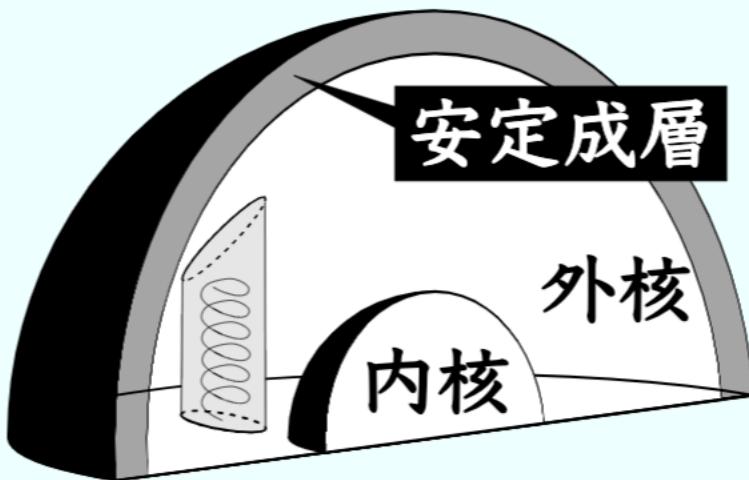


Two-dimensional (2D) ideal magnetohydrodynamic (MHD)
waves on a rotating sphere under a non-Malkus field:

II. Pseudomomentum and mean fields evolution

[plain language イントロ]

- ✓ 回転する球を覆う極薄い磁気流体の層を伝播する波の研究
- ✓ 地球外核の最上部にあるかもしれない安定成層をイメージ
- ✓ このような波を地磁気変動の説明として使えるか?



中島 涼輔 (九州大学 大学院理学研究院)

- ⚙️ [O] Overview Mode / [F] Fullscreen Mode
- ⚙️ [G+number] Jump to Slide



1. はじめに > 2. 目的と方法 > 3. 時間が余ったときのスライド > 4. まとめ

arXiv > physics > arXiv:2310.01341

Search... All fields Help | Advanced Search

Physics > Fluid Dynamics

[Submitted on 2 Oct 2023]

Two-dimensional ideal magnetohydrodynamic waves on a rotating sphere under a non-Malkus field: I. Continuous spectrum and its ray-theoretical interpretation

Ryosuke Nakashima

Faculty of Science,

Two-dimensional (2D) magnetohydrodynamic (MHD) waves on a rotating sphere have been studied in the Earth's core or the solar interior. A non-Malkus field is considered, where the background field, which is parallel to the rotation axis, has a vertical component. The magnetic Rossby number (Ro_m) is defined as the ratio of the meridional velocity to the zonal velocity. In this case, Ro_m is much smaller than unity, and the eigenmode is called a "singular eigenmode". The singular eigenmode propagates toward the equator, and its dispersion relation is derived. The results are compared with the previous studies by other researchers.

Nakashima & Yoshida (Part. I, submitted)

プレプリント

arXiv, doi: [10.48550/arXiv.2310.01341](https://doi.org/10.48550/arXiv.2310.01341)

EarthArXiv, doi: [10.31223/X5Z67T](https://doi.org/10.31223/X5Z67T)

本発表は、この論文 (NY-I) の続き（結果はまだない）

Comments: 47 pages, 3 figures

Subjects: Fluid Dynamics

Cite as: arXiv:2310.01341

(or arXiv:2310.01341v1 [physics.flu-dyn] for this version)

<https://doi.org/10.48550/arXiv.2310.01341> ⓘ

Submission history

From: Ryosuke Nakashima [[view email](#)]

[v1] Mon, 2 Oct 2023 17:04:54 UTC (23,159 KB)

Bibliographic Tools

Code, Data, Media

Demos

Related Papers

About arXivLabs

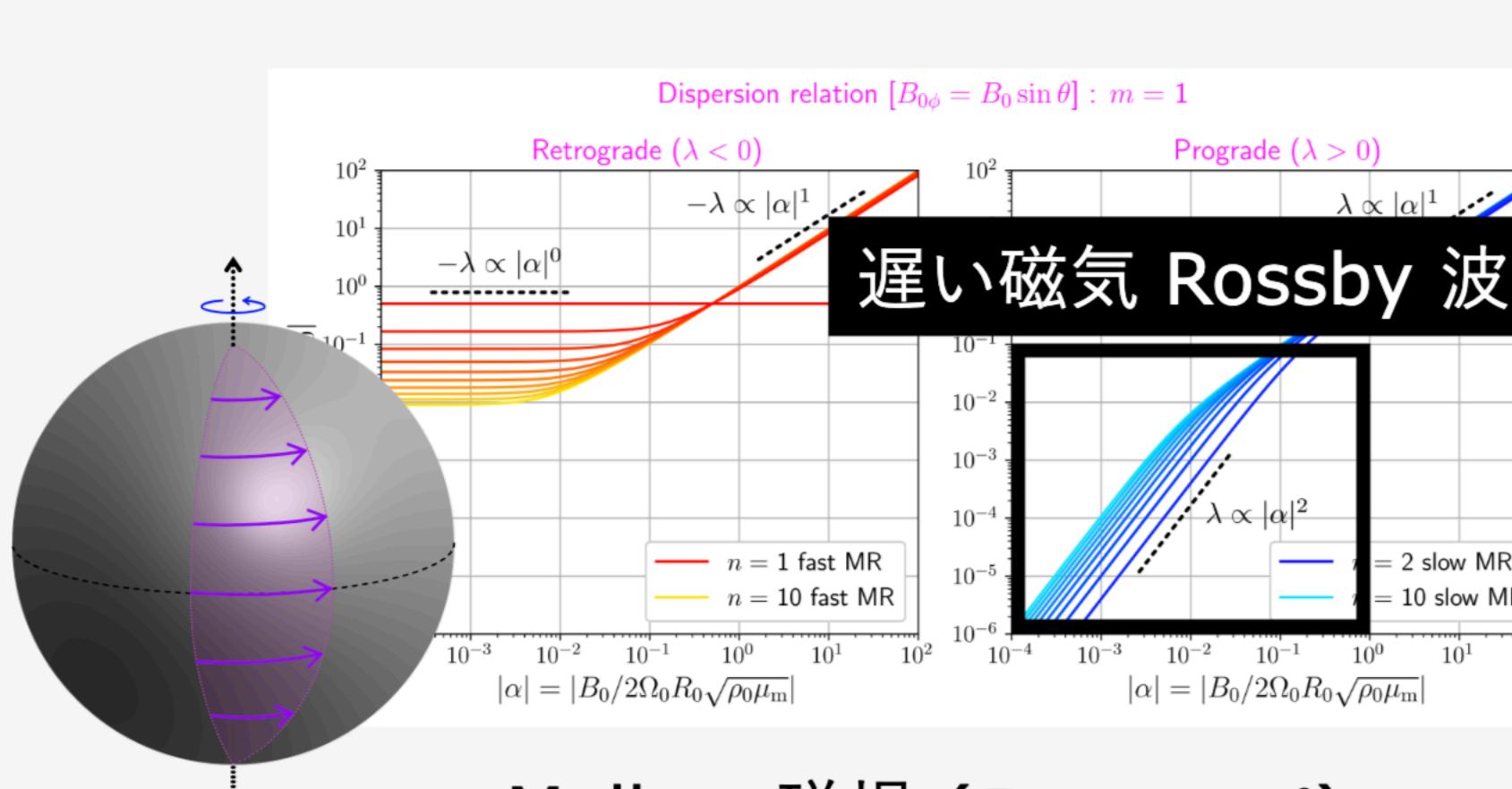
arXivLabs: experimental projects with community collaborators



