Systèmes linéaires

Algèbre Linéaire

SUPINFO

Sommaire

1. Généralités.

1. Généralités.

Système linéaire : définition

- Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$. Pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, soient $a_{i,j}$ des nombres réels. Pour $1 \leq i \leq n$ soient b_i des nombres réels.

- On appelle **système linéaire de $\boldsymbol{n}$ équations à $\boldsymbol{p}$ inconnues** un système de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

1. Généralités.

Système linéaire : définition (suite)

- Les réels $a_{i,j}$ s'appellent les **coefficients du système**.

- Les réels b_i s'appellent les **seconds membres**.

1. Généralités.

Système linéaire : exemple

- Ce système de 2 équations à 3 inconnues est linéaire

$$\begin{cases} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 7x_3 & = & 1 \end{cases}$$

- Ce système de 2 équations à 2 inconnues n'est pas linéaire car la première inconnue est élevée au carré dans la première équation

$$\begin{cases} x_1^2 & + & 2x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 7x_2 & = & 0 \end{cases}$$

1. Généralités.

Résolution d'un système : définition

- Résoudre un système consiste à déterminer l'ensemble des p-uplets $\left(x_1, x_2, \ldots x_p\right)$ vérifiant simultanément les n équations.

- Ces p-uplets sont alors appelés **solutions** du système.

1. Généralités.

Système linéaire : terminologie

- Un système linéaire est dit **compatible** s’il admet au moins une solution. Et **incompatible** dans le cas contraire.

- Un système linéaire est dit **homogène** si tous ses seconds membres sont nuls.

- Deux systèmes linéaires sont dits **équivalents** s’ils ont le même ensemble de solutions.

1. Généralités.

Système compatible : remarque

- Tous les systèmes ne sont pas compatibles, comme par exemple celui-ci

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \end{cases}$$

- Il est en effet évident que ces deux équations ne peuvent être vérifiées simultanément.

1. Généralités.

Système homogène : remarque

- Un système homogène a donc cette allure

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{cases}$$

- Un système homogène est nécessairement compatible car il admet le p-uplet $(0,0,\cdots,0)$ comme solution.

1. Généralités.

Numérotation des équations : remarque

- Il est souvent très utile de numéroter les différentes équations afin de les repérer

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n & (L_n) \end{cases}$$

1. Généralités.

Opérations élémentaires : définition

- Une **opération élémentaire** est une opération sur les équations d'un système qui le transforme en un système équivalent.

- Trois types d'opérations élémentaires :

  - Échanger deux équations : $L_i \longleftrightarrow L_j$
  - Multiplier une équation par un réel non nul : $L_i \longleftarrow aL_i$ où $a \in \mathbb{R}$
  - Additionner un multiple d'une équation à une autre : $L_i \longleftarrow L_i + bL_j$ où $b \in \mathbb{R}$

1. Généralités.

Opérations élémentaires : exemple

- Considérons le système à 2 équations et 2 inconnues

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 2 & (L_1) \\ 2x_1 & + & 3x_2 & = & 1 & (L_2) \end{cases}$$

- Effectuons l'opération élémentaire $L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1$. Le système devient alors

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & = & 2 & (L_1) \\ & & x_2 & = & -3 & (L_2) \end{cases}$$

1. Généralités.

Opérations élémentaires : exemple (suite)

- La deuxième équation donne la valeur de x_2 qu'il suffit de reporter dans la première pour avoir celle de x_1

$$\begin{cases} x_1 & = & 5 \\ x_2 & = & -3 \end{cases}$$

- Cette technique de simplifier un système via des opérations élémentaires sera étudiée en détail dans la suite de ce chapitre.

1. Généralités.

Écriture matricielle d'un système : principe

- Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$. Pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, soient $a_{i,j}$ des nombres réels. Pour $1 \leq i \leq n$ soient b_i des nombres réels.

