解析学

目 次

第 1 章 実数の連続性 (完備性) 7
1.1 記号の準備 7
1.2 有界集合，上限，下限 7
1.3 実数の連続性の表現 1 8
1.4 数列（点列） 8
1.5 実数の連続性の表現 2 9
1.6 実数の連続性の表現 3，Cauchy 列 10

第 2 章 極限，連続関数 11
2.1 定義 11
2.2 単調関数 12
2.3 逆三角関数 13
2.4 ある不等式 * 13

第 3 章 Taylor 展開 15
3.1 滑らかな関数 15
3.2 Lebesgue の定理 * 16
3.3 有限次 Taylor 展開 16
3.4 剰余項の他の表現 16

第 4 章 無限級数 19
4.1 級数の収束 1 19
4.2 級数の収束 2 20
4.3 Fubini の定理 * 20

第 5 章 再び Taylor 展開 23
5.1 Taylor 展開 23

第 6 章 偏微分 25
6.1 $\mathbb{R}^n$ の位相 25
6.2 コンパクト集合 26
6.3 ラージ O, スモール o 26
6.4 $\mathbb{R}^n$ での微分の定義 27
6.5 $\mathbb{R}^n$ での微分の定義 2 28

6.6 偏微分と微分の関係 30
6.7 連鎖定理 31
6.8 Taylor 展開 1 33
6.9 Taylor 展開 2 33

第 7 章 極値問題 **35**
7.1 極値問題 35
7.2 二次形式 35

第 8 章 陰関数 **39**
8.1 陰関数 39
8.2 逆函数定理 41

第 9 章 条件付極値問題 **43**
9.1 条件付極値 43

第 10 章 積分 **45**
10.1 積分の naive な定義 45
10.2 定義の反省 45
10.3 可積分性の判定 47
10.4 基本定理 48
10.5 不定積分の計算 49
10.6 広義積分 50
10.7 有界変動関数 * 53
10.8 Stieltjes 積分 * 54

第 11 章 重積分 **55**
11.1 目的 55
11.2 重積分の naive な定義 55
11.3 定義の反省 56
11.4 可積分性の判定 57
11.5 面積 58
11.6 累次積分 59
11.7 積分の変数変換 (極座標への変換) 60
11.8 積分の変数変換 (極座標への変換) 61
11.9 一般の変数変換 62
11.10広義積分 (多次元) 64
11.11定義の反省 65
11.12広義積分の変数変換 67

第 12 章 線積分と Green の定理 **69**
12.1 平面上の曲線 69
12.2 線積分 69
12.3 Green の定理 70

第 13 章 微分方程式 **73**
13.1 解の存在と一意性 73
13.2 簡単な微分方程式 73
13.3 ２階線形微分方程式（斉次） 74
13.4 非斉次微分方程式 75
13.5 定数係数２階方程式 76

第 14 章 一様収束 **77**
14.1 関数列 77
14.2 関数項級数 78
14.3 一様収束のための条件 79
14.4 Abel の定理 * 80
14.5 Tauber の定理 * 81

第1章　実数の連続性(完備性)

1.1　記号の準備

(1) 実数の全体 $=$ 数直線 $= \mathbb{R}$

(2) $x \in \mathbb{R}$

(3) $M \subset \mathbb{R}$

(4) よく使うギリシャ文字

$\alpha,\ \beta,\ \gamma(\Gamma),\ \delta(\Delta),\ \lambda(\Lambda),\ \mu,\ \nu,\ \phi(\Phi), \psi(\Psi),\ \xi(\Xi),\ \eta,\ \zeta,\ \theta(\Theta),\ \epsilon, \sigma(\Sigma),\ \omega(\Omega)$

演習問題 1.1.1 次の集合はどのような集合か.

$$M = \{x \mid 0 < x < 1\},$$
$$M = \{x \mid x^2 \leq 1\},$$
$$M = \{1/n \mid n = 1, 2, ...\}.$$

1.2　有界集合，上限，下限

定義 1.2.1 $M \subset \mathbb{R}$ が上に有界とは，ある $\alpha \in \mathbb{R}$ があって，すべての $x \in M$ に対して $x \leq \alpha$ が成立すること．記号を使って次のように書く：

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ s.t.(such that)} \forall x \in M \Longrightarrow x \leq \alpha$$

演習問題 1.2.1 $M \subset \mathbb{R}$ が下に有界である，の定義を与えよ.

定義 1.2.2 上にも下にも有界な集合を有界集合という.

定義 1.2.3 $M \subset \mathbb{R}$ とする．$\alpha \in \mathbb{R}$ が次の条件を満たすとき，α を M の上限といい，$\alpha = \sup M$ とかく.

(1) $\forall x \in M$ に対して $x \leq \alpha$

(2) $\forall \epsilon > 0$ に対して，$\alpha - \epsilon < y$ なる $y \in M$ がある

定義 1.2.4 a が M の最大数であるとは $a \in M$ であってかつすべての $x \in M$ に対して $x \leq a$ の成立するときをいう.

注意： M に最大数があるとは限らない．

注意： M を上に有界とする．このとき $\sup M = \min\{x \mid x$ は M の上界 $\}$ である．

演習問題 1.2.2 $M \subset \mathbb{R}$ とする．$\alpha \in \mathbb{R}$ が M の下限であることの定義を与えよ． M の下限を $\inf M$ で表わす．

演習問題 1.2.3 次の集合の上限を求めよ．

$$S = \{x \mid 0 \leq x < 1\},$$
$$S = \{1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}, \cdots, 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}, \cdots\}.$$

1.3 実数の連続性の表現 1

Claim 1.3.1 上に有界な集合には上限が存在する．

記号：閉区間　$\{x \mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$, 開区間　$\{x \mid a < x < b\} = (a, b)$

演習問題 1.3.1 $[a, b)$, $(a, b]$ はどんな集合か？

演習問題 1.3.2 下に有界な集合には下限が存在することを示せ．

Claim 1.3.2 $I_n = [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, ...$ が次を満たすとする．

(1) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$

(2) $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

このとき，すべての I_n に含まれる点が唯一つ存在する．

定理 1.3.1 *Claim 1.3.1* と *Claim 1.3.2* は同値である．

1.4 数列（点列）

記号：$\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ = 自然数の全体

定義 1.4.1 点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $n \to \infty$ のとき α に収束するとは

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \ s.t. \ n > N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon$$

このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とかく．

定義 1.4.2 $\{b_m\}_{m=1}^{\infty}$ が $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列であるとは $\mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への順序を保つ写像 ϕ:

$$\mathbb{N} \ni p \mapsto \phi(p) \in \mathbb{N},\ p > q \Longrightarrow \phi(p) > \phi(q)$$

があって $b_m = a_{\phi(m)},\ m = 1, 2, ...$ となること.

演習問題 1.4.1 $a_n = n$　のとき $b_m = 2m$ は部分列である.

演習問題 1.4.2 $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...$ に対して $4, 2, 6, 8, 10, ...$ は部分列ではない. なぜか？

定義 1.4.3 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調増加数列であるとは

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots$$

なることをいう. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が狭義単調増加数列であるとは

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$$

なることをいう. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界であるとは集合 $\{a_1, a_2, ...\}$ が上に有界であること.

演習問題 1.4.3 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が単調減少数列であるとはどういうことか. また狭義単調減少数列であるとはどういうことか $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が下に有界とはどういうことか？

1.5　実数の連続性の表現 2

定理 1.5.1 上に有界な単調増加数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は必ず収束する. さらに

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, ...\}$$

である.

演習問題 1.5.1 下に有界な単調減少列は収束することを示せ.

演習問題 1.5.2 *Claim 1.3.2* を証明せよ.

定理 1.5.2 有界な数列は必ず収束する部分列を含む.

1.6 実数の連続性の表現 3，Cauchy 列

定義 1.6.1 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が *Cauchy* 列であるとは $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が次の条件を満たすときをいう：任意の $\epsilon > 0$ に対して次の性質を満たす $N \in \mathbb{N}$ をみつけることができる．

$$n > m \geq N \Longrightarrow |a_n - a_m| \leq \epsilon$$

定理 1.6.1 *Cauchy* 列は収束する．逆に収束する数列は *Cauchy* 列である．

注意： 定理 1.6.1 で極限値があらわにはあらわれていないことに注意せよ．

演習問題 1.6.1 *Cauchy* 列は有界である．このことを示せ．

第2章　極限，連続関数

2.1　定義

定義 **2.1.1**　$f(x)$ は区間 I 上で定義された関数とし，$a \in I$ とする．このとき

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

とは

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \ s.t.\ |f(x) - A| < \epsilon,\ \forall x \in I,\ |x - a| < \delta$$

の成立することである．

定義 **2.1.2**　$f(x)$ は区間 I 上で定義された関数とし，$a \in I$ とする．このとき

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = A \quad or \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = A$$

とは

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \ s.t.\ |f(x) - A| < \epsilon,\ \forall x \in I,\ a < x < a + \delta$$

の成立することである．

演習問題 **2.1.1**

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) = A \quad or \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = A$$

の定義を与えよ．

定義 **2.1.3** $f(x)$ は区間 I 上で定義された関数とし，$a \in I$ とする．このとき $f(x)$ が a で連続であるとは

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

の成立することである．$f(x)$ が I で連続であるとは，$f(x)$ が I のすべての点で連続であること．

補題 **2.1.1** $f(x)$ が $x = a$ で連続であるためには，$a_n \to a$ $(n \to \infty)$ なる全ての点列 $\{a_n\}$ に対して $f(a_n) \to f(a)$ の成立することが必要十分である．

演習問題 2.1.2 $f(x)$ は区間 I 上で定義された関数とし，$a \in I$ とする．このとき "$f(x)$ が a で右から連続である" を定義せよ．同様に "$f(x)$ が a で左から連続である" を定義せよ．

記号： I で連続な関数の全体を $C^0(I)$ で表わす．

演習問題 2.1.3 $f(x)$, $g(x)$ は区間 I で定義された関数とし，a で連続とする．このとき，$f(x) \pm g(x)$ は a で連続であることを示せ．$g(a) \neq 0$ とする．このとき $f(x)/g(x)$ は a で連続であることを示せ．

定理 2.1.1 $I = [a, b]$ で $f(x) \in C^0(I)$ とする．このとき $f(x)$ は I 上で最大値，最小値をとる．

演習問題 2.1.4 $I = (0, 1)$, $f(x) = 1/x$ とする．このとき $f(x)$ は I 上で最大値をとるか？最小値についてはどうか？

定理 2.1.2 $I = [a, b]$ で $f(x) \in C^0(I)$ とし，$f(a) \leq f(b)$ とする．このとき，$f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ なるかってな γ に対して $f(c) = \gamma$ となる $c \in [a, b]$ が存在する．

2.2　単調関数

定義 2.2.1 $f(x)$ を区間 I で定義された関数とする．$f(x)$ が I で単調増加であるとは

$$x, y \in I\ , x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

の成立することをいう．$f(x)$ が I で狭義単調増加であるとは

$$x, y \in I\ , x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

の成立することをいう．

演習問題 2.2.1 $f(x)$ を区間 I で定義された関数とする．$f(x)$ が I で単調 (狭義) 減少であることの定義を与えよ．

定理 2.2.1 $f(x) \in C^0([a, b])$ が $[a, b]$ 上狭義単調増加であるとする．$f([a, b]) = [\alpha, \beta]$ とする．このとき $g(y) \in C^0([\alpha, \beta])$ で

$$g(f(x)) = x, \quad x \in [a, b]$$

を満たすものがある．この g を f の逆関数とよび $f^{-1}(x)$ であらわす．

演習問題 2.2.2 定理 *2.2.1* で f^{-1} も狭義単調増加関数であることを示せ．

2.3 逆三角関数

定義 2.3.1 $y=\sin x$ は $[-\pi/2,\pi/2]$ で狭義単調増加である．この逆関数を $\arcsin x$ と表す．$y=\cos x$ は $[0,\pi]$ で 狭義単調減少である．この逆関数を $\arccos x$ と表す． $y=\tan x$ は $[-\pi/2,\pi/2]$ で狭義単調増加である．この逆関数を $\arctan x$ と表す．

演習問題 2.3.1 $y=\arcsin\sqrt{1-x^2},\quad -1\le x\le 1$ の概形を描け．

演習問題 2.3.2 $y=\arctan x,\quad -\infty<x<\infty$ の概形を描け．

2.4 ある不等式 *

補題 2.4.1 $\eta=\omega(\xi)$ を $[0,\infty)$ で定義された狭義単調増加関数で $\omega(0)=0$ を満たすとする．$\xi=\mu(\eta)$ をその逆関数とする．このとき，任意の $x\ge 0$, $y\ge 0$ に対して

$$xy\le\int_0^x\omega(\xi)d\xi+\int_0^y\mu(\eta)d\eta$$

が成立する．

演習問題 2.4.1 $p>1$ とする．このとき $x\ge 0$, $y\ge 0$ に対して

$$xy\le\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

を示せ．ただし

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

である．

補題 2.4.2 $f(x)$, $g(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とする．このとき

$$\int_a^b|f(x)g(x)|dx\le\left(\int_a^b|f(x)|^pdx\right)^{1/p}\left(\int_a^b|g(x)|^qdx\right)^{1/q}$$

が成立する．ただし，$p>1$ かつ

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

である．

補題 2.4.3 $f(x)$, $g(x)$ を $[a,b]$ 上の連続関数とし，$p>1$ とする．このとき

$$\left(\int_a^b|f(x)+g(x)|^pdx\right)^{1/p}\le\left(\int_a^b|f(x)|^pdx\right)^{1/p}+\left(\int_a^b|g(x)|^pdx\right)^{1/p}$$

