Déterminant d’une matrice. Formules de Cramer.

Algèbre linéaire

SUPINFO

Sommaire

1. Le cas des matrices d’ordre 2.

1. Le cas des matrices d'ordre 2.

Motivation

- Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

- On va déterminer à quelle condition la matrice A est inversible.

- Rappelons que cela signifie qu'il existe $B \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_2$.

1. Le cas des matrices d'ordre 2.

Écriture matricielle

- On pose

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$$

- On a $AB = BA = I_2$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Le cas des matrices d'ordre 2.

Système associé

- On a donc $AB = BA = I_2$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} = 1 \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} = 0 \\ a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} = 0 \\ a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} = 1 \end{cases}$$

- Les deux premières équations forment un système portant sur $b_{1,1}$ et $b_{2,1}$ et les deux suivantes un système portant sur $b_{1,2}$ et $b_{2,2}$.

1. Le cas des matrices d'ordre 2.

Résolution du premier sous-système

- Regardons en détail le premier sous-système

$$\begin{cases} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} = 1 \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} = 0 \end{cases}$$

- Multiplions la première ligne par $a_{2,2}$, la seconde par $a_{1,2}$ et soustrayons la seconde à la première.

- Il vient

$$a_{2,2}a_{1,1}b_{1,1} - a_{1,2}a_{2,1}b_{1,1} = \left(a_{2,2}a_{1,1} - a_{1,2}a_{2,1}\right)b_{1,1} = a_{2,2}$$

1. Le cas des matrices d'ordre 2.

Résolution du premier sous-système

- Toujours avec le premier sous-système

$$\begin{cases} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} = 1 \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} = 0 \end{cases}$$

- Multiplions cette fois la première ligne par $a_{2,1}$, la seconde par $a_{1,1}$ et soustrayons la seconde à la première.

- Il vient

$$a_{2,1}a_{1,2}b_{2,1} - a_{1,1}a_{2,2}b_{2,1} = \left(a_{2,1}a_{1,2} - a_{1,1}a_{2,2}\right)b_{2,1} = a_{2,1}$$

1. Le cas des matrices d'ordre 2.

Résolution du système global

- Le premier sous-système est donc équivalent à

$$\begin{cases}(a_{2,2}a_{1,1}-a_{1,2}a_{2,1})\,b_{1,1}=a_{2,2}\\(a_{2,1}a_{1,2}-a_{1,1}a_{2,2})\,b_{2,1}=a_{2,1}\end{cases}$$

- On montre de même que le second sous-système est équivalent à

$$\begin{cases}(a_{2,2}a_{1,1}-a_{1,2}a_{2,1})\,b_{2,2}=a_{1,1}\\(a_{2,1}a_{1,2}-a_{1,1}a_{2,2})\,b_{1,2}=a_{1,2}\end{cases}$$

1. Le cas des matrices d’ordre 2.

Résolution du système et introduction du déterminant

- Ce système admet donc une unique solution si et seulement si

$$a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1} \neq 0$$

- On va appeler cette quantité le **déterminant** de la matrice A.

- L’inverse de A est alors

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}}\begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

1. Le cas des matrices d'ordre 2.

2. Définition dans le cas général. Calcul.

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Déterminant d'une matrice carrée : motivation

- On va généraliser à des matrices carrées de tout ordre la notion de déterminant introduite lors de la première partie pour des matrices carrées d'ordre 2.

- On va donc définir une fonction notée $\det$

$$\begin{array}{cccccc} \det & : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & A & \longmapsto & \det\ (A) \end{array}$$

dont la valeur permettra d'affirmer si une matrice est inversible ou non.

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 : définition

- Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

- Le **déterminant** de la matrice A est défini comme étant le réel

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$$

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 : exemple

- Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- On a

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \times 2 - 9 \times (-1) = 25$$

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre $n > 2$: définition

- Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $1 \leq j \leq n$.

- Le **déterminant** de la matrice A est défini comme étant le réel

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

où $\Delta_{i,j}$ est le déterminant de la matrice d'ordre $n-1$ obtenue à partir la matrice A en supprimant sa ligne i-ème et sa j-ème colonne.