1. はじめに > 2. 目的と方法 > 3. 時間が余ったときのスライド > 4. まとめ

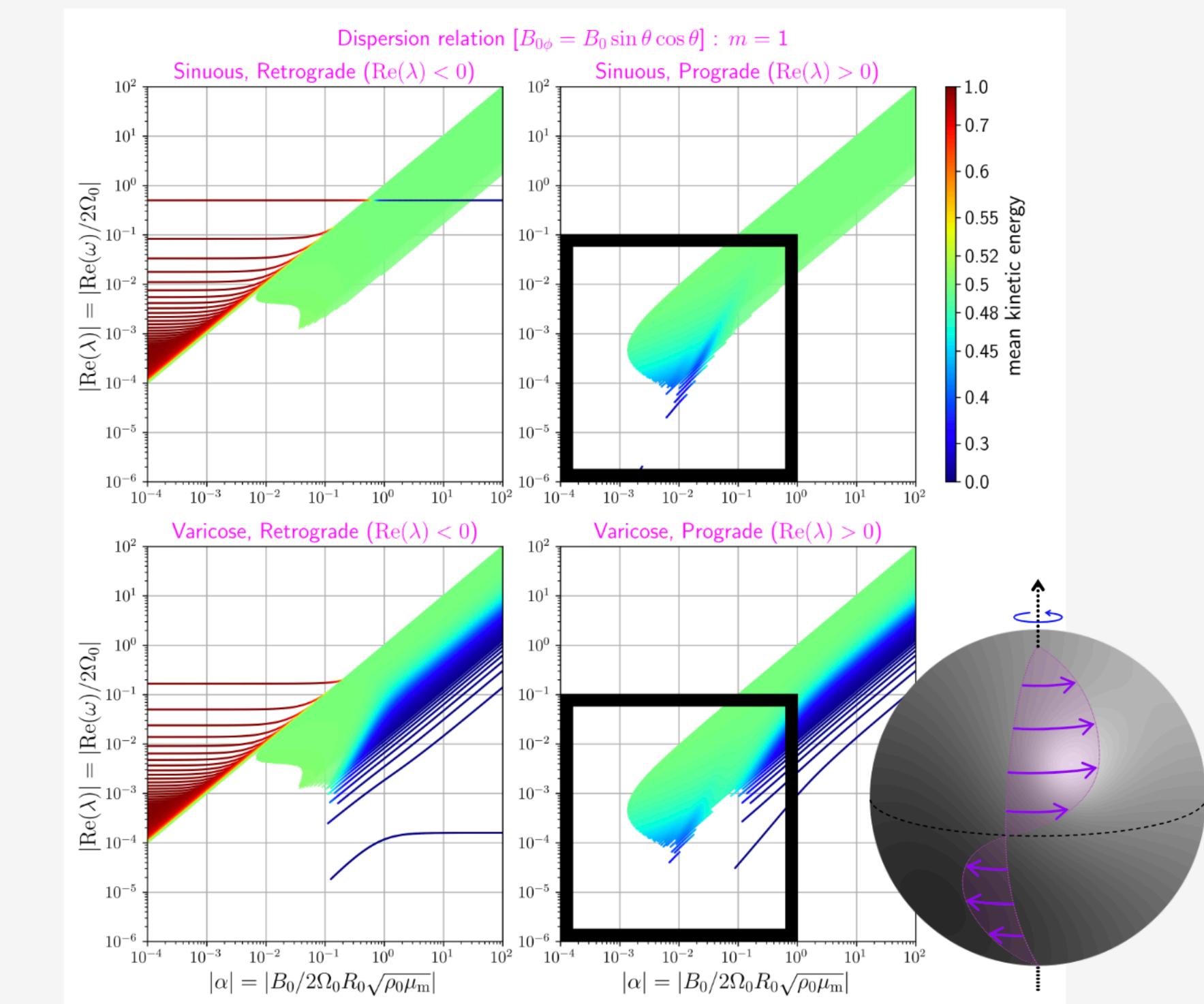
NY-I まとめ (1. 連続スペクトルに変化)

- 非 **Malkus** 磁場下では、遅い磁気 Rossby 波 (**地磁気変動に重要?**) の固有モードが消えてしまい 連続スペクトルに変化



Malkus 磁場 ($B_{0\phi} \propto \sin \theta$)

($B_0 = B_{0\phi} \hat{e}_\phi$: 背景磁場, θ : 余緯度, ϕ : 方位角)

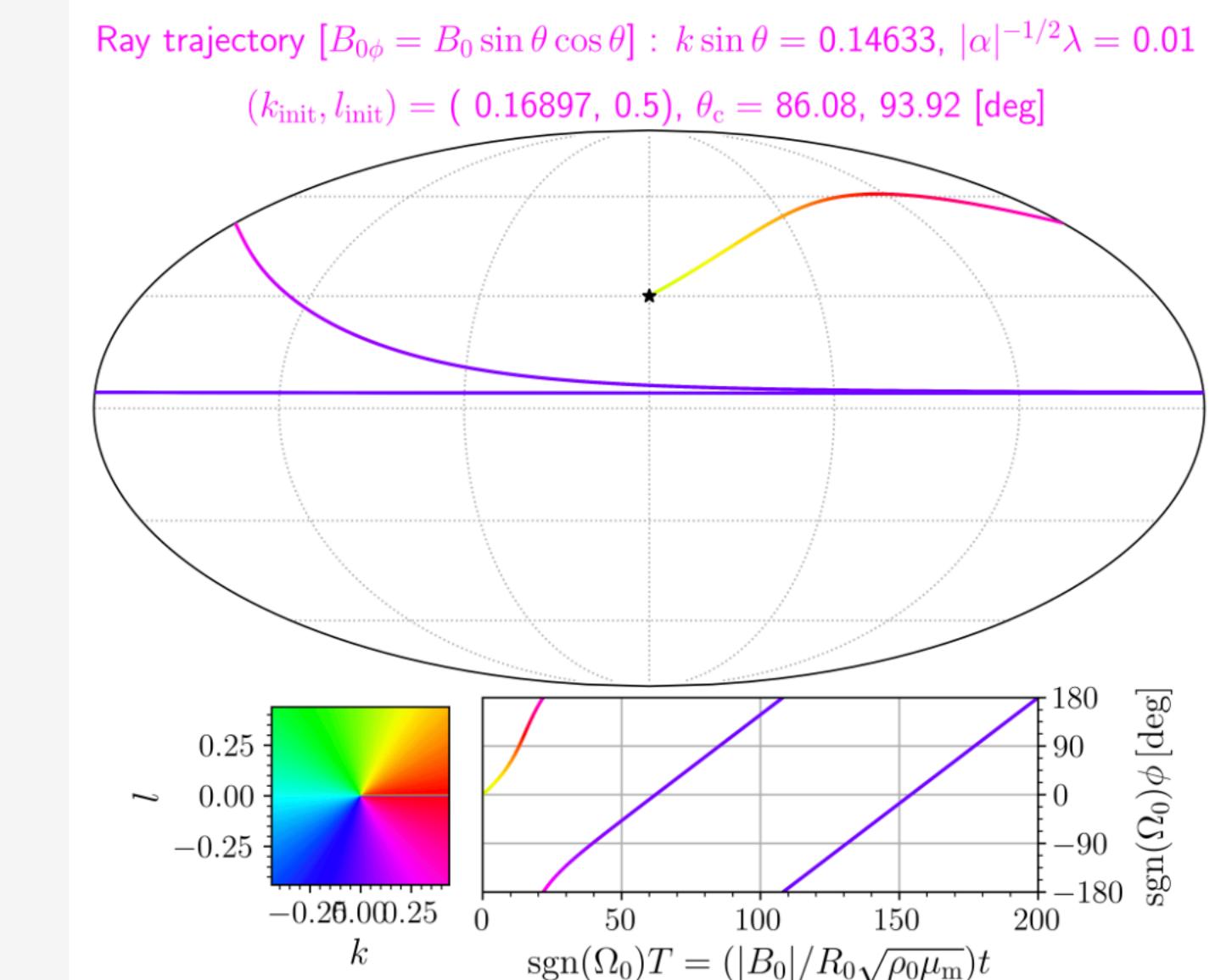


$B_{0\phi} \propto \sin \theta \cos \theta$

1. はじめに > 2. 目的と方法 > 3. 時間が余ったときのスライド > 4. まとめ

NY-I まとめ (2. 波線理論を考える)

- ✓ それでは、
連続スペクトルが地磁気変動に重要?
- ✓ 連続スペクトルに対応する波は
「磁場の影響 / 回転の影響」の比が
地球コア条件のとき波長が短い
- ✓ 波線理論 (WKBJ 近似;
背景場よりも**波の空間スケール小**) で
波の伝播を調べた
 - ▶ 臨界緯度で波が吸収される
 - ▶ 波束がもつ**保存量**

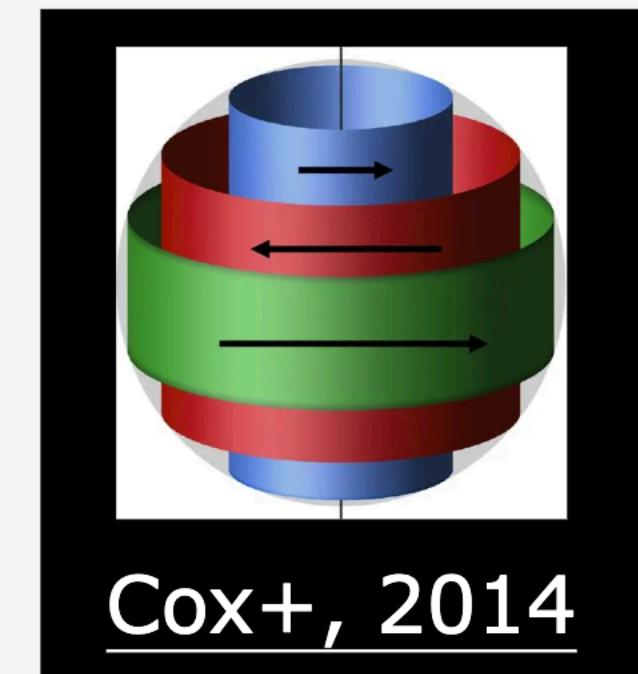


【星印】初期位置
【色】位相速度の向き

1. はじめに > 2. 目的と方法 > 3. 時間が余ったときのスライド > 4. まとめ

NY-I まとめ (3. 波束がもつ保存量 = 擬運動量?)

