Matrices, définitions et opérations

Algèbre Linéaire

SUPINFO

Sommaire

1. Définitions.
2. Opérations.

1. Définitions.

1. Définitions.

Matrice : définition

- Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$.
- On appelle **matrice réelle** à n lignes et p colonnes un tableau à deux dimensions de nombres réels comportant n lignes et p colonnes.
- L’ensemble des matrices réelles à n lignes et p colonnes se note $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Définitions.

Matrice : coefficients

- Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, le coefficient de A situé à l'intersection de la i-ème ligne et la j-ème colonne est usuellement noté $a_{i,j}$.

- On peut alors désigner A par

$$A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

1. Définitions.

Matrice : visualisation

- Voici donc l'allure générale d'une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{1,1} & . & . & . & . & . & a_{1,p} \\ . & & & & & & . \\ . & & & a_{i,j} & & & . \\ . & & & & & & . \\ a_{n,1} & . & . & . & . & . & a_{n,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \longleftarrow i\text{-ème colonne} \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ j\text{-ème colonne} \end{array} & \end{array}$$

1. Définitions.

Matrice : exemple

- Soit $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 7 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

- Ses coefficients sont donc

$$\begin{array}{ll} a_{1,1} = 5 & a_{1,2} = 3 \\ a_{2,1} = 0 & a_{2,2} = 7 \\ a_{3,1} = -4 & a_{3,2} = 1 \end{array}$$

1. Définitions.

Coefficients d’une matrice : remarque

- On retrouve le même principe qu’avec les listes bidimensionnelles en Python : on repère un coefficient d’abord par son numéro de ligne puis par son numéro de colonne.

- La différence étant qu’en Mathématiques on commence l’indexation à 1.

1. Définitions.

Matrice nulle : définition

- Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$.
- La matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 est appelée la **matrice nulle** de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ et est notée $0_{n,p}$.
- On a ainsi

$$0_{n,p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Définitions.

Matrices ligne et colonne : définition

- Soient $n,p\in\mathbb{N}^*$ et $A\in M_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Si $n = 1$ on dit que A est une **matrice ligne**

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \end{pmatrix}$$

- Si $p = 1$ on dit que A est une **matrice colonne** ou un **vecteur**

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$$

1. Définitions.

Matrices ligne et colonne : exemples

- Soit $A \in M_{1,6}(\mathbb{R})$ la matrice ligne définie par

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 2 & -6 & -7 & 0 & 666 \end{pmatrix}$$

- Soit $A \in M_{5,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne (aussi appelée vecteur) définie par

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Définitions.

Espace des vecteurs : définition

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- L'ensemble $M_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et 1 colonne, *i.e.* des vecteurs à n coordonnées se note généralement $\mathbb{R}^n$.

1. Définitions.

Matrice carrée : définition

- Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Si $n = p$ on dit que A est une **matrice carrée d'ordre $\boldsymbol{n}$**.
- L'ensemble des matrices carrées d'ordre n se note $M_n(\mathbb{R})$.

1. Définitions.

Matrice carrée : exemple

- Voici une matrice carrée d'ordre 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Définitions.

Diagonale d'une matrice carrée : définition

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.
- Les éléments $\left(a_{i,i}\right)_{1 \leq i \leq n}$ de la matrice A s'appellent les **coefficients diagonaux** de A.
- L'ensemble de tous les coefficients diagonaux d'une matrice A s'appelle la **diagonale** de A.

1. Définitions.

Diagonale d'une matrice carrée : visualisation

- La diagonale d'une matrice carrée A est donc constituée des coefficients ayant un numéro de ligne égal à leur numéro de colonne

$$A = \begin{pmatrix} \color{red}{a_{1,1}} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \color{red}{a_{2,2}} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \color{red}{\ddots} & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \color{red}{a_{n,n}} \end{pmatrix}$$

1. Définitions.

Diagonale d'une matrice carrée : exemple

- Voici une matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ et sa diagonale représentée en rouge

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

- La diagonale est donc constituée des coefficients

$$a_{1,1} = 1,\ a_{2,2} = 2, a_{3,3} = 3, a_{4,4} = 8$$

1. Définitions.

Matrice diagonale : définition et visualisation

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.
- Si pour tous i,j tels que $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ et $i \neq j$ on a $a_{i,j} = 0$, alors la matrice A est dite **diagonale**.
- Il s'agit donc de matrices de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

1. Définitions.

Matrice diagonale : exemple

- Voici une matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ qui est diagonale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Définitions.

