1 Concetti di di base

Questa sezione presenta i concetti di base di teoria delle cateogrie [...]

1.1 Categorie

Definizione 1.1 (Categorie, sottocategorie)**.** Una *categoria* $\mathcal{C}$ è composta da:

1. una collezione di *oggetti* $Ob(\mathcal{C})$;
2. una collezione di *morfismi* $Mor(\mathcal{C})$;
3. due operazioni che assegnano ad ogni morfismo f un oggetto $dom\ f$, detto *dominio* e un oggetto $cod\ f$, detto *codominio*, denotando con $f : A \to B$ il fatto che $dom\ f = A$ e $cod\ f = B$; la collezione di tutti i morfismi da un oggetto A ad un oggetto B in $\mathcal{C}$ è denotato con $\mathcal{C}(A, B)$;
4. un operatore di composizione che assegna ad ogni coppia di morfismi f, g tali che $dom\ g = cod\ f$, un morfismo *composto* $g \circ f : dom\ f \to cod\ g$, tale da soddisfare
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
per ogni f, g, h tali che $dom\ g = cod\ f$ e $dom\ h = cod\ f$;
5. per ogni oggetto A, un morfismo *identità* $id_A : A \to A$ tale che:
$$id_B \circ f = f = f \circ id_A$$
per ogni $f : A \to B$.

Una categoria $\mathcal{B}$ è una *sottocategoria* di $\mathcal{C}$ se

1. ogni oggetto di $\mathcal{B}$ è un oggetto di $\mathcal{C}$;
2. se A e B sono oggetti di $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}(A, B) \subseteq \mathcal{C}(A, B)$;
3. morfismi composti e identità di $\mathcal{B}$ sono gli stessi di $\mathcal{C}$.

Una sottocategoria $\mathcal{B}$ di $\mathcal{C}$ si dice *completa* se, per ogni coppia di oggetti A, B,si ha $\mathcal{B}(A, B) = \mathcal{C}(A, B)$.

[puntualizzazione sull'utilizzo improprio del temine "collezione" nella definizione].

Un primo esempio interessante è il seguente, nonché fonte di intuizioni per buona parte di questa presentazione della teoria delle categorie.

Esempio 1.2. La categoria **Set** è la categoria degli insiemi e delle funzioni totali tra essi. La composizione di morfismi corrisponde alla composizione di funzioni, e i morfismi identità corrispondono alle funzioni identità. La categoria **Fin** i cui oggetti sono insiemi finiti e i cui morfismi sono funzioni tra insiemi finiti è una sottocategoria completa di **Set**.

Un modo di rappresentare una categoria $\mathcal{C}$ è mediante *diagrammi*, come illustrato di seguito, i cui vertici sono etichettati con oggetti di $\mathcal{C}$, e le frecce con morfismi di f, dove una freccia f da A a B rappresenta il morfismo $f : A \to B$. Un diagramma è detto *commutativo* se, per ogni coppia di vertici A, C, ogni percorso da A a C determina lo stesso morfismo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

in questo caso, la commutatività di tale diagramma esprime l'uguaglianza $g \circ f = h$.

Definizione 1.3 (Monomorfismi, epimorfismi, isomorfismi)**.** Un morfismo $m : B \to C$ in una categoria $\mathcal{C}$ è un *monomorfismo* (oppure è *mono*) se, per ogni coppia di morfismi $f, g : A \to B$ in $\mathcal{C}$, l'uguaglianaza $m \circ f = m \circ g$ implica $f = g$. Un morfismo $e : C \to D$ in $\mathcal{C}$ è un *epimorfismo* (oppure è *epi*) se l'uguaglianza $f \circ e = g \circ e$ implica $f = g$. Un morfismo $\phi : A \to B$ in $\mathcal{C}$ è un *isomorfismo* se esiste in $\mathcal{C}$ un morfismo $\psi : B \to A$ tale che $\psi \circ \phi = id_A$ e $\phi \circ \psi = id_B$.

Le definizioni di monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo sono una generalizzazione di un concetto ben noto in teoria degli insiemi, come illustra il seguente esempio.

Esempio 1.4. In **Set**, un monomorfismo $m : A \to B$ è una funzione iniettiva dall'inieme A all'insieme B, un epimorfismo $e : C \to D$ è una funzione surgettiva da C a D, mentre un isomorfismo $\phi : E \to F$ è una corripondenza biunivoca tra gli insiemi E ed F

[Non andrei troppo nel dettaglio con gli esempi]

Definizione 1.5 (Oggetti iniziali e terminali)**.** Sia $\mathcal{C}$ una categoria. Un oggetto 0 in $\mathcal{C}$ è detto *oggetto iniziale* se, per ogni oggetto A, esiste esattamente un morfismo da 0 ad A in $\mathcal{C}$. Un oggetto 1 si dice *oggetto terminale* se, per ogni oggetto A, esiste un unico morfismo da A ad 1 in $\mathcal{C}$.

[...]

2 Funtori, trasformazioni naturali e categorie funtore

Date due categorie $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, un funtore $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è una mappa tra categorie, mappando ogni oggetto A di $\mathcal{C}$ in un oggetto $F(A)$ di $\mathcal{D}$ e ogni morfismo $f : A \to B$ di $\mathcal{C}$ in un morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ in $\mathcal{D}$ e tale che:

- $F(id_A) = id_{F(A)}$;
- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Dati due funtori F,$G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, una *trasformazione naturale* $\eta : F \to G$ è una mappa tra funtori che che assegna ad ogni oggetto A di $\mathcal{C}$ un morfismo $\eta_A : F(A) \to G(A)$ in $\mathcal{D}$ tale che per ogni morfismo $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$ il seguente diagramma in $\mathcal{D}$ commuti:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$