Puissances de matrices

Algèbre linéaire

SUPINFO

Sommaire

1. Position du problème.

1. Position du problème.

Puissances d'une matrice : définition

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.
- On pose $A^0 = I_n$ et on définit les puissances de la matrice A pour tout $p \geq 1$ par

$$A^p = A \times A^{p-1} = A^{p-1} \times A$$

1. Position du problème.

Puissances d'une matrice : remarques

- La définition par récurrence précédente signifie bien sûr que pour tout $p \geq 1$, A^p est égal à

$$A^p = A \times A \times \cdots \times A$$

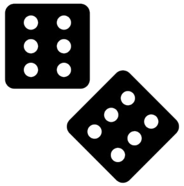
avec p facteurs.

1. Position du problème.

Puissances d’une matrice : un problème délicat

- Au vu de la définition même du produit matriciel, on se persuade assez rapidement que calculer de telles puissances est une question difficile.

- Mais comme nous allons le voir très vite elle est importante, car elle comporte de nombreuses applications pratiques, par exemple en probabilités ou encore en théorie des graphes.



1. Position du problème.

Première application : suite de Fibonacci (1)

- Un homme met un couple de lapins dans un lieu isolé de tous les côtés par un mur. Combien de couples obtient-on en un an si chaque couple engendre tous les mois un nouveau couple à compter du troisième mois de son existence ?

- Nous ferons l'hypothèse très simplificatrice que les lapins sont immortels.

1. Position du problème.

Première application : suite de Fibonacci (2)

- Pour $p \geq 0$ on définit x_p comme étant le nombre de couples de lapins présents au début du mois numéro p. Initialement $x_0 = 0$.

- Au début du premier mois nous n'avons donc qu'un seul couple, *i.e.* $x_1 = 1$.

- Au début du deuxième mois nous avons toujours qu'un seul couple car il est trop jeune pour procréer, *i.e.* $x_2 = 1$.

- Au début du troisième mois notre couple aura engendré un autre couple, *i.e.* $x_3 = 2$.

1. Position du problème.

Première application : suite de Fibonacci (3)

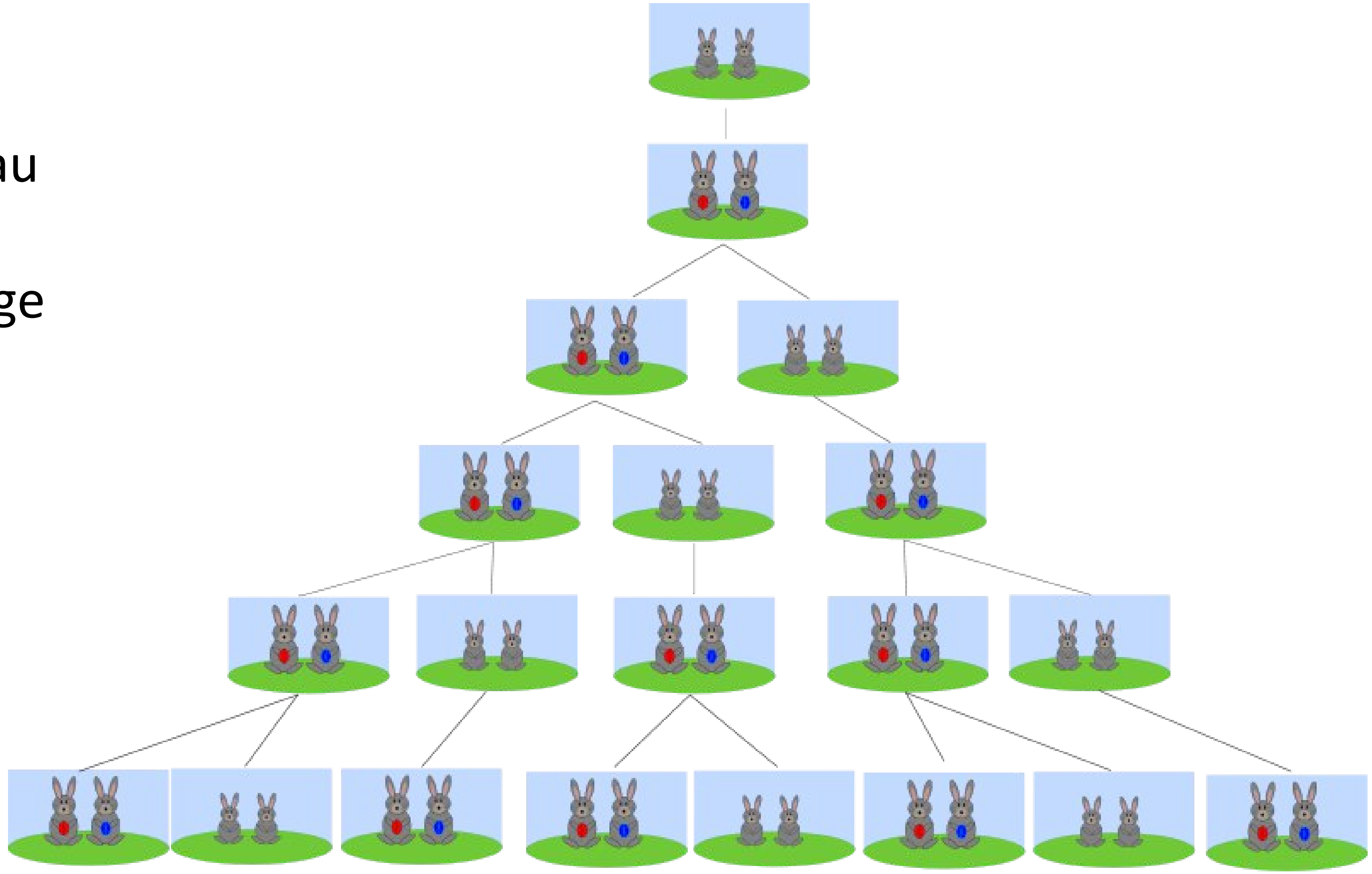
- Au début du quatrième mois notre premier couple aura engendré un autre couple, tandis que notre second couple n’est pas encore en âge de le faire, *i.e.* $x_4 = 3$.