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre $n > 2$: définition (suite)

- Pour $1 \leq i,j \leq n$ la quantité $\Delta_{i,j}$ est appelée **mineur** du coefficient $a_{i,j}$.

- Cette égalité est appelée **développement du déterminant** par rapport à la j-ème colonne de la matrice A.

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre $n > 2$: théorème

- Le résultat du développement du déterminant d'une matrice A par rapport à sa j-ème colonne ne dépend pas de j.

- La définition précédente est donc **consistante**.

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Déterminant d’une matrice carrée d’ordre n : remarque

- Il s’agit clairement d’une définition par récurrence : pour calculer le déterminant d’une matrice d’ordre n on est ramené à calculer n déterminants de matrices d’ordre $n-1$.

- Le cas de base étant celui des matrices d’ordre 2 pour lesquelles on a donné une définition explicite du déterminant.

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 : exemple

- Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Développons son déterminant par rapport à la première colonne

$$\det(A) = (-1)^{1+1} a_{1,1} \Delta_{1,1} + (-1)^{2+1} a_{2,1} \Delta_{2,1} + (-1)^{3+1} a_{3,1} \Delta_{3,1}$$

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 : exemple (suite)

- Pour calculer $\Delta_{1,1}$ on supprime la première ligne et la première colonne de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

- Pour calculer $\Delta_{2,1}$ on supprime la deuxième ligne et la première colonne de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Delta_{2,1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 : exemple (fin)

- Pour calculer $\Delta_{3,1}$ on supprime la deuxième ligne et la première colonne de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \Delta_{3,1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

- D'où

$$\det(A) = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre $n > 2$: définition équivalente

- Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 2$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $1 \leq i \leq n$.
- Le **déterminant** de la matrice A peut également se définir par

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$$

- Cette égalité est appelée **développement du déterminant** par rapport à la i-ème ligne de la matrice A.

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre $n > 2$: théorème

- Le résultat du développement du déterminant d'une matrice A par rapport à sa i-ème ligne ne dépend pas de i.

- Ce résultat est le même que celui obtenu en développant le déterminant par rapport à n'importe quelle colonne.

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 : exemple

- Reprenons la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Développons cette fois son déterminant par rapport à la deuxième ligne

$$\det(A) = (-1)^{2+1} a_{2,1} \Delta_{2,1} + (-1)^{2+2} a_{2,2} \Delta_{2,2} + (-1)^{2+3} a_{2,3} \Delta_{2,3}$$

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Déterminant d’une matrice carrée d’ordre 3 : exemple (suite)

- On a donc

$$\det(A) = -2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

- À noter que l’on retrouve bien le même résultat que lors du développement par rapport à la première colonne.

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Déterminant d’une matrice carrée d’ordre 4 : exemple

- Soit $A \in M_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 666 & -1 & 666 & 666 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Développons le déterminant par rapport à la deuxième colonne.

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Déterminant d’une matrice carrée d’ordre 4 : exemple

- On a trois coefficients nuls sur cette colonne donc

$$\det(A) = (-1)^{3+2}\, a_{3,2}\Delta_{3,2}$$

- Ainsi

$$\det(A) = -(-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18$$

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Calcul de déterminant : remarque importante

- On a pu constater sur l’exemple précédent qu’il est beaucoup plus simple de développer un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne contenant un ou plusieurs 0.

- Certaines transformations vont permettre de modifier une matrice sans trop changer son déterminant afin de faire “apparaître“ des 0.

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Opérations élémentaires : définition

- Une **opération élémentaire** est une opération sur les lignes ou les colonnes d'une matrice.

- Trois types d'opérations élémentaires :

  - Échanger deux lignes (*resp*. deux colonnes) : $L_i \leftrightarrow L_j$ (*resp*. $C_i \leftrightarrow C_j$)
  - Multiplier une ligne (*resp*. une colonne) par un réel non nul : $C_i \longleftarrow aC_i$ (*resp*. $C_i \longleftarrow aC_i$) où $a \in \mathbb{R}$
  - Additionner un multiple d'une ligne (*resp*. colonne) à une autre ligne (*resp*. colonne) : $L_i \longleftarrow L_i + bL_j$ (resp. $C_i \longleftarrow C_i + bC_j$) où $b \in \mathbb{R}$

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Opérations élémentaires : effet sur le déterminant

- Échanger deux lignes ou deux colonnes revient à multiplier le déterminant par -1.

