ が無限遠で 0 になる条件は、

$$\Re[Q(y)] < 0 \quad (\text{G.3.11})$$

である。 $\Re[\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}}] \geq 0$ より、複号は

$$Q(y) \approx -\frac{y^2}{2\lambda_{EQ}^2} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}} \quad (y \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.3.12})$$

を選ぶ。ただし、これだけでは、 $V(\tilde{y})$ が無限遠でもなお振動し続けている場合も含んでいる。例えば、 ω は実数で、 $0 < \omega^2 < V_{Ax0}^2 k_x^2$ の場合、 $\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}}$ は純虚数となり、

$$\Re[Q(y)] = 0 \quad (\text{G.3.13})$$

となって、 $V(y)$ は無限遠で振幅を持つことになる。このことは、周波数が虚部を持たないような、Alfvén 波よりも周波数が小さい波は、赤道にトラップされないことを意味している。そこで、さらに必要な条件は、

$$\Re\left[\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}}\right] \neq 0 \quad (\text{G.3.14})$$

である。この条件を調べるために、

$$\omega = \omega_R + i\omega_I \quad (\text{G.3.15})$$

とし、

$$X + iY = \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}} \quad (\text{G.3.16})$$

とする。ここで、 ω_R 、 ω_I 、 X 、 Y は実数であり、 $X \geq 0$ である。そして、 $X \neq 0$ となる条件を調べれば良い。(G.3.16) 式の両辺を 2 乗すると、

$$X^2 - Y^2 + 2iXY = \frac{\omega_R^2 - \omega_I^2 + 2i\omega_R\omega_I}{\omega_R^2 - \omega_I^2 + 2i\omega_R\omega_I - V_{Ax0}^2 k_x^2} \quad (\text{G.3.17})$$

変形して、

$$X^2 - Y^2 + 2iXY = \frac{\omega_R^2 - \omega_I^2 + 2i\omega_R\omega_I}{[\omega_R^2 - \omega_I^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2]^2 + 4\omega_R^2\omega_I^2} (\omega_R^2 - \omega_I^2 - 2i\omega_R\omega_I - V_{Ax0}^2 k_x^2) \quad (\text{G.3.18})$$

この式の実部より、

$$X^2 - Y^2 = \frac{(\omega_R^2 + \omega_I^2)^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2 (\omega_R^2 - \omega_I^2)}{[\omega_R^2 - \omega_I^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2]^2 + 4\omega_R^2\omega_I^2} \quad (\text{G.3.19})$$

一方、虚部は、

$$XY = -\omega_R\omega_I \frac{V_{Ax0}^2 k_x^2}{[\omega_R^2 - \omega_I^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2]^2 + 4\omega_R^2\omega_I^2} \quad (\text{G.3.20})$$

となる。ここで、 $X = 0$ となるには、(G.3.20) 式より、磁場がある場合は ω_R か ω_I のいずれかが 0 でなければならない。もし、 $\omega_R = 0$ ならば、(G.3.19) 式より、

$$X^2 - Y^2 = \frac{\omega_I^4 + V_{Ax0}^2 k_x^2 \omega_I^2}{[\omega_I^2 + V_{Ax0}^2 k_x^2]^2} \quad (\text{G.3.21})$$

となって、 $X = 0$ とはならない。ここで、 $\omega_R = 0$ のときは、 X と Y のいずれかが 0 でなければならぬことに注意しよう。この場合は $Y = 0$ である。一方、 $\omega_I = 0$ ならば、

$$X^2 - Y^2 = \frac{\omega_R^2}{\omega_R^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} \quad (\text{G.3.22})$$

であり、 $\omega_R^2 > V_{Ax0}^2 k_x^2$ ならば $X \neq 0$ かつ $Y = 0$ 、 $\omega_R^2 < V_{Ax0}^2 k_x^2$ ならば $X = 0$ かつ $Y \neq 0$ となる。これは先ほど示した $X = 0$ となる状況である。

ゆえに、 $X = 0$ となるのは、 $\omega_I = 0$ かつ $\omega_R^2 < V_{Ax0}^2 k_x^2$ の場合であり、 $X \neq 0$ となるのはそれ以外である。以下では、 $X \neq 0$ となる状況を 2 つの場合に分けて調べる。

- $\omega_I = 0$ かつ $\omega_R^2 > V_{Ax0}^2 k_x^2$ の場合
- $\omega_I \neq 0$ の場合

G.3.2 $\omega_I = 0$ かつ $\omega_R^2 > V_{Ax0}^2 k_x^2$ の場合

この場合は、 ω は実数で、 $\omega^2 > V_{Ax0}^2 k_x^2$ である。ここで、南北座標を

$$y = \frac{\lambda_{EQ}}{\sqrt{(m\pi)}} \sqrt[4]{\frac{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}{\omega^2}} \bar{y} = \sqrt{\frac{NH}{\beta}} \sqrt[4]{\frac{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}{\omega^2}} \bar{y} \quad (\text{G.3.23})$$

と無次元化する。 ω と k_x によって、無次元化が異なることに注意。この \bar{y} は $V_{Ax0} = 0$ のとき、 \tilde{y} になる。このとき(G.3.1)式は、

$$\frac{d^2V(\bar{y})}{d\bar{y}^2} + \frac{\lambda_{EQ}^2}{(m\pi)} \sqrt{\frac{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}{\omega^2}} \left[\frac{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{\omega k_x \beta}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} \right] V(\bar{y}) - \bar{y}^2 V(\bar{y}) = 0 \quad (\text{G.3.24})$$

となる。ここで、

$$[\bar{y}_c(\omega, k_x)]^2 = \frac{\lambda_{EQ}^2}{(m\pi)} \sqrt{\frac{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}{\omega^2}} \left[\frac{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{\omega k_x \beta}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} \right] \quad (\text{G.3.25})$$

とおくと、

$$\frac{d^2V(\bar{y})}{d\bar{y}^2} + ([\bar{y}_c(\omega, k_x)]^2 - \bar{y}^2) V(\bar{y}) = 0 \quad (\text{G.3.26})$$

となって、磁場なしの場合と同じ式に帰着する。すなわち、この場合は、磁場なしの場合の結果をそのまま利用することができる。

すなわち、分散関係は、 $i_* = 0, 1, 2, 3 \dots$ として、

$$[\bar{y}_c(\omega, k_x)]^2 = \frac{\lambda_{EQ}^2}{(m\pi)} \sqrt{\frac{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}{\omega^2}} \left[\frac{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{\omega k_x \beta}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} \right] = 2i_* + 1 \quad (\text{G.3.27})$$