- ✓ WKBJ 近似に使う小さいパラメータ:
「磁場の影響 / 回転の影響」の比
($\sim 10^{-4}$ @地球コア; 6 年周期 torsional waves ([Gillet+, 2010](#)))



- ✓ WKBJ 最低次 → 局所分散関係: $\mathcal{D}(\phi, \theta, T, k, l, \hat{H}) = 0$

(ϕ : 方位角, θ : 余緯度, T : 時間, k : 東西波数, l : 南北波数, \hat{H} : intrinsic 角周波数)

- ✓ WKBJ 次のオーダー (M : 波の振幅, c_g : 群速度)

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{k \sin \theta} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \hat{H}} |M|^2 \right) + \nabla \cdot \left(\frac{c_g}{k \sin \theta} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \hat{H}} |M|^2 \right) = 0$$

- ✓ WKBJ 近似の下での擬運動量保存則に相当 (NY-II で示す予定)

1. はじめに > 2. 目的と方法 > 3. 時間が余ったときのスライド > 4. まとめ

擬運動量（波の作用、波の活動度；呼び方いろいろ）とは？

※ これからしばらくは MHD ではなく HD (hydrodynamics) の話

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F} = -D + S, \quad \mathcal{F} \stackrel{\text{WKBJ}}{\approx} \mathcal{P} c_g$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F} = \nu \nabla^2 U$$

\mathcal{P}	擬運動量密度
\mathcal{F}	波の運動量フラックス
$-D + S$	散逸 + ソース項
c_g	群速度
U	平均東西流

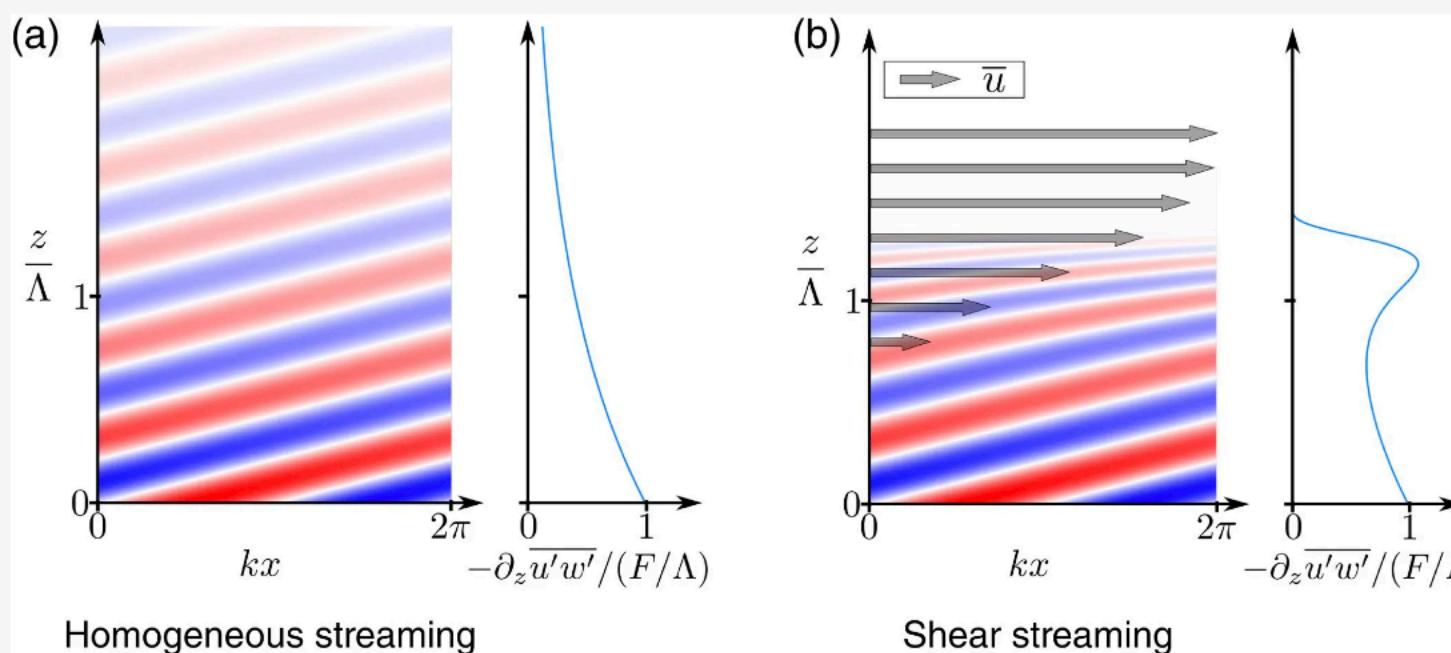
- ✓ \mathcal{F} から波の伝播経路 (c_g) を推測可
- ✓ $-\nabla \cdot \mathcal{F}$ から波による平均流の加速 ($\partial U / \partial t$) がわかる
- ▶ 波が統計的に定常 ($(\partial \mathcal{P} / \partial t) = 0$) なら
波の散逸 ($-D$) によって $\nabla \cdot \mathcal{F}$ が生じる (非加速定理)
- ✓ **本研究 (MHD) でも似たような議論ができるのでは？**

1. はじめに > 2. 目的と方法 > 3. 時間が余ったときのスライド > 4. まとめ

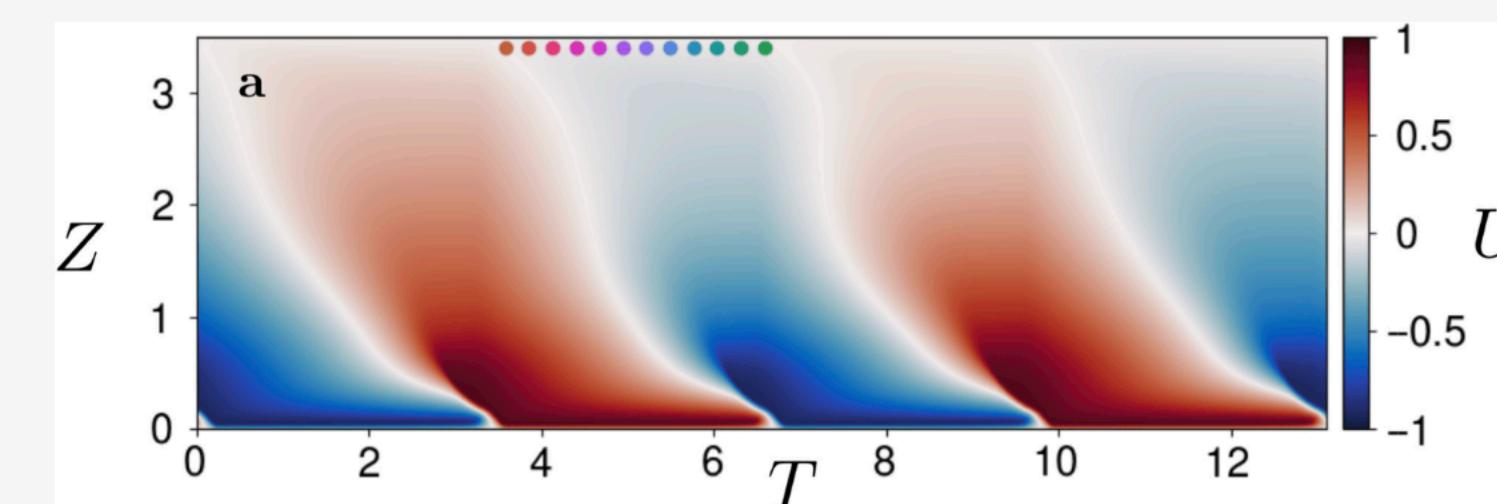
Holton-Lindzen-Plumb (HLP) モデル

e.g. Renaud & Venaille (2020)

水平位相速度 $c > 0$ **(a)** Newton 冷却
(b) シアーエ流 + Newton 冷却



水平位相速度の符号だけが異なる
2つの波が下方から伝播する場合の
平均流の時間発展



- Newton 冷却 (γ) 入り, シアーエ流 ($U(z)$) 中の内部重力波
- WKBJ 解析解より $\nabla \cdot \mathcal{F}$ を計算 (or $\nabla \cdot \mathcal{F} = -\gamma(\mathcal{F}/c_g) + S$ を解く)
- 臨界高度 ($U = c$) で波が吸収 ($-\nabla \cdot \mathcal{F}$ 大) → 平均流加速
- 平均流の周期的変動が可能 (成層圏準 2 年周期振動の説明?)

1. はじめに > 2. 目的と方法 > 3. 時間が余ったときのスライド > 4. まとめ

平均流の時間発展式の補足

- ✓ 複スケール解析 (ε : 線形波動の振幅, $U + \varepsilon u_x + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$)
- ▶ 線形波動の周期の時間スケール: $t_0 = t$
- ▶ 平均流が変化する時間スケール: $t_2 = \varepsilon^2 t$ (波にとっては一定)
- ✓ $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ の式を東西平均, t_0 についての時間平均 ($\tilde{f} = (1/T_0) \int_0^{T_0} f dt_0$)

$$\frac{\partial U}{\partial t_2} + \nabla \cdot \widetilde{\mathcal{F}} = \nu \nabla^2 U, \quad \mathcal{F}_z = \frac{1}{L} \int_0^L u_x u_z dx$$

