

Оценки максимального правдоподобия (22.09 – 29.09)

1

Найдите оценку максимального правдоподобия параметра $\theta > 0$, если распределение выборки имеет плотность.

(a)

Плотность: $\theta y^{\theta-1}$ при $y \in [0; 1]$

$$\ln L = \ln\left(\prod_{i=1}^n \theta X_i^{\theta-1}\right) = n \ln \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \ln X_i$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln X_i = 0$$

$$\theta = \frac{-n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$$

(b)

Плотность: $\frac{2y}{\theta^2}$ при $y \in [0; \theta]$

$$L = \prod_{i=1}^n \frac{2X_i}{\theta^2}, \text{ если } \forall i : X_i \leq \theta$$

$$L = 0, \text{ если } \exists i : X_i > \theta$$

L убывает при росте $\theta \Rightarrow L$ будет максимально при минимально возможном θ .

$$\hat{\theta} = \max_{i=1}^n X_i$$

(c)

Плотность: $\frac{e^{-|y|}}{2-2e^{-\theta}}$

$$L = \frac{1}{2-2e^{-\theta}} \cdot \prod_{i=1}^n e^{-|X_i|}, \text{ если } \forall i : |X_i| \leq \theta$$

$$L = 0, \text{ если } \exists i : |X_i| > \theta$$

L убывает при росте $\theta \Rightarrow L$ будет максимально при минимально возможном θ .

$$\hat{\theta} = \max_{i=1}^n |X_i|$$

2

Дана выборка из нормального распределения со средним θ и единичной дисперсией, где θ может принимать лишь два значения: 1 и 2. Найдите оценку максимального правдоподобия параметра θ .

$$L_{\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \prod_{i=1}^n e^{\frac{-(x_i - \theta)^2}{2}}$$

$$\ln L_{\theta} = \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{i=1}^n \frac{-(x_i - \theta)^2}{2}$$

$$\ln L_2 - \ln L_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ((x_i - 1)^2 - (x_i - 2)^2) = \sum_{i=1}^n (x_i - 1.5)$$

$$\hat{\theta} = 2, \text{ при } \bar{X} \geq 1.5$$

$$\hat{\theta} = 1, \text{ иначе}$$