である。

この分散関係は、 $\omega^2 \gg V_{Ax0}^2 k_x^2$ の極限で、

$$\frac{\lambda_{EQ}^2}{(m\pi)} \left[\frac{\omega^2}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{k_x \beta}{\omega} \right] = 2i_* + 1 \quad (\text{G.3.28})$$

となって、磁場なしの場合の分散関係に一致する。すなわち、背景磁場が存在しても、大きなスケール ($k_x \rightarrow 0$) の現象ならば、磁場なしの場合と同様の性質を示す。 $\frac{V_{Ax0}^2 k_x^2}{\omega^2}$ の1次までTaylor展開すれば、

$$\frac{\lambda_{EQ}^2}{(m\pi)} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{V_{Ax0}^2 k_x^2}{\omega^2} \right) \left[\frac{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 - \frac{k_x \beta}{\omega} \left(1 + \frac{V_{Ax0}^2 k_x^2}{\omega^2} \right) \right] \approx 2i_* + 1 \quad (\text{G.3.29})$$

となるが、 ω が大きいときは、

$$\frac{\lambda_{EQ}^2}{(m\pi)} \left[\frac{(\omega_{\text{fast}}^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 \right] \approx 2i_* + 1 \quad (\text{G.3.30})$$

すなわち、

$$\omega_{\text{fast}}^2 = \left[\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} + V_{Ax0}^2 \right] k_x^2 + (2i_* + 1) \frac{(\beta \lambda_{EQ})^2}{(m\pi)} \quad (\text{G.3.31})$$

を得る。これは、赤道における磁場の影響を受けた慣性内部重力波である。すなわち、背景磁場が存在する場合、 $k_x \rightarrow 0$ の極限では慣性内部重力波は磁場なしの場合と同じ周波数を持つが、 k_x が小さくないときは、磁場なしの場合よりも周波数が大きくなる。磁場の影響を受けた慣性内部重力波は、 k_x が非常に大きい極限でも (G.3.31) 式のような分散関係を保持する。実際に、分散関係 (G.3.27) で $k_x \rightarrow \infty$ 、 $\omega \geq \mathcal{O}(k_x)$ とすると、

$$\frac{\lambda_{EQ}^2}{(m\pi)} \sqrt{\frac{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}{\omega^2}} \left[\frac{(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2)}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} - k_x^2 \right] \simeq 2i_* + 1 \quad (\text{G.3.32})$$

となり、 $i_* m \ll k_x^2$ であれば、

$$\omega^2 \approx \left[\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} + V_{Ax0}^2 \right] k_x^2 \quad (\text{G.3.33})$$

を得る。

次に、 $\omega^2 \rightarrow V_{Ax0}^2 k_x^2$ の極限を考える。このとき、分散関係 (G.3.27) は

$$\frac{\lambda_{EQ}^2}{(m\pi)} \sqrt{\frac{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}{\omega^2}} \left[-\frac{\omega k_x \beta}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} \right] \simeq 2i_* + 1 \quad (\text{G.3.34})$$

となり、 $\omega > 0$ に限ると、

$$-\frac{\lambda_{EQ}^2}{(m\pi)} \frac{k_x \beta}{\sqrt{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}} \simeq 2i_* + 1 \quad (\text{G.3.35})$$

となる。この式が成立するのは、 i_* が非常に大きいときか、 i_* はそれほど大きくないが $k_x \rightarrow \infty$ の 2 つの場合である。式からはすぐにはわからないが、分散関係のグラフを見ると、Rossby 波のブランチが $i_* \rightarrow \infty$ 、または、 $k_x \rightarrow \infty$ のときに Alfvén 波の分散関係に近づくことがわかる。また、 $k_x \rightarrow 0$ のときの分散関係は、磁場なしの場合に近づくことから、このブランチは大きなスケールの場合は Rossby 波的、小さなスケールのときは Alfvén 波的になることがわかる。この結果は、中緯度 β 面における磁場の影響を受けた Rossby 波と同じ性質を示している。

赤道においても、中緯度 β 面で現れた、磁場の影響を受けた慣性内部重力波と Rossby 波が存在できることがわかった。しかし、赤道では、中緯度 β 面で登場した、MC Rossby 波は存在できないようである。このことに関しては、本文中でも議論したので、ここでは省略する。

G.3.3 無次元分散関係

周波数と波数は磁場なしの時と同様な無次元化を行う。

$$\omega = \beta \lambda_{EQ} \omega_* = \sqrt{\beta N H} \omega_* \quad (\text{G.3.36})$$

$$k_x = \frac{k_{x*}}{\lambda_{EQ}} = \frac{k_{x*}}{\sqrt{\frac{NH}{\beta}}} \quad (\text{G.3.37})$$

また、磁場の強さを表わすパラメータとして、以前も用いた

$$L_{eR} = \frac{V_{Ax0}}{NH} \quad (\text{G.3.38})$$

を使う。すると、分散関係 (G.3.27) は、

$$2i_* + 1 = \sqrt{\frac{\omega_*^2 - (L_{eR}^2 k_{x*}^2)}{\omega_*^2}} \left[(m\pi)(\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2) - \frac{k_{x*}^2}{(m\pi)} - \frac{\omega_* k_{x*}}{(m\pi)(\omega_*^2 - L_{eR}^2 k_{x*}^2)} \right] \quad (\text{G.3.39})$$

となる。さらに、 ω_* と k_{x*} 、 L_{eR} に π を含めると、

$$\begin{aligned} 2i_* + 1 &= \sqrt{\frac{(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - (L_{eR} \pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)^2}{(\omega_* \sqrt{\pi})^2}} \left\{ m \left[(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - (L_{eR} \pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{m} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 - \frac{(\omega_* \sqrt{\pi}) \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)}{m \left[(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - (L_{eR} \pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \right]} \right\} \end{aligned} \quad (\text{G.3.40})$$

となって、 $m = 1$ のとき浅水波の分散関係になる。

G.3.4 $i_* = 0$ の場合（磁場の影響を受けた混合 Rossby 重力波）

$i_* = 0$ の場合を考える。このとき、磁場なしのときと同様に、混合 Rossby 重力波の分散関係が得られる。ここでも、 $\omega_* > 0$ に限る。分散関係 (G.3.40) に $(\omega_* \sqrt{\pi}) \sqrt{(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - (L_{eR} \pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)^2}$ をかけると、

$$\begin{aligned} &(\omega_* \sqrt{\pi}) \sqrt{(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - (L_{eR} \pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)^2} \\ &= m \left\{ (\omega_* \sqrt{\pi})^2 - (L_{eR} \pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \right\} \left\{ (\omega_* \sqrt{\pi})^2 - \left[(L_{eR} \pi)^2 + \frac{1}{m^2} \right] \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \right\} - \frac{(\omega_* \sqrt{\pi}) \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)}{m} \end{aligned} \quad (\text{G.3.41})$$

