

On Adhesivity of EGGs

Roberto Biondo

Dipartimento di Informatica
Università di Pisa

Friday 29th November, 2024

1 Overview

2 Background

Cenni

Grafi

Categorie

Modello *categoriale*.

Una categoria \mathcal{C} è composta da:

- *oggetti*
- *morfismi* (o *freccie*)

$$id_A \hookrightarrow A \xrightarrow{f} B \hookleftarrow id_B$$

La categoria i cui oggetti sono gli insiemi e i cui morfismi sono le funzioni tra essi è denominata **Set**.

$f : A \rightarrow B$ può essere:

- un *monomorfismo* : $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$;
- un *epimorfismo* : $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$;
- un *isomorfismo* : esiste k tale che $f \circ k = id_B$ e $k \circ f = id_A$.

Funtori, Trasformazioni Naturali

Un *funtore* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$:

$$\begin{array}{c}
 F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \\
 \curvearrowright \\
 F(id_A) = id_{F(A)} \hookrightarrow F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \hookleftarrow F(id_C) = id_{F(C)}
 \end{array}$$

Una *trasformazione naturale* $\eta : F \rightarrow G$:

$$\begin{array}{ccc}
 F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & G(A) \\
 F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\
 F(B) & \xrightarrow{\eta_B} & G(B)
 \end{array}$$

Categoria di funtori $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$:

- Oggetti: funtori (con dominio \mathcal{C} e codominio \mathcal{D})
- Morfismi: trasformazioni naturali

Le categorie di funtori il cui codominio è **Set** sono dette *categorie di prefasci*.

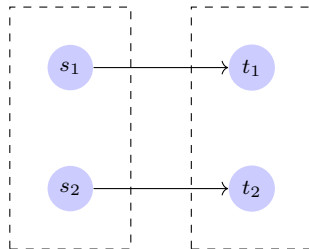
Categorie di Grafi

Un grafo G è costituito da:

- Un insieme di nodi V
- Un insieme di archi E
- $s : E \rightarrow V$ funzione sorgente
- $t : E \rightarrow V$ funzione destinazione

In altre parole, un grafo è un elemento di

$$[E \overset{s}{\rightrightarrows} V, \mathbf{Set}]$$



Un *grafo con equivalenza* (G, \sim) è costituito da:

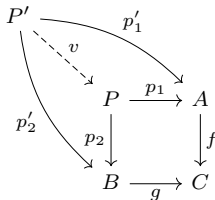
- Un grafo G
- Una relazione di quivalenza \sim definita sui vertici

Ossia, un elemento di $[E \rightrightarrows V \rightarrow Q, \mathbf{Set}]$, tale che la freccia $q : V \rightarrow Q$ sia surgettiva (epi).

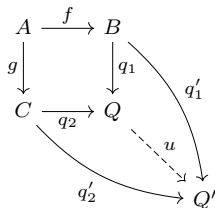
Un E-Grafo (G, \sim) è un grafo con equivalenza tale che

$$\frac{s_G(e) \sim s_G(e')}{t_G(e) \sim t_G(e')}$$

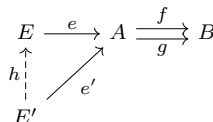
Pullback, Pushout, Equalizzatori



(a) Pullback



(b) Pushout



(c) Equalizzatore

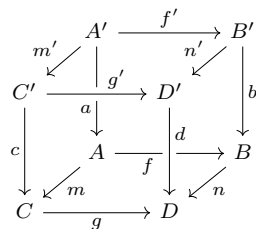
In **Set**:

- Pullback di f e g : $P = \{(x, y) \in A \times B \mid f(x) = g(y)\}$
- Pushout di f e g : $Q = (A \amalg B) / \sim$
- Equalizzatore di f e g : $E = \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$

Adesività

Una categoria \mathcal{C} è adesiva se:

- ha tutti i pushout di monomorfismi
- ha tutti i pullback
- i pushout di monomorfismi sono *Van Kampen*



Approccio DPO su Categorie Adesive

Sia \mathcal{C} una categoria adesiva.

$$\begin{array}{ccc}
 L & \xleftarrow{l} & K & \xrightarrow{r} & R \\
 m_L \downarrow & & \downarrow m_K & & \downarrow m_R \\
 G & \xleftarrow{l_*} & D & \xrightarrow{r_*} & H
 \end{array}$$

(a) Regola

(b) Passo di derivazione

l e r sono due morfismi, possibilmente mono, di \mathcal{C} , mentre i due quadrati sono pushout.