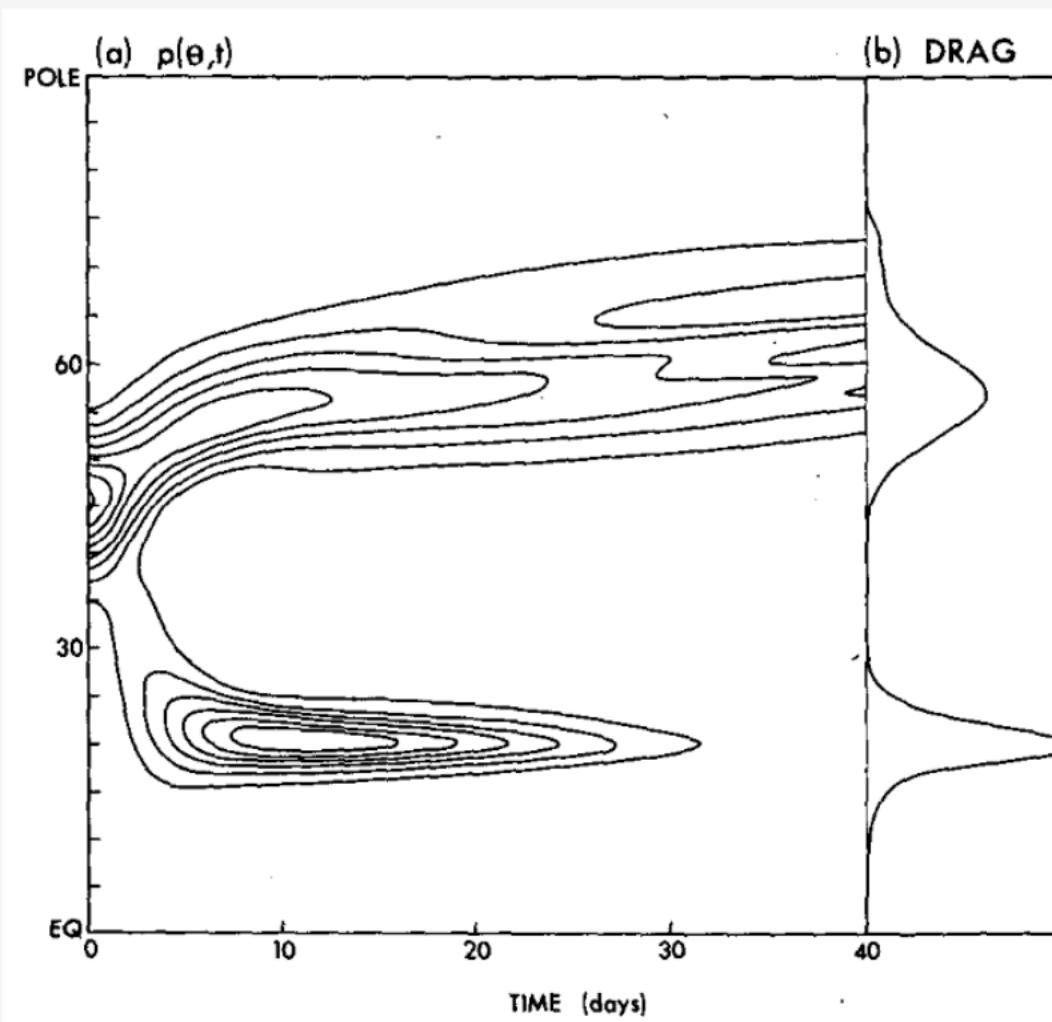
- ▶ 粘性 $\nu \sim \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $\nabla^2 U \sim \mathcal{O}(\varepsilon^0)$ を仮定
- ✓ HLP モデルでは, **波と平均流の時間・空間スケールが完全に分離**していると仮定 ($\rightarrow \mathcal{F}$ は WKBJ 解析解から計算)

1. はじめに > 2. 目的と方法 > 3. 時間が余ったときのスライド > 4. まとめ

Rossby 波クロマトグラフィー

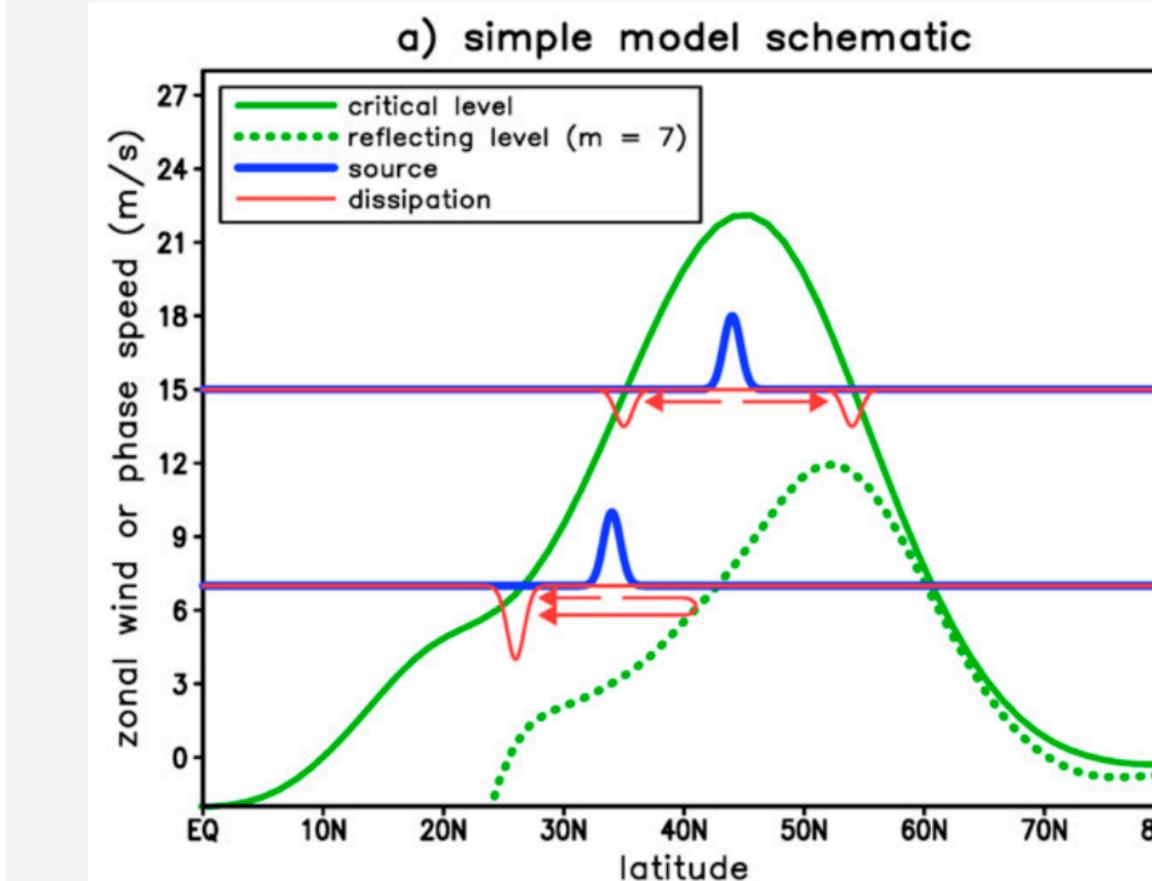
Held & Phillips (1987)

初期値問題 (線形, $m = 6$)



Lorenz (2023)

Rossby 波クロマトグラフィーの
イメージ



- HLP モデルの南北伝播版 (本研究向き?)
- 傾圧不安定由来のソース項をもつ順圧 Rossby 波の伝播

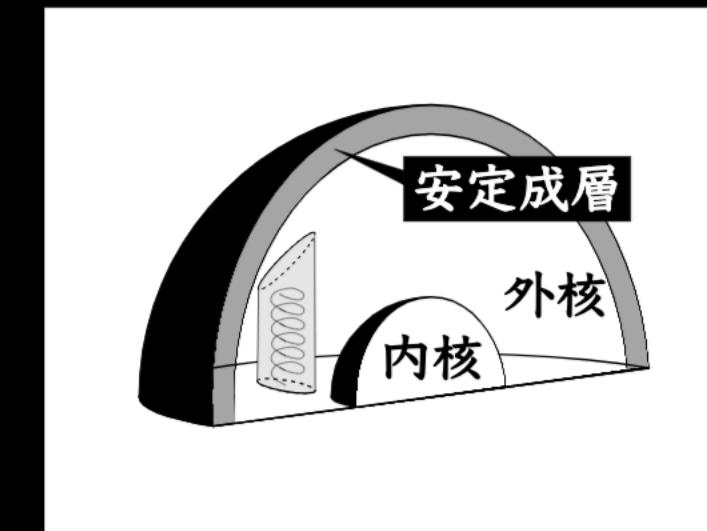
1. はじめに > 2. 目的と方法 > 3. 時間が余ったときのスライド > 4. まとめ

本研究でやりたいこと

NY-I で連続スペクトルに対応する波の伝播について
詳しく調べたので何かしたい

「磁気」 **Rossby** 波クロマトグラフィー はどうか?...

- < 外核最上部安定成層より深い領域の対流をソース項に? >



- 対流セルが多い緯度範囲 (?) から南北に波が伝播し
外核最上部の平均流が時間発展?