- Au début du cinquième mois ce seront nos deux premiers couples qui engendreront chacun un autre couple, *i.e.* $x_5 = 5$.

1. Position du problème.

Première application : suite de Fibonacci (4)

Les lapins en âge de procréer au début du mois suivant ont été représentés avec un point rouge ou bleu, selon leur genre.



1. Position du problème.

Première application : suite de Fibonacci (5)

- En généralisant les raisonnements précédents, au début du p-ème mois pour un $p \geq 2$, on aura donc les lapins déjà présents au mois précédent, il y en a x_{p-1}, ainsi que les nouveaux couples engendrés par les lapins en âge de procréer, c'est-à-dire les lapins déjà vivants deux mois avant, au nombre de x_{p-2}.

- Ainsi pour tout $p \geq 2$, $x_p = x_{p-1} + x_{p-2}$.

- Autrement dit, pour tout $p \geq 0$, $x_{p+2} = x_{p+1} + x_p$.

1. Position du problème.

Première application : suite de Fibonacci (6)

- On pose alors pour tout $p \geq 0$

$$X_p = \begin{pmatrix} x_p \\ x_{p+1} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- On a par définition

$$X_{p+1} = \begin{pmatrix} x_{p+1} \\ x_{p+2} \end{pmatrix}$$

1. Position du problème.

Première application : suite de Fibonacci (7)

- En utilisant l'équation de récurrence $x_{p+2} = x_{p+1} + x_p$, il vient

$$X_{p+1} = \begin{pmatrix} x_{p+1} \\ x_{p+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{p+1} \\ x_{p+1} + x_p \end{pmatrix}$$

- Un calcul élémentaire montre alors que

$$\begin{pmatrix} x_{p+1} \\ x_{p+1} + x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ x_{p+1} \end{pmatrix}$$

1. Position du problème.

Première application : suite de Fibonacci (8)

- Ainsi

$$X_{p+1} = AX_p$$

- On a donc transformé une récurrence d'ordre 2 portant sur $\left(x_p\right)_{p\geq 0}$ en une récurrence d'ordre 1 sur $\left(X_p\right)_{p\geq 0}$.