- Considérons le système linéaire de coefficients $a_{i,j}$ et de seconds membres b_i

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

1. Généralités.

Écriture matricielle d'un système : principe

- La **matrice associée au système** est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

- Les **vecteurs des inconnues** et **des seconds membres** sont les vecteurs

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

1. Généralités.

Écriture matricielle d'un système : principe

- Le système linéaire peut alors se réécrire sous la forme $AX = B$, *i.e.*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

1. Généralités.

Écriture matricielle d'un système : exemple

- Considérons le système de 2 équations à 3 inconnues suivant

$$\begin{cases} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & 7x_3 & = & 1 \end{cases}$$

- Il peut se réécrire sous la forme $AX = B$ en posant

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Généralités.

Système carré et de Cramer : définition

- Un système linéaire est dit **carré** s’il comporte autant d’équations que d’inconnues.

- Un système linéaire carré est dit de **Cramer** s’il admet une unique solution.

1. Généralités.

Système carré et de Cramer : remarque

- Tous les systèmes carrés ne sont pas de Cramer comme le montre le suivant

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \end{cases}$$

- Les deux équations étant identiques, ce système se résume en effet à l'unique équation

$$2x_1 \quad + \quad 2x_2 \quad = \quad 2$$

1. Généralités.

Système carré et de Cramer : remarque (suite)

- Pour calculer ses solutions, il suffit de diviser cette équation par 2 et d'exprimer une inconnue en fonction de l'autre

$$x_1 = 1 - x_2$$

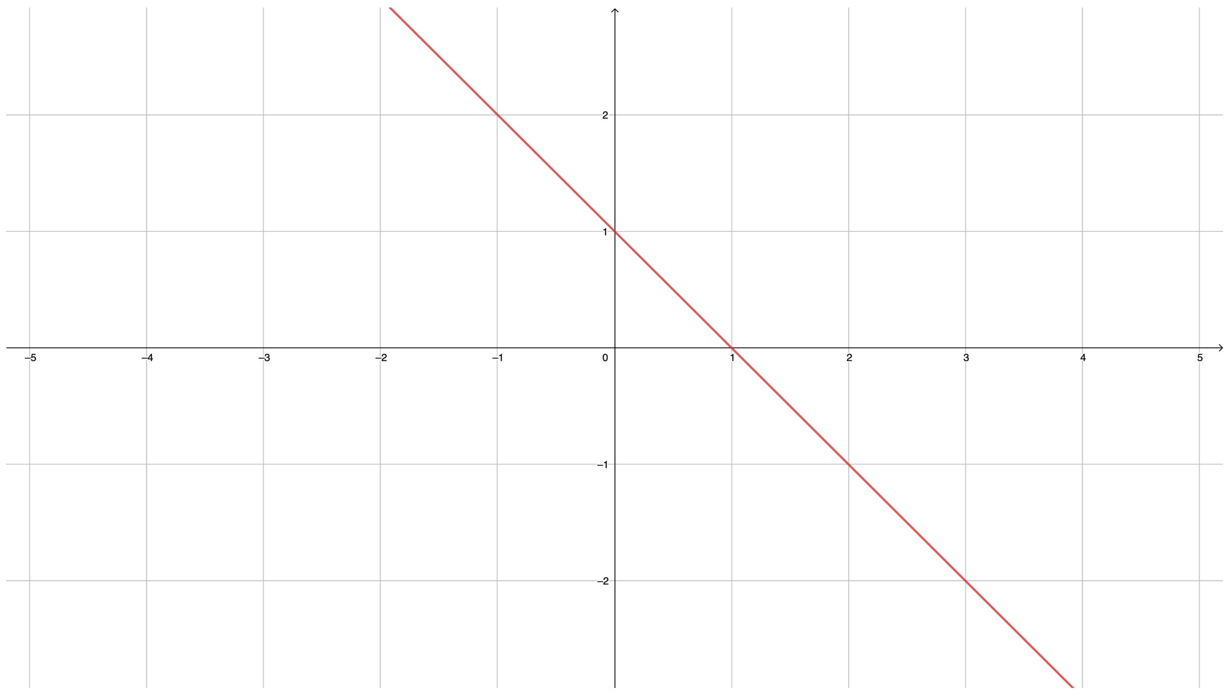
- L'inconnue x_2 peut alors prendre n'importe quelle valeur réelle, on a donc une infinité de solutions, que l'on peut exprimer sous cette forme

$$\{(1-x_2, x_2), x_2 \in \mathbb{R}\}$$

1. Généralités.

Système carré et de Cramer : remarque (suite)

- On reconnait sans peine dans l'expression $x_1 = 1 - x_2$ l'équation d'une droite :



1. Généralités.

Système de Cramer : propriété

- Un système linéaire carré est de Cramer si et seulement si sa matrice associée est inversible.