1. はじめに > 2. 目的と方法 > 3. 時間が余ったときのスライド > 4. まとめ

基礎方程式（理想 MHD・球面 2D）

- ✓ 線形化した渦度方程式 w/ Lorentz 力
- ✓ 流体粒子の変位 ξ の式（誘導方程式の代わり）
 - ▶ 理想 MHD では、磁力線は流体に「凍り付く」

$$\frac{D_0 \xi}{Dt} = \mathbf{u} + (\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla)(U_{0\phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi)$$

(\mathbf{u} : 速度摂動, $U_0 = U_{0\phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi$: 背景流, $(D_0/Dt) = (\partial/\partial t) + (\mathbf{U}_0 \cdot \nabla)$)

- ✓ [Note] なぜ変位の式? → 本研究で扱う理論の延長
 - ▶ 一般化 Lagrange 平均理論 (e.g. [Andrews & McIntyre, 1978](#))
 - ▶ ダイナモ理論でオイラーとラグランジュを混ぜて扱う (e.g. [Moffatt, 1978](#); [Roberts & Soward, 2006](#))

1. はじめに > 2. 目的と方法 > 3. 時間が余ったときのスライド > 4. まとめ

(理想 MHD・球面 2D での) 擬運動量保存則

- ✓ 渦度方程式(線形)と変位 ξ の式を組み合わせて、
経度平均 ($\bar{f} = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} f d\phi$)

(\mathbf{u} : 速度摂動, \mathbf{b} : 磁場摂動, ζ : 渦度摂動, $Z_0 + 2\Omega_0 \cos \theta$: 背景の絶対渦度,
 ρ_0 : 密度, R_0 : コア半径, μ_m : 透磁率, θ : 余緯度, ϕ : 方位角)

$$\frac{\partial(\rho_0 \mathcal{P} \sin \theta)}{\partial t} + \frac{1}{R_0 \sin \theta} \frac{\partial(\mathcal{F} \sin \theta)}{\partial \theta} = 0$$

$$\mathcal{P} = -\overline{\zeta \xi_\theta} - \frac{\overline{\xi_\theta^2}}{2R_0} \frac{d(Z_0 + 2\Omega_0 \cos \theta)}{d\theta}, \quad \mathcal{F} = \left(\rho_0 \overline{u_\theta u_\phi} - \frac{\overline{b_\theta b_\phi}}{\mu_m} \right) \sin \theta$$

- ✓ これらを WKBJ 近似すると, NY-I で得られた保存則と一致

弱い散逸の下での WKBJ 解析解 (非粘性)

- ✓ Ohm 散逸入り誘導方程式 (線形) で計算し直して,
WKBJ 近似 ($|\alpha|$: 「磁場の影響 / 回転の影響」の比, $E_\eta \sim O(|\alpha|^2)$ と仮定)

$$\mathcal{F} \sin \theta \propto \frac{\operatorname{sgn}[l(\hat{H}^2 - k^2 \mathcal{B}^2 \sin^2 \theta)]}{2k \sin \theta} \exp \left[-2 \int^\theta E_\eta |\alpha|^{-2} \frac{[\hat{H}(k^2 + l^2) + k \sin \theta](k^2 + l^2)}{2l(\hat{H}^2 - k^2 \mathcal{B}^2 \sin^2 \theta)} \Big|_{\theta=\theta_*} d\theta_* \right]$$

(\mathcal{F} : 波の運動量フラックス, k : 東西波数, l : 南北波数, \hat{H} : intrinsic 角周波数,
 $E_\eta |\alpha|^{-2}$: Ohm 散逸の大きさ ($\sim (\text{Elsasser 数})^{-1}$), \mathcal{B} : 背景磁場分布, θ : 余緯度)

- ✓ 臨界緯度 ($\hat{H}^2 = k^2 \mathcal{B}^2 \sin^2 \theta$, $l^2 \rightarrow \infty$) で \mathcal{F} が急激に変化
(波が臨界緯度付近で平均流を加速)
- ✓ \mathcal{F} を平均流の時間発展式に代入すれば,
波による平均流の時間変化を計算できる (!)

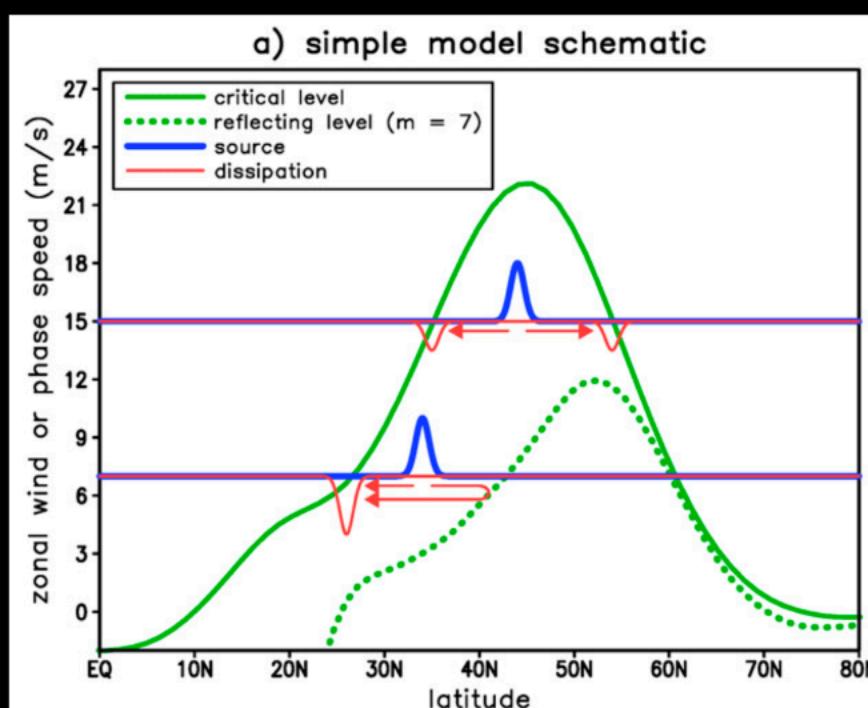
1. はじめに > 2. 目的と方法 > 3. 時間が余ったときのスライド > 4. まとめ

これで平均流の時間発展を計算する準備が整った?

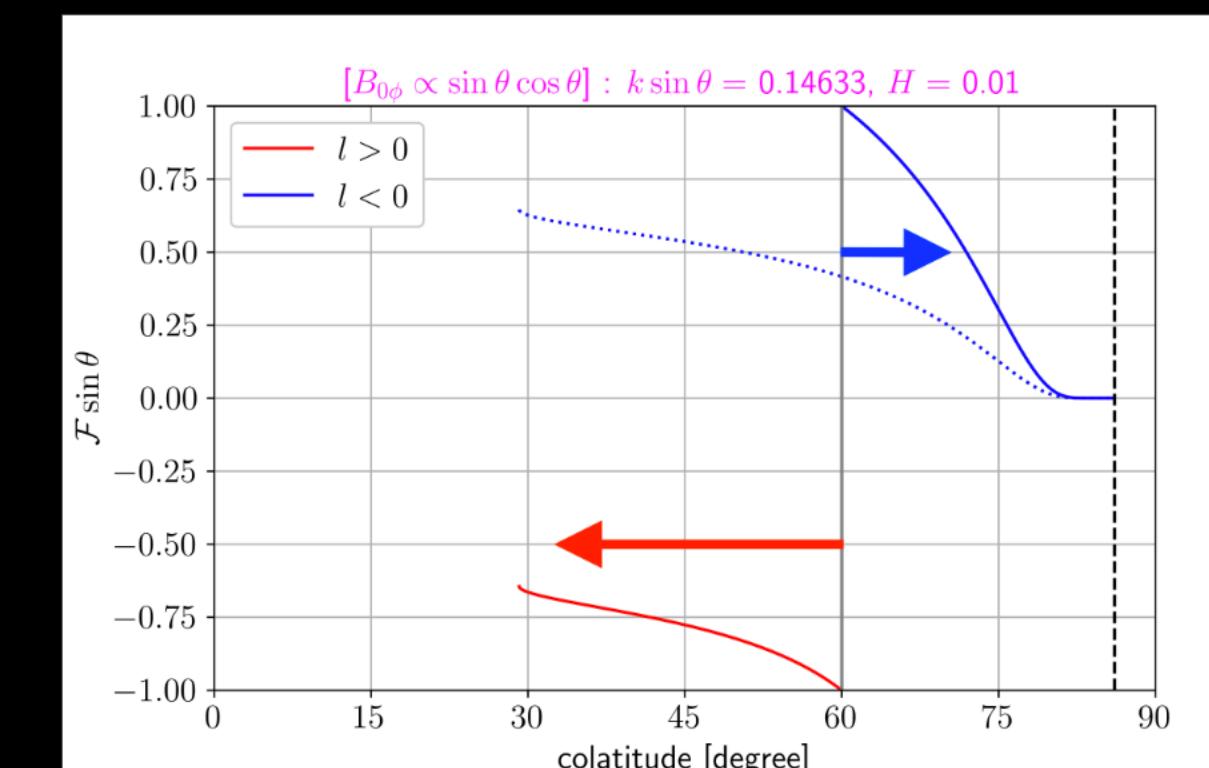
Rossby 波クロマトグラフィーで困ってるところ

Lorenz (2023)