Matrice identité : définition

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- La matrice carrée diagonale d'ordre n dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 est appelée **matrice identité** d'ordre n et est notée I_n.
- On a donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Définitions.

Matrice triangulaire supérieure : définition et visualisation

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- Si pour tous i,j tels que $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ et $i > j$ on a $a_{i,j} = 0$, alors la matrice A est dite **triangulaire supérieure**.

- Il s'agit donc de matrices de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

1. Définitions.

Matrice triangulaire inférieure : définition et visualisation

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.
- Si pour tous i, j tels que $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ et $i < j$ on a $a_{i,j} = 0$, alors la matrice A est dite **triangulaire inférieure**.
- Il s'agit donc de matrices de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

1. Définitions.

Matrices triangulaire supérieure & inférieure : exemple

- Voici une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ qui est triangulaire supérieure

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Et voici une matrice $B \in M_3(\mathbb{R})$ qui est triangulaire inférieure

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Définitions.

2. Opérations.

2. Opérations.

Addition de deux matrices : définition

- Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$ et $A,B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.
- On définit la **somme** de A et B comme étant la matrice $C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall\, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p, c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

- On note alors $C = A + B$.

2. Opérations.

Addition de deux matrices : contrainte

- Pour pouvoir définir la somme de deux matrices il est donc nécessaire qu'elles soient de même taille, *i.e.* qu'elles possèdent le même nombre de lignes et de colonnes.

2. Opérations.

Addition de deux matrices : exemple

- Considérons les matrices $A, B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Ces deux matrices possèdent chacune deux lignes et trois colonnes, on peut donc les additionner. On a alors

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Opérations.

Addition de deux matrices : exemple (suite)

- Exemple du coefficient situé sur la seconde ligne et première colonne de C

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

- Il faut considérer les coefficients situés eux aussi sur la seconde ligne et première colonne de A et B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- Et en faire la somme : $2 + (-3) = 1$.

2. Opérations.

Addition de deux matrices : propriétés

- Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$ et $A,B,C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.

- $A + B = B + A$, *i.e.* l'addition est **commutative**.

- $(A + B) + C = A + (B + C)$, *i.e.* l'addition est **associative**.

- $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$, *i.e.* la matrice nulle est un **élément neutre** pour l'addition.

2. Opérations.

Multiplication d'une matrice par un réel : définition

- Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- On définit le **produit** de A par λ comme étant la matrice $C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall\, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p, c_{i,j} = \lambda . a_{i,j}$$

- On note alors $C = \lambda . A$.

2. Opérations.

Multiplication d'une matrice par un réel : exemple

- Considérons le réel $\lambda = -2$ et la matrice $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- On peut effectuer la multiplication de A par λ et l'on obtient alors

$$C = \lambda . A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -4 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Opérations.

Multiplication d'une matrice par un réel : exemple (suite)

- Exemple du coefficient situé sur la troisième ligne et première colonne de C

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -4 & 8 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Il faut considérer le coefficient situé lui aussi sur la troisième ligne et première colonne de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Et effectuer le produit $(-2) \times (-1) = 2$.

2. Opérations.

Multiplication d'une matrice par un réel : propriétés

- Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A,B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$.
- $\lambda.(A+B) = \lambda.A + \lambda.B$, *i.e.* la multiplication d'une matrice par un réel est distributive par rapport à l'addition des matrices.
- $(\lambda+\mu).A = \lambda.A + \mu.A$, *i.e.* la multiplication d'une matrice par un réel est distributive par rapport à l'addition des réels.
- $1.A = A$, *i.e.* 1 est un **élément neutre** pour la multiplication par un réel.
- $0.A = 0_{n,p}$, *i.e.* 0 est un élément **absorbant** pour la multiplication par un réel.