- La suite $\left(X_p\right)_{p\geq 0}$ est donc une suite géométrique de raison A, ainsi pour tout $p \geq 0$

$$X_p = A^p X_0$$

1. Position du problème.

Première application : suite de Fibonacci (9)

- La connaissance des puissances de A impliquera celle de X_p pour tout $p \geq 0$ et par suite celle de x_p.

- Le problème initial est donc équivalent à celui d’un calcul de puissances de matrices.

1. Position du problème.

Seconde application : dynamique de population (1)

- On considère la ville de Tours et sa proche banlieue. On suppose que la population globale de la ville et la banlieue est constante, et que les seules migrations possibles sont pour aller de la ville à la banlieue et inversement.

- On observe que chaque année 10% des habitants de Tours vont vivre en banlieue, et que 20% des habitants de la banlieue vont s'installer en ville.

- Comment évolue le nombre d'habitants de la ville de Tours et de sa banlieue ?

1. Position du problème.

Seconde application : dynamique de population (2)

- Pour $p \geq 0$ on définit y_p comme étant le nombre d’habitants au bout de p années de ce processus et z_p le nombre d’habitants de sa banlieue.

- Connaissant les populations de Tours et sa banlieue une certaine année p, la population de Tours l'année suivante sera égale aux 90% d'habitants de la ville n'ayant pas déménagés plus les 20% d'habitants de la banlieue ayant eux déménagés.

1. Position du problème.

Seconde application : dynamique de population (3)

- On a donc la formule de récurrence

$$y_{p+1} = 0{,}9y_p + 0{,}2z_p$$

- On montre de même que

$$z_{p+1} = 0{,}1y_p + 0{,}8z_p$$

- Nous avons donc deux suites définies par des relations de récurrences croisées.

1. Position du problème.

Seconde application : dynamique de population (4)

- On pose alors pour tout $p \geq 0$

$$X_p = \begin{pmatrix} y_p \\ z_p \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

- On a par définition

$$X_{p+1} = \begin{pmatrix} y_p \\ z_p \end{pmatrix}$$

1. Position du problème.

Seconde application : dynamique de population (5)

- En utilisant les équations de récurrence établies sur $\left(y_p\right)_{p\geq 0}$ et $\left(z_p\right)_{p\geq 0}$, il vient

$$X_{p+1} = \begin{pmatrix} y_{p+1} \\ z_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9y_p + 0{,}2z_p \\ 0{,}1y_p + 0{,}8z_p \end{pmatrix}$$

- Un calcul élémentaire montre alors que

$$\begin{pmatrix} y_{p+1} \\ z_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_p \\ z_p \end{pmatrix}$$

1. Position du problème.

Seconde application : dynamique de population (6)

- Ainsi
$$X_{p+1} = AX_p$$

- On a donc transformé la récurrence croisée portant sur $\left(x_p\right)_{p\geq 0}$ et $\left(y_p\right)_{p\geq 0}$ en une récurrence d'ordre 1 sur $\left(X_p\right)_{p\geq 0}$.

- La suite $\left(X_p\right)_{p\geq 0}$ est donc une suite géométrique de raison A, ainsi pour tout $p \geq 0$
$$X_p = A^p X_0$$

1. Position du problème.

Seconde application : dynamique de population (7)

- La connaissance des puissances de A impliquera celle de X_p pour tout $p \geq 0$ et par suite celle de x_p.

- Le problème initial est donc équivalent à celui d'un calcul de puissances de matrices.

1. Position du problème.

2. Recherche d’une formule explicite.

2. Recherche d’une formule explicite.

Démonstration par récurrence : rappel du principe

- Son but est de démontrer une propriété portant sur tous les entiers naturels à partir d’un certain entier p_0 (souvent égal à 0 ou 1).

- Elle comporte deux étapes :

  1. Initialisation : vérifier que la propriété est vraie pour p_0.
  2. Hérédité : démontrer que si la propriété est vraie pour un $p \geq p_0$ elle l’est également pour $p + 1$.

