

Достаточные статистики (29.09 – 06.10)

Задача

Пусть X_1, \dots, X_n – выборка из равномерного распределения на конечном множестве $\{1, \dots, \theta\}$, где θ – натуральный параметр. Докажите, что статистика

$$\frac{X_{(n)}^{n+1} - (X_{(n)} - 1)^{n+1}}{X_{(n)}^n - (X_{(n)} - 1)^n}$$

является эффективной оценкой параметра θ в классе несмещенных оценок.

Решение

Несмещенность

Сначала докажем, что данная оценка является несмещенной.

$$\begin{aligned} P[X_{(n)} = k] &= P[X_{(n)} \leq k] - P[X_{(n)} \leq k-1] = \left(\frac{k}{\theta}\right)^n - \left(\frac{k-1}{\theta}\right)^n \\ E \frac{X_{(n)}^{n+1} - (X_{(n)} - 1)^{n+1}}{X_{(n)}^n - (X_{(n)} - 1)^n} &= \sum_{k=1}^{\theta} \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{k^n - (k-1)^n} \cdot P[X_{(n)} = k] = \sum_{k=1}^{\theta} \frac{k^{n+1} - (k-1)^{n+1}}{\theta^n} \\ &= \frac{1}{\theta^n} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\theta} k^{n+1} - \sum_{k=0}^{\theta-1} k^{n+1} \right) = \theta \end{aligned}$$

Осталось доказать, что $X_{(n)}$ – полная достаточная статистика. Тогда данная оценка будет эффективной в своём классе как функция от полной достаточной статистики.

Достаточность

$$P[X_1, \dots, X_n \in B | X_{(n)} = k] = \left(\frac{1}{k}\right)^n \text{ не зависит от } \theta$$

Полнота

$$Eg(X_{(n)}) = \sum_{k=1}^{\theta} P[X_{(n)} = k] \cdot g(k)$$

$$\forall k \in \{1, \dots, \theta\} : P[X_{(n)} = k] \geq \left(\frac{1}{\theta}\right)^n > 0$$

Таким образом если $Eg(X_{(n)}) = 0$, то $\forall k \in \{1, \dots, \theta\} : g(k) = 0$. Тогда $g(X_{(n)}) = 0$.