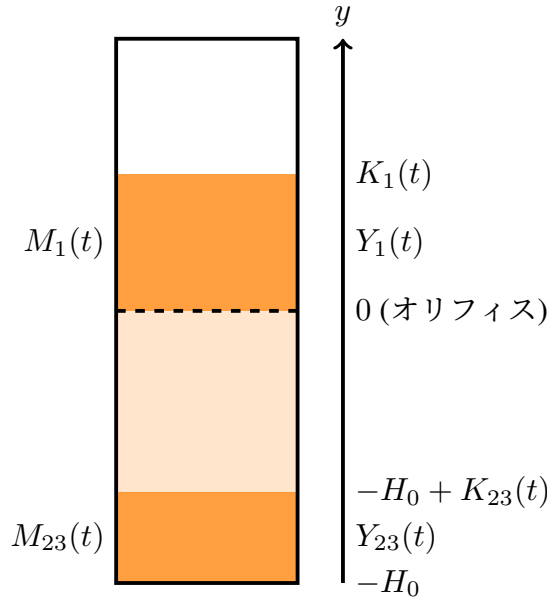


1 Tuinstra & Tuinstra (2010) [1] に載っている計算方法



砂時計を上図のように近似する. 砂 1 粒の質量を m , 砂全体の質量を M_0 とすると, 砂時計の上の砂層の質量 $M_1(t)$ は

$$M_1(t) = M_0 - m\mu t \quad (1)$$

と書ける. ここで, μ は単位時間あたりに落下する砂粒の数で, 粉体の性質により一定である. また, $t = 0$ を砂時計の開始時刻としている.

次に, 砂時計の下の砂層の質量 $M_{23}(t)$ を考える. ここでは, 下の砂層にまだ到達していない落下中の砂粒も $M_{23}(t)$ に含めることにする. すなわち, 落下中の砂粒は速やかに下の砂層につけ加わると仮定する. ゆえに,

$$M_{23}(t) = m\mu t \quad (2)$$

となる. 当然, $M_0 = M_1(t) + M_{23}(t)$ が成り立つ.

今度は上下の砂層の重心の y 座標を考える. ただし, オリフィスの位置を $y = 0$ とする. 砂層の単位長さあたりの線密度を σ とすると, 上の砂層の厚さ $K_1(t)$ は

$$K_1(t) = \frac{M_1(t)}{\sigma} = \frac{M_0 - m\mu t}{\sigma} \quad (3)$$

と書ける. また, 下の砂層の厚さ $K_{23}(t)$ は

$$K_{23}(t) = \frac{M_{23}(t)}{\sigma} = \frac{m\mu t}{\sigma} \quad (4)$$

である. ゆえに, 上の砂層の重心の y 座標 $Y_1(t)$ は

$$Y_1(t) = \frac{K_1(t)}{2} = \frac{M_0 - m\mu t}{2\sigma} \quad (5)$$

となり, 下の砂層の重心の y 座標 $Y_{23}(t)$ は

$$Y_{23}(t) = -H_0 + \frac{K_{23}(t)}{2} = -H_0 + \frac{m\mu t}{2\sigma} \quad (6)$$

となる. ここで, H_0 はオリフィスから砂時計の底面までの距離である.

結局, 砂全体の重心の y 座標 $Y(t)$ は

$$Y(t) = \frac{M_1(t)Y_1(t) + M_{23}(t)Y_{23}(t)}{M_0} \quad (7)$$

と書ける. これを時間で微分すると,

$$\begin{aligned} M_0 \dot{Y}(t) &= M_1(t)\dot{Y}_1(t) + \dot{M}_1(t)Y_1(t) + M_{23}(t)\dot{Y}_{23}(t) + \dot{M}_{23}(t)Y_{23}(t) \\ &= 2\frac{m^2\mu^2}{\sigma}t - m\mu\left(H_0 + \frac{M_0}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

となる. さらに, (1), (2), (5), (6) が時間の 1 次関数であることから, $\dot{M}_1(t)$, $\dot{M}_{23}(t)$, $\dot{Y}_1(t)$, $\dot{Y}_{23}(t)$ が定数となることを用いて,

$$M_0 \ddot{Y}(t) = 2\dot{M}_1(t)\dot{Y}_1(t) + 2\dot{M}_{23}(t)\dot{Y}_{23}(t) = 2\frac{m^2\mu^2}{\sigma} \quad (9)$$

を得る. これが砂全体にはたらく正味の外力であると述べられている.

