Master 1re année
parcours Mathématiques

2024–2025
Analyse

DM 2, Raphaël Casanova

Exercice 11 (Théorème de Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert réel. On considère une forme bilinéaire a sur H et on suppose qu'il existe deux constantes $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles que

$$|a(x,y)| \leqslant C\,\|x\|\,\|y\| \qquad \text{et} \qquad a(x,x) \geqslant \alpha\,\|x\|^2 \quad (x, y \in H).$$

a) Montrer l'existence d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $a(x,y) = \langle Tx|y\rangle$ pour $x, y \in H$.

b) Montrer que $T(H)$ est dense dans H.

c) Montrer que $\|Tx\| \geqslant \alpha\,\|x\|$ pour tout $x \in H$. En déduire que T est injectif à image fermée.

d) En déduire que T est un isomorphisme de H sur lui-même.

Soit L une forme linéaire continue sur H.

e) Montrer qu'il existe un unique $u \in H$ tel que $L(y) = a(u,y)$ pour tout $y \in H$.

f) On suppose que a est symétrique. Soit $\Phi(x) = \frac{1}{2}a(x,x) - L(x)$. Montrer que le point u vérifie $\Phi(u) = \min_{x\in H}\Phi(x)$.

---

a) A $x \in H$ fixé, $y \to a(x,y)$ est une forme linéaire sur H (cf. a est bilinéaire donc à x fixé, $y \to a(x,y)$ est linéaire en y) . Elle est continue car : $|a(x,y)| \leq C\,\|x\|\,\|y\|$ (par propriété de a) donc $\sup_{\|y\|=1}|a(x,y)| \leq C\,\|x\|$.

Donc d'après le théorème de représentation de Riesz, on a qu'il existe un unique $Tx \in H$ tel que : $a(x,y) = \langle Tx|y\rangle$ $\forall y \in H$.

On remarque que : $\|Tx\| = \sup_{\|y\|=1}|a(x,y)| \leq C\,\|x\|$.

On pose : $T : x \to Tx$.

Montrons que T est linéaire. Soit $(x_1, x_2) \in H^2$, soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. On a que $\forall y \in H$,

$$\underbrace{a(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y)}_{=\lambda_1 a(x_1,y)+\lambda_2 a(x_2,y) \text{ par bilinéarité de } a} = \langle T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2|y\rangle$$

Or :

$$\lambda_1 a(x_1,y) + \lambda_2 a(x_2,y) = \lambda_1\langle Tx_1|y\rangle + \lambda_2\langle Tx_2|y\rangle$$

Donc :

$$\langle T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2|y\rangle = \lambda_1\langle Tx_1|y\rangle + \lambda_2\langle Tx_2|y\rangle$$

Ainsi :

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2)$$

Et T est bien linéaire.
Montrons désormais que T est continue. Soit $x \in H$,

$$\|Tx\| \leq C\|x\| \quad \text{d'après ce qui précède}$$

Donc T est continue et on a que : $|||T||| \leq C$. Ainsi $T \in \mathcal{L}(H)$ et on a bien que $\forall x, y \in H, a(x,y) = \langle Tx|y\rangle$

b)

$$\begin{aligned} y \in T(H)^{\perp} &\Leftrightarrow \langle y|Tx\rangle = 0 \ \forall x \in H \\ &\Leftrightarrow a(x,y) = 0 \ \forall x \in H \text{ d'après 1)} \\ &\Rightarrow a(y,y) = 0 \end{aligned}$$

Or : $a(y,y) \geq \alpha\|y\|^2$ d'après les propriétés de a. Donc $\|y\| = 0$ et $y = 0$ par définition d'une norme donc $T(H)^{\perp} = \{0\}$. Ainsi $T(H)$ est dense dans H car $T(H)$ est un sous-espace vectoriel.

c) On a que pour $x \in H$,

$$\begin{aligned} \|Tx\|\|x\| &\geq |\langle Tx|x\rangle| \text{ par inégalité de Cauchy-Scwharz} \\ &\geq |a(x,x)| \text{ d'après la question 1)} \\ &\geq \alpha\|x\|^2 \text{ par propriété de } a \end{aligned}$$

Si $x = 0$, on a bien que $\|Tx\| = 0 \geq \alpha\|x\| = 0$
Si $x \neq 0$, d'après ce qui précède : $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$
Donc pour tout $x \in H$, $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$ et donc par corollaire du théorème d'isomorphisme de Banach, $T \in \mathcal{L}(H)$ est injectif à image fermée.

d) On a que :

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Im}(T)} &= \mathrm{Im}(T) \text{ car } T \text{ est à image fermée} \\ &= H \text{ car Im (T) est dense dans } H \end{aligned}$$

Or T est surjective sur $\mathrm{Im}(T) = H$.
Et T est injective d'après 3).
Donc T est bijective sur H et est une application linéaire continue (d'après 1)).
D'après le théorème d'isomorphisme de Banach, on alors que T est un isomorphisme de H sur lui-même.

e) D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $y_0 \in H$ tel que : $L(y) = \langle y_0 | y \rangle \ \forall y \in H$
Comme T est un isomorphisme, il existe un unique $u = T^{-1}(y_0) \in H$. Et on a que :

$$\begin{aligned} a(u,y) &= \langle T(T^{-1}(y_0)) | y \rangle \ \forall y \in H \\ &= \langle y_0 | y \rangle \ \forall y \in H \\ &= L(y) \ \forall y \in H \end{aligned}$$

D'où l'existence d'un unique $u \in H$ tel que $a(u,y) = L(y)$

f) Soit $w \in H$,

$$\begin{aligned} \phi(u+w) &= \frac{1}{2}a(u+w,u+w) - L(u+w) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) + a(u,w) + \frac{1}{2}a(w,w) - L(u) - \underbrace{L(w)}_{=a(u,w)} \quad \text{cf. } a \text{ est bilinéaire et symétrique d'après 5)} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}a(u,u) - L(u)}_{=\phi(u)} + \underbrace{\frac{1}{2}a(w,w)}_{\geq 0} \\ &\geq \phi(u) \end{aligned}$$

On a donc que $\forall w \in H, \phi(u+w) \geq \phi(u)$, ainsi on a donc que : $\phi(u) = \min_{x \in H} \phi(x)$