が成立する．

第3章　Taylor 展開

3.1　滑らかな関数

定義 3.1.1 $f(x)$ は区間 I 上で定義された関数とし，$a \in I$ とする．$f(x)$ が a で微分可能とは

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が有限値で存在すること．この極限を $f'(a)$ と書き，a における微分係数と呼ぶ．$f(x)$ が I で微分可能であるとは，$f(x)$ が I の全ての点で微分可能となること．

演習問題 3.1.1 $f(x)$ は区間 I 上で定義された関数とし，$a \in I$ とする．“$f(x)$ が a で右から微分可能” を定義せよ．同様に “$f(x)$ が a で左から微分可能” を定義せよ．

記号: $f(x)$ は区間 I 上で定義された微分可能な関数とする．

$$\begin{cases} I \ni x \mapsto f'(x) = \dfrac{d}{dx} f(x) : f(x) \text{ の導関数} \\ I \ni x \mapsto (f'(x))' = f''(x) = \dfrac{d^2}{dx^2} f(x) : f(x) \text{ の二次導関数} \\ I \ni x \mapsto (f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n}{dx^n} f(x) : f(x) \text{ の } n \text{ 次導関数} \end{cases}$$

定義 3.1.2 $f(x)$ が I で微分可能で $f'(x)$ が I で連続なとき，$f(x)$ を I で連続的微分可能，あるいは I で C^1 級であるという．

演習問題 3.1.2 $f(x)$ が I で 2 回連続的微分可能，であること (C^2 級) を定義せよ．一般に “$f(x)$ が I で n 回連続的微分可能” (C^n) 級を定義せよ．

記号: I で n 回連続的微分可能な関数の全体を $C^n(I)$ で表わす．

定義 3.1.3 すべての n, $n = 1, 2, ...$ に対して $f(x) \in C^n(I)$ となる関数を I で C^∞ 級という．I で C^∞ 級な関数の全体を $C^\infty(I)$ で表わす．

演習問題 3.1.3 多項式，$\sin x$, $\cos x$, e^x は $C^\infty(\mathbb{R})$ であることを示せ．

3.2 Lebesgue の定理 *

定義 3.2.1 $E \subset \mathbb{R}$ が零集合であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して高々可算個の開区間 I_n, $n = 1, 2, \ldots$ があって次の条件を満たすときをいう．

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon$$

ただし，$|I_n|$ は区間 I_n の長さを表す．

定理 3.2.1 $f(x)$ を $[a, b]$ 上で定義された単調関数とする．このときある零集合 $E \subset [a, b]$ があって $f(x)$ は $x \in [a, b] \setminus E$ で微分可能である．

3.3 有限次 Taylor 展開

定理 3.3.1 $f(x) \in C^n(a, b) = C^n((a, b))$ とし，$c \in (a, b)$ とする．このとき $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{(x-c)^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} f^{(n)}(c + s(x-c))ds$$

と表現できる．右辺を $f(x)$ の c を中心とする n 次 Taylor 展開という．

3.4 剰余項の他の表現

補題 3.4.1 $f(x) \in C^0([a, b])$, $p(x) \in C^0([a, b])$, $p(x) \geq 0$ とする．このとき

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(c) \int_a^b p(x)dx = f(a + \theta(b-a)) \int_a^b p(x)dx$$

となる $a < c < b$ および $0 < \theta < 1$ がある．

系 3.4.1 $p(x) \equiv 1$ ととって

$$\int_a^b g(x)dx = (b-a)g(c)$$

となる $a < c < b$ がある．

Claim 3.4.1 $f(x) \in C^n(a, b)$ とし，$c \in (a, b)$ とする．このとき $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{(x-c)^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(c + \theta(x-c))$$

と表現できる．ここで $0 < \theta < 1$ である (Cauchy の剰余)．

Claim 3.4.2 $f(x) \in C^n(a,b)$ とし，$c \in (a,b)$ とする．このとき $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n)}(c + \tilde{\theta}(x-c))$$

と表現できる．ここで $0 < \tilde{\theta} < 1$ である (Lagrange の剰余).

演習問題 **3.4.1** $c = 0$ とし，剰余項を $R_n(x)$ とおく：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x).$$

ここで $R_n(x) \to 0,\ n \to \infty$ の場合になにがおこるか？　なにが主張できるか.

演習問題 **3.4.2** $f(x),\ g(x) \in C^n(a,b),\ (a,b) \ni 0$ でさらに

$$f^{(j)}(0) = g^{(j)}(0) = 0, \quad j = 0, 1, ..., n-1, f^{(n)}(0) = a(\neq 0), \quad g^{(n)}(0) = b$$

とする．このとき

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)}$$

を求めよ.

演習問題 **3.4.3**

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 - \cos x}{x^4}$$

を求めよ.

演習問題 **3.4.4**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - ax - bx^3}{x^5}$$

が有限な確定値であるように $a,\ b$ を定めよ.

第4章　無限級数

4.1　級数の収束 1

定義 4.1.1 $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ を無限級数とする．このとき

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_n$$

とおいて $\lim_{n\to\infty} S_n$ が存在するとき $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ は収束するといい，その極限値を $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ の和といい

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

とかく．

定理 4.1.1 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ が収束するための必要十分条件は

$$\forall\epsilon > 0, \exists N \in \quad s.t. \quad |a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n| < \epsilon, \quad \forall n > \forall m \geq N$$

の成立することである．

演習問題 4.1.1 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ が収束するとき

$$a_n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であることを示せ．

定義 4.1.2 $\sum_{k=0}^{\infty}$ が正項級数とは $a_n \geq 0,\ n = 1, 2, ...$ であることをいう．

定理 4.1.2 $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$，$\sum_{k=0}^{\infty} b_n$ を正項級数とする．さらに有限個を除いて $a_k \leq Mb_k$ であるとする．ここで M は定数である．このとき

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{が発散} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \text{は発散}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \quad \text{が収束} \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{は収束} \end{cases}$$

演習問題 4.1.2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \geq 2$$

は収束することを示せ．

演習問題 4.1.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}$$

は収束することを示せ．

定理 4.1.3 正項級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$$

が存在するとき $\alpha < 1$ なら $\sum a_n$ は収束し，$\alpha > 1$ ならば $\sum a_n$ は発散する．

演習問題 4.1.4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

は収束することを示せ．

4.2 級数の収束 2

定義 4.2.1 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ が収束するとき $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は絶対収束するという．

定理 4.2.1 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が絶対収束すれば $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は収束する．

定理 4.2.2 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ がともに絶対収束するとする．その和をそれぞれ a, b とする．このとき

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

を第 n 項とする級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ は絶対収束し，その和 c は ab に等しい．

演習問題 4.2.1 $|x| < 1$ とする．このとき

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ は絶対収束する．

(2) $\displaystyle\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ を示せ．

4.3 Fubini の定理 *

定理 4.3.1 $f_i(x)$, $i = 1, 2, ...$ を $[a, b]$ 上で定義された単調増加（減少）関数の列とする．また

$$S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$$

は $x \in [a,b]$ を固定するごとに収束するとする．このときある零集合 $E \subset [a,b]$ があって $x \in [a,b] \setminus E$ に対して各 $f_i(x)$ は微分可能でかつ

$$S'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x)$$

が成立する．

第5章　再び Taylor 展開

5.1　Taylor 展開

定理 5.1.1 $f(x) \in C^\infty(a,b)$ とし，$0 \in (a,b)$ とする．ある $C > 0$, $M > 0$ があって

$$|f^{(n)}(x)| \le CM^n, \quad \forall x \in (a,b)$$

とする．このとき $f(x)$ は (a,b) の各点で次のように Taylor 展開できる

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

演習問題 5.1.1 B を定数とする．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B^n}{n!} = 0$$

を示せ．

演習問題 5.1.2 すべての $x \in \mathbb{R}$ で

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

を示せ．

演習問題 5.1.3 $|x| < 1/2$ のとき

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

を示せ．

演習問題 5.1.4 すべての $x \in \mathbb{R}$ で

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

を示せ．

第6章　偏微分

6.1　$\mathbb{R}^n$ の位相

定義 6.1.1 n 次元ユークリッド空間　$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{cases} d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2} \\ B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x,y) < \epsilon\} \end{cases}$$

注意：慣れてきたら $d(x,y)$ のかわりに $|x-y|$ などと記そう.

定義 6.1.2

$$\begin{cases} M \subset \mathbb{R}^n \quad \text{が有界} \Longleftrightarrow \quad \text{ある } R > 0 \text{ があって } M \subset B_R(0) \\ y \quad \text{が} \quad M \quad \text{の内点} \Longleftrightarrow \quad \text{ある } \epsilon > 0 \text{ があって} \quad B_\epsilon(y) \subset M \\ y \quad \text{が} \quad M \quad \text{の外点} \Longleftrightarrow \quad \text{ある } \epsilon > 0 \text{ があって} \quad B_\epsilon(y) \cap M = \emptyset \\ y \quad \text{が} \quad M \quad \text{の境界点} \Longleftrightarrow \quad y \quad \text{が} \quad M \quad \text{の内点でも外点でもない} \\ M \quad \text{が開集合} \Longleftrightarrow \quad M \text{ の点はすべて内点} \\ M \quad \text{が閉集合} \Longleftrightarrow \quad M \text{ の境界点が} \quad M \text{ に含まれる} \end{cases}$$

演習問題 6.1.1 $\mathbb{R}^2$ で考える.

$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ は開集合である. なぜか?
$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ は閉集合である. なぜか?
$\{(x,1) \mid -1 \leq x \leq 1\}$ は閉集合である. なぜか?

定義 6.1.3 $\mathbb{R}^n$ の点列 $\{P_m\}_{m=1}^{\infty}$ に対して

$$\begin{cases} \lim_{m\to\infty} P_m = Q \Longleftrightarrow \lim_{m\to\infty} d(P_m, Q) = 0 \\ \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \text{ such that } m > N \Longrightarrow d(P_m, Q) < \epsilon \end{cases}$$

注意：慣れてきたら $\mathbb{R}^n$ の点を x, y などで記そう.

定義 6.1.4 $f(x)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分集合 M で定義されているとしよう. $a \in M$ とする.

$$\begin{cases} \lim_{M \ni x \to a} f(x) = A \\ \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \text{ s.t. } d(x,a) < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \epsilon \end{cases}$$

定義 6.1.5 $f(x)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分集合 M で定義されているとしよう．$a \in M$ とする．$f(x)$ が a で連続であるとは

$$\lim_{M \ni x \to a} f(x) = f(a)$$

となることをいう．

定義 6.1.6 M を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とし，f を M 上の関数とする．このとき f が M 上有界であるとは，$f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$ が有界集合であること．

6.2 コンパクト集合

定義 6.2.1 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 K は，K の任意の点列が K の点に収束する部分列を含むとき，(点列) コンパクトであるという．

定理 6.2.1 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 K に対し，次のことが成り立つ．

$$K \text{ は点列コンパクト} \Longleftrightarrow K \text{ は有界閉集合}$$

補題 6.2.1 K を $\mathbb{R}^n$ の点列コンパクト集合，f は K 上の実数値連続関数とする．このとき，$f(K)$ は点列コンパクトである．したがって特に，f は K 上有界である．

定理 6.2.2 K を $\mathbb{R}^n$ の点列コンパクト集合，f は K 上の実数値連続関数とする．このとき f は K 上で最大値，最小値に達する．

6.3 ラージ O, スモール o

定義 6.3.1

$$f(x) = o(g(x))\ (x \to 0) \Longleftrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

$$f(x) = O(g(x))\ (x \to 0) \Longleftrightarrow \text{ある } B, \delta \text{ があって } \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq B, |\forall x| \leq \delta$$

演習問題 6.3.1　次を示せ．

$$\sin x = O(x), \quad x \to 0, \quad \sin x - x = o(x), \quad x \to 0$$

6.4 $\mathbb{R}^n$ での微分の定義

以下しばらく $\mathbb{R}^2$ で考える．

Question: $f(x,y)$ の　$(a,b) \in D$ での微分をどう定義するか？

(1) $f(x)$ の微分の定義の見直し（反省）

(2) x あるいは y を固定して一変数の関数とみて微分する

補題 6.4.1 $y = f(x)$ が $x = a$ で微分可能 $\Longleftrightarrow$

$$\text{ある } A \text{ があって } f(a+h) - f(a) = Ah + o(h), \quad h \to 0$$

定義 6.4.1 $f(x,y)$ が (a,b) で微分可能とは A, B があって

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right),\ (h,k) \to (0,0)$$

の成立すること．(h,k) の関数 $Ah + Bk$ を $df_{(a,b)}(h,k)$ で表わし，$f(x,y)$ の (a,b) における (全) 微分という．

定義 6.4.2

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$

が存在するとき，$f(x,y)$ は (a,b) で x について偏微分可能といい，その極限値を $f(x,y)$ の (a,b) での x に関する偏微分係数といい

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \qquad \text{又は} \quad f_x(a,b)$$

で表わす．

演習問題 6.4.1 $f(x,y)$ は (a,b) で y について偏微分可能であることを定義せよ．

演習問題 6.4.2 $D \subset \mathbb{R}^2$ とする．$f(x,y)$ が D で x (y) について偏微分可能であることを定義せよ．

定義 6.4.3 $f(x,y)$ は D で x (y) について偏微分可能であるとする．このとき

$$D \ni (x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,(= f_x(x,y))$$

を $f(x,y)$ の x に関する一次偏導関数という．

演習問題 6.4.3

(1) $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ とする．このとき $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ．

(2) $f(x,y) = \sin xy$ とする．このとき $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ を求めよ．

定義 6.4.4 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ は D で x (y) について偏微分可能であるとする．このとき $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ の x (y) に関する偏導関数を

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = f_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = f_{xy}(x, y)$$

で表わす．

演習問題 6.4.4 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ は D で x (y) について偏微分可能であるとする．このとき $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ の x (y) に関する偏導関数はどのように表わせばよいか?

