## 1 Concetti di di base

Questa sezione presenta i concetti di base di teoria delle cateogrie [...]

## 1.1 Categorie

**Definizione 1.1** (Categorie, sottocategorie). Una categoria  $\mathcal{C}$  è composta da:

- 1. una collezione di oggetti  $Ob(\mathcal{C})$ ;
- 2. una collezione di morfismi  $Mor(\mathcal{C})$ ;
- 3. due operazioni che assegnano ad ogni morfismo f un oggetto  $dom\ f$ , detto dominio e un oggetto  $cod\ f$ , detto codominio, denotando con  $f:A\to B$  il fatto che  $dom\ f=A$  e  $cod\ f=B$ ; la collezione di tutti i morfismi da un oggetto A ad un oggetto B in C è denotato con C(A,B);
- 4. un operatore di composizione che assegna ad ogni coppia di morfismi f, g tali che  $dom\ g=cod\ f$ , un morfismo  $composto\ g\circ f:dom\ f\to cod\ g$ , tale da soddisfare

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

per ogni f, g, h tali che  $dom\ g = cod\ f$  e  $dom\ h = cod\ f$ ;

5. per ogni oggetto A, un morfismo identità  $id_A: A \to A$  tale che:

$$id_B \circ f = f = f \circ id_A$$

per ogni  $f: A \to B$ .

Una categoria  $\mathcal{B}$  è una sottocategoria di  $\mathcal{C}$  se

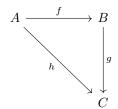
- 1. ogni oggetto di  $\mathcal{B}$  è un oggetto di  $\mathcal{C}$ ;
- 2. se A e B sono oggetti di  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}(A,B) \subseteq \mathcal{C}(A,B)$ ;
- 3. morfismi composti e identità di  $\mathcal{B}$  sono gli stessi di  $\mathcal{C}$ .

Una sottocategoria  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{C}$  si dice *completa* se, per ogni coppia di oggetti A, B,si ha  $\mathcal{B}(A,B)=\mathcal{C}(A,B)$ .

[puntualizzazione sull'utilizzo improprio del temine "collezione" nella definizione]. Un primo esempio interessante è il seguente, nonché fonte di intuizioni per buona parte di questa presentazione della teoria delle categorie.

Esempio 1.2. La categoria Set è la categoria degli insiemi e delle funzioni totali tra essi. La composizione di morfismi corrisponde alla composizione di funzioni, e i morfismi identità corrispondono alle funzioni identità. La categoria Fin i cui oggetti sono insiemi finiti e i cui morfismi sono funzioni tra insiemi finiti è una sottocategoria completa di Set.

Un modo di rappresentare una categoria  $\mathcal{C}$  è mediante diagrammi, come illustrato di seguito, i cui vertici sono etichettati con oggetti di  $\mathcal{C}$ , e le frecce con morfismi di f, dove una freccia f da A a B rappresenta il morfismo  $f:A\to B$ . Un diagramma è detto commutativo se, per ogni coppia di vertici A, C, ogni percorso da A a C determina lo stesso morfismo:



in questo caso, la commutatività di tale diagramma esprime l'uguaglianza  $g \circ f = h$ .

**Definizione 1.3** (Monomorfismi, epimorfismi, isomorfismi). Un morfismo  $m: B \to C$  in una categoria  $\mathcal C$  è un monomorfismo (oppure è mono) se, per ogni coppia di morfismi  $f,g: A \to B$  in  $\mathcal C$ , l'uguaglianaza  $m \circ f = m \circ g$  implica f = g. Un morfismo  $e: C \to D$  in  $\mathcal C$  è un epimorfismo (oppure è epi) se l'uguaglianza  $f \circ e = g \circ e$  implica f = g. Un morfismo  $\phi: A \to B$  in  $\mathcal C$  è un isomorfismo se esiste in  $\mathcal C$  un morfismo  $\psi: B \to A$  tale che  $\psi \circ \phi = id_A$  e  $\phi \circ \psi = id_B$ .

Le definizioni di monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo sono una generalizzazione di un concetto ben noto in teoria degli insiemi, come illustra il seguente esempio.

**Esempio 1.4.** In **Set**, un monomorfismo  $m:A\to B$  è una funzione iniettiva dall'inieme A all'insieme B, un epimorfismo  $e:C\to D$  è una funzione surgettiva da C a D, mentre un isomorfismo  $\phi:E\to F$  è una corripondenza biunivoca tra gli insiemi E ed F

[Non andrei troppo nel dettaglio con gli esempi]

**Definizione 1.5** (Oggetti iniziali e terminali). Sia C una categoria. Un oggetto 0 in C è detto oggetto iniziale se, per ogni oggetto A, esiste esattamente un morfismo da 0 ad A in C. Un oggetto 1 si dice oggetto terminale se, per ogni oggetto A, esiste un unico morfismo da A ad 1 in C.

[...]

## 2 Funtori, trasformazioni naturali e categorie funtore

Date due categorie  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$ , un funtore  $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$  è una mappa tra categorie, mappando ogni oggetto A di  $\mathcal{C}$  in un oggetto F(A) di  $\mathcal{D}$  e ogni morfismo  $f:A\to B$  di  $\mathcal{C}$  in un morfismo  $F(f):F(A)\to F(B)$  in  $\mathcal{D}$  e tale che:

- $F(id_A) = id_{F(A)};$
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ .

Dati due funtori  $F,G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ , una trasformazione naturale  $\eta:F\to G$  è una mappa tra funtori che che assegna ad ogni oggetto A di  $\mathcal{C}$  un morfismo  $\eta_A:F(A)\to G(A)$  in  $\mathcal{D}$  tale che per ogni morfismo  $f:A\to B$  in  $\mathcal{C}$  il seguente diagramma in  $\mathcal{D}$  commuti:

