On a donc nécessairement

$$\hat{f}(y) = \frac{\hat{g}(y)}{(2i\pi y)^{12} + (2i\pi y)^8 + 1}$$

C'est le produit de la fonction $\hat{g}$ qui est C^∞ et d'une fonction rationelle sans pôle réel, donc C^∞, donc $\hat{f}$ est aussi de classe C^∞, on va aussi montrer que c'est une fonction à décroissance rapide, on va pour cela calculer partiellement ses dérivées, on va plus précisément montrer, par récurrence que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists \{P_i,\ i \in [[1, n]]\} \in \mathbf{R}[X] \mid \forall y \in \mathbf{R},\ \hat{f}^{(n)}(y) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \hat{g}^{(k)}(y) P_k(y)}{\left((2i\pi y)^{12} + (2i\pi y)^8 + 1\right)^{2n}}$$

Pour simplifier les notation, on va noter le dénominateur u, ainsi pour le cas $n = 1$, c'est la formule de la dérivée d'un quotient et on a

$$\forall y \in \mathbf{R},\ \hat{f}'(y) = \frac{\hat{g}'(y)v(y) - \hat{g}(y)v'(y)}{v(y)^2}$$

(il est claire que v' est un polynôme) et pour le cas $n \to n+1$, on va dériver

$$\begin{aligned}
\forall y \in \mathbf{R},\ \hat{f}^{(n+1)}(y) &= \left(\frac{\sum_{k=0}^{n} \hat{g}^{(k)}(y) P_k(y)}{v(y)^{2n}}\right)' \\
&= \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} \hat{g}^{(k)}(y) P_k(y)\right)' v(y) - \sum_{k=1}^{n} \hat{g}^{(k)}(y) P_k(y) v'(y)}{v(y)^{2(n+1)}} \\
&= \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} \hat{g}^{(k+1)}(y) P_k(y) + g^{(k)}(y) P_k'(y)\right) v(y) - \sum_{k=1}^{n} \hat{g}^{(k)}(y) P_k(y) v'(y)}{v(y)^{2(n+1)}} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{n} \hat{g}^{(k+1)}(y) P_k(y) v(y) - \hat{g}^{(k)}(y) \left(P_k(y) v'(y) - P_k'(y) v(y)\right)}{v(y)^{2(n+1)}}
\end{aligned}$$