定義 6.4.5 $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ を $f(x, y)$ の二次偏導関数という．

定義 6.4.6 $f(x, y)$ が D で C^r 級 $\Longleftrightarrow$ f の r 次までの偏導関数が D で存在し，かつ連続．このとき

$$f(x, y) \in C^r(D)$$

と書く．全ての自然数 n に対して D で C^n 級のとき，D で C^∞ 級という．

$$f(x, y) \in C^\infty(D)$$

と書く．

6.5 $\mathbb{R}^n$ での微分の定義 2

定義 6.5.1 $f(x)$, $x = (x_1, ..., x_n)$ は $\mathbb{R}^n$ のある開集合 D で定義されているとする．$f(x)$ が $a = (a_1, ..., a_n) \in D$ で微分可能とは $A = (A_1, ..., A_n) \in \mathbb{R}^n$ があって

$$f(a + h) - f(a) = \langle A, h \rangle + o(|h|)$$

の成立すること．ただし $h = (h_1, ..., h_n)$, $a + h = (a_1 + h_1, ..., a_n + h_n)$

$$|h| = \sqrt{\sum_{j=1}^n h_j^2}, \quad \langle A, h \rangle = \sum_{j=1}^n A_j h_j$$

である．h の一次関数 $\langle A, h \rangle$ を $df_a(h)$ で表し，$f(x)$ の a における微分という．

定義 6.5.2 $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ すなわち j 番目の成分のみ 1 で他は 0 とする．

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_j) - f(a)}{h}$$

が存在するとき，$f(x)$ は a で x_j について偏微分可能といい，この極限値を $f(x)$ の a での x_j に関する偏微分係数といい，

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad \text{または} \qquad f_{x_j}(a)$$

で表す．

演習問題 6.5.1 $x \in \mathbb{R}^n$ に対し，$f(x) = 1/|x|$ $(x \neq 0)$ とおく．このとき

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

を求めよ．

演習問題 6.5.2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_j x_i}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = f_{x_i x_j}$$

はどのように定義すればよいか．

演習問題 6.5.3 一般に

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_n} \cdots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}$$

はどのように定義すればよいか．

演習問題 6.5.4 $f(x) = 1/|x|$, $x \in \mathbb{R}^n$ のとき

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

を求めよ．

演習問題 6.5.5 $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

とする．このとき

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

を求めよ．

演習問題 6.5.6 $f(x)$ は開集合 $D \subset \mathbb{R}^n$ で定義されているとする．このとき $f(x)$ が D で C^r 級であることを定義せよ．C^∞ 級も定義せよ．

6.6　偏微分と微分の関係

定理 6.6.1 $f(x,y) \in C^1(D)$ なら $f(x,y)$ は D で微分可能で

$$f(x,y)-f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)+o\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)$$

が成立.

定理 6.6.2 $f(x) \in C^1(D)$ なら $f(x)$ は D で微分可能で

$$f(x)-f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j-a_j)+o(|x-a|)$$

が成立する.

定義 6.6.1

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

を $\mathrm{grad} f(x)$ で表し，$f(x)$ の x での勾配とよぶ.

演習問題 6.6.1 $f(x) = 1/|x|$, $x \in \mathbb{R}^n$ のとき $\mathrm{grad} f(x)$ を求めよ.

補題 6.6.1 $f(x,y) \in C^1(D)$, $(a,b) \in D$ とする．このとき $0 < \theta < 1$ があって

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = hf_x(a+\theta h, b+k) + kf_y(a, b+\theta k)$$

が成立する.

演習問題 6.6.2 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ とするとき，f_{xx}，f_{xy}，f_{yx}，f_{yy} を求めよ.

定理 6.6.3 $f(x,y) \in C^2(D)$ とする．このとき

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$$

である.

定理 6.6.4 $f(x,y) \in C^r(D)$ とする．このとき r 次までの偏導関数は偏微分する順によらない.

定理 6.6.5 $f(x) \in C^r(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ とする．このとき r 次までの偏導関数は偏微分する順によらない.

6.7　連鎖定理

定理 6.7.1 $f(x,y) \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $x(t)$, $y(t) \in C^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ とし，$t \in I$ のとき $(x(t),y(t)) \in D$ とする．このとき

$$F(t) = f(x(t),y(t))$$

とおくと $F(t) \in C^1(I)$ で

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}(t) &= F'(t) = f_x(x(t),y(t))x'(t) + f_y(x(t),y(t))y'(t)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}(t)\end{aligned}$$

が成立する．

定理 6.7.2 $f(x) \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $x(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$, $x_i(t) \in C^1(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ とし，$t \in I$ のとき $x(t) \in D$ とする．このとき

$$F(t) = f(x(t))$$

とおくと $F(t) \in C^1(I)$ で

$$\frac{dF}{dt}(t) = F'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x(t))\frac{dx_j}{dt}(t)$$

が成立する．

定理 6.7.3 $f(x,y) \in C^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $\phi(u,v)$, $\psi(u,v) \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ とし，$(u,v) \in \Omega$ のとき $(\phi(u,v),\psi(u,v)) \in D$ とする．このとき

$$F(u,v) = f(\phi(u,v),\psi(u,v))$$

とおくと $F(u,v) \in C^1(\Omega)$ で

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) &= f_x(\phi(u,v),\psi(u,v))\phi_u(u,v) + f_y(\phi(u,v),\psi(u,v))\psi_u(u,v)\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \phi}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(u,v),\psi(u,v))\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v)\end{aligned}$$

が成立する．

演習問題 6.7.1

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v)$$

を求めよ．

定理 6.7.4 $f(x_1,...,x_n)\in C^1(D)$, $D\subset\mathbb{R}^n$, $\phi_i(u_1,...,u_m)\in C^1(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbb{R}^m$, $i=1,...,n$ とする．さらに，$u=(u_1,...,u_m)\in\Omega$ なら $(\phi_1(u),...,\phi_n(u))\in D$ とする．このとき

$$F(u)=f(\phi_1(u),...,\phi_n(u))\in C^1(\Omega)$$

でさらに

$$\frac{\partial F}{\partial u_k}(u)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi_1(u),...,\phi_n(u))\frac{\partial\phi_j}{\partial u_k}(u),\quad k=1,...,m$$

が成立する．

演習問題 6.7.2 $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ とする．このとき，

$$f_x,\ f_y,\ f_{xy},\ f_{xx}$$

を求めよ．

演習問題 6.7.3 $f(x,y)\in C^2$, $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ とするとき，g_r, g_{rr}, $g_{\theta\theta}$ を求め

$$g_{rr}+\frac{1}{r}g_r+\frac{1}{r^2}g_{\theta\theta}$$

を求めよ．

演習問題 6.7.4

$$f(t,x)=\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{x^2}{At}\right)$$

とする．このとき $f_t=f_{xx}$ となるように A を定めよ．

演習問題 6.7.5 $f(\xi,\eta)\in C^1$ とし，$g(x,y)=f(x\cos\theta-y\sin\theta,x\sin\theta+y\cos\theta)$ とするとき

$$f_\xi(\xi,\eta)^2+f_\eta(\xi,\eta)^2=g_x(x,y)^2+g_y(x,y)^2$$

である．ただし，θ は定数．

演習問題 6.7.6 $f(x)$ を $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ で C^1 級とする．今 $f(x)$ は次を満たすとする．

$$f(tx_1,tx_2,...,tx_n)=t^\alpha f(x_1,x_2,...,x_n),\quad\forall t>0,\quad\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$$

このとき

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,...,x_n)=\alpha f(x_1,...,x_n)$$

の成立することを示せ．

演習問題 **6.7.7** $h(x,y)$ を一回連続的微分可能な関数とし，

$$H(r,\theta)=h(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

とおく．いま t の一回連続的微分可能な関数 $x(t)$, $y(t)$ $(x(t)^2+y(t)^2\neq 0)$ が次の関係式を満たすものとする．

$$\frac{d}{dt}x(t)=h_y(x(t),y(t)),\quad \frac{d}{dt}y(t)=-h_x(x(t),y(t))$$

このとき，$x(t)=r(t)\cos\theta(t)$, $y(t)=r(t)\sin\theta(t)$ で定まる一回連続的微分可能な関数 $r(t)$, $\theta(t)$ は次の関係式を満たすことを示せ．

$$\frac{d}{dt}r(t)=\frac{1}{r(t)}H_\theta(r(t),\theta(t)),\quad \frac{d}{dt}\theta(t)=-\frac{1}{r(t)}H_r(r(t),\theta(t))$$

ただし，h_x, h_y は $h(x,y)$ のそれぞれ x, y に関する偏導関数を表すものとし，H_r, H_θ は $H(r,\theta)$ のそれぞれ r, θ に関する偏導関数を表すものとする．

6.8 Taylor 展開 1

定義 **6.8.1** $f(x,y)\in C^n(D)$, $(a,b)\in D\subset\mathbb{R}^2$ とする．このとき

$$d^k f_{(a,b)}(\xi,\eta)=\sum_{i+j=k}\frac{k!}{i!j!}\frac{\partial^k f}{\partial y^j\partial x^i}(a,b)\xi^i\eta^j$$

を f の (a,b) での k 次微分という $(0\le k\le n)$．

定理 **6.8.1** $f(x,y)\in C^n(D)$, $(a,b)\in D$ とする．このとき

$$f(a+h,b+k)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}d^j f_{(a,b)}(h,k)+\frac{1}{n!}d^n f_{(a+\theta h,b+\theta k)}(h,k)$$

が成立する．

演習問題 **6.8.1** $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}(ax^2+by^2)$ とする．このとき $d^2 f_{(0,0)}(\xi,\eta)$ を求めよ．

6.9 Taylor 展開 2

定義 **6.9.1** $f(x_1,...,x_n)\in C^N(D)$, $a=(a_1,...,a_n)\in D\subset\mathbb{R}^n$ とする．このとき

$$d^k f_{(a)}(\xi_1,...,\xi_n)=\sum_{i_1+\cdots+i_n=k}\frac{k!}{i_1!i_2!\cdots i_n!}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}}(a)\xi_1^{i_1}\cdots\xi_n^{i_n}$$

を f の a での k 次微分という．

定理 6.9.1 $f(x_1, ..., x_n) \in C^N(D)$, a, $a + h \in D$ とする．このとき

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} d^k f_{(a)}(h) + \frac{1}{N!} d^N f_{(a+\theta h)}(h)$$

となる $0 < \theta < 1$ が存在する．

演習問題 6.9.1 次を示せ．

$$d^k f_{(a)}(\xi) = \left(\xi_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(a).$$

演習問題 6.9.2 次の函数の原点を中心とする Taylor 展開を求めよ．

(1)
$$\frac{1}{1 - x - y - xy}$$

(2)
$$e^{x+y}$$

第7章　極値問題

7.1　極値問題

定義 7.1.1 $D \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とし，$f(x) = f(x_1, ..., x_n) \in C^2(D)$ とする．f が $a = (a_1, ...a_n) \in D$ で極大値（極小値）をとるとは $\Longleftrightarrow$ a を中心とするある球 $B_\delta(a)$ があって

$$x \in B_\delta(a) \cap D \quad \text{のとき} \quad f(a) \geq f(x) (\leq f(x))$$

の成立することをいう．また f が $(a, b) \in D$ で狭義の極大値（狭義の極小値）をとるとは $\Longleftrightarrow$ a を中心とするある円 $B_\delta(a)$ があって

$$x \in B_\delta \cap D,\ x \neq a \text{ のとき} \quad f(a) > f(x) (< f(x))$$

の成立することをいう．

定義 7.1.2 $a \in D$ が f の停留点とは $\Longleftrightarrow$

$$df_{(a)} = 0 \Longleftrightarrow f_{x_i}(a) = 0, \quad i = 1, ..., n$$

となることをいう．

補題 7.1.1 $f(x)$ が a で極値をとるなら，a は f の停留点である．

演習問題 7.1.1 補題 *7.1.1* を示せ．

7.2　二次形式

$\mathbb{R}^n$ 上の二次形式

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$$

を考える．$A = (a_{ij})$ を二次形式 $Q(x)$ の表現（係数）行列という．$Q(x) = (Ax, x)$ である．ただし (x, y), $x, y \in \mathbb{R}^n$ は通常の内積.