Rossby 波クロマトグラ
フィーのイメージ



- HLP モデルと違って, 反射あり
- ▶ 近くで WKBJ 破綻 (e.g. NY-I)
- ▶ 反射をどう表現すべきか考え中



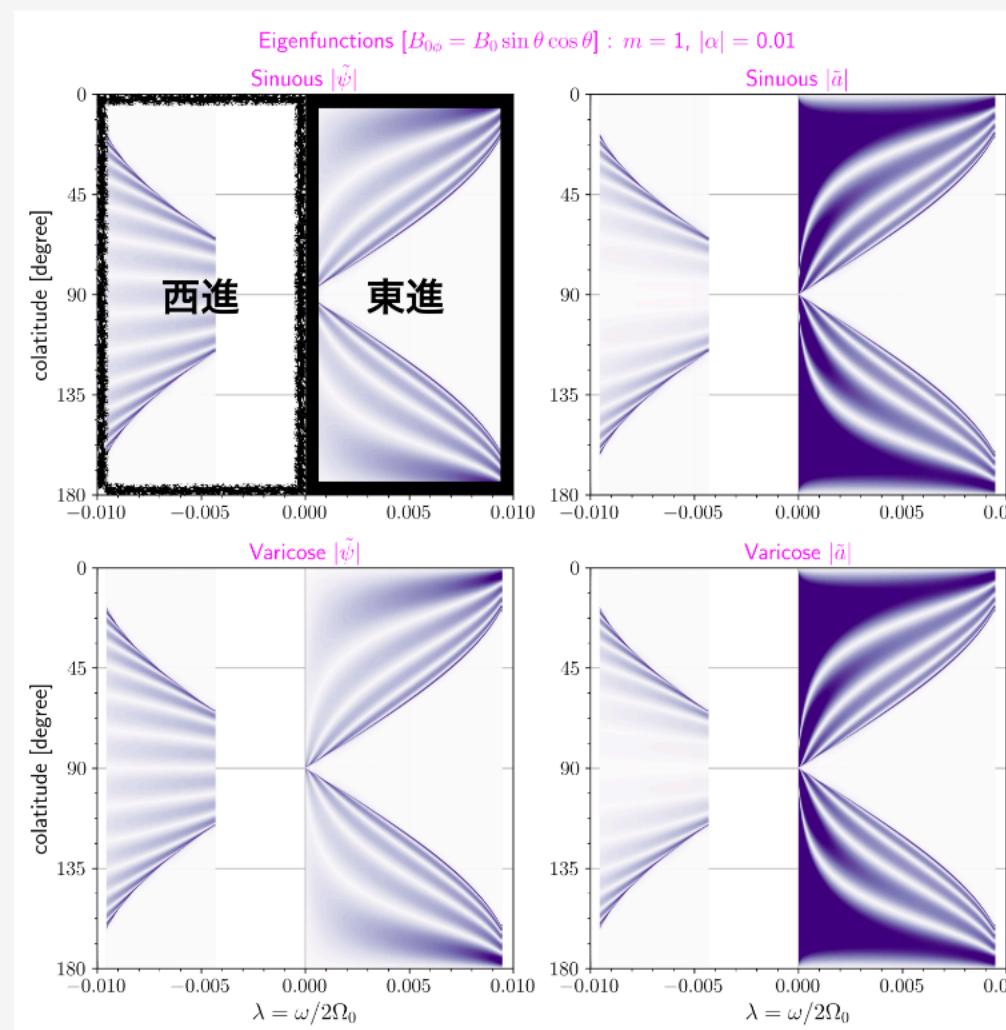
ソース: 60°
臨界緯度: 85°
反射: 30°

東進波
東向き加速:
 $-[\partial(\mathcal{F} \sin \theta)/\partial \theta] > 0$

- いいアイデアがあったら教えてください

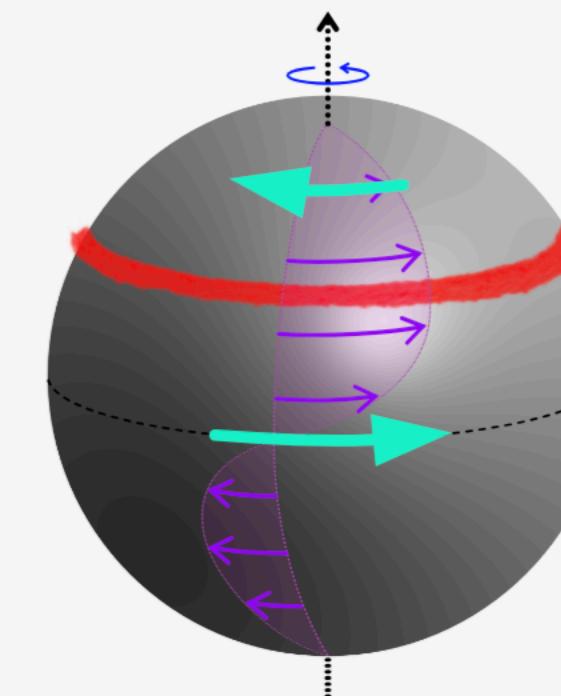
1. はじめに > 2. 目的と方法 > 3. 時間が余ったときのスライド > 4. まとめ

平均流の時間発展の雑な予想



連続スペクトルに対応する
波の固有関数

- ✓ WKBJ 近似では $\rho_0 \mathcal{P} \sin \theta = (m/R_0) E/\hat{\omega}$ と
 $\mathcal{F} = -(\rho_0 \mathcal{P} \sin \theta) c_{g,-\theta}$ なので
 - ▶ 赤道側に進む東進波: 東向き加速
 - ▶ 極側に進む西進波: 西向き加速



(\mathcal{P} : 擬運動量, \mathcal{F} : 波の運動量フラックス, m : 方位角波数, $\hat{\omega}$: intrinsic 角周波数,
 E : 摂動エネルギー, $c_{g,-\theta}$: 北向き群速度, ρ_0 : 密度, R_0 : コア半径, θ : 余緯度)

1. はじめに > 2. 目的と方法 > 3. 時間が余ったときのスライド > 4. まとめ

平均流の時間発展だけじゃなく、もう少し拡張したい...
(そもそも地磁気変動を議論したかった)

平均場ダイナモ (e.g. Moffatt, 1978)

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \mathcal{E} + \eta \nabla^2 A, \quad \mathcal{E} = \alpha_{r\phi} B + \dots$$

A	平均ベクトルポテンシャル
\mathcal{E}	平均誘導起電力
B	平均東西磁場

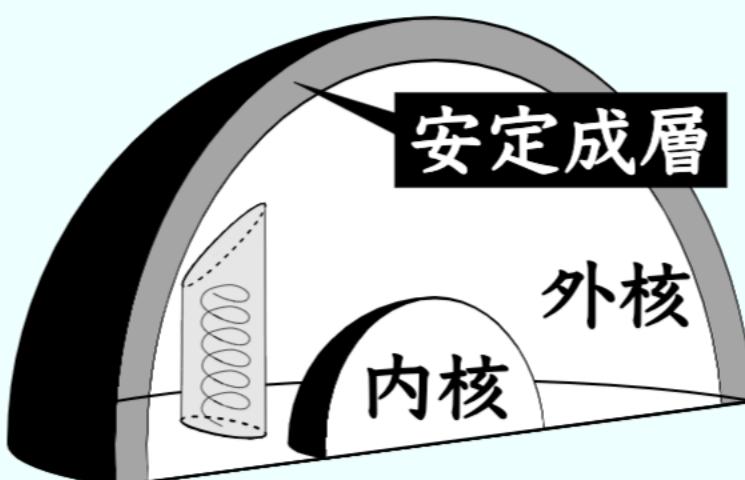
- ✓ 波由来の \mathcal{E} を計算すれば、平均磁場の時間発展も議論できる?
- ✓ [問題点] $\mathcal{E} = 0$?
 - ▶ WKBJ では、最低次で $\mathcal{E} = 0$ になることを確認
 - ▶ α はヘリシティ (要 3D) と関係
- ✓ 背景磁場の時間発展は今回あきらめる

1. はじめに > **2. 目的と方法** > 3. 時間が余ったときのスライド > 4. まとめ

Two-dimensional (2D) ideal magnetohydrodynamic (MHD)
waves on a rotating sphere under a non-Malkus field:

II. Pseudomomentum and mean ~~fields~~ flow evolution

タイトル変更



中島 涼輔 (九州大学 大学院理学研究院)

- ⚙️ [O] Overview Mode / [F] Fullscreen Mode
- ⚙️ [G+number] Jump to Slide



1. はじめに > 2. 目的と方法 > **3. 時間が余ったときのスライド** > 4. まとめ

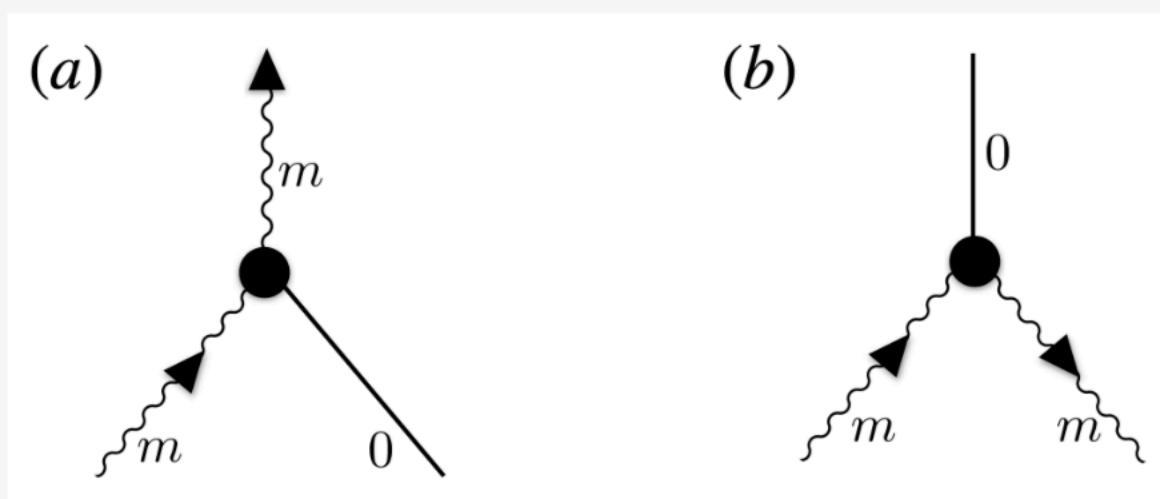
上手くいかなかった場合のプラン

プラン B (WKBJ 不使用, 時間スケールだけ分離)