となる。ここで、見やすさのため、

$$\sigma_{\pm} = \sqrt{(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - (L_{eR} \pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)^2} \pm \frac{1}{m} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right) \quad (\text{G.3.42})$$

$$\sigma_0 = \sqrt{(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - (L_{eR} \pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)^2} \quad (\text{G.3.43})$$

とし、

$$\begin{aligned} &(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - \left[(L_{eR} \pi)^2 + \frac{1}{m^2} \right] \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \\ &= \left\{ \sqrt{(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - (L_{eR} \pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)^2} + \frac{1}{m} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right) \right\} \left\{ \sqrt{(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - (L_{eR} \pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right)^2} - \frac{1}{m} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}\right) \right\} \\ &= \sigma_+ \sigma_- \end{aligned} \quad (\text{G.3.44})$$

と因数分解できることを利用すれば、

$$(\omega_* \sqrt{\pi}) \sigma_+ = m \sigma_0^2 \sigma_+ \sigma_- \quad (\text{G.3.45})$$

となり、結局、分散関係は、

$$\sigma_+ \left(m \sigma_0^2 \sigma_- - (\omega_* \sqrt{\pi}) \right) = 0 \quad (\text{G.3.46})$$

すなわち、

$$\sigma_+ = 0 \quad (\text{G.3.47})$$

$$m \sigma_0^2 \sigma_- - (\omega_* \sqrt{\pi}) = 0 \quad (\text{G.3.48})$$

となる。磁場なしのときは、 $L_{eR} = 0$ より、

$$\sigma_{\pm} = (\omega_* \sqrt{\pi}) \pm \frac{1}{m} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) \quad (\text{G.3.49})$$

$$\sigma_0 = (\omega_* \sqrt{\pi}) \quad (\text{G.3.50})$$

となるので、(G.3.47) 式は無限遠で東西流が発散する解、(G.3.48) 式が混合 Rossby 重力波であると予想される。この 2 つのモードを次元のある形に戻すと、

$$\sqrt{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} + \frac{NH}{(m\pi)} k_x = 0 \quad (\text{G.3.51})$$

$$(\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2) \left(\sqrt{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} + \frac{NH}{(m\pi)} k_x \right) = \omega \frac{(\beta \lambda_{EQ})^2}{m\pi} \quad (\text{G.3.52})$$

となる。混合 Rossby 重力波の周波数 (G.3.48) の陽な表現を求めるのは難しいので、数値的に求めた後、近似解を求める (G.3.7 節)。

ここでは、(G.3.47) 式の解が発散解であることを確認する。まず、(G.3.51) 式より、 $\sqrt{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2} \geq 0$ なので、 $k_x \leq 0$ である。式を 2 乗すると、

$$\omega^2 = V_{Ax0}^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \quad (\text{G.3.53})$$

となり、 $\omega > 0$ 、 $k_x \leq 0$ に注意すると、

$$\omega = - \sqrt{V_{Ax0}^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} k_x \quad (\text{G.3.54})$$

となる。ここで、(F.5.32)、(F.5.33) 式で、 $f + \beta y \approx \beta y$ 、 $V_{Ax}(y) = V_{Ax0}$ とした、

$$\left[-\omega^2 + V_{Ax0}^2 k_x^2 - \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d^2}{dy^2} \right] V(y) = \left[i\omega \beta y + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] U(y) \quad (\text{G.3.55})$$

$$\left[-\omega^2 + V_{Ax0}^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right] U(y) = \left[-i\omega \beta y + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] V(y) \quad (\text{G.3.56})$$

に (G.3.54) 式を代入すれば、

$$\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \left[-k_x^2 - \frac{d^2}{dy^2} \right] V(y) = \left[-i \sqrt{V_{Ax0}^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} k_x \beta y + ik_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] U(y) \quad (\text{G.3.57})$$

$$0 = \left[\sqrt{V_{Ax0}^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} \beta y + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] V(y) \quad (\text{G.3.58})$$

となる。さらに、 $i_* = 0$ のとき、

$$V(y) = V_0 \exp \left(-\frac{y^2}{2\lambda_{EQ}^2 (m\pi)} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}} \right) = V_0 \exp \left(-\frac{y^2}{2\lambda_{EQ}^2 (m\pi)} \sqrt{\frac{V_{Ax0}^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}}{\frac{NH}{(m\pi)}}} \right) \quad (\text{G.3.59})$$

なので、(G.3.58) 式に代入すると、 $0 = 0$ となり、(G.3.57) 式は無限遠では、

$$\frac{dU(y)}{dy} - \frac{y}{\lambda_{EQ}^2 (m\pi)} \frac{\sqrt{V_{Ax0}^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}}}{\frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} U(y) \approx 0 \quad (y \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.3.60})$$

となる。これを解くと、

$$U(y) \sim \exp \left(\frac{y^2}{2\lambda_{EQ}^2 (m\pi)} \frac{\sqrt{V_{Ax0}^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}}}{\frac{NH}{(m\pi)}} \right) \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow \pm\infty) \quad (\text{G.3.61})$$

となるので、発散解であることが確かめられた。

G.3.5 $V(y) = 0$ の場合（磁場の影響を受けた赤道 Kelvin 波）

磁場なしの場合と同様、背景磁場があっても $V(y) = 0$ となるモードが存在する。そのようなモードは、(G.1.6)、(G.1.7) 式より、

$$\left[\omega \beta y + k_x \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] U(y) = 0 \quad (\text{G.3.62})$$

$$\left[-\omega^2 + V_{Ax0}^2 k_x^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} k_x^2 \right] U(y) = 0 \quad (\text{G.3.63})$$

を満たす。よって、周波数は、

$$\omega = \pm \sqrt{V_{Ax0}^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} k_x \quad (\text{G.3.64})$$

となる。これを (G.3.62) 式に代入すると、

$$\left[\pm \sqrt{V_{Ax0}^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} \beta y + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2} \frac{d}{dy} \right] U(y) = 0 \quad (\text{G.3.65})$$

となる。ゆえに、無限遠で発散しない解は、

$$\omega = \sqrt{V_{Ax0}^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}} k_x \quad (\text{G.3.66})$$

$$U(y) = U_0 \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda_{EQ}^2}(m\pi)\frac{\sqrt{V_{Ax0}^2 + \frac{N^2 H^2}{(m\pi)^2}}}{\frac{NH}{(m\pi)}}\right) \quad (\text{G.3.67})$$

