TD3 - Variables aléatoires, fonctions caractéristiques

Exercice 1. On tire uniformément au hasard une corde sur le cercle unité et on cherche à calculer la probabilité p que la longueur L de cette corde soit plus grande que celle du côté du triangle équilatéral inscrit, qui vaut $\sqrt{3}$.

(a) On tire uniformément un point dans le disque unité dont on fait le milieu de la corde. Donner l'espace de probabilité associé et l'expression de la variable aléatoire L sur cet espace. Calculer l'intégrale double correspondant à p et en déduire $p = 1/4$.

(b) Mêmes questions en tirant uniformément et indépendamment deux points sur le cercle unité et en traçant la corde reliant ces deux points. Montrer qu'ici on a $p = 1/3$.

(c) Mêmes questions en choisissant uniformément un point sur le cercle unité puis indépendamment un point sur le rayon correspondant dont on fait le milieu de la corde. Montrer qu'ici on a $p = 1/2$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire réelle et $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}tX}]$ sa fonction caractéristique.

(a) On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que φ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ et que pour tout entier $1 \leq k \leq n$, on a

$$\varphi_X^{(k)}(t) \;=\; \mathrm{i}^k \mathbb{E}[X^k e^{\mathrm{i}tX}], \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(b) On suppose que φ_X est 2 fois dérivable en 0. Montrer en considérant la fonction

$$\frac{\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) - 2}{t^2}$$

que X admet un moment d'ordre 2.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que φ_X est k fois dérivable en 0. Montrer que X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor k/2 \rfloor$.

(d) Soit X une variable aléatoire à valeurs entières de loi $a_k = \mathbb{P}[X = k]$, $k \in \mathbb{Z}$, donnée par $p_{-1} = p_0 = p_1 = 0$ et

$$p_{-k} \;=\; p_k \;=\; \frac{c}{k^2 \log k}$$

pour tout $k \geq 2$, où c est la constante de normalisation. Montrer que φ_X est dérivable en 0 et que X n'admet pas de moment d'ordre 1.

Exercice 3. (a) Montrer que

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\, e^{-(\log x)^2/2}\, dx \;=\; 1.$$

Exprimer la variable aléatoire X sous-jacente à l'aide d'une Gaussienne.

(b) Montrer que
$$\int_0^\infty \sin(2\pi \log x)\, x^{n-1}\, e^{-(\log x)^2/2}\, dx \;=\; 0$$
pour tout $n \geq 0$.

(c) En déduire qu'il existe une infinité de variables aléatoires positives Y ayant des densités toutes différentes, telles que $\mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n]$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire réelle et $\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{\mathrm{i}tX}]$ sa fonction caractéristique.

(a) On suppose que X admet un moment d'ordre $n \geq 1$. Montrer que
$$\varphi_X(t) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!}\,\mathbb{E}[X^k] \;+\; \frac{(\mathrm{i}t)^n}{(n-1)!}\,\mathbb{E}\left[X^n \int_0^1 (1-u)^{n-1}\, e^{\mathrm{i}tuX}\, du\right]$$
pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire que
$$\varphi_X(t) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!}\,\mathbb{E}[X^k] \;+\; t^n\, \varepsilon_n(t)$$
où $\lim_{t\to 0} \varepsilon_n(t) = 0$.

(b) On suppose que X admet des moments de tous ordres et que
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{||X||_n}{n} \;=\; \frac{1}{R} \;<\; \infty.$$
En déduire que
$$\varphi_X(t) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!}\,\mathbb{E}[X^k]$$
pour tout $t \in (-R/\mathrm{e}, R/\mathrm{e})$.