1. 強制 + 散逸ありの線形化した方程式を数値的に時間積分
2. (統計的定常になった頃合いで?) \mathcal{F} , \mathcal{E} を計算し時間平均
3. 背景場の時間発展式で背景場を更新し, 1. に戻る

プラン C (スケール分離を仮定しない)

準線形近似モデルで, 波と平均場の相互作用に注目



Plummer+ (2019)
準線形近似 (非線形項において
 $(m, 0) \rightarrow m$ と $(m, m) \rightarrow 0$ のみ計算)

固有モード間の擬運動量についての直交性

- ✓ 線形化した式から得られる波の解: 固有モード
- ✓ 2つの固有モードが共存する場合を考える
 - ▶ このとき, 運動エネルギー $\propto \int_0^\pi (\bar{u}_1^2 + \bar{u}_2^2 + 2\bar{u}_1\bar{u}_2) \sin \theta d\theta$
(u_i : 固有モード i (1 or 2) の速度, $\bar{f} = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} f d\phi$, θ : 余緯度, ϕ : 方位角)
 - ▶ 一方, 擬運動量は 2 次の量なのに $\int_0^\pi (\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) \sin^2 \theta d\theta$ のまま
→ **擬運動量は固有モードごとに割り当てられる量**
 - ▶ [理由] 線形化した式が以下のように表せるため

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{R_0 \sin \theta} \frac{d(Z_0 + 2\Omega_0 \cos \theta)}{d\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \sin \theta \xi_\theta \end{pmatrix} = (\text{自己共役作用素}) \begin{pmatrix} \zeta \\ \sin \theta \xi_\theta \end{pmatrix}$$

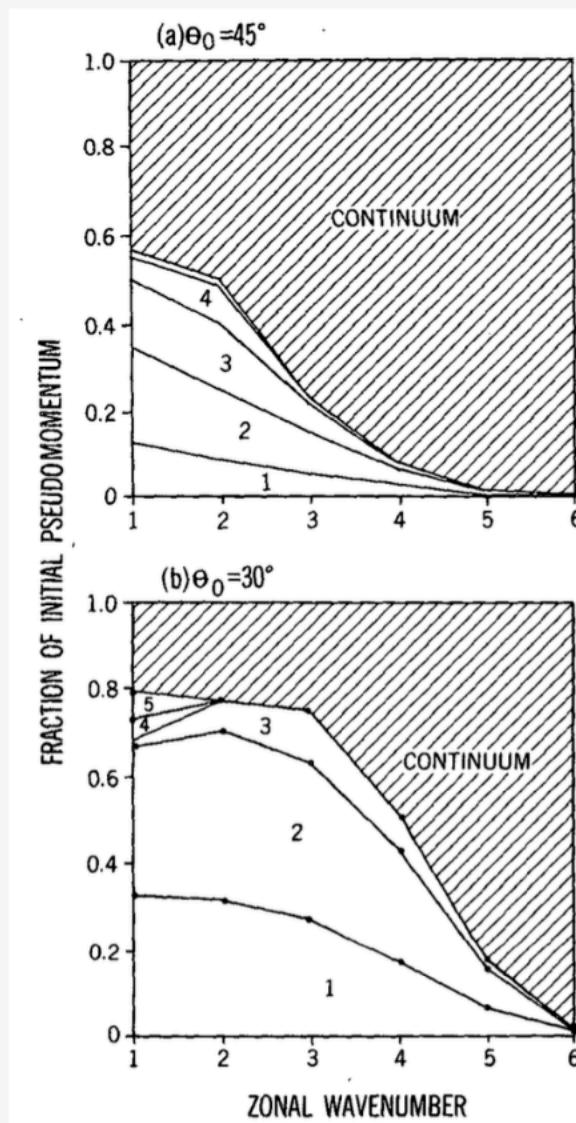
(ξ : 変位, ζ : 渦度摂動, $Z_0 + 2\Omega_0 \cos \theta$: 背景の絶対渦度, R_0 : コア半径)

1. はじめに > 2. 目的と方法 > 3. 時間が余ったときのスライド > 4. まとめ

擬運動量は線形シミュレーション（プラン B）の解析に便利

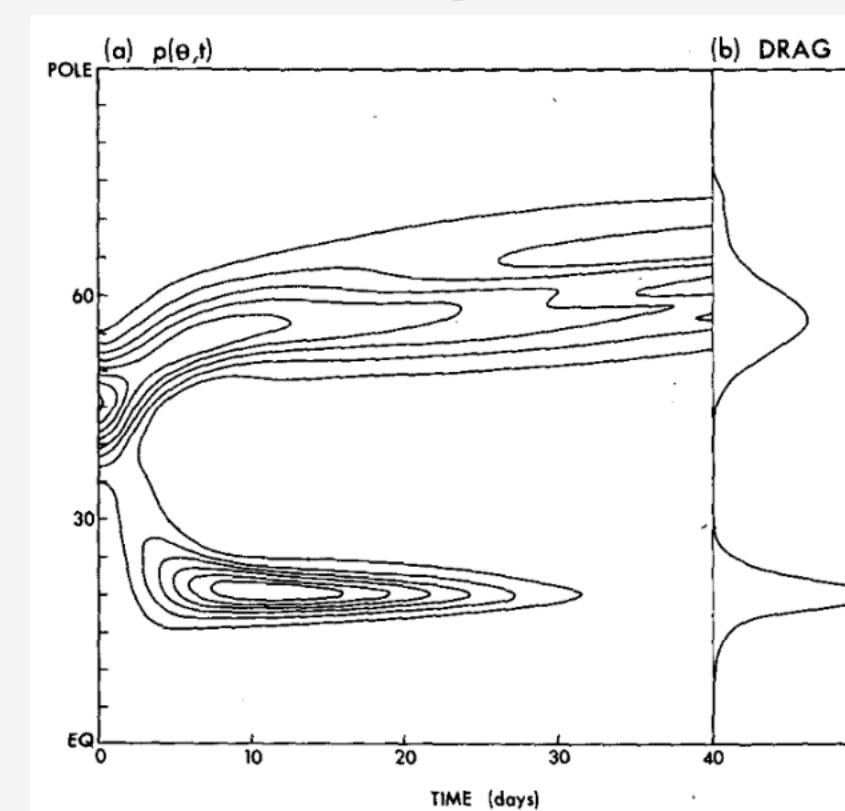
Held (1985)

初期条件



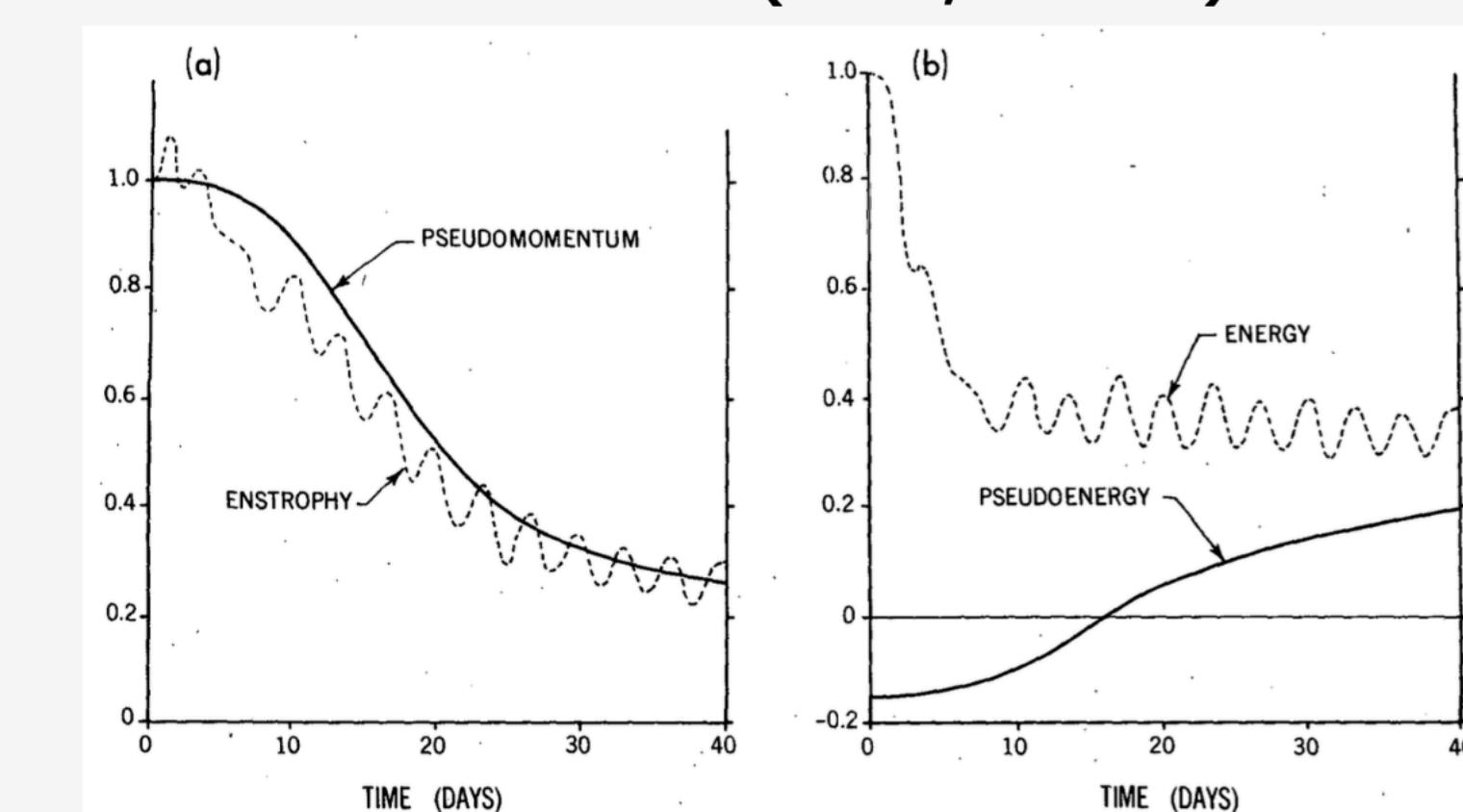
Held & Phillips (1987)