定義 7.2.1 (1) すべての 0 でない $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $Q(x) > 0$ となるとき，Q は正定値であるという．

(2) すべての $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $Q(x) \geq 0$ となるとき，Q は非負定値であるという．

(3) ある $x, y \in \mathbb{R}^n$ があって $Q(x) > 0 > Q(y)$ となるとき，Q は不定符合という．

(4) $\det B \neq 0$ のとき Q を正則という．

演習問題 7.2.1 $Q(x) = (Ax, x)$ を二次形式とする．このとき x が停留点であることと $Ax = 0$ は同値であることを示せ．

演習問題 7.2.2 負定値，非正定値を定義せよ．

定理 7.2.1 $\mathbb{R}^n$ 上の二次形式 $Q(x) = (Ax, x)$ に対して，n 次直交行列 U があって $y = U^{-1}x$ と置くとき

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$$

が成立する．$\lambda_k,\ k = 1, ..., n$ は A の固有値である．

演習問題 7.2.3 定理 *7.2.1* で $U = (u_1, ..., u_n),\ u_i$ は列ベクトル，とかくとき，

$$Au_i = \lambda_i u_i, \quad i = 1, ..., n$$

であることを示せ．

定理 7.2.2 $\mathbb{R}^n$ 上の二次形式 $Q(x) = (Ax, x)$ に対して次は互いに同値である．

(1) $x = 0$ で $Q(x)$ は狭義の最小値 0 をとる．

(2) Q は正値である．

(3) A の固有値はすべて正である．

(4) A のすべての主小行列式 D_k は正である：すなわち

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad 1 \leq k \leq n$$

定理 7.2.3 $\mathbb{R}^n$ 上の二次形式 $Q(x) = (Ax, x)$ に対して次は互いに同値である．

(1) $x = 0$ で $Q(x)$ は狭義の最大値 0 をとる．

(2) Q は負値である．

(3) A の固有値はすべて負である．

(4) A のすべての主小行列式 D_k は次を満たす．

$$(-1)^k D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad 1 \le k \le n$$

演習問題 7.2.4 二次形式 $x^2 + y^2 + z^2 + 2a(xy + yz + zx)$ が正定値となるような実数 a の範囲を求めよ．

演習問題 7.2.5 定理 *7.2.3* を示せ．

定理 7.2.4 $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で定義された C^2 級の実数値函数 $f(x)$ が $a \in D$ で $df_a = 0$ を満たすとき次が成立する．

(1) $d^2 f_a$ が正定値ならば a は f の狭義の極小点である．

(2) $d^2 f_a$ が負定値ならば a は f の狭義の極大点である．

(3) $d^2 f_a$ が不定符号ならば a は f の峠点で極値点ではない．

系 7.2.1 $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で定義された C^2 級の実数値函数 $f(x)$ が $a \in D$ で $df_a = 0$ を満たすする．$D_k(x)$ を次で定義する．

$$D_k(x) = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1}(x) & \cdots & f_{x_1x_k}(x) \\ & \cdots & \\ f_{x_kx_1}(x) & \cdots & f_{x_kx_k}(x) \end{vmatrix}, \quad 1 \le k \le n$$

このとき次が成立する．

(1) $D_k(a) > 0,\ 1 \le k \le n$ ならば a は f の狭義極小点である．

(2) $(-1)^k D_k(a) > 0,\ 1 \le k \le n$ ならば a は f の狭義極大点である．

(3) $D_n(a) \ne 0$ で (1), (2) 以外なら f は a で極値をとらない．

定理 7.2.5 $D \subset \mathbb{R}^2$ で $f(x, y) \in C^2(D)$ とし，$(a, b) \in D$ とする．このとき

(1) $f_{xx}(a, b) > 0,\ f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 > 0$

$\Longrightarrow f$ は (a, b) で狭義の極小

(2) $f_{xx}(a, b) < 0,\ f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 > 0$

$\Longrightarrow f$ は (a, b) で狭義の極大

(3) $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2 < 0$

$\Longrightarrow f$ は (a,b) で極大にも極小にもならない

演習問題 7.2.6 $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}(x^2+2y^2)$ とする．f が極値をとる点，および極値を求めよ．

演習問題 7.2.7 次の関数の極値を求めよ．

$$(x+y)(x^2+y^2-6)$$

演習問題 7.2.8 次の関数の極値を求めよ．

$$(x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

第8章　陰関数

8.1　陰関数

定理 8.1.1 $F(x,y) \in C^1(D)$, $(a,b) \in D$ で $F(a,b) = 0$ とする．このとき $F_y(a,b) \neq 0$ ならば $x = a$ の近くで定義された C^1 級関数 $f(x)$ で

$$f(a) = b, \quad F(x, f(x)) = 0$$

を満たすものが唯一つある．更に

$$f'(x) = \frac{-F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}$$

である．

基本モデル：$F(x,y) = ax + by$ とする．もし $b = F_y \neq 0$ ならば $ax + by = 0$ は y について解け，$y = -ax/b$ で　明らかに $F(x, -ax/b) = 0$

定理 8.1.2 $\mathbb{R}^{n+1}$ の開集合 U で定義された実数値 C^1 級函数 $F(x,y) = F(x_1, ..., x_n, y)$ が，一点 $(a,b) = (a_1, ..., a_n, b) \in U$ で

$$F(a,b) = 0, \quad F_y(a,b) \neq 0$$

を満たしているとする．このとき $x = a$ を含む開集合 V と V 上の C^1 級函数 $f(x)$ で

$$F(x, f(x)) = 0, \quad f(a) = b$$

を満たすものがただ一つ存在する．さらに

$$f_{x_i}(x) = \frac{-F_{x_i}(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}, \quad i = 1, ..., n$$

が成立する．さらに $F(x,y) \in C^r(U)$ ならば $f(x)$ も C^r 級である．

定義 8.1.1 $F(x,y)$, $G(x,y) \in C^1(\Omega)$ とする．このとき

$$\begin{pmatrix} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{pmatrix} = \frac{D(F,G)}{D(x,y)}(x,y)$$

を F, G の x, y に関する関数行列という．また

$$\det \begin{pmatrix} F_x(x,y) & F_y(x,y) \\ G_x(x,y) & G_y(x,y) \end{pmatrix} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(x,y)$$

を F, G の x, y に関する関数行列式という．

定理 8.1.3 $F(x,y,z)$, $G(x,y,z) \in C^1(\Omega)$ かつ $F(a,b,c) = G(a,b,c) = 0$ で

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(a,b,c) \neq 0$$

とする．このとき a の近くで定義された C^1 級関数 $\phi(x)$, $\psi(x)$ で

$$\phi(a) = b,\ \psi(a) = c,\ F(x,\phi(x),\psi(x)) = 0,\ G(x,\phi(x),\psi(x)) = 0$$

を満たすものが唯一組存在する．

演習問題 8.1.1 $F(x,y,z)$, $G(x,y,z)$ のとき

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(x,y,z), \quad \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(x,y,z)$$

の定義を与えよ．

モデル：連立一次方程式

$$\begin{cases} F(x,y,z) = ax + by + cz = 0 \\ G(x,y,z) = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{cases}$$

を考える．

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(0,0,0) = b\gamma - c\beta = \triangle \neq 0$$

とすると

$$\begin{cases} by + cz = -ax \\ \beta y + \gamma z = -\alpha x \end{cases}$$

が解けて

$$\begin{cases} y = -\triangle^{-1}(\gamma a - c\alpha)x \\ z = -\triangle^{-1}(-\beta a + b\alpha)x. \end{cases}$$

演習問題 8.1.2 $F(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0$ の定める陰関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

定義 8.1.2 $F_i(x,y) = F_i(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)$, $i = 1,...,m$ を C^1 級函数とする．このとき

$$\begin{bmatrix} F_{1,y_1}(x,y) & F_{1,y_2}(x,y) & \cdots & F_{1,y_m}(x,y) \\ F_{2,y_1}(x,y) & F_{2,y_2}(x,y) & \cdots & F_{2,y_m}(x,y) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ F_{m,y_1}(x,y) & F_{m,y_2}(x,y) & \cdots & F_{m,y_m}(x,y) \end{bmatrix} = \frac{D(F_1,...,F_m)}{D(y_1,...,y_m)}(x,y)$$

を $F_1(x,y)$,...,$F_m(x,y)$ の $y_1,...,y_m$ に関する函数行列という．また

$$\det\begin{bmatrix} F_{1,y_1}(x,y) & F_{1,y_2}(x,y) & \cdots & F_{1,y_m}(x,y) \\ F_{2,y_1}(x,y) & F_{2,y_2}(x,y) & \cdots & F_{2,y_m}(x,y) \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ F_{m,y_1}(x,y) & F_{m,y_2}(x,y) & \cdots & F_{m,y_m}(x,y) \end{bmatrix} = \frac{\partial(F_1,...,F_m)}{\partial(y_1,...,y_m)}(x,y)$$

を $F_1(x,y)$,...,$F_m(x,y)$ の $y_1,...,y_m$ に関する函数行列式という．

定理 8.1.4 U を $\mathbb{R}^{n+m}$ の開集合とし，$F_1(x,y)$,...,$F_m(x,y)$ を U 上の C^1 級函数とし，さらに一点 $(a,b)=(a_1,...,a_n,b_1,...,b_m)\in U$ で

$$F_i(a,b)=0,\quad i=1,...,m,\quad \frac{\partial(F_1,...,F_m)}{\partial(y_1,...,y_m)}(a,b)\neq 0$$

とする．このとき，$x=a$ の開近傍 V と $f_i(x)\in C^1(V)$, $i=1,...,m$ で次を満たすものがただ一組存在する．

$$f_i(a,b)=0,\quad i=1,...,m,\quad F_i(x,f_1(x),...,f_m(x))=0,\quad i=1,...,m.$$

さらに

$$\frac{D(f_1,...,f_m)}{D(x_1,...,x_n)}(x)=\left(\frac{D(F_1,...,F_m)}{D(y_1,...,y_m)}(x,f(x))\right)^{-1}\frac{D(F_1,...,F_m)}{D(x_1,...,x_n)}(x,f(x))$$

が成立する．

演習問題 8.1.3

$$\frac{D(f_1,...,f_m)}{D(x_1,...,x_n)}(x),\quad \frac{D(F_1,...,F_m)}{D(x_1,...,x_n)}(x,y)$$

を定義せよ．

8.2　逆函数定理

定理 8.2.1 $U\subset\mathbb{R}^n$ を開集合とし，$f(x)=(f_1(x),...,f_n(x))\in C^1(U)$ とする．さらに $a\in U$ で

$$\frac{\partial(f_1,...,f_n)}{\partial(x_1,...,x_n)}(a)\neq 0$$

とする．このとき $b=f(a)$ の開近傍 W と $g(y)=(g_1(y),...,g_n(y))\in C^1(W)$ および a の開近傍 V があって

$$f(g(y))=y,\ y\in W,\quad g(f(x))=x,\ x\in V$$

が成立する．$x=g(y)$ を f の逆函数という．また $y=f(x)$, $x\in V$ に対して

$$\frac{D(g_1,...,g_n)}{D(y_1,...,y_n)}(y)=\left(\frac{D(f_1,...,f_n)}{D(x_1,...,x_n)}(x)\right)^{-1}.$$

が成立する．また $f(x)\in C^r(U)$ ならば $g(y)\in C^r(W)$ である．

演習問題 8.2.1 $f(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ に対して

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(r,\theta)}$$

を求めよ.

演習問題 8.2.2 $f(x)=(f_1(x),...,f_n(x))\in C^1(V)$ と　$g(y)=(g_1(y),...,g_n(y))\in C^1(W)$ が

$$f(g(y))=y,\quad y\in W$$

を満たしているとき

$$\frac{D(f_1,...,f_n)}{D(x_1,...,x_n)}(x)\neq 0,\quad x=g(y),\ y\in W$$

であることを示せ.

第9章　条件付極値問題

9.1　条件付極値

補題 **9.1.1** $f(x,y),\ g(x,y) \in C^1$ とし，$f(x,y)=0$ の下で $g(x,y)$ が (a,b) で極値をとるとする．このとき，$df_{(a,b)} \neq 0$ ならば

$$dg_{(a,b)} = \lambda df_{(a,b)}$$

となる λ がある．

補題 **9.1.2** U は $\mathbb{R}^n$ の開集合で，$f(x)$ は U 上で定義された実数値 C^1 函数，また $g(x)=(g_1(x),...,g_m(x)) \in C^1(U)$ は $\mathbb{R}^m$– 値 C^1 函数とする．いま

(1) f が $a \in S = \{x \in U \mid g(x)=0\}$ で S 上の極値をとり

(2)
$$\mathrm{rank}\frac{D(g_1,...,g_m)}{D(x_1,...,x_n)}(a) = m$$

が成立しているとする．このとき $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ があって

$$df_a(a) = (\lambda_1,...,\lambda_m)\frac{D(g_1,...,g_m)}{D(x_1,...,x_n)}(a)$$

が成立する．

定理 **9.1.1** $f(x,y),\ g(x,y) \in C^1$ とする．$f(x,y)=0$ の下で $g(x,y)$ が (a,b) で極値をとると仮定する．いま

$$F(x,y,\lambda) = g(x,y) - \lambda f(x,y)$$

とおく．このとき次のいずれかが成立する．

$$df_{(a,b)} = 0 \quad \text{または} \quad dF_{(a,b,\lambda)} = 0 \quad \text{となる}\ \lambda \quad \text{がある．}$$

定理 **9.1.2** U は $\mathbb{R}^n$ の開集合で，$f(x)$ は U 上で定義された実数値 C^1 函数，また $g(x)=(g_1(x),...,g_m(x)) \in C^1(U)$ は $\mathbb{R}^m$– 値 C^1 函数とする．いま f が $a \in S = \{x \in U \mid g(x)=0\}$ で S 上の極値をとるとする．このとき，次のいずれかが成立する．