- Dans ce cas l'unique solution du système est donnée par $X = A^{-1}B$.

1. Généralités.

Système de Cramer : propriété, preuve de la condition suffisante

- On suppose donc que la matrice associée au système est inversible. On a

$$
\begin{aligned}
AX &= B \\
A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\
\left(A^{-1}A\right)X &= A^{-1}B \\
I_nX &= A^{-1}B \\
X &= A^{-1}B
\end{aligned}
$$

- Q.E.D.

1. Généralités.

Système de Cramer : remarque

- Si un système est carré, sa résolution et l'inversion de sa matrice associée sont donc deux problèmes équivalents.

- La technique présentée dans les parties suivantes nous donnera donc une première méthode pour inverser des matrices.

1. Généralités.

2. Systèmes échelonnés.

2. Systèmes échelonnés.

Système échelonné : définition

- Soient $n,p\in\mathbb{N}^*$. Pour $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, soient $a_{i,j}$ des nombres réels. Pour $1 \leq i \leq n$ soient b_i des nombres réels.

- Considérons le système linéaire de coefficients $a_{i,j}$ et de seconds membres b_i

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

2. Systèmes échelonnés.

Système échelonné : définition

- On dit qu'un tel système linéaire est échelonné s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $1 \leq r \leq n$ et $1 \leq r \leq p$, et une suite strictement croissante de r entiers $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq p$ tels que

  1. Pour $1 \leq i \leq r$, $a_{i,j_i} \neq 0$ et $a_{i,j} = 0$ pour $1 \leq j \leq j_i$.

  2. Pour $r < i \leq n$, $a_{i,j} = 0$ pour $1 \leq j \leq p$.

- Les coefficients a_{i,j_i} pour $1 \leq i \leq r$ sont appelés des **pivots**.

2. Systèmes échelonnés.

Système échelonné : interprétation de la définition

- Le premier point signifie que les pivots, *i.e.* les coefficients a_{i,j_i} pour $1 \leq i \leq r$, sont les premiers coefficients non nuls des r premières équations.

- La suite des entiers j_i étant strictement croissante, cela signifie concrètement que chacune des r premières équations commence par davantage de zéros que la précédente.

- Le second point implique que tous les coefficients des équations après les r premières sont nuls.

2. Systèmes échelonnés.

Système échelonné : visualisation de la définition

- Allure générale d'un système échelonné

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc}
a_{1,j_1}x_{j_1} & + & \cdots & & & & & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\
 & & a_{2,j_2}x_{j_2} & + & \cdots & & & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\
 & & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & a_{r,j_r}x_{j_r} & + \quad \cdots & + & a_{r,p}x_p & = & b_r \\
 & & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\
 & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & & 0 & = & b_n
\end{array}\right.$$

2. Systèmes échelonnés.

Inconnues principales et secondaires : définition

- Avec les notations de la définition précédente, les inconnues $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$ sont appelées **inconnues principales**.

- Les autres inconnues sont appelées **inconnues secondaires**.

2. Systèmes échelonnés.

Système échelonné : exemple

- Le système suivant est échelonné

$$\begin{cases} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & x_5 & & & = & -3 \\ & & & & & & 3x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 0 \\ & & & & & & & & -x_5 & + & 7x_6 & = & 9 \\ & & & & & & & & & & 2x_6 & = & 1 \\ & & & & & & & & & & 0 & = & -3 \end{cases}$$

- On a ici $r = 4, j_1 = 1, j_2 = 4, j_3 = 5, j_4 = 6$.