- Multiplier une ligne ou une colonne par un réel non nul revient à multiplier le déterminant par ce réel.

- Additionner à une ligne ou une colonne un multiple d’une autre ligne ou autre colonne ne modifie pas le déterminant.

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Opérations élémentaires : exemple

- Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- On effectue l'opération élémentaire $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$, ce qui ne change pas le déterminant.

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Opérations élémentaires : exemple (suite)

- On a donc

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- En développant alors ce déterminant par rapport à la deuxième ligne, on obtient

$$\det(A) = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Cas particulier des matrices triangulaires

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure, *i.e.* de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- Alors,

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{N} a_{i,i}$$

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Cas particulier des matrices triangulaires : exemple

- Soit $A \in M_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- On a donc

$$\det(A) = 5 \times 2 \times (-1) \times 3 = -30$$

2. Définition dans le cas général. Calcul.

Propriétés du déterminant

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
- On a

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$$

$$\det\left(A^T\right) = \det(A)$$

- On a (en règle générale)

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

2. Définition dans le cas général. Calcul.

3. Inversion d’une matrice carrée.

3. Inversion d’une matrice carrée.

Cofacteur et comatrice : définitions

- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$. Soient $1 \leq i,j \leq n$.
- On appelle **cofacteur du coefficient** $a_{i,j}$ de A, la quantité $A_{i,j}$ définie par

$$A_{i,j} = (-1)^{i+j}\, \Delta_{i,j}$$

- On appelle **comatrice** de A, notée $\mathrm{com}(A)$, la matrice de coefficients $A_{i,j}$.

3. Inversion d'une matrice carrée.

Comatrice : exemple

- Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- On a

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Inversion d'une matrice carrée.

Inversion d'une matrice : théorème

- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.
- La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
- On a alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^{t}\mathrm{com}(A)$$

3. Inversion d’une matrice carrée.

Inversion d’une matrice : exemple

- Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- En développant le déterminant de A par rapport à la troisième ligne on trouve

$$\det(A) = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

- La matrice A est donc inversible.

3. Inversion d’une matrice carrée.

Inversion d’une matrice : exemple (suite)

- On sait de plus que

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- On a donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Inversion d’une matrice.

4. Formules de Cramer.

4. Formules de Cramer.

Formules de Cramer : énoncé

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, soient $a_{i,j}$ des nombres réels. Pour $1 \leq i \leq n$ soient b_i des nombres réels.
- Considérons le système linéaire de coefficients $a_{i,j}$ et de seconds membres b_i

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

- Un tel système est de Cramer, *i.e.* admet une unique solution, si et seulement si le déterminant de sa matrice associée est non nul.

4. Formules de Cramer.

Formules de Cramer : énoncé (suite)

- On a alors pour $1 \leq i \leq n$

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,i} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}$$

4. Formules de Cramer.

Formules de Cramer : remarques

- Ces formules sont élégantes, mais en pratique les calculs peuvent être longs.

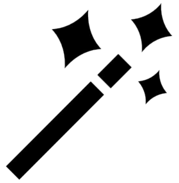
- Il ne s'agit donc pas d'une alternative systématique à la méthode du pivot de Gauss.

4. Formules de Cramer.

Formules de Cramer : remarques (suite)

- Ces formules se démontrent très facilement, il suffit de remplacer les b_i par leurs expressions données par le système, puis d'utiliser quelques opérations élémentaires pour faire apparaître au numérateur le déterminant de la matrice associée au système.

- Une simplification termine ensuite la preuve.



4. Formules de Cramer.

Formules de Cramer : exemple

- Considérons le système

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 3 \end{cases}$$

- On montre facilement que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2$$

4. Formules de Cramer.

Formules de Cramer : exemple (suite)

- On a alors

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{2} = -3 \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{16}{2} = 8 \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{2} = -4$$

4. Formules de Cramer.