(1) $U \times \mathbb{R}^m$ 上の函数 $\Phi(x,\lambda) = f(x) - (\lambda, g(x))$ に対し，ある $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ が存在して

$$d\Phi_{(a,\lambda_0)} = 0$$

が成立する．即ち，(a,λ_0) は Φ の停留点である．

(2)

$$\mathrm{rank}\frac{D(g_1,...,g_m)}{D(x_1,...,x_n)}(a) < m$$

演習問題 9.1.1 $x^2 + y^2 = 1$ の下で $x^2 + 2xy + y^2$ の極値，および極値をとる点を求めよ．

演習問題 9.1.2 $x^2 + y^2 = 1$ の下で $ax^2 + by^2$ の極小値および極大値をとる点を求めよ．

演習問題 9.1.3 $x^2 + y^2 = 1$ の下で

$$x^2 - \frac{(x-y)^2}{2}$$

の最大値，最小値を求めよ．

演習問題 9.1.4 a_i, $i = 1,...,p$ は $a_1 + a_2 + \cdots + a_p = 1$ を満たす実数，r_i, $i = 1,...,p$ は正の定数とする．このとき，任意の実数 x_i, $i = 1,...,p$ に対して

$$4\left|\sum_{i=1}^{p} a_i r_i x_i\right|^2 \leq \delta \sum_{i=1}^{p} r_i x_i^2$$

が成立するならば，a_i によらず

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{r_i} \geq \delta^{-1}$$

であることを示せ．

第10章　積分

10.1　積分の naive な定義

定義 10.1.1 $f(x)$ を $I=[a,b]$ 上の関数とする．

$$\Delta : a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$$

を I の分割とする．このとき，分割 Δ に関する *Riemann* 和 $s(f;\Delta)$ を

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

で定義する．ただし，$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ である．いま $d(\Delta)$ で各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の長さの最大値をあらわすことにして，

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} s(f;\Delta)$$

が代表点 $\{\xi_i\}$ のとり方によらず，一定の極限値に収束するとき，$f(x)$ は I 上で積分可能といい，その極限値を

$$\int_a^b f(x)dx$$

と記し，I 上の $f(x)$ の積分という．

定義 10.1.2

$$\Delta' : a = x'_0 \leq x'_1 \leq \cdots \leq x'_m = b, \quad \Delta : a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$$

を区間 $I=[a,b]$ の二つの分割とする．このとき Δ' が Δ の細分であるとは

$$\{x_0, x_1, ..., x_n\} \subset \{x'_0, x'_1, ..., x'_m\}$$

の成立することをいう．

10.2　定義の反省

定義 10.2.1 $f(x)$ を $I=[a,b]$ 上の有界関数とする．

$$\Delta : a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$$

を I の分割とする．このとき，

$$s(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

を不足和といい

$$S(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

を過剰和という．ただし

$$m_i = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

である．さらに

$$S = \inf_{\Delta} S(\Delta)$$

を上積分といい

$$s = \sup_{\Delta} s(\Delta)$$

を下積分という．ここで Δ はすべての分割を動く．

演習問題 10.2.1 $\{S(\Delta);\Delta\}$ は上に有界であることを確かめよ．

補題 10.2.1 Δ' を Δ の細分とすると

$$S(\Delta) \geq S(\Delta') \geq s(\Delta') \geq s(\Delta)$$

が成立する．

補題 10.2.2 $S \geq s$ である．

演習問題 10.2.2 補題 1.2.1 を示せ．

定義 10.2.2

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

と定義する．

定理 10.2.1 (Darboux) Δ_h を分割の列とする．このとき

$$\lim_{d(\Delta_h)\to 0} S(\Delta_h) = S, \quad \lim_{d(\Delta_h)\to 0} s(\Delta_h) = s$$

である．

演習問題 10.2.3 $\lim_{d(\Delta_h)\to 0} s(\Delta_h) = s$ を示せ．

10.3　可積分性の判定

定理 10.3.1 次の 3 つは同値.

(1) $f(x)$ は $I=[a,b]$ で可積分

(2) $S=s$

(3) $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0$ *such that*

$$\sum_i (M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})<\epsilon \quad if \quad d(\Delta)<\delta$$

演習問題 10.3.1 関数

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x<1 \\ 2, & x\geq 1 \end{cases}$$

は $[0,2]$ 上可積分であることを示せ.

定義 10.3.1 $f(x)$ は区間 $I\subset\mathbb{R}$ 上の関数とする. 任意の $\epsilon>0$ に対し, $\delta>0$ があって

$$x,y\in I,\ |x-y|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon$$

の成立するとき, $f(x)$ は I 上一様連続であるという.

演習問題 10.3.2 $f(x)=1/x$ は $(0,1]$ 上一様連続か?

定理 10.3.2 $I=[a,b]$ を有界閉区間, $f(x)$ を I 上の連続関数とする. このとき $f(x)$ は I 上可積分である.

演習問題 10.3.3 $f(x)$ は $[a,b]$ 上で可積分とする. $[c,d]\subset[a,b]$ とするとき, $f(x)$ は $[c,d]$ 上で可積分であることを示せ.

演習問題 10.3.4 $f(x)$ は I 上の有界関数とする.

(1) $|f(x)-f(y)|\leq a$ がすべての $x,y\in I$ に対して成り立っているとする. このとき

$$\sup_{x\in I} f(x)-\inf_{x\in I} f(x)\leq a$$

であることを示せ.

(2) $|f(x)-f(y)|\leq \sup_I f(x)-\inf_I f(x)$ を示せ.

演習問題 10.3.5 $f(x)$ は I 上可積分とする. このとき $|f(x)|$ も I 上可積分であることを示せ.

命題 10.3.1 $f(x)$, $g(x)$ は区間 I 上の有界な可積分関数とする. このとき

(1) $Af(x)+Bg(x)$ は I 上可積分で

$$\int_a^b (Af(x)+Bg(x))\,dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx$$

(2) $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in [a,b]$ とするとき

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

(3) $[a,b]$ で $f(x) \geq g(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

さらに $f(x),\ g(x) \in C^0([a,b])$ ならば等号は $f(x) \equiv g(x)$ のときに限り成立する．

(4)

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|$$

が成立する．

(5) $f(x)g(x)$ は I 上可積分である．

演習問題 10.3.6 命題 1.3.1 を示せ．

10.4 基本定理

定理 10.4.1 $f(x),\ \phi(x) \in C^0([a,b])$ かつ $\phi(x) \geq 0$ とする．このとき

$$\int_a^b f(x)\phi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \phi(x)dx$$

となる $a < \xi < b$ が存在する．

定理 10.4.2 $f(x) \in C^0([a,b])$ とし，$c \in [a,b]$ とする．このとき

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = f(x), \quad x \in (a,b)$$

が成立する．

定理 10.4.3 $F(x) \in C^1([a,b])$ とするとき

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$$

である．

定理 10.4.4

(1) $f(x) \in C^0([a,b])$, $\phi(t) \in C^1([\alpha,\beta])$ かつ $\phi(t) \in [a,b]$, $t \in [\alpha,\beta]$, $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$ とすると

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

(2) $f(x)$, $g(x) \in C^1([a,b])$ とすると

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

演習問題 10.4.1 $f(x) \in C^0(\mathbb{R})$ とし，c, d は定数とする．このとき

$$\int_{c\alpha+d}^{c\beta+d} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(ct+d)dt$$

を示せ．

演習問題 10.4.2

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta, \quad n \in \mathbb{N}$$

を求めよ．

10.5 不定積分の計算

命題 10.5.1 f, g は実係数多項式で，$\deg g < \deg f$ とし，実係数の有理関数 $R(x) = g(x)/f(x)$ を考える．$f(x)$ の相異なる実根を a_j, $(1 \le j \le k)$, a_j の重複度を m_j, また相異なる虚根を $\alpha_j \pm i\beta_j$ $(1 \le j \le \ell, \beta_j \neq 0)$, その重複度を n_j とする．このとき $R(x)$ は

$$R(x) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{m_j} \frac{c_{jm}}{(x-a_j)^m} + \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{m=1}^{n_j} \frac{d_{jm}x + e_{jm}}{\{(x-\alpha_j)^2 + \beta_j^2\}^m}$$

と表される．

命題 10.5.2 $n \ge 1$ を自然数，a, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ のとき，次が成立する．

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \dfrac{-1}{n-1}\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}}, & n > 1 \\ \log|x-a|, & n = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+b^2)^n} = \begin{cases} \dfrac{-1}{2(n-1)}\dfrac{1}{(x^2+b^2)^{n-1}}, & n > 1 \\ \dfrac{1}{2}\log(x^2+b^2), & n = 1 \end{cases}$$

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+b^2)^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{b^2}\Big\{\dfrac{x}{(2n-2)(x^2+b^2)^{n-1}} + \dfrac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\Big\}, & n > 1, \\ \dfrac{1}{b}\arctan\dfrac{x}{b}, & n = 1 \end{cases}$$

定理 10.5.1 有理関数の不定積分は有理関数，対数関数，逆正接関数で表される．

演習問題 10.5.1 次の関数の原始関数を求めよ．

(i) $\dfrac{1}{x^3 - x}$

(ii) $\dfrac{1}{x^2 - a^2}, \quad a \neq 0$

(iii) $\dfrac{3x^2 - 3x - 9}{(x+2)(x-1)^2}$

定理 10.5.2 $R(z, w)$ を (z, w) の有理式とする．このとき $\tan \dfrac{x}{2} = t$ とおくと

$$\int R(\cos x, \sin x) dx = \int R\Big(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\Big) \frac{2dt}{1+t^2}$$

が成立する．すなわち三角関数の有理式の不定積分は，有理関数の不定積分に帰着される．

演習問題 10.5.2 次の関数の原始関数を求めよ．

(i) $\dfrac{1}{\sin x}$

(ii) $\dfrac{1}{\cos x}$

(iii) $\dfrac{1}{\cos^2 x}$

10.6 広義積分

補題 10.6.1 $F(x)$ は $[a, b)$ 上で定義されているとする．

$$\lim_{x \to b} F(x)$$

が存在するための必要十分条件は

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad s.t. \quad b - \delta < x, y < \delta \Longrightarrow |F(x) - F(y)| < \epsilon$$

の成立することである．

補題 10.6.2 $F(x)$ は $[a, \infty)$ 上で定義されているとする．

$$\lim_{x \to \infty} F(x)$$

が存在するための必要十分条件は

$$\forall \epsilon > 0, \exists M > 0 \quad s.t. \quad x, y > M \Longrightarrow |F(x) - F(y)| < \epsilon$$

の成立することである．

演習問題 10.6.1 $F(x)$ は $[a,b)$ 上で定義されているとする.

$$\lim_{x\to b} F(x)$$

が存在するための必要十分条件は $a_n \to b,\ a_n < b$ なる任意の点列 $\{a_n\}$ に対して $\{F(a_n)\}$ が Cauchy 列になることである.

演習問題 10.6.2 $F(x)$ は $[a,\infty)$ 上で定義されているとする.

$$\lim_{x\to\infty} F(x)$$

が存在するための必要十分条件は $a_n \to \infty$ なる任意の点列 $\{a_n\}$ に対して $\{F(a_n)\}$ が Cauchy 列になることである.

定義 10.6.1 (有界でない関数) $f(x) \in C^0([a,b))$ とする. このとき

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

が存在するとき, $f(x)$ の $[a,b)$ での広義積分は収束するという. 極限値を

$$\int_a^{\to b} f(x)dx \quad or \quad \int_a^b f(x)dx$$

と記す.

定義 10.6.2 (有界でない区間) $f(x) \in C^0([a,\infty))$ とする. このとき

$$\lim_{M\to\infty} \int_a^M f(x)dx$$

が存在するとき, $f(x)$ の $[a,\infty)$ での広義積分は収束するといい, 極限値を

$$\int_a^{\to\infty} f(x)dx \quad or \quad \int_a^\infty f(x)dx$$

で表わす.

演習問題 10.6.3 $f(x) \in C^0((a,b])$ とする. このとき広義積分

$$\int_{\to a}^b f(x)dx$$

を定義せよ.

演習問題 10.6.4 $0 < \alpha < 1$ とする. このとき, 広義積分

$$\int_{\to 0}^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$$

は収束することを示し, その値を求めよ.