となる。すなわち、磁場の影響を受けた赤道 Kelvin 波は、磁場なしの時と比べ、周波数が大きくなり、振幅を持つ領域がより赤道に限られる。

磁場があると、赤道から離れるにつれ減衰しやすくなるという性質は、赤道 Kelvin 波に限ったことではない。それは、背景磁場がある場合は、

$$\sqrt[4]{\frac{\omega^2}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}} y \rightarrow y \quad (\text{G.3.68})$$

とすれば、磁場なしのときと同じ Weber の微分方程式になることからきている。ここで、 $\omega^2 > V_{Ax0}^2 k_x^2$ より、 $\sqrt[4]{\frac{\omega^2}{\omega^2 - V_{Ax0}^2 k_x^2}} > 1$ なので、背景磁場があるときは、磁場なしのときに比べ、南北方向に若干圧縮された座標系を考えてことになり、磁場があると、赤道から離れるにつれ減衰しやすくなる。

G.3.6 無次元分散関係のグラフ

混合 Rossby 重力波と Kelvin 波を書き加えて、発散する解を除いた分散関係のグラフをここでまとめて示す。

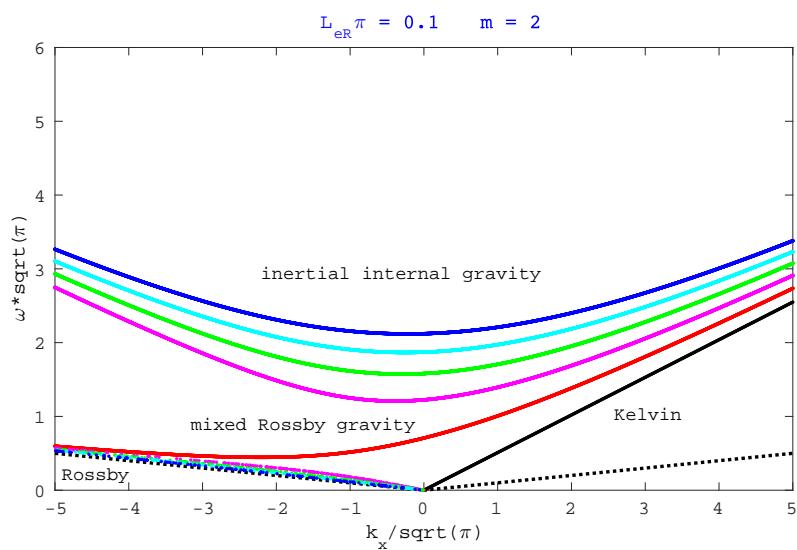
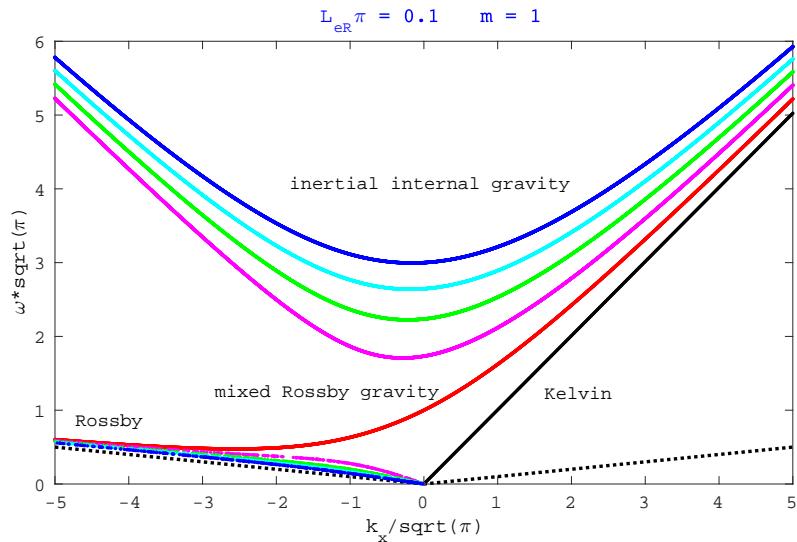


Fig.173 物理的に意味のある解のみを図示した磁場の影響を受けた赤道波の分散関係。縦軸が $\omega_*\sqrt{\pi}$ 、横軸が $k_{x*}/\sqrt{\pi}$ であり、赤から青にかけて $i_* = 0, 1, 2, 3, 4$ としている。 $L_{eR}\pi = 0.1$ の場合。黒の点線は Alfvén 波の周波数 ($\omega = \pm V_{Ax0}k_x$) である。(上図) 鉛直波数 $m = 1$ の場合 (浅水波と同じ分散関係)。(下図) $m = 2$ の場合。

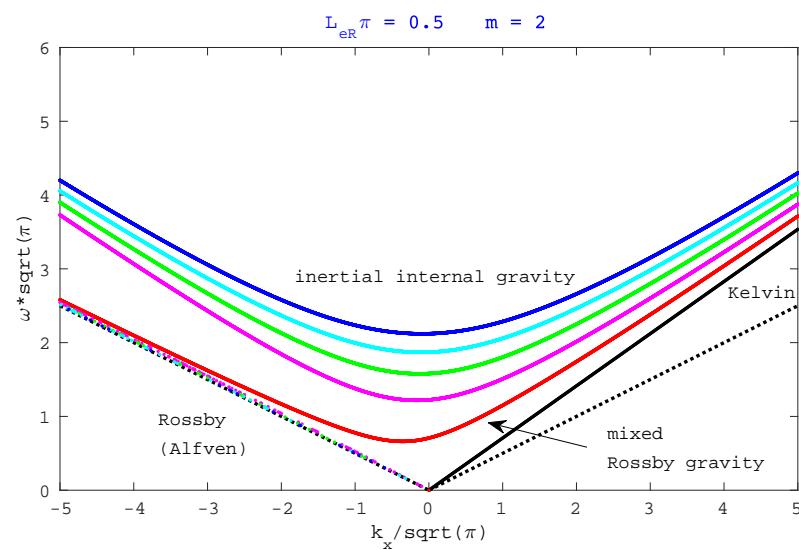
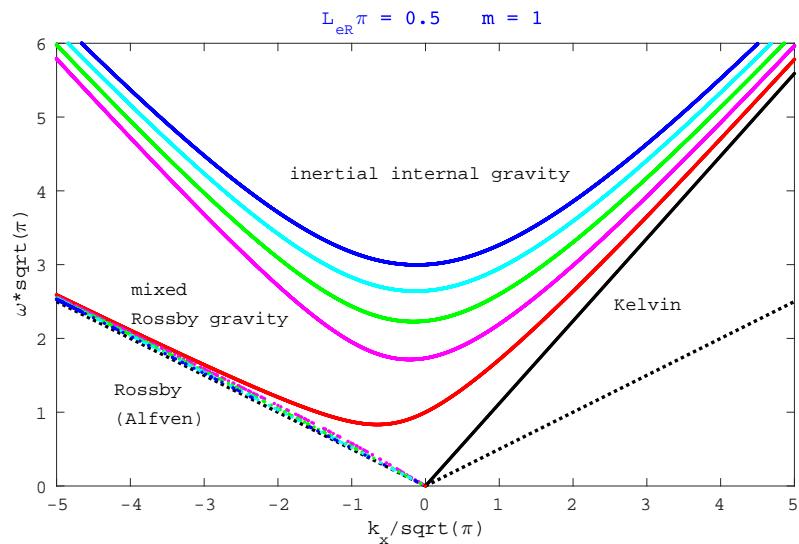