2. Recherche d’une formule explicite.

Démonstration par récurrence : remarques

- Ce principe est l’un des axiomes permettant de définir l’ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

- Il est d’ailleurs assez intuitif :

  - L’initialisation garantit que la propriété est vraie au rang p_0.
  - L’hérédité prouve alors qu’elle est vraie pour $p_0 + 1$.
  - Appliquer de nouveau l’hérédité prouve qu’elle est vraie pour $p_0 + 2$.
  - Etc.

2. Recherche d’une formule explicite.

Description de la méthode

- Trois étapes :

  1. On calcule les premières puissances “à la main“.

  2. À partir des expressions obtenues pour les premières puissances, on conjecture une formule pour n’importe quelle puissance.

  3. On démontre cette formule par récurrence.

2. Recherche d’une formule explicite.

Remarque

- La principale difficulté réside évidemment en l’étape de conjecture.
- Il peut d'ailleurs très bien arriver qu’après le calcul des premières puissances, on n’arrive pas à “deviner“ la formule générale.
- Il faudra alors utiliser une autre méthode.

2. Recherche d’une formule explicite.

Exemple complet (1)

- On cherche à calculer les puissance de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- On va expliciter les trois étapes de la méthode précédente.

2. Recherche d'une formule explicite.

Exemple complet (2)

1. On calcule les premières puissances de A

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

2. On conjecture alors que pour tout $p \geq 1$

$$A^p = \begin{pmatrix} 3^{p-1} & 3^{p-1} & 3^{p-1} \\ 3^{p-1} & 3^{p-1} & 3^{p-1} \\ 3^{p-1} & 3^{p-1} & 3^{p-1} \end{pmatrix} = 3^{p-1}A$$

2. Recherche d'une formule explicite.

Exemple complet (3)

3. On démontre ensuite cette formule par récurrence :

   - Initialisation : pour $p = 1$ la formule est évidente.

   - Hérédité : on suppose la formule vraie pour un $p \geq 1$ et on la démontre au rang $p + 1$. On a

$$A^{p+1} = A \times A^p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3^{p-1} & 3^{p-1} & 3^{p-1} \\ 3^{p-1} & 3^{p-1} & 3^{p-1} \\ 3^{p-1} & 3^{p-1} & 3^{p-1} \end{pmatrix}$$

2. Recherche d'une formule explicite.

Exemple complet (4)

- Chaque terme de la matrice A^{p+1} vaut donc $3^{p-1} + 3^{p-1} + 3^{p-1}$, c'est-à-dire $3 \times 3^{p-1} = 3^p$.

- On a donc bien

$$A^p = \begin{pmatrix} 3^{p-1} & 3^{p-1} & 3^{p-1} \\ 3^{p-1} & 3^{p-1} & 3^{p-1} \\ 3^{p-1} & 3^{p-1} & 3^{p-1} \end{pmatrix}$$

- La formule est ainsi vérifiée au rang $p + 1$.

- D'après le principe de récurrence, la formule est donc bien démontrée pour tout $p \geq 1$.

2. Recherche d’une formule explicite.

Remarque

- Sur cet exemple il était relativement simple de deviner la formule générale.

- Ce n’est pas toujours le cas et il ne faut donc pas hésiter à calculer plusieurs des premières puissances.

2. Recherche d’une formule explicite.

3. Utilisation du binôme de Newton.

3. Utilisation du binôme de Newton.

Coefficient binomial : définition

- Soient $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq p$.
- On pose

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!\,(p-k)\,!}$$

- Où $0! = 1$ et

$$p! = p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

3. Utilisation du binôme de Newton.

Coefficient binomial : interprétation combinatoire

- Soient $p\in\mathbb{N}$ et $k\in\mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq p$.
- On considère un ensemble E comportant p éléments.
- Le coefficient $\binom{p}{k}$ représente le nombre de sous-ensembles de k éléments de l’ensemble E.

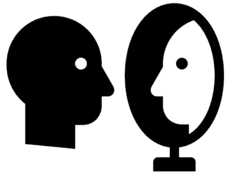
3. Utilisation du binôme de Newton.

Coefficient binomial : propriété de symétrie

- Soient $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq p$.

- On a

$$\binom{p}{k} = \binom{p}{p-k}$$



3. Utilisation du binôme de Newton.

Coefficient binomial : relation de Pascal

- Soient $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq p-1$.