疑問点 1

部分系の質量 $m_i(t)$ が時間変化する場合、系全体の重心 $\mathbf{G}(t) = \sum_i m_i(t)\mathbf{r}_i(t) / \sum_i m_i(t)$ を時間微分すると

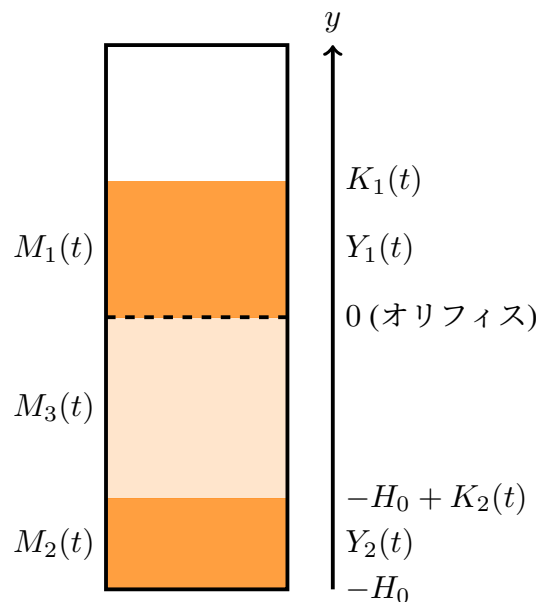
$$\begin{aligned} \sum_i m_i \dot{\mathbf{G}} &= \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \dot{m}_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{G}) \\ \sum_i m_i \ddot{\mathbf{G}} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right) + \sum_i \dot{m}_i (\dot{\mathbf{r}}_i - 2\dot{\mathbf{G}}) + \sum_i \ddot{m}_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{G}) \end{aligned}$$

となる. ここで, 第 1 式の右辺第 1 項 $\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ は全運動量, 第 2 式の右辺第 1 項 $(d/dt)(\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i)$ は系全体にはたらく正味の外力であり, 右辺にそれら以外の項が存在するため, 質量が時間変化しない場合の質点系の力学で知られた結果は成り立たない. 今の問題の場合, $\sum_i \dot{m}_i = 0$ および $\ddot{m}_i = 0$ であるが, これらの条件を反映しても

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \dot{\mathbf{G}} &= \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_i \dot{m}_i \mathbf{r}_i \\ \sum_i m_i \ddot{\mathbf{G}} &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right) + \sum_i \dot{m}_i \dot{\mathbf{r}}_i \end{aligned}$$

となる. そのため, 砂全体にはたらく正味の外力は (9) ではなく $m^2\mu^2/\sigma$ なのではないかと思いたくなるが, Tuinstra & Tuinstra (2010) [1] による実験と陰山ら (2026) [2] による数値シミュレーションは, この「2」の係数まで正しいことを示している.

2 陰山ら (2026) [2] で載せた計算方法 (修正版)



陰山ら (2026) [2] では, 下の砂層と落下中の砂粒を分けて考えた. まず, 上の砂層に関しては, Tuinstra & Tuinstra (2010) [1] と同じである:

$$M_1(t) = \begin{cases} M_0 - m\mu t & (0 \leq t \leq T_0) \\ 0 & (T_0 < t) \end{cases}, \quad K_1(t) = \frac{M_1(t)}{\sigma}, \quad Y_1(t) = \frac{K_1(t)}{2}.$$

ここで, $T_0 = M_0/m\mu$ は砂時計が計る時間である.