Fig.174 Fig.173と同じであるが、 $L_{eR}\pi = 0.5$ の場合。（上図）鉛直波数 $m = 1$ の場合（浅水波と同じ分散関係）。（下図） $m = 2$ の場合。

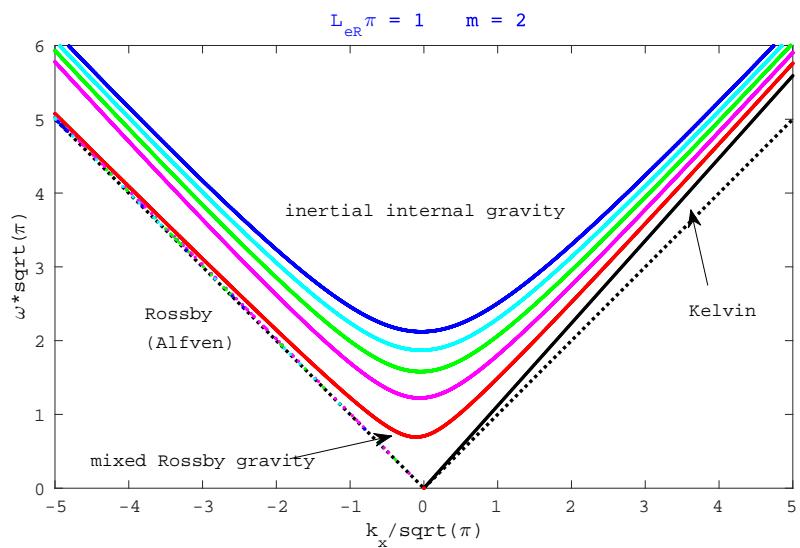
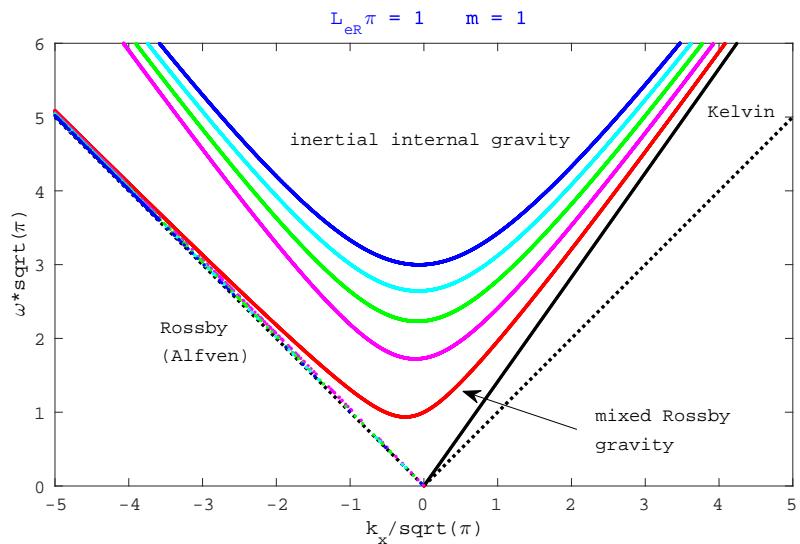


Fig.175 Fig.173と同じであるが、 $L_{eR}\pi = 1$ の場合。（上図）鉛直波数 $m = 1$ の場合（浅水波と同じ分散関係）。（下図） $m = 2$ の場合。

G.3.7 混合 Rossby 重力波の周波数の近似解

磁場の影響を受けた混合 Rossby 重力波の分散関係は、

$$m \left[\sqrt{(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - (L_{eR}\pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2} - \frac{1}{m} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) \right] \left[(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - (L_{eR}\pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 \right] - (\omega_* \sqrt{\pi}) = 0 \quad (\text{G.3.69})$$

である。ここで、分散関係のグラフを見ると、混合 Rossby 重力波は、 $k_x \rightarrow +\infty$ のとき赤道 Kelvin 波的、 $k_x \rightarrow -\infty$ のとき Alfvén 波的になっていることがわかる。

$$\left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow +\infty \right) \quad (\omega_* \sqrt{\pi}) \approx \sqrt{(L_{eR}\pi)^2 + \frac{1}{m^2}} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) \quad (\text{G.3.70})$$

$$\left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow -\infty \right) \quad (\omega_* \sqrt{\pi}) \approx -(L_{eR}\pi) \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) \quad (\text{G.3.71})$$

(i) $\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow -\infty$ のときの近似解

(G.3.71) 式の極限が成り立つように、解の形を

$$(\omega_* \sqrt{\pi}) \simeq -(L_{eR}\pi) \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) \left(1 + \frac{\epsilon}{(k_{x*}/\sqrt{\pi})^2} \right) \quad \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow -\infty \right) \quad (\text{G.3.72})$$

と仮定する^{*84}。ここで、 ϵ は $\mathcal{O}(k_{x*}^2)$ よりも小さな量である。 ϵ を求めることにより、 $\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow -\infty$ のときの近似解を求める。この形の解の場合、

$$\begin{aligned} \left[(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - (L_{eR}\pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 \right] &= (L_{eR}\pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 \left[\left(1 + \frac{\epsilon}{(k_{x*}/\sqrt{\pi})^2} \right)^2 - 1 \right] \\ &\simeq 2(L_{eR}\pi)^2 \epsilon \quad \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow -\infty \right) \end{aligned} \quad (\text{G.3.73})$$

なので、分散関係 (G.3.69) は、

$$2m(L_{eR}\pi)\epsilon \left[\sqrt{2\epsilon}(L_{eR}\pi) - \frac{1}{m} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) \right] + \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) \left(1 + \frac{\epsilon}{(k_{x*}/\sqrt{\pi})^2} \right) = 0 \quad \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow -\infty \right) \quad (\text{G.3.74})$$

となる。主要項である $\mathcal{O}(k_{x*})$ の項を取り出すと、

$$-2(L_{eR}\pi)\epsilon + 1 \approx 0 \quad \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow -\infty \right) \quad (\text{G.3.75})$$

