On Adhesivity of EGGs

Roberto Biondo

Dipartimento di Informatica
Università di Pisa

Friday 29$^{\text{th}}$ November, 2024

Contenuti

Formalismi Grafici

Formalismi grafici:

- Analisi delle dipendenze
- Bioinformatica
- Sistemi di riscrittura
- Ottimizzazione
- Ingegneria del software

Categorie

Modello *categoriale*.

Una categoria $\mathscr{C}$ è composta da:

- *oggetti*
- *morfismi* (o *frecce*)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop left, "id_A"] \arrow[rr, "f"] & & B \arrow[loop right, "id_B"] \end{tikzcd}$$

La categoria i cui oggetti sono gli insiemi e i cui morfismi sono le funzioni tra essi è denominata **Set**.

$f : A \to B$ può essere:

- un *monomorfismo* : $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$;
- un *epimorfismo* : $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$;
- un *isomorfimso* : esiste k tale che $f \circ k = id_B$ e $k \circ f = id_A$.

Funtori, Trasformazioni Naturali

Un *funtore* $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[loop left, "F(id_A) = id_{F(A)}"] \arrow[r, "F(f)"] \arrow[rr, bend left, "F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)"] & F(B) \arrow[r, "F(g)"] & F(C) \arrow[loop right, "F(id_C) = id_{F(C)}"] \end{tikzcd}$$

Una *trasformazione naturale* $\eta : F \dot{\to} G$:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

Categoria di funtori $[\mathscr{C}, \mathscr{D}]$:

- Oggetti: funtori (con dominio $\mathscr{C}$ e codominio $\mathscr{D}$)
- Morfismi: trasformazioni naturali

Le categorie di funtori il cui codominio è **Set** sono dette *categorie di prefasci*.

Categorie di Grafi

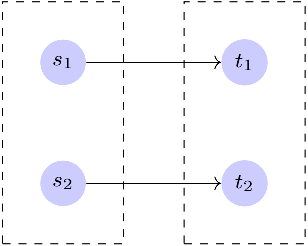
Un grafo G è costituito da:

- Un insieme di nodi V
- Un insieme di archi E
- $s : E \to V$ funzione sorgente
- $t : E \to V$ funzione destinazione

In altre parole, un grafo è un elemento di

$$[E \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} V, \mathbf{Set}]$$

.



Un *grafo con eqiuvalenza* $(G, \sim)$ è costituito da:

- Un grafo G
- Una relazione di quivalenza $\sim$ definita sui vertici

Ossia, un elemento di $[E \rightrightarrows V \to Q, \mathbf{Set}]$, tale che la freccia $q : V \to Q$ sia surgettiva (epi).
Un E-Grafo $(G, \sim)$ è un grafo con equivalenza tale che

$$\frac{s_G(e) \sim s_G(e')}{t_G(e) \sim t_G(e')}$$

EGGs

La categoria degli E-Grafi è detta **EGG**, dal nome della libreria che li implementa in Rust.

La definizione attuale è troppo operativa per ottenere dei risultati teorici.

Tuttavia gli utilizzi sono molteplici, dalla *equality saturation* all'ottimizzazione in fase di compilazione.

Pullback, Pushout, Equalizzatori

$$
\begin{tikzcd}
P' \arrow[dr, dashed, "v"] \arrow[drr, bend left, "p_1'"] \arrow[ddr, bend right, "p_2'"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}
$$

(a) Pullback

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "q_1"] \arrow[ddr, bend left, "q_1'"] & \\
C \arrow[r, "q_2"'] \arrow[drr, bend right, "q_2'"'] & Q \arrow[dr, dashed, "u"] & \\
& & Q'
\end{tikzcd}
$$

(b) Pushout

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
E' \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "e'"'] & &
\end{tikzcd}
$$

(c) Equalizzatore

In **Set**:

- Pullback di f e g: $P = \{(x, y) \in A \times B \mid f(x) = g(y)\}$
- Pushout di f e g: $Q = (A \coprod B)/\sim$
- Equalizzatore di f e g: $E = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$

Adesività

Una categoria $\mathscr{C}$ è adesiva se:

- ha tutti i pushout di monomorfismi
- ha tutti i pullback
- i pushout di monomorfismi sono *Van Kampen*

$$
\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[rr, "f'"] \arrow[dl, "m'"'] \arrow[dd, "a" near end] & & B' \arrow[dl, "n'"'] \arrow[dd, "b"] \\
C' \arrow[rr, "g'" near start, crossing over] \arrow[dd, "c"'] & & D' & \\
 & A \arrow[rr, "f" near start] \arrow[dl, "m"] & & B \arrow[dl, "n"] \\
C \arrow[rr, "g"'] & & D \arrow[from=uu, "d" near start, crossing over] &
\end{tikzcd}
$$

Approccio DPO su Categorie Adesive

Sia $\mathscr{C}$ una categoria adesiva.

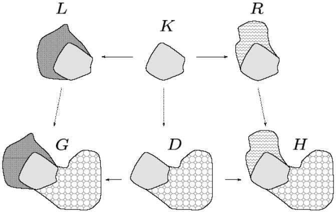
$$
\begin{tikzcd}
L & K \arrow[l, "l"'] \arrow[r, "r"] & L
\end{tikzcd}
$$

(a) Regola

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[d, "m_L"'] & K \arrow[l, "l"'] \arrow[r, "r"] \arrow[d, "m_K"] & R \arrow[d, "m_R"] \\
G & D \arrow[l, "l*"] \arrow[r, "r*"'] & H
\end{tikzcd}
$$

(b) Passo di derivazione

l e r sono due morfismi, possibilmente mono, di $\mathscr{C}$, mentre i due quadrati sono pushout.



Conclusioni

- Formalizzazione degli E-Grafi mediante categorie
- Adesività rispetto ad alcuni morfismi

LAvori futuri: sostituire la categoria **Set** con una qualsiasi categoria esatta e adesiva.