Mathématiques HEI

Robin Delabays

November 4, 2025

Table of contents

Mathématiques HEI

Cette page regroupe quelques documents additionnel pour les cours de mathématiques donnés à la Haute Ecole d'Ingénierie de Sion.

- Analyse 3

Part I

Analyse 3

Analyse 3

Activité du mardi 4 novembre 2025 - Série de Fourier et équation différentielle

Consigne : - Les zones de code ci-dessous peuvent être modifiées et relancées à l'aide du bouton "Run code". Vous serez amené · e à modifier le code. - Vous serez amené · e à faire quelques calculs. Ces passages sont en italique.

Dans l'exercice 3 de la série 21 du cours de Mathématiques Appliquées 1, nous avons considéré le système suivant, où la constante du ressort est de $k = 4[\mathrm{kg/s}^2]$, la masse du chariot est de $m = 1[\mathrm{kg}]$, et la constante de l'amortisseur est de $c = 5[\mathrm{kg/s}]$.

On en déduit l'équation différentielle

$$y'' + 5y' + 4y = 5x'$$

Pour rappel, la réponse fréquentielle du système ci-dessus est donnée par

$$H(\omega) = \frac{i5\omega}{4 - \omega^2 + i5\omega}$$

(Chaque dérivée est remplacée par un multiplication par $i\omega$ et on a le membre de droite au numérateur et le membre de gauche au dénominateur.)

Pour commencer, représentons le module et l'argument de $H(\omega)$ en fonction de la vitesse angulaire ω:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import cmath
j = complex(0,1)

w = np.linspace(0,100,500)
H = (j*5*w)/(4 - w**2 + j*5*w)
```

```
plt.figure((3,5))
plt.subplot(1,2,1)
plt.plot(w,abs(H))

phi = []
for i in np.arange(len(w)):
    phi.append(cmath.phase(H[i]))

plt.subplot(1,2,2)
plt.plot(w,phi)

plt.show()
```

Pour le moment, nous n'avons pas spécifié la forme du signal d'entrée $x(t)$. Pour rappel, ce signal d'entrée donne la position du point point d'attache mobile, à droite du chariot dans le système considéré ici.

Dans ce premier exemple, nous allons prendre le signal d'entrée

$$x(t) = \sin(3t)$$

```
t = np.linspace(0,10,500)
x = np.sin(3*t)

plt.figure()
plt.plot(t,x)
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('x')
plt.show()
```

Afin de calculer le signal de sortie $y(t)$ (donc la position du chariot), nous allons utiliser la réponse fréquentielle $H(\omega)$. Pour cela nous avons besoin de la série de Fourier complexe de $x(t)$,

$$x(t) = \sin(3t) = -\frac{1}{2i}e^{-i3t} + \frac{1}{2i}e^{i3t}$$

Comme nous l'avons vu, on trouve le signal de sortie en appliquant la réponse fréquentielle à chaque harmonique de la série de Fourier, avec la fréquence associée. Ainsi, pour le terme e^{-i3t}, nous devons calculer $H(-3)$, et pour le terme e^{i3t}, nous devons calculer $H(3)$.

Vérifiez que

$$H(-3) = \frac{9+3i}{10} H(3) = \frac{9-3i}{10}$$

Ainsi, la série de Fourier complexe du signal de sortie est

$$y(t) = -\frac{1}{2i} \cdot \frac{9+3i}{10} e^{-i3t} + \frac{1}{2i} \cdot \frac{9-3i}{10} e^{i3t} = \frac{-3+9i}{20} e^{-i3t} + \frac{-3-9i}{e}^{i3t}$$

Sans avoir besoin de simplifier cette expression, on peut se faire une idée de la trajectoire du chariot en la calculant numériquement :

```
w0 = 3
y = complex(-3/20,9/20)*np.exp(-j*3*t) + complex(-3/20,-9/20)*np.exp(j*3*t)

plt.figure()
plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(t,x)
plt.ylabel('x')
plt.axis([0,10,-1.1,1.1])
plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(t,y.real,color='C1')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('y')
plt.axis([0,10,-1.1,1.1])
plt.show()
```

Dans le code ci-dessous, en modifiant la vitesse angulaire du signal d'entrée (`w` à la première ligne), vous pouvez voir directement l'effet sur le signal de sortie $y(t)$ dans la figure. *Qu'observez-vous lorsque la vitesse angulaire devient très basse (mais non-nulle) ? Et lorsqu'elle est très élevée ?*

```
w = 3   # Vitesse angulaire à modifier

t = np.linspace(0,10,500)
x = np.sin(w*t)

H1 = (-j*5*w)/(4-w**2 - j*5*w)
H2 = (j*5*w)/(4-w**2 + j*5*w)
```

```
y = (-1/(2*j))*H1*np.exp(-j*w*t) + (1/(2*j))*H2*np.exp(j*w*t)

plt.figure()
plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(t,x)
plt.ylabel('x')
plt.axis([0,10,-1.1,1.1])
plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(t,y.real,color='C1')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('y')
plt.axis([0,10,-1.1,1.1])
plt.show()
```