ゆえに、

$$\epsilon \approx \frac{1}{2(L_{eR}\pi)} \quad \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow -\infty \right) \quad (\text{G.3.76})$$

^{*84} 試行錯誤の結果、小さい項は $\mathcal{O}(k_{x*}^{-1})$ ではなく、 $\mathcal{O}(k_{x*}^{-2})$ だとうまく計算できることがわかった。

が得られる。よって、 $\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow -\infty$ のときの近似解は、

$$(\omega_* \sqrt{\pi}) \simeq -(L_{eR}\pi) \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) - \frac{1}{2(k_{x*}/\sqrt{\pi})} \quad \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow -\infty \right) \quad (\text{G.3.77})$$

(ii) $\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow +\infty$ のときの近似解

(G.3.71) 式の極限が成り立つように、解の形を

$$(\omega_* \sqrt{\pi}) \simeq \sqrt{(L_{eR}\pi)^2 + \frac{1}{m^2}} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) \left(1 + \frac{\epsilon}{(k_{x*}/\sqrt{\pi})^2} \right) \quad \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow +\infty \right) \quad (\text{G.3.78})$$

と仮定する。ここで、 ϵ は $\mathcal{O}(k_{x*}^2)$ よりも小さな量である。この形の解の場合、

$$\begin{aligned} \left[(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - (L_{eR}\pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 \right] &\simeq \left[(L_{eR}\pi)^2 + \frac{1}{m^2} \right] \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 \left(1 + 2 \frac{\epsilon}{(k_{x*}/\sqrt{\pi})^2} \right) - (L_{eR}\pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{m^2} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 + 2 \left[(L_{eR}\pi)^2 + \frac{1}{m^2} \right] \epsilon \quad \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow +\infty \right) \end{aligned} \quad (\text{G.3.79})$$

$$\begin{aligned} \sqrt{(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - (L_{eR}\pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2} &\simeq \sqrt{\frac{1}{m^2} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 + 2 \left[(L_{eR}\pi)^2 + \frac{1}{m^2} \right] \epsilon} \\ &\simeq \frac{1}{m} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) \left[1 + \frac{m^2 (L_{eR}\pi)^2 + 1}{(k_{x*}/\sqrt{\pi})^2} \epsilon \right] \quad \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow +\infty \right) \end{aligned} \quad (\text{G.3.80})$$

なので、分散関係 (G.3.69) は、

$$\frac{m^2 (L_{eR}\pi)^2 + 1}{(k_{x*}/\sqrt{\pi})^2} \epsilon \left[\frac{1}{m^2} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 + 2 \left[(L_{eR}\pi)^2 + \frac{1}{m^2} \right] \epsilon \right] - \sqrt{(L_{eR}\pi)^2 + \frac{1}{m^2}} \left(1 + \frac{\epsilon}{(k_{x*}/\sqrt{\pi})^2} \right) = 0 \quad \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow +\infty \right) \quad (\text{G.3.81})$$

となる。主要項である $\mathcal{O}(1)$ の項を取り出すと、

$$\left[(L_{eR}\pi)^2 + \frac{1}{m^2} \right] \epsilon - \sqrt{(L_{eR}\pi)^2 + \frac{1}{m^2}} \approx 0 \quad \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow +\infty \right) \quad (\text{G.3.82})$$

ゆえに、

$$\epsilon \approx \frac{1}{\sqrt{(L_{eR}\pi)^2 + (1/m^2)}} \quad \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow +\infty \right) \quad (\text{G.3.83})$$

が得られる。よって、 $\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow +\infty$ のときの近似解は、

$$(\omega_* \sqrt{\pi}) \simeq \sqrt{(L_{eR}\pi)^2 + \frac{1}{m^2}} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) + \frac{1}{(k_{x*}/\sqrt{\pi})} \quad \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \rightarrow +\infty \right) \quad (\text{G.3.84})$$

(iii) $\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \sim 0$ のときの近似解

分散関係 (G.3.69) より、

$$m \left[(\omega_* \sqrt{\pi}) \sqrt{1 - \frac{(L_{eR}\pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2}{(\omega_* \sqrt{\pi})^2}} - \frac{1}{m} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) \right] \left[(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - (L_{eR}\pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 \right] - (\omega_* \sqrt{\pi}) = 0 \quad (\text{G.3.85})$$

であるが、 $(L_{eR}\pi)$ と $(\omega_* \sqrt{\pi})$ は $\mathcal{O}(1)$ 、 $\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}}$ は小さい量だとすると、

$$m \left[(\omega_* \sqrt{\pi}) - \frac{(L_{eR}\pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2}{2(\omega_* \sqrt{\pi})} - \frac{1}{m} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) \right] \left[(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - (L_{eR}\pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 \right] - (\omega_* \sqrt{\pi}) \simeq 0 \\ \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \sim 0 \right) \quad (\text{G.3.86})$$

となる。 $\mathcal{O}(k_{x*}^2)$ の項までとると、

$$(\omega_* \sqrt{\pi})^2 - \frac{(L_{eR}\pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2}{2} - \frac{1}{m} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) (\omega_* \sqrt{\pi}) - \frac{1}{m} (L_{eR}\pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 - \frac{1}{m} \simeq 0 \quad \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \sim 0 \right) \quad (\text{G.3.87})$$

ゆえに、

$$(\omega_* \sqrt{\pi}) = \frac{1}{2m} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4m^2} \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{m} \right) (L_{eR}\pi)^2 \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \right)^2 + \frac{1}{m}} \quad \left(\frac{k_{x*}}{\sqrt{\pi}} \sim 0 \right) \quad (\text{G.3.88})$$