落下中の砂粒について考えるため, $-H_0 + K_2(t) \leq y \leq 0$ を満たすある y 座標での落下中の砂粒の速度を $v_y(y)$, そこでの砂粒の数線密度を $n(y)$ とする. これらは定義より

$$n(y)v_y(y) = -\mu \quad (10)$$

を満たす. さらに, 重力加速度 g を用いて,

$$v_y(y) = -\sqrt{-2gy} \quad (11)$$

である. また, 砂粒が下の砂層に到達したときの速度は, $y = -H_0 + K_2(t)$ より

$$v_f(t) = -g\tau_f(t) \quad (12)$$

となる. ここで,

$$\tau_f(t) = \sqrt{\frac{2(H_0 - K_2(t))}{g}} \quad (13)$$

は, 砂粒がオリフィスから自由落下して下の砂層に到達するまでの時間 (自由落下時間) である.

これらから, 落下中の砂粒の質量 $M_3(t)$ は

$$M_3(t) = \begin{cases} m \int_{-gt^2/2}^0 n(y) dy = m\mu t & (0 \leq t \leq \tau_0) \\ m \int_{-H_0+K_2(t)}^0 n(y) dy = m\mu\tau_f(t) & (\tau_0 < t \leq T_0) \\ m \int_{-H_0+K_2(t)}^{-g(t-T_0)^2/2} n(y) dy = m\mu(T_0 + \tau_f(t) - t) & (T_0 < t \leq T_0 + \tau_\infty) \\ 0 & (T_0 + \tau_\infty < t) \end{cases} \quad (14)$$

と求められる. ここで, 下の砂層の厚さは $0 \leq K_2(t) \leq M_0/\sigma$ であるので, 自由落下時間 $\tau_f(t)$ の最大値を $\tau_0 = \sqrt{2H_0/g}$, 最小値を $\tau_\infty = \sqrt{2(H_0 - M_0/\sigma)/g}$ と書いている. したがって, 下の砂層の質量 $M_2(t)$ は

$$M_2(t) = M_0 - M_1(t) - M_3(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq \tau_0) \\ m\mu(t - \tau_f(t)) = m\mu(t - \tau_0) + m\mu(\tau_0 - \tau_f(t)) & (\tau_0 < t \leq T_0 + \tau_\infty) \\ M_0 & (T_0 + \tau_\infty < t) \end{cases} \quad (15)$$

となる. ここで, $\tau_0 < t \leq T_0 + \tau_\infty$ における $M_2(t)$ の式の形を観察しておく. 特に最右辺の第 2 項 $m\mu(\tau_0 - \tau_f(t))$ の存在は, 下の砂層の質量が時間の 1 次関数よりも速く増加することを表している. これは下の砂層の上面が上方に前進することで, 上の砂層が単位時間あたりに失う砂粒よりも多くの砂粒を取り込むことに対応している. 陰山ら (2026) [2] では, $m\mu(\tau_0 - \tau_f(t))$ の項, すなわち $O(\dot{\tau}_f(t))$ の項は無視できることが示されている. なお, (13) と (18) を用いれば

$$\dot{\tau}_f(t) = \frac{m\mu}{m\mu - \sigma g\tau_f(t)} \quad (16)$$

と計算できる.

(15) より, 下の砂層の厚さ $K_2(t)$ と重心の y 座標 $Y_2(t)$ は

$$K_2(t) = \frac{M_2(t)}{\sigma}, \quad Y_2(t) = -H_0 + \frac{K_2(t)}{2} \quad (17)$$

と表される. ただし, $\tau_0 < t \leq T_0 + \tau_\infty$ では, $M_2(t)$ は $\tau_f(t)$ を含み, それは $K_2(t)$ に依存していることに注意が必要である. ゆえに,

$$\dot{K}_2(t) = \frac{m\mu}{\sigma}(1 - \dot{\tau}_f(t)) = v_f(t)\dot{\tau}_f(t) \quad (\tau_0 < t \leq T_0 + \tau_\infty) \quad (18)$$

となる.