- Les inconnues principales sont x_1, x_4, x_5, x_6 et les inconnues secondaire sont x_2, x_3.

2. Systèmes échelonnés.

Système échelonné : exemple

- Le système suivant n'est pas échelonné

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -3 \\ 3x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ 7x_6 = 9 \\ 2x_6 = 1 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

- En effet la quatrième équation ne commence pas par plus de zéros que la troisième. On aurait sinon $r = 4, j_1 = 1, j_2 = 4, j_3 = 6, j_4 = 6$ ce qui ne définit pas une suite strictement croissante.

2. Systèmes échelonnés.

Résolution théorique des systèmes échelonnés : cas où $\boldsymbol{r = n}$

- Si $r = n$, le système est de cette forme

$$\begin{cases} a_{1,j_1}x_{j_1} & + & \cdots & & & & & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,j_2}x_{j_2} & + & \cdots & & & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & a_{n,j_n}x_{j_n} & + \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

- On doit alors distinguer deux cas, selon que le système soit carré ou non.

2. Systèmes échelonnés.

Résolution théorique des systèmes échelonnés : cas où $\boldsymbol{r = n}$ et $\boldsymbol{n < p}$

- On a alors plus d'inconnues que d'équations et l'on doit exprimer les inconnues principales $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_n}$ en fonction des inconnues secondaires $x_{j_{n+1}}, \cdots, x_p$.

- Ces dernières pouvant prendre n'importe quelles valeurs réelles, on a alors une infinité de solutions.

∞

2. Systèmes échelonnés.

Résolution théorique des systèmes échelonnés : cas où $\boldsymbol{r = n}$ et $\boldsymbol{n = p}$

- On a alors nécessairement $r = p$ et donc $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq r$, ce qui implique que pour tout $1 \leq i \leq r$ on ait $j_i = i$.

- Le système est alors carré et triangulaire supérieur

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & & & & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & & = & b_2 \\ & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases}$$

- Il y a ainsi une unique solution que l'on détermine en commençant par la dernière équation puis en “remontant“ le système.

2. Systèmes échelonnés.

Résolution théorique des systèmes échelonnés : cas où $r < n$

- Il s'agit du cas le plus général, rappelons que le système a alors cette forme

$$\left\{\begin{array}{cccccccccc} a_{1,j_1}x_{j_1} & + & \cdots & & & & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,j_2}x_{j_2} & + & \cdots & & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & a_{r,j_r}x_{j_r} & + & \cdots & + \; a_{r,p}x_p & = & b_r \\ & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\ & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & 0 & = & b_n \end{array}\right.$$

- Là encore il y a deux possibilités.

2. Systèmes échelonnés.

Résolution théorique des systèmes échelonnés : cas où $\boldsymbol{r < n}$

- Si $b_{r+1} = b_{r+2} = \cdots = b_n = 0$ les dernières équations sont vérifiées et l'on peut alors les retirer. On est ramené au cas de figure où $r = n$.

- S'il existe $i, r < i \leq n$ tel que $b_i \neq 0$ la i-ème équation n'est alors pas vérifiée et le système n'a donc pas de solutions.

2. Systèmes échelonnés.

Exemple de résolution : cas où $\boldsymbol{r = n}$ et $\boldsymbol{n < p}$

- Considérons le système échelonné

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

- On a $n = 3$,$p = 5$ et $r = 3$.

- On exprime les inconnues principales x_1,x_2,x_4 en fonction des inconnues secondaires x_3,x_5.

2. Systèmes échelonnés.

Exemple de résolution : cas où $\boldsymbol{r = n}$ et $\boldsymbol{n < p}$ (suite)

- Il vient d'abord $x_4 = 6 - x_5$.
- En reportant cette valeur dans la deuxième équation on obtient $x_2 = -3 - x_3 + 2x_5$.
- Et enfin grâce à la première équation $x_1 = 10 + 3x_3 - 7x_5$.
- L'ensemble des solutions est donc

$$\{(10 + 3x_3 - 7x_5, -3 - x_3 + 2x_5, x_3, 6 - x_5, x_5),\ x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

2. Systèmes échelonnés.

Exemple de résolution : cas où $\boldsymbol{r = n}$ et $\boldsymbol{n = p}$

- Considérons le système échelonné

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \phantom{x_1 +{}} x_2 + x_3 - 3x_4 = -3 \\ \phantom{x_1 + x_2 +{}} x_3 - x_4 = -1 \\ \phantom{x_1 + x_2 + x_3 +{}} x_4 = 2 \end{cases}$$

- On a $n = 4, p = 4$ et $r = 4$.

