Master 1 Mathématiques - Module "Probabilités"

TD5 - Modes de convergence

Exercice 1. On se place sur l'espace de probabilités $\Omega = [0,1]$ muni de la tribu des Boréliens et de la mesure de Lebesgue.

(a) On fixe $a > 0$ et on pose $X_n(\omega) = n^a \mathbf{1}_{[0,1/n)}(\omega)$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que la suite $\{X_n,\, n \geq 1\}$ appartient à tous les espaces $\mathcal{L}_p$, $p \geq 1$, converge presque sûrement vers 0 mais pas dans tous les espaces $\mathcal{L}_p$.

(b) Pour tout $i \geq 1$ et $j = 1, \ldots, 2^{i-1}$, on pose

$$Y_{i,j} \;=\; i\,\mathbf{1}_{\{[(j-1)2^{1-i},j2^{1-i})\}}(\omega).$$

On ordonne ensuite la suite à doubles indices $\{Y_{i,j}\}$ suivant l'ordre lexicographique en posant $X_1 = Y_{1,1}, X_2 = Y_{2,1}, X_3 = Y_{2,2}, X_4 = Y_{3,1}, X_5 = Y_{3,2}, \ldots$ etc. Montrer que

$$\liminf_{n\to\infty} X_n \;=\; 0 \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to\infty} X_n \;=\; \infty \qquad \text{p.s.}$$

et en déduire que X_n ne tend pas vers zéro p.s. alors que $X_n \to 0$ dans $\mathcal{L}_p$ pour tout $p \geq 1$.

Exercice 2. Soit $\{X_n,\, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On dit que cette suite est *uniformément intégrable* (UI) si $X_n \in \mathcal{L}_1$ pour tout $n \geq 1$ et si

$$\lim_{t\to\infty}\left(\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[|X_n|\,\mathbf{1}_{\{|X_n|\geq t\}}\right]\right) \;=\; 0.$$

(a) Montrer que la définition équivaut à $\lim_{t\to\infty}\sup_{n\geq 0}\mathbb{E}\left[|X_n|\,\mathbf{1}_{\{|X_n|\geq t\}}\right] \;=\; 0.$

(b) Montrer que si $|X_n| \leq |Y_n|$ et si $\{Y_n,\, n \geq 1\}$ est UI, alors $\{X_n,\, n \geq 1\}$ est UI.

(c) Montrer que si $\{X_n,\, n \geq 1\}, \{Y_n,\, n \geq 1\}$ sont UI, alors $\{X_n + Y_n,\, n \geq 1\}$ est UI.

(d) Montrer que si $\sup_{n\geq 1} ||X_n||_p < \infty$ pour un $p > 1$, alors $\{X_n,\, n \geq 1\}$ est UI.

(e) Montrer que $X_n \to X$ dans $\mathcal{L}_1$ si et seulement si $X_n \to X$ en probabilité et $\{X_n,\, n \geq 1\}$ est UI.

(f) On suppose que $X_n, X \in \mathcal{L}_p$ pour un $p \geq 1$ et que $X_n \to X$ en probabilité. Montrer que $\{X_n,\, n \geq 1\}$ est UI si et seulement si $\mathbb{E}[|X_n|^p] \to \mathbb{E}[|X|^p]$.

Exercice 3. (a) Soit $\{X_n,\, n \geq 1\}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires à variance finie. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geq 1$.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\alpha \in [0, 1/2)$ on a

$$\mathbb{P}\left[n^\alpha \left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right| \geq \varepsilon\right] \;\to\; 0$$

quand $n \to \infty$. En quoi ceci améliore-t-il la loi faible des grands nombres ?

(b) On suppose qu'il existe $t > 0$ tel que $\mathbb{E}[e^{t|X_1|}] < \infty$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $q \in (0,1)$ tel que

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\right| \geq \varepsilon\right] \;\leq\; 2q^n$$

pour tout $n \geq 1$. En déduire la loi forte des grands nombres. En quoi l'hypothèse de départ est-elle contraignante ?