

1 Concetti di base

Questa sezione presenta i concetti di base di teoria delle categorie [...]

1.1 Categorie

Definizione 1.1 (Categorie, sottocategorie). Una *categoria* \mathcal{C} è composta da:

1. una collezione di *oggetti* $Ob(\mathcal{C})$;
2. una collezione di *morfismi* $Mor(\mathcal{C})$;
3. due operazioni che assegnano ad ogni morfismo f un oggetto $dom f$, detto *dominio* e un oggetto $cod f$, detto *codominio*, denotando con $f : A \rightarrow B$ il fatto che $dom f = A$ e $cod f = B$; la collezione di tutti i morfismi da un oggetto A ad un oggetto B in \mathcal{C} è denotato con $\mathcal{C}(A, B)$;
4. un operatore di composizione che assegna ad ogni coppia di morfismi f, g tali che $dom g = cod f$, un morfismo *composto* $g \circ f : dom f \rightarrow cod g$, tale da soddisfare

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

per ogni f, g, h tali che $dom g = cod f$ e $dom h = cod g$;

5. per ogni oggetto A , un morfismo *identità* $id_A : A \rightarrow A$ tale che:

$$id_B \circ f = f = f \circ id_A$$

per ogni $f : A \rightarrow B$.

Una categoria \mathcal{B} è una *sottocategoria* di \mathcal{C} se

1. ogni oggetto di \mathcal{B} è un oggetto di \mathcal{C} ;
2. se A e B sono oggetti di \mathcal{B} , $\mathcal{B}(A, B) \subseteq \mathcal{C}(A, B)$;
3. morfismi composti e identità di \mathcal{B} sono gli stessi di \mathcal{C} .

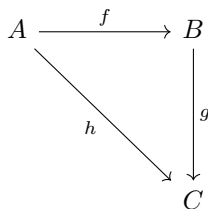
Una sottocategoria \mathcal{B} di \mathcal{C} si dice *completa* se, per ogni coppia di oggetti A, B , si ha $\mathcal{B}(A, B) = \mathcal{C}(A, B)$.

[puntualizzazione sull'utilizzo improprio del termine "collezione" nella definizione].

Un primo esempio interessante è il seguente, nonché fonte di intuizioni per buona parte di questa presentazione della teoria delle categorie.

Esempio 1.2. La categoria **Set** è la categoria degli insiemi e delle funzioni totali tra essi. La composizione di morfismi corrisponde alla composizione di funzioni, e i morfismi identità corrispondono alle funzioni identità. La categoria **Fin** i cui oggetti sono insiemi finiti e i cui morfismi sono funzioni tra insiemi finiti è una sottocategoria completa di **Set**.

Un modo di rappresentare una categoria \mathcal{C} è mediante *diagrammi*, come illustrato di seguito, i cui vertici sono etichettati con oggetti di \mathcal{C} , e le frecce con morfismi di \mathcal{C} , dove una freccia f da A a B rappresenta il morfismo $f : A \rightarrow B$. Un diagramma è detto *commutativo* se, per ogni coppia di vertici A, C , ogni percorso da A a C determina lo stesso morfismo:



in questo caso, la commutatività di tale diagramma esprime l'uguaglianza $g \circ f = h$.

Definizione 1.3 (Monomorfismi, epimorfismi, isomorfismi). Un morfismo $m : B \rightarrow C$ in una categoria \mathcal{C} è un *monomorfismo* (oppure è *mono*) se, per ogni coppia di morfismi $f, g : A \rightarrow B$ in \mathcal{C} , l'uguaglianza $m \circ f = m \circ g$ implica $f = g$. Un morfismo $e : C \rightarrow D$ in \mathcal{C} è un *epimorfismo* (oppure è *epi*) se l'uguaglianza $f \circ e = g \circ e$ implica $f = g$. Un morfismo $\phi : A \rightarrow B$ in \mathcal{C} è un *isomorfismo* se esiste in \mathcal{C} un morfismo $\psi : B \rightarrow A$ tale che $\psi \circ \phi = id_A$ e $\phi \circ \psi = id_B$.

Le definizioni di monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo sono una generalizzazione di un concetto ben noto in teoria degli insiemi, come illustra il seguente esempio.

Esempio 1.4. In **Set**, un monomorfismo $m : A \rightarrow B$ è una funzione iniettiva dall'insieme A all'insieme B , un epimorfismo $e : C \rightarrow D$ è una funzione surgettiva da C a D , mentre un isomorfismo $\phi : E \rightarrow F$ è una corrispondenza biunivoca tra gli insiemi E ed F .

[Non andrei troppo nel dettaglio con gli esempi]

Definizione 1.5 (Oggetti iniziali e terminali). Sia \mathcal{C} una categoria. Un oggetto 0 in \mathcal{C} è detto *oggetto iniziale* se, per ogni oggetto A , esiste esattamente un morfismo da 0 ad A in \mathcal{C} . Un oggetto 1 si dice *oggetto terminale* se, per ogni oggetto A , esiste un unico morfismo da A ad 1 in \mathcal{C} .