- On a

$$\binom{p}{k} = \binom{p-1}{k-1} + \binom{p-1}{k}$$

3. Utilisation du binôme de Newton.

Coefficient binomial : triangle de Pascal

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	…	$p-1$	p	…	$n-1$	n
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
…											
$n-1$	1	$n-1$					$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p}$		1	
n	1	n						$\binom{n}{p}$		n	1

3. Utilisation du binôme de Newton.

Formule du binôme de Newton

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
- On suppose que A et B commutent, *i.e.* $AB = BA$.
- On a pour $p \geq 1$

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

3. Utilisation du binôme de Newton.

Formule du binôme de Newton : éléments de démonstration

- On a

$$(A+B)^p = (A+B)\,(A+B)\ldots(A+B)$$

- Après développement de ce produit, chaque terme de la somme obtenue sera de la forme

$$AA\ldots ABB\ldots B = A^k B^{p-k}$$

3. Utilisation du binôme de Newton.

Formule du binôme de Newton : éléments de démonstration (suite)

- Pour k fixé, il y aura autant de termes de ce type que de façons de choisir A dans k des produits de l'expression initiale.

- C'est-à-dire

$$\binom{p}{k}$$

3. Utilisation du binôme de Newton.

Formule du binôme de Newton : éléments de démonstration (suite)

- La formule n’est plus alors que la somme de ces termes

$$\binom{p}{k} A^k B^{p-k}$$

pour k pouvant prendre toute valeur entre 0 et p.

3. Utilisation du binôme de Newton.

Formule du binôme de Newton : remarque

- Si $p = 2$, on retrouve une identité remarquable bien connue

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

- L’hypothèse de commutativité est nécessaire, on peut facilement exhiber un contre-exemple à la formule dans le cas où cette hypothèse n’est pas vérifiée.

3. Utilisation du binôme de Newton.

Description de la méthode

- Trois étapes :

1. On essaie de décomposer A comme somme de deux matrices qui commutent : $A = B + C$ avec $BC = CB$.

2. On calcule les puissances de B et C.

3. On conclut à l'aide de la formule du binôme.

3. Utilisation du binôme de Newton.

Remarques

- Cette méthode n'est pas toujours applicable, il faut pouvoir réaliser la décomposition de la première étape et ce avec deux matrices qui commutent dont il est simple de calculer les puissances.

- Dans un certain nombre d'exemples on prendra la matrice identité comme l'une des deux matrices de la décomposition ce qui garantira la commutativité et le calcul simple de ses puissances.

3. Utilisation du binôme de Newton.

Exemple complet (1)

- On cherche à calculer les puissance de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On va expliciter les trois étapes de la méthode précédente.

3. Utilisation du binôme de Newton.

Exemple complet (2)

1. On décompose A comme $A = B + I_3$ avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est clair que B et I_3 commutent car $BI_3 = I_3B = B$.

3. Utilisation du binôme de Newton.

Exemple complet (3)

2. On a pour tout $k \geq 0$, ${I_3}^k = I_3$. Il faut également calculer les puissances de B. On a

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On aura donc $B^k = 0_3$ pour tout $k \geq 3$.

3. Utilisation du binôme de Newton.

Exemple complet (4)

3. On applique ensuite la formule du binôme de Newton. Pour $p \geq 0$

$$A^p = (B + I_3)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k {I_3}^{p-k}$$

Puisque ${I_3}^{p-k} = I_3$ cette égalité se simplifie en

$$A^P = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} B^k$$

3. Utilisation du binôme de Newton.

Exemple complet (5)

Mais puisque $B^k = 0_3$ pour tout $k \geq 3$, la somme précédente s'arrête à $k = 2$

$$A^P = \sum_{k=0}^{2} \binom{p}{k} B^k$$

Ainsi

$$A^p = \binom{p}{0} B^0 + \binom{p}{1} B^1 + \binom{p}{2} B^2$$

3. Utilisation du binôme de Newton.

Exemple complet (6)

D’où

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{p\,(p-1)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et donc finalement

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & p & \dfrac{p\,(p-1)}{2} \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Utilisation du binôme de Newton.