2. Opérations.

Multiplication de deux matrices : définition

- Soient $n,p,q \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{n,q}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{q,p}(\mathbb{R})$.
- On définit le **produit** de A par B comme étant la matrice $C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall\, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p, c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j}$$

- On note alors $C = AB$.

2. Opérations.

Multiplication de deux matrices : contrainte

- Pour pouvoir définir le produit AB de deux matrices, il est donc nécessaire que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

- Le produit comportera alors le même nombre de lignes que A et le même nombre de colonnes que B.

2. Opérations.

Multiplication de deux matrices : explication de la formule

- Pour calculer le terme $c_{i,j}$ du produit C on effectue donc la somme des produits suivants :

  - Le produit du premier terme de la i-ème ligne de A avec le premier terme de la j-ème colonne de B.
  - Le produit du deuxième terme de la i-ème ligne de A avec le deuxième terme de la j-ème colonne de B.
  - …
  - Le produit du dernier terme de la i-ème ligne de A avec le dernier terme de la j-ème colonne de B.

2. Opérations.

Multiplication de deux matrices : explication de la formule

- Ainsi, pour calculer $c_{i,j}$

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1,p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & c_{i,j} & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{n,p} \end{pmatrix}$$

2. Opérations.

Multiplication de deux matrices : explication de la formule

- Il faut considérer la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de B

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,q} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,j} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,j} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{q,1} & \cdots & b_{q,j} & \cdots & b_{q,p} \end{pmatrix}$$

2. Opérations.

Multiplication de deux matrices : explication de la formule

- Il reste alors à effectuer le calcul

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \cdots + a_{i,q} b_{q,j}$$

2. Opérations.

Multiplication de deux matrices : exemple

- Considérons les matrices $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice A possède trois colonnes et la matrice B trois lignes, on peut donc les multiplier. On a alors

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & -4 \\ 7 & 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Opérations.

Multiplication de deux matrices : exemple (suite)

- Exemple du coefficient situé sur la deuxième ligne et troisième colonne de C

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & -4 \\ 8 & 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

- Il faut donc considérer la deuxième ligne de A et la troisième colonne de B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Puis effectuer le calcul $1 \times 3 + 0 \times 1 + 3 \times 1 = 6$.

2. Opérations.

Multiplication de deux matrices : propriétés

- Soient $n,p,q,r \in \mathbb{N}^*$, $A,A' \in M_{n,q}(\mathbb{R})$, $B,B' \in M_{q,p}(\mathbb{R})$ et $C \in M_{p,r}(\mathbb{R})$.
- $A(BC) = (AB)C$, *i.e.* la multiplication est **associative**.
- $A(B + B') = AB + AB'$, *i.e.* la multiplication est **distributive à gauche** par rapport à l'addition.
- $(A + A')B = AB + A'B$, *i.e.* la multiplication est **distributive à droite** par rapport à l'addition.

2. Opérations.

Multiplication de deux matrices : propriétés (suite)

- Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $A,\in M_{n,q}\,(\mathbb{R})$.

- $AI_q = I_nA = A$, *i.e.* la matrice identité est un **élément neutre** pour la multiplication.

- $A0_{q,p} = 0_{n,p}$, *i.e.* la matrice nulle est un **élément absorbant** pour la multiplication.

- $0_{p,n}A = 0_{p,q}$, *i.e.* la matrice nulle est un **élément absorbant** pour la multiplication.

2. Opérations.

Multiplication de deux matrices : non commutativité

- Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$.

- En général on a $AB \neq BA$.

2. Opérations.

Multiplication de deux matrices : preuve de la non commutativité

- Il suffit de trouver un contre-exemple à l'égalité.

- Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- On a alors

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Opérations.

Transposition d'une matrice : définition

- Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.

- On définit la transposée de A comme étant la matrice $C \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall\ 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n, c_{i,j} = a_{j,i}$$

- On note alors $C = {}^{t}A$.