これらをもとに, 落下中の砂粒全体と上下の砂層についての運動方程式をたてる. ここで, 落下中の砂粒全体の運動量 $P_3(t)$ は

$$P_3(t) = \begin{cases} m \int_{-gt^2/2}^0 n(y)v_y(y) dy = -m\mu\frac{gt^2}{2} & (0 \leq t \leq \tau_0) \\ m \int_{-H_0+K_2(t)}^0 n(y)v_y(y) dy = -m\mu(H_0 - K_2(t)) & (\tau_0 < t \leq T_0) \\ m \int_{-H_0+K_2(t)}^{-g(t-T_0)^2/2} n(y)v_y(y) dy = -m\mu\left(H_0 - K_2(t) - \frac{g(t-T_0)^2}{2}\right) & (T_0 < t \leq T_0 + \tau_\infty) \\ 0 & (T_0 + \tau_\infty < t) \end{cases} \quad (19)$$

であるので, 上の砂層の運動量を $P_1(t)$, 下の砂層の運動量を $P_2(t)$ とすると, 運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{dP_1(t)}{dt} &= -M_1(t)g + R_1(t) + \dot{M}_1 v_y(0) \\ \frac{dP_3(t)}{dt} &= -M_3(t)g - \dot{M}_1 v_y(0) - \dot{M}_2 v_f(t) \\ \frac{dP_2(t)}{dt} &= -M_2(t)g + R_2(t) + \dot{M}_2 v_f(t)\end{aligned}\quad (20)$$

となる. ここで, $-M_1(t)g$, $-M_2(t)g$, $-M_3(t)g$ は重力であり, $R_1(t)$, $R_2(t)$ は上下の砂層を支える抗力である. また, 右辺の他の項は運動量の流入出を表している. 特に, $\tau_0 < t \leq T_0$ において $\dot{M}_2 v_f(t) = -m\mu(1 - \dot{\tau}_f(t))g\tau_f(t)$ は砂粒が下の砂層に与える単位時間あたりの力積であり, その大きさは落下中の空中に浮いている砂粒の重さ $M_3(t)g = m\mu g\tau_f(t)$ とほとんど等しい.

修正点

陰山ら (2026) [2] では, $P_1(t) = M_1(t)\dot{Y}_1(t)$, $P_2(t) = M_2(t)\dot{Y}_2(t)$ としている. しかし, 下の砂層を構成している砂粒は静止しているはずなので, $P_2(t) = 0$ となるのが自然である. また, 上の砂層の上面を構成している砂粒は T_0 の時間をかけて下方に M_0/σ だけ等速直線運動するので,

$$P_1(t) = M_1(t)\dot{K}_1 = M_1(t) \left(-\frac{M_0/\sigma}{T_0} \right) \quad (21)$$

とする方が自然である. 以下では, これらを修正した上で議論を進める.

運動方程式の両辺の和をとると

$$\frac{dP(t)}{dt} = -M_0g + R_1(t) + R_2(t) \quad (22)$$

が得られる. ここで, 全運動量 $P = P_1(t) + P_3(t) + P_2(t)$ は

$$P = \begin{cases} \frac{m^2\mu^2}{\sigma}t - m\mu \left(\frac{gt^2}{2} + \frac{M_0}{\sigma} \right) & (0 \leq t \leq \tau_0) \\ \frac{m^2\mu^2}{\sigma}t - m\mu \left(H_0 - K_2(t) + \frac{M_0}{\sigma} \right) & (\tau_0 < t \leq T_0) \\ -m\mu \left(H_0 - K_2(t) - \frac{g(t - T_0)^2}{2} \right) & (T_0 < t \leq T_0 + \tau_\infty) \\ 0 & (T_0 + \tau_\infty < t) \end{cases} \quad (23)$$