- Ce système a une unique solution que l'on détermine en commençant par x_4.

2. Systèmes échelonnés.

Exemple de résolution : cas où $\boldsymbol{r = n}$ et $\boldsymbol{n = p}$ (suite)

- On a $x_4 = 2$ puis l’on trouve successivement en “remontant“ les équations, $x_3 = 1$, puis $x_2 = 2$ et enfin $x_1 = -4$.

- La solution du système est donc

$$\{(-4,2,1,2)\}$$

2. Systèmes échelonnés.

Exemple de résolution : cas où $r < n$ et où le système est compatible

- Considérons le système échelonné

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_4 + x_5 = 6 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

- La dernière équation est évidemment vérifiée, on peut donc la supprimer. On retrouve alors le système du premier exemple.

2. Systèmes échelonnés.

Exemple de résolution : cas où $r < n$ et où le système est compatible

- Considérons le système échelonné

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_4 + x_5 = 6 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

- La dernière équation n'est clairement pas vérifiée, ce système n'a donc pas de solutions.

2. Systèmes échelonnés.

3. Méthode du pivot de Gauss.

3. Méthode du pivot de Gauss.

Méthode du pivot de Gauss : objectif

- On considère un système linéaire sous sa forme générale

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n & (L_n) \end{cases}$$

- Le but de cette méthode va être de le transformer en un système échelonné équivalent en utilisant des opérations élémentaires.

3. Méthode du pivot de Gauss.

Méthode du pivot de Gauss : principe

- On va supposer que $a_{1,1} \neq 0$ ce que l’on peut toujours obtenir en permutant deux équations du système.

- Ensuite pour $i \geq 2$ on va effectuer l’opération élémentaire

$$L_i \longleftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}} L_1$$

- Ceci aura pour effet de “supprimer“ la variable x_1 dans toutes les équations L_i pour $i \geq 2$.

3. Méthode du pivot de Gauss.

Méthode du pivot de Gauss : principe (suite)

- Le système a maintenant cette forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ & & a'_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{2,p}x_p & = & b'_2 & (L_2) \\ & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\ & & a'_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a'_{n,p}x_p & = & b'_n & (L_n) \end{cases}$$

- On va adopter la même démarche avec la deuxième variable à partir de la deuxième équation.

3. Méthode du pivot de Gauss.

Méthode du pivot de Gauss : principe (suite)

- Deux cas de figure :

  - S'il existe $i \geq 2$ tel que $a'_{i,2} \neq 0$ on permute l'équation L_i avec L_2. Ensuite, selon le même principe que précédemment, on va se servir de l'équation L_2 pour éliminer l'inconnue x_2 dans toutes les équations L_i pour $i \geq 3$.

  - Sinon, si pour tout $i \geq 2$ $a'_{i,2} = 0$ on passe à l'inconnue x_3.

- On continue ainsi jusqu'à obtenir un système échelonné qui sera équivalent au système initial.

3. Méthode du pivot de Gauss.

Méthode du pivot de Gauss : premier exemple

- Considérons le système

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 & (L_1) \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1 & (L_2) \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 8x_3 & = & 8 & (L_3) \end{cases}$$

- On a $a_{1,1} \neq 0$, on utilise donc L_1 pour supprimer la première variable dans les deux dernières équations avec les opérations élémentaires

$$L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \quad \text{et} \quad L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1$$

3. Méthode du pivot de Gauss.

Méthode du pivot de Gauss : premier exemple (suite)

- Le système devient alors

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 & (L_1) \\ & & x_2 & - & 4x_3 & = & -3 & (L_2) \\ & & -x_2 & + & 2x_3 & = & 2 & (L_3) \end{cases}$$

- On supprime maintenant x_2 dans la dernière équation à l'aide de l'opération élémentaire

$$L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$$

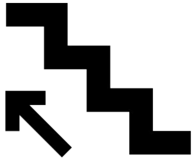
3. Méthode du pivot de Gauss.