初期値問題（線形, $m = 6$ ）



Held (1985)

初期値問題（線形, $m = 3$ ）

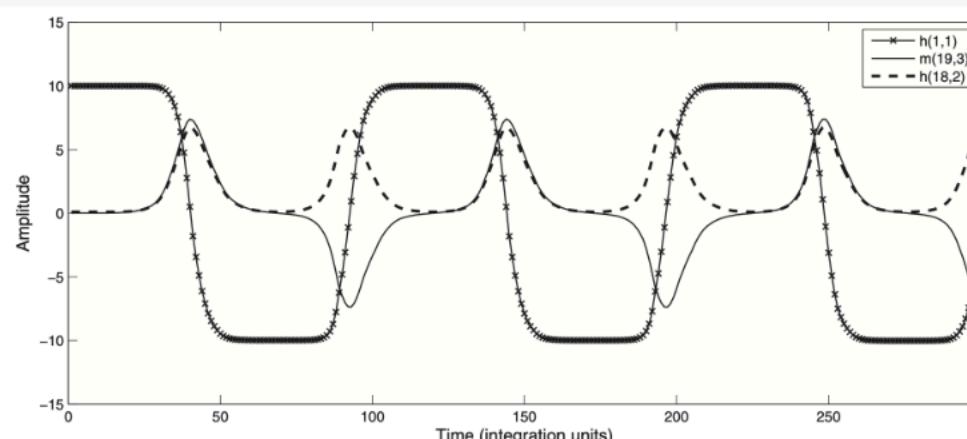


- ✓ 直交性により、初期条件にどの固有モードがどの程度含まれているかを特定可能
- ✓ エネルギーは、離散モードの周波数差で振動
- ✓ [Note] MHD では、擬エネルギーは直交性をもたない（たぶん）

1. はじめに > 2. 目的と方法 > 3. 時間が余ったときのスライド > 4. まとめ

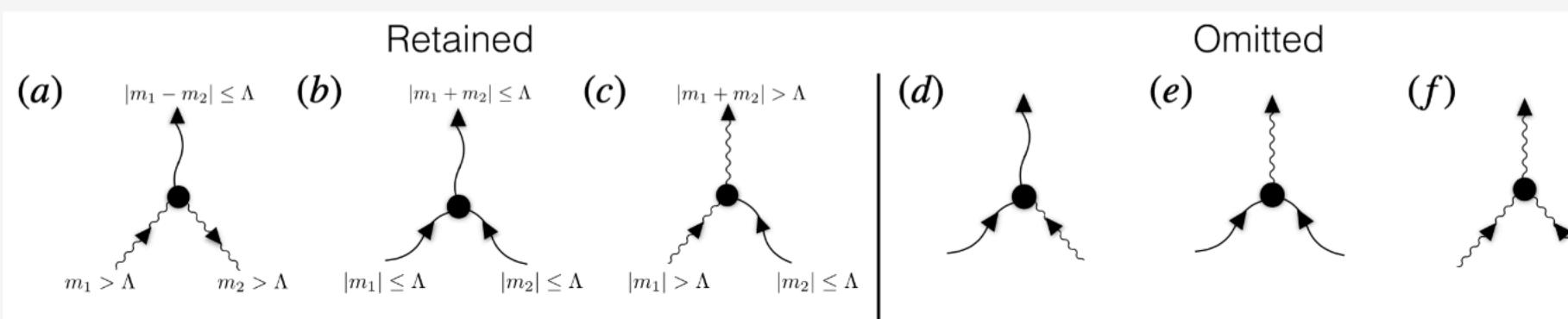
MHD・球面 2D の弱非線形～非線形計算のリスト

- 磁気 Rossby 波の 3 波共鳴,
5 波共鳴 (Raphaldini & Raupp, 2015;
Raphaldini+, 2019)

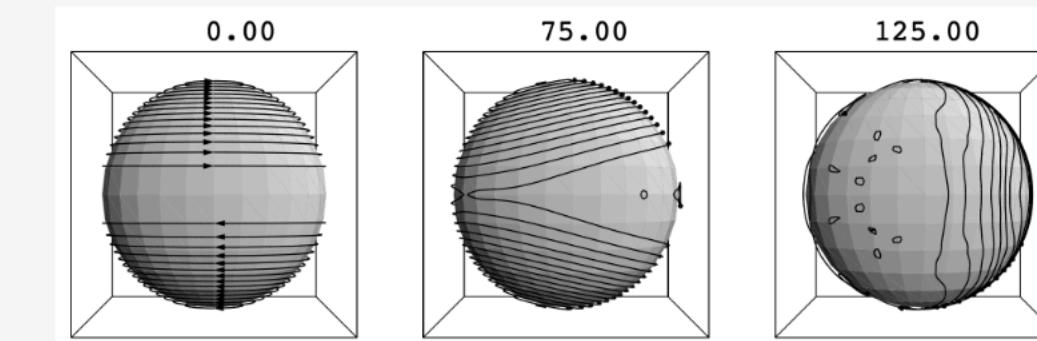


3 波共鳴 (Raphaldini & Raupp, 2015)

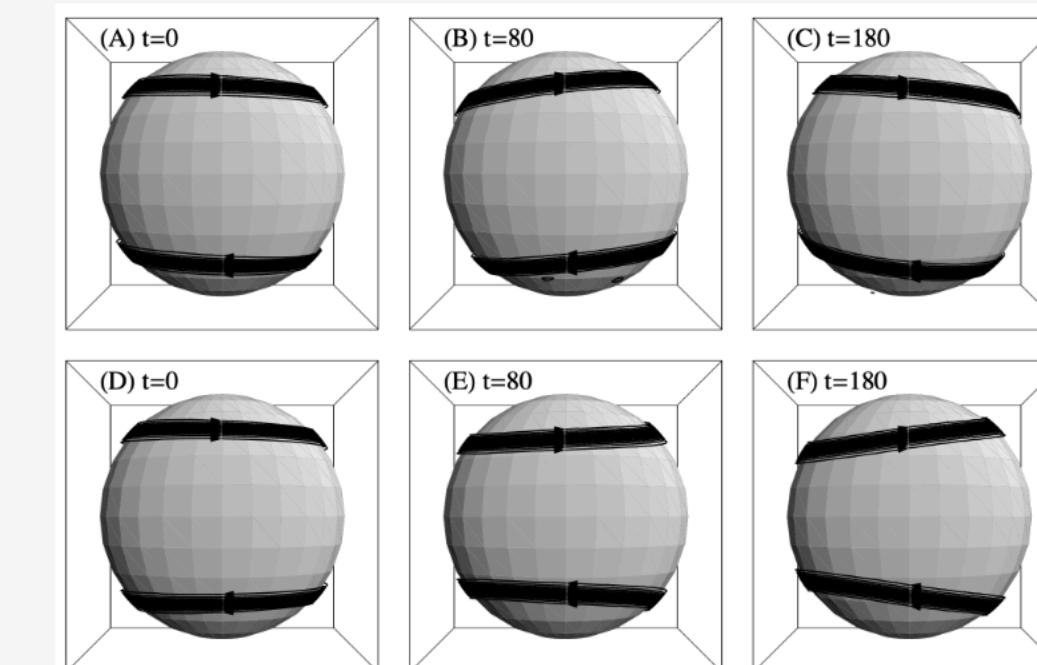
- (一般化) 準線形近似モデル
(Plummer+, 2019)



- 非線形計算 (Cally, 2001;
Cally+, 2003, 2004; Dikpati+, 2004)



clamshell 不安定 (Cally+, 2003)



tipping パターン (Cally+, 2003)

1. はじめに > 2. 目的と方法 > 3. 時間が余ったときのスライド > **4. まとめ**

まとめ

- ✓ 連続スペクトルに対応する波と
平均流の相互作用を計算しようとしている
- ✓ 現状、背景磁場の時間発展は議論できないが、
コア表面流の研究に対して何か言えるかも

今後の予定

- ✓ 背景場の時間発展 (or 線形シミュレーション) コードの作成
- ✓ 前期の合同セミナーネタの続き
- ✓ 前期の合同セミナーネタを理想 MHD・球面 2D に使う
- ✓ MHD 浅水系 (背景磁場の時間発展可?)