であり, 結局, 抗力の和は

$$R_1(t) + R_2(t) = M_0g + \begin{cases} \frac{m^2\mu^2}{\sigma} - m\mu g t & (0 \leq t \leq \tau_0) \\ \frac{m^2\mu^2}{\sigma} (2 - \dot{\tau}_f(t)) & (\tau_0 < t \leq T_0) \\ \frac{m^2\mu^2}{\sigma} (1 - \dot{\tau}_f(t)) + m\mu g (t - T_0) & (T_0 < t \leq T_0 + \tau_\infty) \\ 0 & (T_0 + \tau_\infty < t) \end{cases} \quad (24)$$

となる. $0 \leq t \leq \tau_0$ では砂時計の重さは時間とともに線形的に軽くなり, $\tau_0 < t \leq T_0$ では $2m^2\mu^2/\sigma + O(\dot{\tau}_f(t))$ だけ重くなる. その後, $T_0 < t \leq T_0 + \tau_\infty$ では時間とともにおよそ線形的に重くなっていく.

また, $\tau_f(\tau_0) = \tau_0$, $\tau_f(T_0 + \tau_\infty) = \tau_\infty$ より, 実際に積分を実行することで

$$P(T_0 + \tau_\infty) - P(0) = \int_0^{T_0 + \tau_\infty} (-M_0g + R_1(t) + R_2(t)) dt \quad (25)$$

が成り立つことを確認できる.

3 Tuinstra & Tuinstra (2010) [1] の計算方法で落下中の砂粒も考慮した場合

ここでは, 落下中の砂粒を考慮に入れた砂全体の重心の y 座標 $Y_*(t)$ を計算する:

$$M_0 Y_*(t) = M_1(t) Y_1(t) + M_2(t) Y_2(t) + \begin{cases} m \int_{-gt^2/2}^0 n(y) y dy & (0 \leq t \leq \tau_0) \\ m \int_{-H_0+K_2(t)}^0 n(y) y dy & (\tau_0 < t \leq T_0) \\ m \int_{-H_0+K_2(t)}^{-g(t-T_0)^2/2} n(y) y dy & (T_0 < t \leq T_0 + \tau_\infty) \\ 0 & (T_0 + \tau_\infty < t) \end{cases}. \quad (26)$$

これを時間で微分すると,

$$\begin{aligned} M_0 \dot{Y}_*(t) &= M_1(t) \dot{Y}_1(t) + \dot{M}_1(t) Y_1(t) + M_2(t) \dot{Y}_2(t) + \dot{M}_2(t) Y_2(t) \\ &+ \begin{cases} -m\mu \frac{gt^2}{2} & (0 \leq t \leq \tau_0) \\ m\mu(-H_0 + K_2(t)) \dot{\tau}_f(t) & (\tau_0 < t \leq T_0) \\ m\mu \frac{g(t-T_0)^2}{2} + m\mu(-H_0 + K_2(t)) \dot{\tau}_f(t) & (T_0 < t \leq T_0 + \tau_\infty) \\ 0 & (T_0 + \tau_\infty < t) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{m^2 \mu^2}{\sigma} t - m\mu \left(\frac{gt^2}{2} + \frac{M_0}{\sigma} \right) & (0 \leq t \leq \tau_0) \\ \frac{m^2 \mu^2}{\sigma} (2t - \tau_f(t)) - m\mu \left(H_0 + \frac{M_0}{\sigma} \right) & (\tau_0 < t \leq T_0) \\ \frac{m^2 \mu^2}{\sigma} (t - \tau_f(t)) - m\mu \left(H_0 - \frac{g(t-T_0)^2}{2} \right) & (T_0 < t \leq T_0 + \tau_\infty) \\ 0 & (T_0 + \tau_\infty < t) \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

となり, これは (23) と一致している.

疑問点 2

疑問点 1 で示された不一致があるにもかかわらず, 重心速度 (27) と全運動量 (23) が一致しているのはなぜか.

参考文献

- [1] Tuinstra, F. and Tuinstra, B. F. The weight of an hourglass. *Europhysics News*, Vol. 41, No. 3, pp. 25–28, 2010.
- [2] 陰山聡, 中島涼輔, 中戸昂明. 砂時計の重さ. *日本シミュレーション学会論文誌*, Vol. 18, No. 1, pp. 1–10, 2026.