演習問題 10.6.5 $\alpha > 1$ とする．このとき，広義積分

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

は収束することを示し，その値を求めよ．

定理 10.6.1 $f(x) \in C^0((a, b])$ とする．今 $\delta > 0$, $\alpha < 1$, $M > 0$ があって

$$|f(x)| \leq M \frac{1}{(x-a)^\alpha}, \quad a < x < a + \delta$$

が成立するとする．このとき $f(x)$ の $(a, b]$ 上の広義積分は収束する．

定理 10.6.2 $f(x) \in C^0([a, \infty))$ とする．今 $B > 0$, $\alpha > 1$, $M > 0$ があって

$$|f(x)| \leq M \frac{1}{x^\alpha}, \quad x \geq B$$

が成立するとする．このとき $f(x)$ の $[a, \infty)$ 上の広義積分は収束する．

演習問題 10.6.6 広義積分

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x)}$$

の値を求めよ．

演習問題 10.6.7 広義積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int_1^\infty \frac{\cos x}{x} dx$$

は収束することを示せ．

演習問題 10.6.8 広義積分

$$\Gamma(x) = \int_{\to 0}^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

は $x > 0$ で収束することを示し，かつ

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \qquad (x > 1)$$

を示せ．

演習問題 10.6.9

$$\int_1^\infty x^2 \sin x^4 dx$$

は収束することを示せ．

定理 10.6.3 (*)　$\phi(x) \in C^1([a, \infty))$ は単調減少かつ $\phi(x) \to 0$, $x \to \infty$ であるとする．さらに

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

は有界であるとする．このとき

$$\int_a^\infty \phi(x) f(x) dx$$

は収束する．

10.7　有界変動関数 *

定義 10.7.1 $f(x)$ は $[a,b]$ 上の関数とする．ある $M>0$ があって任意の分割

$$\Delta : a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$$

に対して

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M$$

が成立するとき $f(x)$ は $[a,b]$ 上で有界変動という．また

$$V = \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

を $f(x)$ の $[a,b]$ 上での総変動量という．詳しく $V([a,b];f)$ と書こう．

補題 10.7.1 $a \leq c \leq b$ とする．このとき

$$V([a,c];f) + V([c,a];f) = V([a,b];f)$$

である．

定義 10.7.2 $f(x)$ は $[a,b]$ 上で有界変動関数とする．このとき

$$V = \sup_{\Delta} \sum_{i=1}^{n} \max\{f(x_i) - f(x_{i-1}), 0\}$$

を $f(x)$ の $[a,b]$ 上の正の変動量という．

演習問題 10.7.1 負の変動量を定義せよ．

演習問題 10.7.2 $[a,x]$ 上の正の変動量を $P(x)$ で負の変動量を $N(x)$ であらわすとき

$$V([a,x];f) = V(x) = P(x) - N(x)$$

である．

定理 10.7.1 任 意の有界変動関数は二つの単調増加関数の差としてあらわされる．

演習問題 10.7.3 $f(x)$ は $x = x_0$ で連続とする．このとき $P(x)$, $N(x)$ も x_0 で連続である．

10.8　Stieltjes 積分 *

定義 10.8.1 $f(x)$ は $[a,b]$ 上の関数，また $\phi(x)$ は $[a,b]$ 上の有界変動関数とする．いま分割 $\Delta : a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$ に対して

$$s(\Delta; \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\phi(x_i) - \phi(x_{i-1}))$$

とおく．ただし $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ である．いま $d(\Delta) \to 0$ とするとき，代表点 $\{\xi_i\}$ の選び方によらず $s(\Delta; \{\xi_i\})$ が一定の極限値に収束するとき，$f(x)$ は $d\phi(x)$ に関して Stieltjes 積分可能といい，この極限を

$$\int_a^b f(x) d\phi(x)$$

であらわす．

定理 10.8.1 $\phi(x)$ は $[a,b]$ 上有界変動とする．このとき $f(x) \in C^0([a,b])$ は $d\phi$ に関してスチュルチュス積分可能である．

定理 10.8.2 $\phi(x)$ は $[a,b]$ 上有界変動，また $f(x) \in C^1([a,b])$ とする．このとき

$$\int_a^b f(x) d\phi(x) + \int_a^b \phi(x) df(x) = f(b)\phi(b) - f(a)\phi(a)$$

が成立する．

第11章　重積分

11.1　目的

　重積分の定義，累次積分，積分の変数変換

重積分の定義：$\sum f(P_i)S_i$
問題点：

(1) S_i はどう定義するか？

(2) 分割の仕方によらないか？

累次積分
　具体的にはどのようにして

$$\int\int f(x,y)dxdy$$

を求めるか？

積分の変数変換

$$\int\int_{\Phi(D)} f(u,v)dudv = \int\int_D f(u(x,y)v(x,y))|\frac{J(u,v)}{J(x,y)}|dxdy$$

11.2　重積分の naive な定義

定義 11.2.1 $f(x,y)$ を $I=[a,b]\times[c,d]$ 上の関数とする．

$$\Delta : a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b,\ c = y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_m = d$$

を I の分割とする．このとき，分割 Δ に関する *Riemann* 和 $s(f:\Delta)$ を

$$\sum_{i,j} f(P_{ij})|I_{ij}|$$

で定義する．ただし，$P_{ij}\in I_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ である．また $|I_{ij}| = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$ である．いま $d(\Delta)$ で各小区間 $[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ の対角線の長さの最大値をあらわすことにして，

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} s(f:\Delta)$$

が代表点 $\{P_{ij}\}$ のとり方によらず，一定の極限値に収束するとき，f は I 上で積分可能といい，その極限値を

$$\int\int_I f(x,y)dxdy$$

と記し，I 上の f の二重積分という．

定義 11.2.2 $D \subset \mathbb{R}^2$ とし，$f(x,y)$ は D 上で定義された関数とする．いま $D \subset I$ なる区間を一つとる．

$$\bar{f}(x,y) = f(x,y) \quad (x,y) \in D0 \qquad (x,y) \notin D$$

で $\bar{f}(x,y)$ を定義する．このとき，$\bar{f}$ が I 上で可積分のとき f は D 上で可積分といい，

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \quad \text{を} \quad \int\int_I \bar{f}(x,y)dxdy$$

で定義する．

演習問題 11.2.1 定義は I のとりかたによらない．

11.3　定義の反省

定義 11.3.1 $f(x,y)$ を $I = [a,b] \times [c,d]$ 上の関数とする．

$$\Delta : a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b,\ c = y_0 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_m = d$$

を I の分割とする．このとき，

$$s(\Delta) = \sum_{ij} m_{ij}|I_{ij}|$$

を不足和といい

$$S(\Delta) = \sum_{ij} M_{ij}|I_{ij}|$$

を過剰和という．ただし

$$m_{ij} = \inf_{(x,y)\in I_{ij}} f(x,y),\ M_{ij} = \sup_{(x,y)\in I_{ij}} f(x,y)$$

である．さらに

$$S = \inf_{\Delta} S(\Delta)$$

を上積分といい

$$s = \sup_{\Delta} s(\Delta)$$

を下積分という．

補題 11.3.1 $S \geq s$ である．

注意：

$$S \geq \text{期待される} \int_I f(x,y)dxdy \geq s$$

である．

定義 11.3.2 $S = s$ のとき $f(x,y)$ は I 上で積分可能といい，

$$\int\int_I f(x,y)dxdy = s = S$$

と定義する．

定理 11.3.1 (Darboux) Δ_h を分割の列とする．このとき

$$\lim_{d(\Delta_h)\to 0} S(\Delta_h) = S, \quad \lim_{d(\Delta_h)\to 0} s(\Delta_h) = s$$

である．

演習問題 11.3.1 $\lim_{d(\Delta_h)\to 0} s(\Delta_h) = s$ を示せ．

11.4　可積分性の判定

定理 11.4.1 次の 3 つは同値．

(1) $f(x,y)$ は I で可積分

(2) $S = s$

(3) $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ *such that*

$$\sum_{ij}(M_{ij} - m_{ij})|I_{ij}| < \epsilon \quad if \quad d(\Delta) < \delta$$

定義 11.4.1 $f(x,y)$ は集合 $E \subset \mathbb{R}^2$ 上の関数とする．任意の $\epsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ があって

$$(x,y),(\xi,\eta) \in E,\ \|(x,y)-(\xi,\eta)\| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - f(\xi,\eta)| < \epsilon$$

の成立するとき，$f(x,y)$ は E 上一様連続であるという．

定理 11.4.2 I を有界閉区間，$f(x,y)$ を I 上の連続関数とする．このとき $f(x,y)$ は I 上可積分である．

命題 11.4.1 $f(x,y)$, $g(x,y)$ は区間 I 上の有界な可積分関数とする．このとき $f(x,y)+g(x,y)$, $f(x,y)g(x,y)$ は I 上可積分である．

演習問題 11.4.1 命題 *11.4.1* を示せ．

11.5　面積

定義 11.5.1 $A \subset \mathbb{R}^2$ を有界集合とする．このとき

$$\chi_A(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in A \\ 0 & (x,y) \notin A \end{cases}$$

とおき $\chi_A(x,y)$ を A の特性関数という．χ_A が I $(A \subset I)$ で可積分のとき A を可測集合といい，A の面積を

$$|A| = \int\int_I \chi_A(x,y)dxdy$$

で定義する．

定義 11.5.2 $A \subset \mathbb{R}^2$ が測度 0 であるとは任意の $\epsilon > 0$ に対して次の条件を満たす有限個の区間 $I_1,...,I_p$ が存在すること：

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{p} I_i, \quad \sum_{i=1}^{p} |I_i| \leq \epsilon$$

補題 11.5.1 $A \subset \mathbb{R}^2$ を有界集合，また bA で A の境界を表わすものとする．このとき

$$A \quad \text{は可測} \Longleftrightarrow bA \quad \text{が測度 } 0$$

である．

演習問題 11.5.1 $A = \{(x,0) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ は測度 0 であることを示せ．

演習問題 11.5.2 $\phi(x) \in C^1([a,b])$ とする．このとき

$$A = \{(x,\phi(x)) \mid a \leq x \leq b\}$$

は測度 0 であることを示せ．

命題 11.5.1 A, B を有界可測集合とする．このとき $A \cap B$, $A \cup B$ も可測である．

演習問題 11.5.3 命題 *11.5.1* を示せ．

演習問題 11.5.4 A_i, $i = 1,...,N$ を有界可測集合とする．このとき

$$\bigcup_{i=1}^{N} A_i, \quad \bigcap_{i=1}^{N} A_i$$

も可測集合であることを示せ．

命題 11.5.2 $f(x,y)$ は可測集合 A, B 上で可積分とする．このとき $f(x,y)$ は $A\cup B$, $A\cap B$ 上可積分で

$$\int\int_{A\cup B} f(x,y)dxdy = \int\int_A f(x,y)dxdy + \int\int_B f(x,y)dxdy - \int\int_{A\cap B} f(x,y)dxdy$$

が成立する．また $f(x,y)$ が $A\cup B$ 上で可積分，A, B は可測集合とすると $f(x,y)$ は A および B 上で可積分で上式が成立する．

補題 11.5.2 $f(x,y)$ は有界とし，A を面積 *0* とする．このとき

$$\int\int_A f(x,y)dxdy = 0$$

である．

演習問題 11.5.5 命題 *11.5.2* を示せ．

11.6　累次積分

定理 11.6.1 $I=[a,b]\times[c,d]$ とし，$f(x,y)\in C^0(I)$ とする．このとき

$$\int\int_I f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

が成立する．

演習問題 11.6.1 次の積分値を求めよ．

$$\int\int_{[0,1]\times[0,1]} (x+y^2)^2 dxdy$$

演習問題 11.6.2 次の積分値をもとめよ．$(0<a<b)$

$$\int\int_{[0,1]\times[a,b]} x^y dxdy$$

命題 11.6.1 $\phi(y)$, $\psi(y)\in C^2([a,b])$ とし

$$A=\{(x,y)\mid a\le x\le b, \phi(x)\le y\le\psi(x)\}$$

とする．$f(x,y)\in C(A)$ とすると

$$\int\int_A f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$$

である．

命題 11.6.2 $\phi(y),\ \psi(y) \in C^2([c,d])$ とし

$$A = \{(x,y) \mid c \le y \le d, \phi(y) \le x \le \psi(y)\}$$

とする．$f(x,y) \in C(A)$ とすると

$$\int\int_A f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$$

である．

演習問題 11.6.3 次の積分値を求めよ．

$$\int\int_D xydxdy, \quad D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a^2, x \ge 0, y \ge 0\}$$

演習問題 11.6.4 次の積分値を求めよ．

$$\int\int_D xydxdy, \quad D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le y \le 1-x\}$$

演習問題 11.6.5 次の積分値を求めよ．

$$\int\int_D xydxdy, \quad D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1, y \ge 0\}$$

11.7　積分の変数変換 (極座標への変換)

定義 11.7.1 $A \subset \mathbb{R}^2$ を有界集合とする．このとき 有限個の可測（面積確定）集合 $A_1,\ldots,A_N$ のあつまり，$\Delta = \{A_i\}_{i=1}^N$ が A の一般分割であるとは次のことが成立することをいう．

$$A = \bigcup_{i=1}^N A_i$$

$$|A_i \cap A_j| = 0, \quad i \ne j$$

さて $d(\Delta)$ を

$$d(\Delta) = \max_i \sup_{p,q \in A_i} d(p,q)$$

と定義する．

補題 11.7.1 $f(x,y)$ が A 上可積分とすると $p_i \in A_i$ の選び方によらず，

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} \sum f(p_i)\,|A_i| = \int\int_A f(x,y)dxdy$$

が成り立つ．逆に

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} \sum f(p_i)\,|A_i|$$

が代表点 $p_i \in A_i$ の選び方によらず一定の極限値に収束するならば $f(x,y)$ は A 上可積分で

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} \sum f(p_i)\,|A_i| = \int\int_A f(x,y)dxdy$$

である．

11.8 積分の変数変換 (極座標への変換)

定義 11.8.1 $A \subset \mathbb{R}^2$ を有界集合とする．このとき 有限個の可測（面積確定）集合 $A_1,\ldots,A_N$ のあつまり，$\Delta = \{A_i\}_{i=1}^N$ が A の一般分割であるとは次のことが成立することをいう．

$$A = \bigcup_{i=1}^N A_i$$
$$|A_i \cap A_j| = 0, \quad i \neq j$$

さて $d(\Delta)$ を

$$d(\Delta) = \max_i \sup_{p,q \in A_i} d(p,q)$$

と定義する．

補題 11.8.1 $f(x,y)$ が A 上可積分とすると $p_i \in A_i$ の選び方によらず，

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} \sum f(p_i)\,|A_i| = \int\int_A f(x,y)dxdy$$

が成り立つ．逆に

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} \sum f(p_i)\,|A_i|$$

が代表点 $p_i \in A_i$ の選び方によらず一定の極限値に収束するならば $f(x,y)$ は A 上可積分で

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} \sum f(p_i)\,|A_i| = \int\int_A f(x,y)dxdy$$

である．

Ω を

$$\Omega = \{(r,\theta) \mid 0 \leq a \leq r \leq b,\ 0 \leq \phi \leq \theta \leq \psi \leq 2\pi\}$$

