

# 1 Concetti di base

Questa sezione presenta i concetti di base di teoria delle categorie [...]

## 1.1 Categorie

**Definizione 1.1** (Categorie, sottocategorie). Una *categoria*  $\mathcal{C}$  è composta da:

1. una collezione di *oggetti*  $Ob(\mathcal{C})$ ;
2. una collezione di *morfismi*  $Mor(\mathcal{C})$ ;
3. due operazioni che assegnano ad ogni morfismo  $f$  un oggetto  $dom f$ , detto *dominio* e un oggetto  $cod f$ , detto *codominio*, denotando con  $f : A \rightarrow B$  il fatto che  $dom f = A$  e  $cod f = B$ ; la collezione di tutti i morfismi da un oggetto  $A$  ad un oggetto  $B$  in  $\mathcal{C}$  è denotato con  $\mathcal{C}(A, B)$ ;
4. un operatore di composizione che assegna ad ogni coppia di morfismi  $f, g$  tali che  $dom g = cod f$ , un morfismo *composto*  $g \circ f : dom f \rightarrow cod g$ , tale da soddisfare

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

per ogni  $f, g, h$  tali che  $dom g = cod f$  e  $dom h = cod g$ ;

5. per ogni oggetto  $A$ , un morfismo *identità*  $id_A : A \rightarrow A$  tale che:

$$id_B \circ f = f = f \circ id_A$$

per ogni  $f : A \rightarrow B$ .

Una categoria  $\mathcal{B}$  è una *sottocategoria* di  $\mathcal{C}$  se

1. ogni oggetto di  $\mathcal{B}$  è un oggetto di  $\mathcal{C}$ ;
2. se  $A$  e  $B$  sono oggetti di  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}(A, B) \subseteq \mathcal{C}(A, B)$ ;
3. morfismi composti e identità di  $\mathcal{B}$  sono gli stessi di  $\mathcal{C}$ .

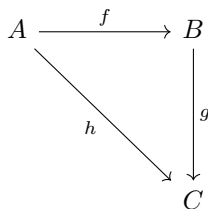
Una sottocategoria  $\mathcal{B}$  di  $\mathcal{C}$  si dice *completa* se, per ogni coppia di oggetti  $A, B$ , si ha  $\mathcal{B}(A, B) = \mathcal{C}(A, B)$ .

[puntualizzazione sull'utilizzo improprio del termine "collezione" nella definizione].

Un primo esempio interessante è il seguente, nonché fonte di intuizioni per buona parte di questa presentazione della teoria delle categorie.

**Esempio 1.2.** La categoria **Set** è la categoria degli insiemi e delle funzioni totali tra essi. La composizione di morfismi corrisponde alla composizione di funzioni, e i morfismi identità corrispondono alle funzioni identità.

Un modo di rappresentare una categoria  $\mathcal{C}$  è mediante *diagrammi*, come illustrato di seguito, i cui vertici sono etichettati con oggetti di  $\mathcal{C}$ , e le frecce con morfismi di  $\mathcal{C}$ , dove una freccia  $f$  da  $A$  a  $B$  rappresenta il morfismo  $f : A \rightarrow B$ . Un diagramma è detto *commutativo* se, per ogni coppia di vertici  $A, C$ , ogni percorso da  $A$  a  $C$  determina lo stesso morfismo:



in questo caso, la commutatività di tale diagramma esprime l'uguaglianza  $g \circ f = h$ .

**Definizione 1.3** (Monomorfismi, epimorfismi, isomorfismi). Un morfismo  $m : B \rightarrow C$  in una categoria  $\mathcal{C}$  è un *monomorfismo* (oppure è *mono*) se, per ogni coppia di morfismi  $f, g : A \rightarrow B$  in  $\mathcal{C}$ , l'uguaglianza  $m \circ f = m \circ g$  implica  $f = g$ . Un morfismo  $e : C \rightarrow D$  in  $\mathcal{C}$  è un *epimorfismo* (oppure è *epi*) se l'uguaglianza  $f \circ e = g \circ e$  implica  $f = g$ . Un morfismo  $\phi : A \rightarrow B$  in  $\mathcal{C}$  è un *isomorfismo* se esiste in  $\mathcal{C}$  un morfismo  $\psi : B \rightarrow A$  tale che  $\psi \circ \phi = id_A$  e  $\phi \circ \psi = id_B$ .

Le definizioni di monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo sono una generalizzazione di un concetto ben noto in teoria degli insiemi, come illustra il seguente esempio.

**Esempio 1.4.** In **Set**, un monomorfismo  $m : A \rightarrow B$  è una funzione iniettiva dall'insieme  $A$  all'insieme  $B$ , un epimorfismo  $e : C \rightarrow D$  è una funzione surgettiva da  $C$  a  $D$ , mentre un isomorfismo  $\phi : E \rightarrow F$  è una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi  $E$  ed  $F$

[Non andrei troppo nel dettaglio con gli esempi]