2. Opérations.

Transposition d’une matrice : remarque

- Cette opération consiste juste à permuter les lignes et les colonnes d’une matrice.

- La transposée d’une matrice A comportera ainsi autant de lignes que A possédait de colonnes et inversement.

2. Opérations.

Transposition d'une matrice : exemple

- Considérons la matrice $A \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- Sa transposée est alors égale à

$${}^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Opérations.

Transposition d'une matrice : propriétés

- Soient $n,p,q,r \in \mathbb{N}^*$, $A,A' \in M_{n,q}(\mathbb{R})$, $B \in M_{q,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.
- ${}^t(\lambda.A) = \lambda.{}^tA$.
- ${}^t\left({}^tA\right) = A$, *i.e.* la transposition est **involutive**.
- ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

2. Opérations.

Matrices symétrique et antisymétrique : définition

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- Si ${}^{t}A = A$, on dit que A est symétrique.

- Si ${}^{t}A = -A$, on dit que A est antisymétrique.

2. Opérations.

Matrices symétrique et antisymétrique : exemple

- Cette matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ est symétrique

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -12 & 7 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

- Cette matrice $B \in M_4(\mathbb{R})$ est antisymétrique

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & 7 \\ -3 & 1 & 0 & -6 \\ -4 & -7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Opérations.

Matrice antisymétrique : propriété

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- Si A est antisymétrique alors ses coefficients diagonaux sont nuls.

2. Opérations.

Matrice antisymétrique : preuve de la propriété

- L'égalité ${}^{t}A = -A$ implique en particulier que

$$\forall\, 1 \leq i \leq n, a_{i,i} = -a_{i,i}$$

- Ce qui signifie bien sûr que

$$\forall\, 1 \leq i \leq n, a_{i,i} = 0$$

2. Opérations.

Matrice inversible : définition

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- On dit que A est inversible dans $M_n(\mathbb{R})$ s'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que
$$AB = BA = I_n$$

- La matrice B est alors notée A^{-1} et s'appelle l'**inverse** de A.

2. Opérations.

Matrice inversible : remarques

- Toutes les matrices ne sont pas inversibles, la matrice nulle ne l'est par exemple clairement pas.
- Ce concept d'inversibilité est formellement le même que celui des nombres réels.
- Rappelons en effet qu'un réel x est inversible si et seulement si il existe un réel y tel que $xy = yx = 1$.

2. Opérations.

Matrice inversible : exemple

- Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- On vérifie aisément que

$$AB = BA = I_n$$

- Cela signifie que A est inversible et que $A^{-1} = B$. De même B est inversible et $B^{-1} = A$.

2. Opérations.

Matrice inversible : propriétés

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A,B,C \in M_n(\mathbb{R})$.
- Si A et B sont inversibles, alors AB l'est aussi et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si $AC = BC$ et si C est inversible alors $A = B$.
- Si $CA = CB$ et si C est inversible alors $A = B$.

2. Opérations.

Matrice inversible : preuve de la première propriété

- On suppose donc que A et B sont inversibles. Ainsi A^{-1} et B^{-1} existent.

- On a

$$\begin{array}{rcc} (AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) & = & A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} \\ & = & AI_nA^{-1} \\ & = & AA^{-1} \\ & = & I_n \end{array}$$

- Q.E.D.

2. Opérations.

Matrice inversible : preuve de la deuxième propriété

- On suppose ici que C est inversible. Ainsi C^{-1} existe.
- On a

$$\begin{aligned} AC &= BC \\ (AC)\,C^{-1} &= (BC)\,C^{-1} \\ A\left(CC^{-1}\right) &= B\left(CC^{-1}\right) \\ AI_n &= BI_n \\ A &= B \end{aligned}$$

- Q.E.D.

2. Opérations.

Matrice inversible : remarque

- Les propriétés de simplifications sont fausses avec une matrice non inversible. On peut facilement le constater avec la matrice nulle, ou encore en considérant les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- On a $AC = BC$ mais $A \neq B$ car la matrice C n'est pas inversible.

2. Opérations.