

On Adhesivity of EGGs

Roberto Biondo

Dipartimento di Informatica
Università di Pisa

Friday 29th November, 2024

Contenuti

Overview

Background

Grafi

Adesività

Conclusioni

Formalismi Grafici

Formalismi grafici:

- Analisi delle dipendenze
- Bioinformatica
- Sistemi di riscrittura
- Ottimizzazione
- Ingegneria del software

Categorie

Modello *categoriale*.

Una categoria \mathcal{C} è composta da:

- *oggetti*
- *morfismi* (o *frecce*)

$$id_A \hookrightarrow A \xrightarrow{f} B \hookleftarrow id_B$$

La categoria i cui oggetti sono gli insiemi e i cui morfismi sono le funzioni tra essi è denominata **Set**.

$f : A \rightarrow B$ può essere:

- un *monomorfismo* : $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$;
- un *epimorfismo* : $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$;
- un *isomorfismo* : esiste k tale che $f \circ k = id_B$ e $k \circ f = id_A$.

Funtori, Trasformazioni Naturali

Un *funtore* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) & & & & \\ & & \curvearrowright & & & & \\ F(id_A) = id_{F(A)} & \hookrightarrow & F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) & \xrightarrow{F(g)} & F(C) \xleftarrow{\hookrightarrow} F(id_C) = id_{F(C)} \end{array}$$

Una *trasformazione naturale* $\eta : F \rightarrow G$:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\eta_B} & G(B) \end{array}$$

Definizione dei Grafi

Categoria di funtori $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$:

- Oggetti: funtori (con dominio \mathcal{C} e codominio \mathcal{D})
- Morfismi: trasformazioni naturali

Le categorie di funtori il cui codominio è **Set** sono dette *categorie di prefasci*.

Un grafo G è costituito da:

- Un insieme di nodi V
- Un insieme di archi E
- $s : E \rightarrow V$ funzione sorgente
- $t : E \rightarrow V$ funzione destinazione

In altre parole, un grafo è un elemento di

$$[E \rightrightarrows V, \mathbf{Set}]$$

.

Grafì ed Equivalenze

Un
grafo con equivalenza (G, \sim) è costituito da:

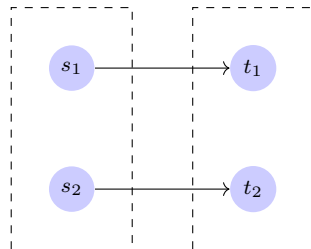
- Un grafo G
- Una relazione di equivalenza \sim definita sui vertici

Ossia, un elemento di $[E \rightrightarrows V \rightarrow Q, \mathbf{Set}]$, tale che la freccia $q : V \rightarrow Q$ sia surgettiva (epi).

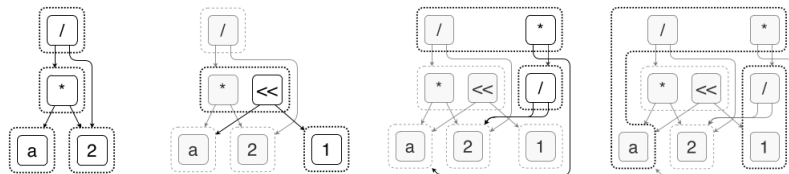
Un E-Grafo

(G, \sim) è un grafo con equivalenza tale che

$$\frac{s_G(e) \sim s_G(e')}{t_G(e) \sim t_G(e')}$$



EGGs

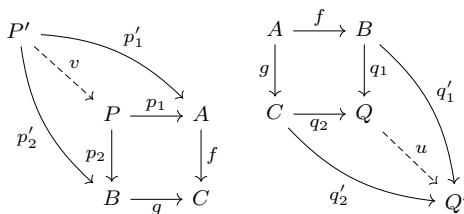


La categoria degli E-Grafi è detta **EGG**, dal nome della libreria che li implementa in Rust.

La definizione attuale è troppo operativa per ottenere dei risultati teorici.

Tuttavia gli utilizzi sono molteplici, dalla *equality saturation* all'ottimizzazione in fase di compilazione.

Pullback, Pushout, Equalizzatori



(a) Pullback

(b) Pushout

In **Set**:

- Pullback di f e g : $P = \{(x, y) \in A \times B \mid f(x) = g(y)\}$
- Pushout di f e g : $Q = (A \amalg B) / \sim$

Approccio DPO

$$L \xleftarrow{l} K \xrightarrow{r} L$$
$$\begin{array}{ccccc} L & \xleftarrow{l} & K & \xrightarrow{r} & R \\ m_L \downarrow & & \downarrow m_K & & \downarrow m_R \\ G & \xleftarrow{l_*} & D & \xrightarrow{r_*} & H \end{array}$$

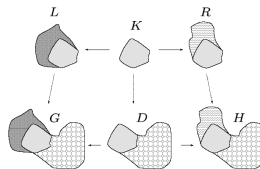
(a) Regola

(b) Passo di derivazione

l e r sono due morfismi, possibilmente mono, di \mathcal{C} , mentre i due quadrati sono pushout.

Risultati:

- Confluenza
- Terminazione
- Parallelismo e concorrenza

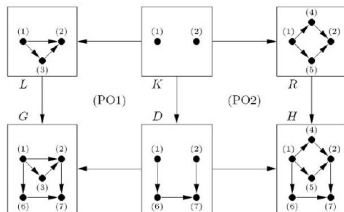


Adesività

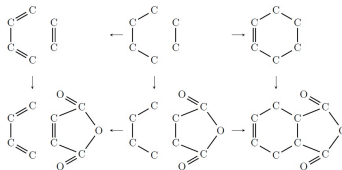
Una categoria \mathcal{C} è adesiva se:

- ha tutti i pushout di monomorfismi
- ha tutti i pullback
- i pushout di monomorfismi sono *Van Kampen*
 - ossia che tali pushout sono stabili sotto pullback e i pullback sono stabili sotto pushout combinati con pullback

L'adesività permette di estendere l'approccio DPO a categorie più complesse come quelle dei grafi.



(a) DPO su grafi



(b) DPO per reazione di Diels-Alder

Conclusioni

- Formalizzazione degli E-Grafì mediante categorie
- Adesività rispetto ad alcuni morfismi

Lavori futuri:

- Sostituire la categoria **Set** con una qualsiasi categoria adesiva
- Generalizzare il risultato ad alti tipi di grafì, e.g., ipergrafì