TD1 - Rappels d'intégration et théorie de la mesure

Exercice 1. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles mesurables de mesure finie.

(a) Montrer que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \cdots + (-1)^{n-1} \mu(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

(b) Montrer que

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2}).$$

Sauriez-vous généraliser cette inégalité ?

(c) On range n chapeaux au hasard dans n boîtes. A chaque boîte correspond un et un seul chapeau. Calculer la probabilité qu'aucun chapeau ne soit dans la bonne boîte. Quelle est la limite de cette probabilité quand $n \to \infty$?

Exercice 2. Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on considère une mesure μ diffuse i.e. $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$.

(a) Montrer que la fonction

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u) \mu(du)$$

est continue sur $\mathbb{R}$. Que se passe-t-il si μ n'est pas diffuse ?

(b) On pose $\psi(x) = x\varphi(x)$ et on suppose $\psi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$. Montrer que

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}} (x-u)_+ \varphi(u) \, \mu(du)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 3. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), dx)$ où dx désigne la mesure de Lebesgue. Soit h une fonction continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que la fonction

$$h * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x-u) \varphi(u) \, du$$

est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

(b) On suppose maintenant h également dérivable à dérivée bornée. Montrer que $h * \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.

Exercice 4. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable. On note

$$||f||_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

pour tout $p \in [1, \infty)$ et

$$||f||_\infty = \inf \{ C \geq 0, \ |f| \leq C \quad \mu \text{ p.p.} \},$$

en autorisant les valeurs infinies.

(a) On suppose μ finie. Montrer que $||f||_p \to ||f||_\infty$ quand $p \to \infty$ dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Que se passe-t-il quand μ est infinie ?

(b) On fixe $p \in [1, \infty]$ et on considère $f, g, \in \mathcal{L}_p(E, \mathcal{A}, \mu)$ à valeurs réelles. Montrer que $f + g \in \mathcal{L}_p(E, \mathcal{A}, \mu)$ et que

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p.$$

Exercice 5. (a) Soit $p_1, \ldots, p_n > 0$ tels que $p_1 + \cdots + p_n = 1$. Montrer que

$$\prod_{i=1}^n x_i^{p_i} \leq \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

pour tous $x_1, \ldots, x_n > 0$.

(b) Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f_1, \ldots, f_n : E \to \mathbb{R}$ mesurables positives. Soit Soit $\rho_1, \ldots, \rho_n > 0$ tels que $1/\rho_1 + \cdots + 1/\rho_n = 1$. Montrer à l'aide de la question précédente que

$$||f_1 \ldots f_n||_1 \leq \prod_{i=1}^n ||f_i||_{\rho_i}.$$