Méthode du pivot de Gauss : premier exemple (suite)

- Le système devient alors

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2 & (L_1) \\ & & x_2 & - & 4x_3 & = & -3 & (L_2) \\ & & & & -2x_3 & = & -1 & (L_3) \end{cases}$$

- Il est maintenant sous forme échelonnée et peut être résolu facilement.



3. Méthode du pivot de Gauss.

Méthode du pivot de Gauss : deuxième exemple

- Considérons le système

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 & (L_1) \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -4 & (L_2) \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & = & 10 & (L_3) \end{cases}$$

- On commence par permuter les deux premières équations afin d'avoir un coefficient plus maniable devant l'inconnue x_1. On effectue donc l’opération élémentaire

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

3. Méthode du pivot de Gauss.

Méthode du pivot de Gauss : deuxième exemple (suite)

- Le système devient alors

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -4 & (L_1) \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 & (L_2) \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & = & 10 & (L_3) \end{cases}$$

- On a $a_{1,1} \neq 0$, on utilise donc L_1 pour supprimer la première variable dans les deux dernières équations avec les opérations élémentaires

$$L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \quad \text{et} \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$$

3. Méthode du pivot de Gauss.

Méthode du pivot de Gauss : deuxième exemple (suite)

- Le système devient alors

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -4 & (L_1) \\ 3x_3 + 3x_4 = 7 & (L_2) \\ 6x_3 + 6x_4 = 14 & (L_3) \end{cases}$$

- L'inconnue x_2 ne figure ni dans la deuxième ni dans la troisième équation, on passe donc à x_3 que l'on supprime de la dernière équation à l'aide de l'opération élémentaire

$$L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$$

3. Méthode du pivot de Gauss.

Méthode du pivot de Gauss : deuxième exemple (suite)

- Le système devient alors

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -4 & (L_1) \\ & & & & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 7 & (L_2) \\ & & & & & & 0 & = & 0 & (L_3) \end{array}\right.$$

- Il est maintenant sous forme échelonnée et peut être résolu facilement.

3. Méthode du pivot de Gauss.

Méthode du pivot de Gauss : troisième exemple

- Considérons le système

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -4 & (L_1) \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -1 & (L_2) \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & = & 11 & (L_3) \end{cases}$$

- On a $a_{1,1} \neq 0$, on utilise donc L_1 pour supprimer la première variable dans les deux dernières équations avec les opérations élémentaires

$$L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \quad \text{et} \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$$

3. Méthode du pivot de Gauss.

Méthode du pivot de Gauss : troisième exemple (suite)

- Le système devient alors

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -4 & (L_1) \\ 3x_3 + 3x_4 = 7 & (L_2) \\ 6x_3 + 6x_4 = 15 & (L_3) \end{cases}$$

- L'inconnue x_2 ne figure ni dans la deuxième ni dans la troisième équation, on passe donc à x_3 que l'on supprime de la dernière équation à l'aide de l'opération élémentaire

$$L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_2$$

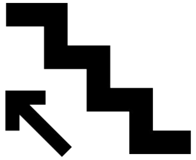
3. Méthode du pivot de Gauss.

Méthode du pivot de Gauss : troisième exemple (suite)

- Le système devient alors

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -4 & (L_1) \\ & & & & 3x_3 & + & 3x_4 & = & 7 & (L_2) \\ & & & & & & 0 & = & 1 & (L_3) \end{cases}$$

- Il est maintenant sous forme échelonnée et peut être résolu facilement.



3. Méthode du pivot de Gauss.

Méthode du pivot de Gauss : troisième exemple (suite)

- Cet exemple explicite d’où peuvent provenir des équations de la forme

$$b_i = 0$$

dans un système échelonné.

3. Méthode du pivot de Gauss.