とし，D を

$$D = \{(x,y) \mid x = r\cos\theta, y = r\sin\theta,\ (r,\theta) \in \Omega\}$$

とする．

定理 11.8.1 次が成立する．

(1) $f(x,y)$ が D 上可積分ならば $f^*(r,\theta)r = f(r\cos\theta, r\sin\theta)r$ も Ω 上可積分で

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

(2) $f(r\cos\theta, r\sin\theta)r$ が Ω 上可積分ならば $f(x,y)$ は D 上可積分で

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

演習問題 11.8.1 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\}$ とする．

$$\int\int_D x^2 y^2 dxdy$$

を求めよ．

演習問題 11.8.2 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, x \geq 0\}$ とする．

$$\int\int_D (x^2 + y^2) dxdy$$

を求めよ．

演習問題 11.8.3 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ とする．

$$\int\int_D (x^2 + y^2) e^{-x^2 - y^2} dxdy$$

を求めよ．

11.9　一般の変数変換

次のことを思い出す

$$\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(u, v)}(u, v) = \det \begin{pmatrix} \phi_u(u, v) & \phi_v(u, v) \\ \psi_u(u, v) & \psi_v(u, v) \end{pmatrix}$$

補題 11.9.1 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$F = \begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$$

とする．$I \subset \mathbb{R}^2$ を区間とするとき

$$|F(I)| = \int\int_I \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) \right| dudv$$

である．ただし $F(I) = \{(au + bv, cu + dv) \mid (u, v) \in I\}$ である．

補題 11.9.2 $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ を

$$\Phi = \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \qquad x(u, v),\ y(u, v) \in C^1(\bar{D})$$

とし，$\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)(u, v)} \neq 0,\ (u, v) \in \bar{D}$ とする．このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって $d(I) < \delta,\ I \subset D$ なる任意の正方形 I に対して

$$\left| |\Phi(I)| - |\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(p)||I| \right| \leq \epsilon |I|$$

が成立する．ただし p は I の中心である．特に

$$\lim_{d(I)\to 0}\frac{|\Phi(I)|}{|I|}=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(p)\right|$$

である．

命題 11.9.1 $\Phi:\mathbb{R}^2\supset D\to\mathbb{R}^2$ を

$$\Phi=\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v)\end{cases}\qquad x(u,v),\ y(u,v)\in C^1(D)$$

で $1-1$ かつ

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\neq 0,\quad (u,v)\in D$$

とする．いま $A\subset D$ を可測とする．このとき

$$|\Phi(A)|=\int\int_A\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\right|dudv$$

である．ただし $\Phi(A)=\{(x,y)\mid (x,y)=\Phi(u,v),(u,v)\in A\}$ である．

演習問題 11.9.1

$$\begin{cases} f(u,v)=a\phi(u,v)+b\psi(u,v) \\ g(u,v)=c\phi(u,v)+d\psi(u,v)\end{cases}$$

とするとき

$$\frac{D(f,g)}{D(u,v)}(u,v)=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\frac{D(\phi,\psi)}{D(u,v)}(u,v)$$

であることを示せ．

演習問題 11.9.2 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}\quad (a>0)$ と $x\geq 0,\ y\geq 0$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

演習問題 11.9.3

$$\Omega=\{(x,y)=(u^2-v^2,uv)\mid 0\leq u\leq a, 0\leq v\leq b\}$$

とするとき Ω の面積を求めよ．

演習問題 11.9.4

$$B=\{(x,y)\mid ax^2+2bxy+cy^2\leq 1\},\quad a>0,\ ac-b^2>0$$

とする．このとき B の面積を求めよ．

定理 11.9.1 $\Phi : \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ を

$$\Phi = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \qquad x(u,v),\ y(u,v) \in C^1(D)$$

で $1-1$ かつ

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \neq 0, \quad (u,v) \in D$$

とする．いま $A \subset D$ および $\Phi(A) = B$ を可測とする．このとき

(1) $f(x,y)$ が B 上可積分ならば

$$f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \right|$$

も A 上可積分で

$$\int\int_B f(x,y)dxdy = \int\int_A f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \right| dudv$$

が成立する．

(2)

$$f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \right|$$

が A 上可積分なら $f(x,y)$ は B 上可積分で

$$\int\int_B f(x,y)dxdy = \int\int_A f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \right| dudv$$

が成立する．

11.10　広義積分 (多次元)

問題点：$f(x,y) \in C^0(\Omega \setminus \{0\})$ とする．このとき $\Omega_\epsilon \to \Omega$ となる Ω_ϵ のとり方は無限にある．$[a, b-\epsilon) \to [a,b)$ と比較せよ．

定義 11.10.1 $0 \leq f(x,y) \in C^0(\Omega)$ とする．いま

$$\sup_{K \in K(\Omega)} \int\int_K f(x,y)dxdy < \infty$$

のとき，$f(x,y)$ は Ω 上で広義積分可能という．ただし，ここで

$$K(\Omega) = \{K \subset \Omega \quad | \, K : \text{面積確定有界閉集合}\}$$

この上限を

$$\int\int_\Omega f(x,y)dxdy$$

で表わし，$f(x,y)$ の Ω 上の広義積分という．

定義 11.10.2 $f(x,y) \in C^0(\Omega)$ とする．

$$\sup_{A \in K(\Omega)} \int\int_A |f(x,y)| dxdy < \infty$$

のとき，$f(x,y)$ は Ω 上広義積分可能といい，広義積分の値を

$$\int\int_\Omega f(x,y)dxdy = \int\int_\Omega f^+(x,y)dxdy - \int\int_\Omega f^-(x,y)dxdy$$

で定義する．ただし

$$f^+(x,y) = (|f(x,y)| + f(x,y))/2$$
$$f^-(x,y) = (|f(x,y)| - f(x,y))/2$$

ある．

演習問題 11.10.1

(1) f が広義積分可能であることと，f^+, f^- がともに広義積分可能であることは同値であることを示せ．

(2)

$$\int\int_\Omega |f(x,y)| dxdy \geq \int\int_\Omega f^+(x,y)dxdy,\ \int\int_\Omega f^-(x,y)dxdy$$

であることを示せ．

定義 11.10.3 $D \subset \mathbb{R}^2$, D は有界でないとする．このとき任意の $R > 0$ に対して

$$D \cap B_R = D \cap \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

が面積確定のとき，D を面積確定といい，

$$\lim_{R \to \infty} |D \cap B_R|$$

で D の面積を定義する．したがって面積無限大の場合もある．

11.11 定義の反省

定義 11.11.1 $D \subset \mathbb{R}^2$ を面積確定とする．このとき $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ が D のコンパクト近似列であるとは，次の 3 条件が満たされることをいう．

(1) $A_n \in K(D)$

(2) $A_n \subset A_{n+1}$,　$n = 1, 2, ...$

(3) D に含まれるかってな有界閉集合 B に対して，$B \subset A_m$ なる m がある．

演習問題 11.11.1 $D = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ とする．このとき

$$A_n = \{(x,y) \mid \frac{1}{n} \leq x^2 + y^2 \leq 1 - \frac{1}{n}\}$$

は D のコンパクト近似列である．

定理 11.11.1 $D \subset \mathbb{R}^2$ にはコンパクト近似列 $\{A_n\}$ があるとする．このとき次は同値である．

(1) $f(x,y) \in C^0(D)$ は D 上広義積分可能．

(2)

$$\lim_{n\to\infty} \int\int_{A_n} |f(x,y)| dxdy$$

が存在する．
さらにこのとき

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \int\int_{A_n} f(x,y)dxdy$$

である．

演習問題 11.11.2 $D = \{(x,y) \mid 0 < x^2+y^2 < 1\}$ とする．このとき $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\alpha/2}$ は $\alpha < 2$ なら D 上広義可積分であることを示しその値を求めよ．$\alpha > 2$ なら広義積分不可能であることを示せ．

演習問題 11.11.3 $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0, (x,y) \neq (0,0)\}$ とする．このとき広義積分

$$\int\int_B \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha} dxdy \quad (\alpha < 1)$$

の値を求めよ．

演習問題 11.11.4

(1) $A_n = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq n^2\}$ は $\mathbb{R}^2$ のコンパクト近似列であることを示せ．

(2) 広義積分

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^\alpha} dxdy$$

は $\alpha > 1$ なら収束し，$\alpha < 1$ なら発散することを示せ．

定理 11.11.2 $D = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq \rho\}$ とし，$f(x,y) \in C^0(D)$ とする．$\alpha < 2,\ \delta > 0,\ B > 0$ があって

$$|f(x,y)| \leq \frac{B}{\sqrt{x^2+y^2}^\alpha}, \quad 0 < x^2 + y^2 < \delta^2$$

が成立するならば $f(x,y)$ は D で広義積分可能である．

定理 11.11.3 D を有界でない可測集合とし，$f(x,y)$ は D で有界かつ連続とする．$\alpha > 2,\ M > 0,\ B > 0$ があって

$$|f(x,y)| \leq \frac{B}{\sqrt{x^2+y^2}^{\alpha}}, \quad x^2+y^2 \geq M$$

が成立するならば $f(x,y)$ は D で広義積分可能である．

11.12　広義積分の変数変換

定理 11.12.1 $A,\ B$ は可測でコンパクト近似列が存在するとする．いま

$$\Phi : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

は A から B への C^1 級の $1-1$，上への写像で

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v) \neq 0, \quad (u,v) \in A$$

を満たすとする．このとき次は同値である．

(1) $f(x,y)$ は B 上広義積分可能

(2)

$$f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\right|$$

が A 上広義積分可能．

さらにこのとき

$$\int\int_B f(x,y)dxdy = \int\int_A f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u,v)\right|dxdy$$

が成立する．

演習問題 11.12.1 $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \geq 1\}$ とする．このとき次の広義積分の値を求めよ．

$$\int\int_D \frac{1}{(x^2+y^2+1)^{\alpha}}dxdy \quad (\alpha > 1)$$

演習問題 11.12.2 次の広義積分の値を求めよ．

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

演習問題 11.12.3 次の広義積分の値を求めよ．

$$\int\int_D (x^2-y^2)^{-1/2}dxdy, \quad D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ y^2 \leq x^2\}$$

第12章　線積分と Green の定理

12.1　平面上の曲線

定義 12.1.1 $\mathbb{R}$ 上のある区間 $[a,b]$ から $\mathbb{R}^2$ への連続写像 $C(t)$:

$$C(t) : I = [a,b] \ni t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

を曲線という．$x(t)$, $y(t) \in C^1([a,b])$ のとき，この曲線を C^1 曲線という．

演習問題 12.1.1　次の曲線の概形を描け：

$$C(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$
$$C(t) = (\cos(-t), \sin(-t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

定義 12.1.2 $C_1(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $C_2(t) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ が同一の曲線であるとは，ある狭義単調増加関数 $s(t) : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ があって

$$C_1(s(t)) = C_2(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

の成立することをいう．

定義 12.1.3 $C(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ に対して

$$\tilde{C}(t) : [-b, -a] \ni t \mapsto (x(-t), y(-t)) \in \mathbb{R}^2$$

を $-C$ であらわし，C の逆向きの曲線という．軌跡としては同じ，即ち $C([a,b]) = \tilde{C}([-b,-a])$ であることに注意しよう．

12.2　線積分

定義 12.2.1 $D \subset \mathbb{R}^2$ で，曲線 $C(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ は $C([a,b]) \subset D$ を満たすとする．$P(x,y) \in C^0(D)$ とするとき

$$\int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) dt$$

を $P(x,y)$ の x による C に沿う線積分といい，

$$\int_C P(x,y) dx$$

で表わす．

演習問題 12.2.1 $P(x,y)$ の y による C に沿う線積分

$$\int_C P(x,y)dy$$

を定義せよ．

補題 12.2.1 $C(t)=(x(t),y(t))$, $a\le t\le b$ と $\tilde{C}=(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))$, $\alpha\le t\le\beta$ は同じ曲線を表すとする．このとき

$$\int_C P(x,y)dx=\int_{\tilde{C}} P(x,y)dx,\quad \int_C P(x,y)dy=\int_{\tilde{C}} P(x,y)dy$$

である．

定義 12.2.2 $D\subset\mathbb{R}^2$ とし，D の境界 bD は C^1 曲線であるとする．いま曲線 $C(t)=(x(t),y(t)):[a,b]\to\mathbb{R}^2$ が

$$C([a,b])=bD$$

でかつ $C(t)$ における D の単位外法線 $\nu(t)$ と $C'(t)$ が右手系をなすとき，C は D からきまる向きをもつという．このときこの C を ∂D で表わすことにする．

12.3 Green の定理

定理 12.3.1 $P(x,y)$, $Q(x,y)\in C^1(\bar{D})$, $\bar{D}=D\cup bD$ とする．D は縦線集合，または横線集合とする．このとき

$$\int_{\partial D} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

が成立する．

一次元の場合の微積分の基本定理

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx$$

と比較せよ．$I=[a,b]$ とするとき I 境界は $\{a\},\{b\}$ である．

補題 12.3.1 $f(x,y)\in C^1(D)$, $\phi(x)$, $\psi(x)\in C^1([a,b])$ で $\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ \phi(x)\le y\le\psi(x)\}\subset D$ とする．このとき

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy=&\int_{\phi(x)}^{\psi(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy\\&+f(x,\psi(x))\psi'(x)-f(x,\phi(x))\phi'(x)\end{aligned}$$