となる。この近似解は、 $L_{eR} = 0$ (磁場なし) のときに、(G.2.70) 式と一致する。

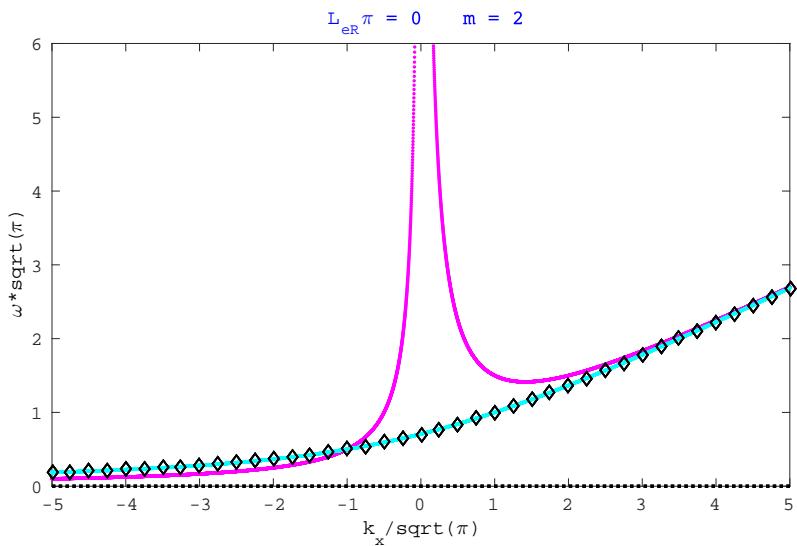
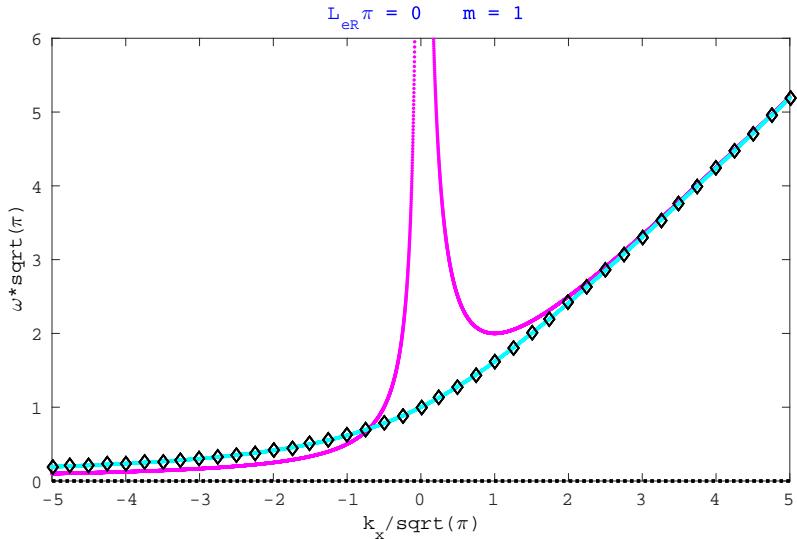


Fig.176 混合 Rossby 重力波の分散関係と近似解。縦軸が $\omega_*\sqrt{\pi}$ 、横軸が $k_{x*}/\sqrt{\pi}$ である。正しい分散関係 (G.3.69) は黒の菱形、 $k_{x*} \rightarrow \pm\infty$ の近似解 (G.3.77) と (G.3.84) はマゼンタの線、 $k_{x*} \sim 0$ の近似解 (G.3.88) はシアンの線で表している。 $L_{eR}\pi = 0.1$ の場合。。黒の点線は Alfvén 波の周波数 ($\omega = \pm V_{Ax0}k_x$) である。(上図) 鉛直波数 $m = 1$ の場合 (浅水波と同じ分散関係) (下図) $m = 2$ の場合。

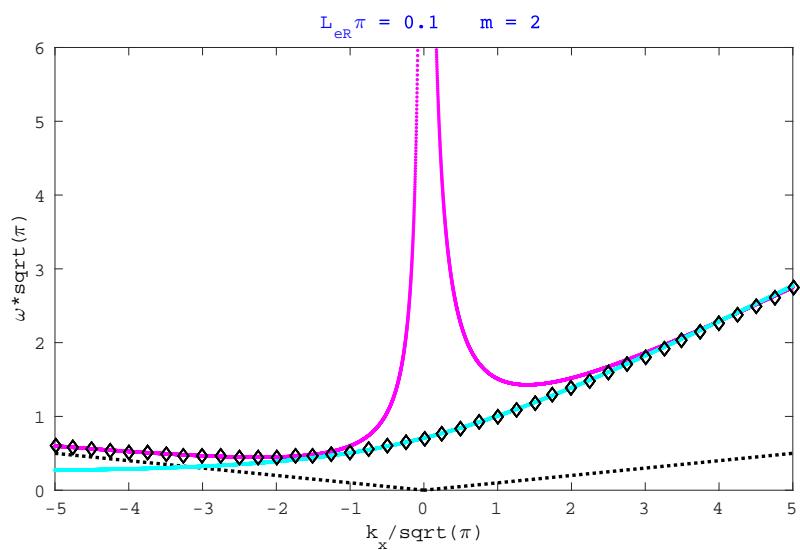
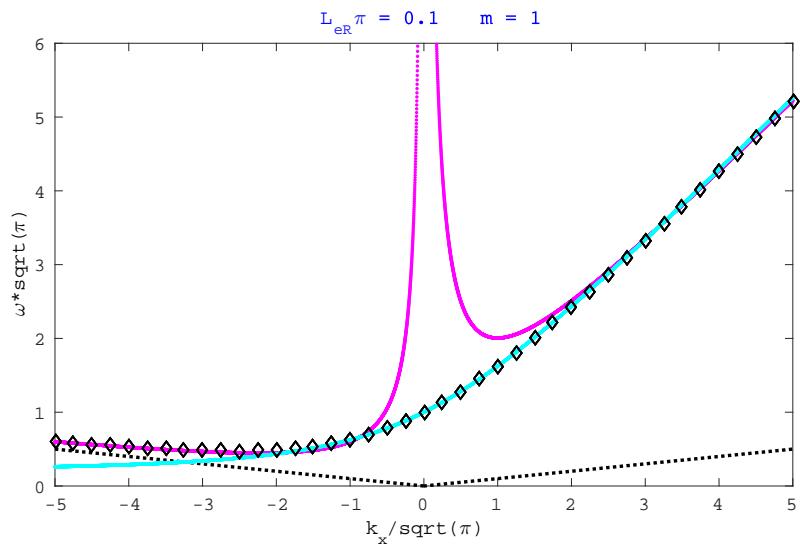


Fig.177 Fig.176と同じであるが、 $L_{eR}\pi = 0.1$ の場合。（上図）鉛直波数 $m = 1$ の場合（浅水波と同じ分散関係）。（下図） $m = 2$ の場合。