である．

系 12.3.1 定理と同じ仮定の下で

$$|D| = \frac{1}{2}\int_{\partial D} -ydx + xdy$$

系 12.3.2 $F(x,y) \in C^2(\bar{D})$, $\bar{D} = D \cup bD$ とする．D は縦線集合，または横線集合とする．このとき

$$\int_{\partial D} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy = 0$$

である．

演習問題 12.3.1 $C(t) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ を C^1 曲線とし，$-C$ を逆向き曲線とする．このとき

$$\int_{-C} P(x,y)dx = -\int_C P(x,y)dx$$

を示せ．

演習問題 12.3.2 C を曲線 $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ とし，その向きは原点から $(1,1)$ に向かう向きとする．このとき

$$\int_C xdy - ydx$$

を求めよ．

演習問題 12.3.3 C は単位円でその向きは反時計回りとする．このとき

$$\int_C xdy - ydx$$

を求めよ．

演習問題 12.3.4 次の積分を求めよ．

$$\int_{\partial C} \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy.$$

ここで C は原点を中心とする単位円である．
(注意) $\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}$ は C 内で C^1 級ではない．

演習問題 12.3.5 次の積分を求めよ．

$$\int_{\partial D} (x^2-y^2)dx + 2xydy,$$

$$\int_{\partial D} (x^2-y^2)dx + 4xydy.$$

ここで $D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ である．

第13章　微分方程式

13.1　解の存在と一意性

定義 13.1.1 $F(x, u_0, u_1, ..., u_n)$ が領域 D で定義されているとする．$y(x)$ が区間 I で $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ の解とは

(1) $(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) \in D, \quad x \in I$

(2) $F(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in I$
の成立することをいう．

定理 13.1.1 $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ を考える．$f(x, u_1, ..., u_n)$ は次を満たすとする．

(1) f が点 $(a, b_1, ..., b_n)$ の近傍で連続

(2) $(a, b_1, ..., b_n)$ の近傍の 2 点 $(x, u_1, ..., u_n)$, $(x, v_1, ..., v_n)$ に対して

$$|f(x, u_1, ..., u_n) - f(x, v_1, ..., v_n)| \leq L \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i|$$

が成立する（Lipschittz 条件）．このとき，初期条件 $y(a) = b_1$,...,$y^{(n-1)}(a) = b_n$ を満たす解が（$x = a$ の近傍で）唯一つ存在する．

13.2　簡単な微分方程式

変数分離形：

$$y' = f(x)g(y), \quad g(y) = \exp\left(\int f(x)dx\right)$$

同次形：

$$y' = f(\frac{y}{x}), \quad y = xu \Longrightarrow f(u) - u = Cu$$

一階線形微分方程式（斉次）

$$y' + P(x)y = 0, \quad y(x) = C\exp\left(-\int P(x)dx\right)$$

一階線形微分方程式（非斉次）

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

$u(x) = \exp(-\int P(x)dx)$ とおき，$y(x) = C(x)u(x)$ の形で $y(x)$ を求める．

$$y(x) = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right)e^{-\int P(x)dx}$$

演習問題 13.2.1 $y^{(3)} = \sin x$ を解け．

演習問題 13.2.2 $y' = 3y^{2/3}$ を解け．

演習問題 13.2.3 $y' + 2y = e^x$ を解け．

演習問題 13.2.4 次の微分方程式を解け．

(1)　$(1 + x^2)yy' + (1 + y^2)x = 0$

(2)　$y' = \left(\dfrac{x - y + 3}{x - y + 1}\right)^2$

(3)　$y' = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \dfrac{2y}{x}$

(4)　$(x^2 - x)y' + (1 - 2x)y + x^2 = 0$

13.3　2階線形微分方程式（斉次）

次の微分方程式を考える．$p(x)$, $q(x)$ は連続関数とする．

$$(*) \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

定義 13.3.1 $y_1(x)$, $y_2(x)$ が一次従属とは，$c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ なる定数 c_1, c_2 があって

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \equiv 0$$

の成立することをいう．一次従属でないとき，一次独立という．

定義 13.3.2 $y_1(x)$, $y_2(x)$ を $(*)$ の解とするとき，

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

を，$y_1(x)$, $y_2(x)$ のロンスキアンという．

定理 13.3.1 次が成立する．

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right)$$

ただし，x_0 は任意に固定された点である．

演習問題 13.3.1 定理 *13.3.1* を証明せよ．

系 13.3.1 $W(x) \equiv 0$ なら $y_1(x)$, $y_2(x)$ は一次従属である．

演習問題 13.3.2 系 *13.3.1* を証明せよ．

定理 13.3.2 $y_1(x)$, $y_2(x)$ を $(*)$ の一次独立な解とし，$y(x)$ を $(*)$ の任意の解とする．このとき，c_1, c_2 が一意的に決まって

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

とかける．

演習問題 13.3.3 定理 *13.3.2* を示せ．

定義 13.3.3 $y_1(x)$, $y_2(x)$ が一次独立な解のとき，$\{y_1(x), y_2(x)\}$ を $(*)$ の基本解系という．

13.4 非斉次微分方程式

次の微分方程式を考える．$p(x)$, $q(x)$ は連続関数とする．

$$(**) \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

定理 13.4.1 $\{y_1(x), y_2(x)\}$ を $(*)$ の基本解系とする．このとき $(**)$ の一つの解は次で与えられる．

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(\xi)y_2(x) - y_1(x)y_2(\xi)}{W(\xi)} f(\xi) d\xi$$

ここで $y(x)$ は $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 0$ を満たす．

定理 13.4.2 $w(x)$ を非斉次方程式 $(**)$ の解とする．このとき，非斉次方程式 $(**)$ の任意の解 $y(x)$ に対して斉次方程式 $(*)$ の解 $u(x)$ があって

$$y(x) = w(x) + u(x)$$

とかける．

演習問題 13.4.1 定理 *13.4.2* を証明せよ．

演習問題 13.4.2 $y'' - y' + 2y = 2x^3 - x^2 + 6x + 3$ の多項式の解を求めよ．

13.5　定数係数２階方程式

定数係数２階方程式

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

に対して

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

を特性方程式という.

定理 13.5.1 $y'' + ay' + by = 0$ は次のような基本解系をもつ.
(1) $a^2 - 4b > 0$ のとき,

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

ただし，λ_1, λ_2 は特性方程式の相異なる２実根
(2) $a^2 - 4b = 0$ のとき,

$$y_1(x) = e^{\lambda_0 x}, \quad y_2(x) = xe^{\lambda_0 x}$$

ただし，λ_0 は特性方程式の実重複根
(3) $a^2 - 4b < 0$ のとき,

$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

ただし，$\alpha \pm i\beta$ は特性方程式の共役複素根.

演習問題 13.5.1 次の微分方程式を解け.

$$y'' + y = x\sin x$$

演習問題 13.5.2 次の微分方程式を解け.

$$y'' + 3y' + 2y = 8e^{3x}$$

演習問題 13.5.3 次の微分方程式を解け

$$y'' + 9y = -9x^2 + 18x + 7$$

第14章　一様収束

14.1　関数列

定義 14.1.1 $f_n(x),\ n=1,2,...$ を区間 I で定義された関数の列とする．I の各点 x を固定するごとに，数列 $\{f_n(x)\}$ が収束するとき

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

と書いて，関数列 $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に I で各点収束するという．$f(x)$ を極限関数という．

定義 14.1.2 $f_n(x),\ n=1,2,...$ を区間 I で定義された関数の列とする．$\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に I で一様収束するとは

$$\forall\epsilon>0,\exists N\ \ s.t.\ \ n\geq N \Longrightarrow |f_n(x)-f(x)|\leq\epsilon,\ \ \forall x\in I$$

の成立することをいう．

補題 14.1.1 $\{f_n(x)\}$ が I で一様収束するため必要十分条件は

$$\forall\epsilon>0,\exists N\ \ s.t.\ \ p,q\geq N \Longrightarrow |f_p(x)-f_q(x)|\leq\epsilon,\ \ \forall x\in I$$

の成立すること

定理 14.1.1 $f_n(x)\in C^0(I)$ で $f_n(x)\to f(x)$,（一様 *in* I）ならば $f(x)\in C^0(I)$ である．

演習問題 14.1.1 $f_n(x)\in C^0([a,b])$ は $f(x)$ に各点収束しているとする．いま $M>0$ があって

$$|f_n(x)-f_n(x')|\leq M|x-x'|\quad \forall n,\ \forall x,x'\in[a,b]$$

が成立しているとするなら $f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束している．

定理 14.1.2 $f_n(x)$ は $[a,b]$ で可積分で $f_n(x)\to f(x)$ *(*一様 *in* $[a,b]$*)* とする．このとき $f(x)$ は $[a,b]$ で可積分で

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

である．

演習問題 14.1.2 $f(x) \in C^0([a,b])$ で，$f(x) \geq 0$ とする．このとき

$$\int_a^b f(x)^n dx$$

は $+\infty$ に発散するか，さもなくば有限な極限に収束する．

演習問題 14.1.3

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}$$

を考える．このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx, \quad \int_0^1 \{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\}dx$$

を求めよ．

定理 14.1.3 *$f_n(x) \in C^1(I)$, $f'_n(x) \to \phi(x)$ (一様 $in\ I$), $f_n(x) \to f(x)$ (各点) とする．このとき*

$$f_n(x) \to f(x)(\text{一様 } in\ I), \quad \lim_{n\to\infty} f'_n(x) = \phi(x) = f'(x)$$

である．

演習問題 14.1.4 $\alpha(x)$ を

$$\alpha(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

で定義する．さらに $f_n(x) = \alpha(nx)x$ で定義する．このとき任意の区間で $f_n(x)$ は一様に 0 に収束することを示せ．また $\lim_{n\to\infty} f'_n(x)$ を求めよ．

14.2 関数項級数

定義 14.2.1 $g_n(x)$ は区間 I で定義されているとする．級数 $\sum_{i=1}^{\infty} g_n(x)$ が $g(x)$ に I で各点収束するとは

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \to g(x) \text{ (各点)}$$

のときをいう．このとき $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$ とかく．

級数 $\sum_{i=1}^{\infty} g_n(x)$ が $g(x)$ に I で一様収束するとは

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \to g(x)(\text{一様 } in\ I)$$

のときをいう．

補題 14.2.1 $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$ が I で一様収束するための必要十分条件は

$$\forall\epsilon > 0, \exists N, \ \ s.t. \ \ n > m \geq N, x \in I \Longrightarrow |g_{m+1}(x) + \cdots + g_n(x)| < \epsilon$$

の成立すること．

定理 14.2.1 $g_n(x) \in C^0(I)$, $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) \to g(x)$ *(一様)*　この時 $g(x) \in C^0(I)$.

演習問題 14.2.1

$$\sum_{n=0}^{\infty} xe^{-nx}$$

は $[0,1]$ で一様収束しないことを示せ．

定理 14.2.2 $g_n(x)$ は I で可積分で $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x) \to g(x)$ *(一様)* とする．このとき

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b g_n(x)dx$$

定理 14.2.3 $g_n(x) \in C^1(I)$, $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$ は収束し，$\sum_{i=1}^{\infty} g_i'(x)$ は一様収束するとする．このとき

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} g_n(x)$$

14.3 一様収束のための条件

定理 14.3.1 $\sum a_n$ を収束する正項級数とする．いま

$$|u_n(x)| \leq a_n \ \ \forall n, \ \ x \in I$$

ならば $\sum u_n(x)$ は一様収束する．

演習問題 14.3.1 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ は $-1 < a, b < 1$ のとき $a \leq x \leq b$ で一様収束することを示せ．

演習問題 14.3.2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$$

は任意の区間で一様収束する．

演習問題 14.3.3 $1 < a < b$ とする．このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$$

は $a \leq x \leq b$ で一様収束する．

定理 14.3.2 $0 < r < 1$ があって

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \le r, \ \ \forall n, \ x \in I$$

とする．今 $|u_1(x)| \le M, \forall x \in I$ ならば $\sum u_n(x)$ は一様収束する．

定理 14.3.3 * $a_n > 0$ は単調減少列で $a_n \to 0, n \to \infty$ であるとする．今 A があって

$$\left|\sum_{n=1}^{N} u_n(x)\right| \le A, \ \ \forall N, \ \ \forall x \in I$$

とする．このとき

$$\sum a_n u_n(x)$$

は一様収束する．

演習問題 14.3.4 $a_n > 0$ は単調減少列で 0 に収束するとする．このとき $\sum a_n \sin nx$ は 2π の整数倍を含まない任意の閉区間で一様収束する．

補題 14.3.1 (Abel) $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_n \ge 0$ でさらに

$$m \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le M$$

とする．このとき

$$b_1 m \le a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \le b_1 M$$

である．

定理 14.3.4 * $b_n \ge 0$ は単調減少列で 0 に収束するとする．このとき

$$\sum b_n \sin nx$$

が任意の区間で一様収束するための必要十分条件は $nb_n \to 0$ なることである．

14.4 Abel の定理*

定理 14.4.1 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

は収束しその和は s とする．このとき

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

は $0 \le x \le 1$ で一様収束し

$$\lim_{x \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = s$$

である．

演習問題 14.4.1 $|x| < 1$ のとき

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

であることを利用して

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

を示せ．

演習問題 14.4.2 $\sum a_n$ は収束しその和は S とする．このとき

$$S(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n\epsilon}$$

とするとき

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} S(\epsilon) = S$$

である．

14.5 Tauber の定理 *

定理 14.5.1

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

の収束半径を 1 とし $f(x) \to s,\ x \to 1$ とする．いま $a_n = o(1/n)$ とすると

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

である．