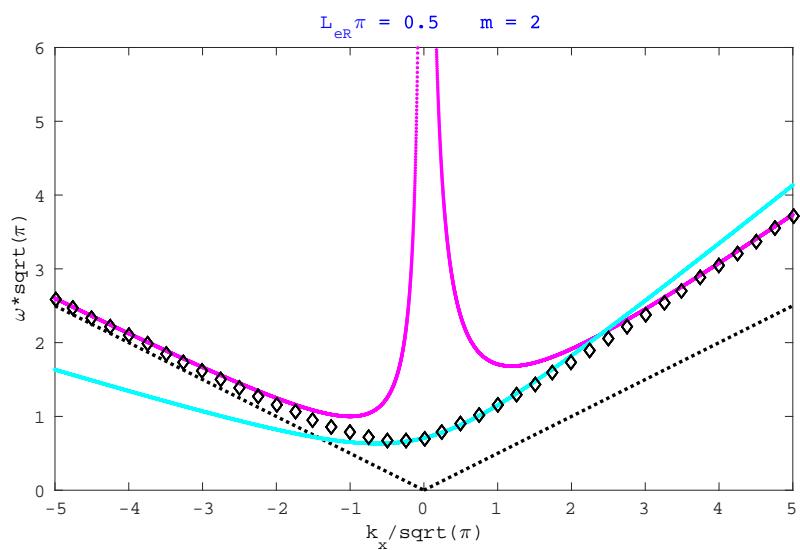
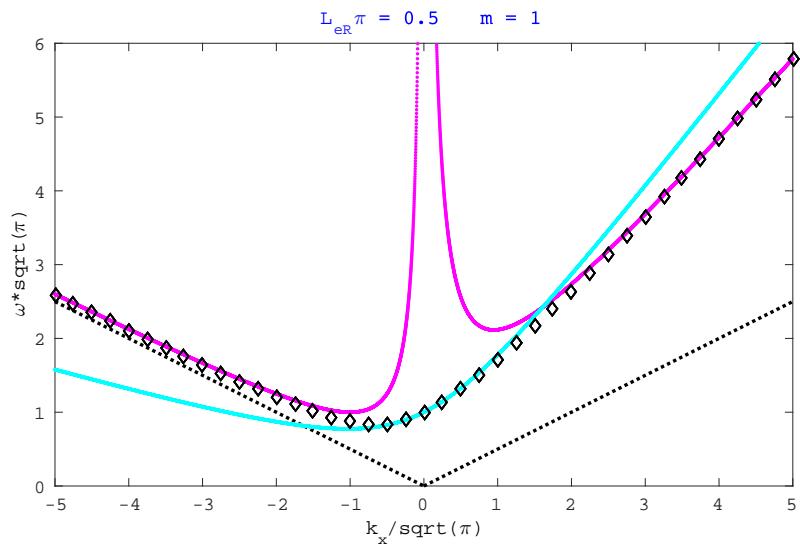


Fig.178 Fig.176と同じであるが、 $L_{eR}\pi = 0.5$ の場合。（上図）鉛直波数 $m = 1$ の場合（浅水波と同じ分散関係）。（下図） $m = 2$ の場合。

付録 H 静水圧近似を用いた薄い球殻（基礎方程式）

流体層は薄く、背景磁場 \mathbf{B} が θ にのみ依存する場合、球座標系を用いると、基礎方程式は、

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}g \quad (\text{H.0.1})$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} - 2\Omega \cos \theta u_\phi = -\frac{1}{a} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) b_\theta}{\rho_0 \mu} + \frac{b_\theta}{a \rho_0 \mu} \frac{dB_\theta}{d\theta} + \frac{B_\theta b_r + b_\theta B_r - 2B_\phi b_\phi \cot \theta}{a \rho_0 \mu} \quad (\text{H.0.2})$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + 2\Omega \cos \theta u_\theta = -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) b_\phi}{\rho_0 \mu} + \frac{b_\theta}{a \rho_0 \mu} \frac{dB_\phi}{d\theta} + \frac{B_\phi b_r + b_\phi B_r}{a \rho_0 \mu} + \frac{B_\phi b_\theta + b_\phi B_\theta}{a \rho_0 \mu} \cot \theta \quad (\text{H.0.3})$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_r - \frac{u_\theta}{a} \frac{dB_r}{d\theta} \quad (\text{H.0.4})$$

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_\theta - \frac{u_\theta}{a} \frac{dB_\theta}{d\theta} + \frac{B_\theta u_r - u_\theta B_r}{a} \quad (\text{H.0.5})$$

$$\frac{\partial b_\phi}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_\phi - \frac{u_\theta}{a} \frac{dB_\phi}{d\theta} + \frac{B_\phi u_r - u_\phi B_r}{a} + \frac{B_\phi u_\theta - u_\phi B_\theta}{a} \cot \theta \quad (\text{H.0.6})$$

$$\frac{\partial \Delta\rho}{\partial t} = \frac{\rho_0 N^2}{g} u_r \quad (\text{H.0.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} u_r \\ b_r \end{pmatrix} + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \begin{pmatrix} u_\theta \\ b_\theta \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} u_\phi \\ b_\phi \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{H.0.8})$$

となる。また、磁場に関する Gauss の法則より、

$$\frac{dB_\theta(\theta)}{d\theta} = -\cot \theta B_\theta \quad (\text{H.0.9})$$

を満たさないといけない。すなわち、

$$B_\theta(\theta) = \frac{A}{\sin \theta} \quad (\text{H.0.10})$$

となる。ここで、 A は定数である。ただし、極 ($\theta = 0, \pi$) で発散するので、 $A = 0$ として、

$$B_\theta(\theta) = 0 \quad (\text{H.0.11})$$

とする。

したがって、基礎方程式は、

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\Delta\rho}{\rho_0}g \quad (\text{H.0.12})$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} - 2\Omega \cos \theta u_\phi = -\frac{1}{a} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) b_\theta}{\rho_0 \mu} + \frac{b_\theta B_r - 2B_\phi b_\phi \cot \theta}{a \rho_0 \mu} \quad (\text{H.0.13})$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} + 2\Omega \cos \theta u_\theta = -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \phi} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) b_\phi}{\rho_0 \mu} + \frac{b_\theta}{a \rho_0 \mu} \frac{dB_\phi}{d\theta} + \frac{B_\phi b_r + b_\phi B_r}{a \rho_0 \mu} + \frac{B_\phi b_\theta + b_\phi B_\theta}{a \rho_0 \mu} \cot \theta \quad (\text{H.0.14})$$

$$\frac{\partial b_r}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_r - \frac{u_\theta}{a} \frac{dB_r}{d\theta} \quad (H.0.15)$$

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_\theta - \frac{u_\theta B_r}{a} \quad (H.0.16)$$

$$\frac{\partial b_\phi}{\partial t} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) u_\phi - \frac{u_\theta}{a} \frac{dB_\phi}{d\theta} + \frac{B_\phi u_r - u_\phi B_r}{a} + \frac{B_\phi u_\theta}{a} \cot \theta \quad (H.0.17)$$

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} = \frac{\rho_0 N^2}{g} u_r \quad (H.0.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r}{b_r} \right) + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \left(\frac{u_\theta}{b_\theta} \right) \right) + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{u_\phi}{b_\phi} \right) = 0 \quad (H.0.19)$$

となる。