Master 1re année
parcours Mathématiques

2024–2025
Analyse

DM 3, Raphaël Casanova

Exercice 11 *(Espace de Schwartz)*

On rappelle que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ désigne l'espace de Schwartz, constitué des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infiniment dérivables et telles que, pour tout $k, m \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^m f^{(k)}(x)\right| < +\infty,$$

où $f^{(k)}$ désigne la k-ième dérivée de f.

a) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et p est une fonction polynomiale.

(i) Montrer que $pf \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(ii) Est-ce que $p * f$ est bien définie ? Si oui, est-ce que $p * f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$?

b) Soient $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On suppose que $f * g = 0$.

(i) Peut-on en déduire que $f = 0$ ou $g = 0$?

(ii) Qu'en est-il si $f = g$?

c) Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que

$$f^{(12)} + f^{(8)} + f = g.$$

---

a)(i) Soit $f \in \mathcal{S}$, montrons que pour $k, m, \ell \in \mathbb{N},\ x \mapsto x^m \left(x^k f(x)^{(\ell)}\right)$ est bornée, on calcule

$$\left|x^m \left(x^k f(x)\right)^{(\ell)}\right| = \left|x^m \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i} f^{(\ell-i)}(x)\right| = \left|\sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i+m} f^{(\ell-i)}(x)\right|$$

et par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^{k-i+m} f^{(\ell-i)}(x) < M$$

on a donc

$$\left|x^m \left(x^k f(x)\right)^{(\ell)}\right| < \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} \frac{k!}{(k-i)!} M < \infty$$

et puisque l'espace de Schwartz est un espace vectoriel, par linéarité on constante que pour tout $p \in \mathbb{R}[X]$, $pf \in \mathcal{S}$.

a)(ii) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, on pose

$$\tilde{p} : t \longmapsto p(x-t)$$

d'après la formule du binôme de Newton, c'est aussi un polynôme en t (car x est fixe) donc d'après la question précédente, $\tilde{p}f \in \mathcal{S}$ donc, par exemple,

$$\exists c > 0 \ : \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \left|\left(1+t^2\right)\tilde{p}(t)f(t)\right| < c$$

autrement dit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ |p(x-t)f(t)| < \frac{c}{1+t^2} \in L^1$$

donc

$$p * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x-t)f(t)\mathrm{d}t < \infty$$

et $p * f$ est bien définie.

Par contre, $p * f \notin \mathcal{S}$ car si on considère $p = 1$ et $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2/2}$, alors on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ p * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$$

donc en prenant $k = 0$ et $m = 1$ dans la définition de l'espace de Schwartz, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^m \left(p * f(x)\right)^{(k)} \right| = +\infty$$

donc, puisque $f \in \mathcal{S}$, le contre-exemple est valide et $p * f \notin \mathcal{S}$.

b)(i) Soit

$$f : x \mapsto \mathcal{F}^{-1}\left(\exp\left(- \frac{1}{x(1-x)} \right) \chi_{]0,1[}(x) \right)$$

Cet objet est bien défini puisque la transformée de Fourier est bijective de $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ et que la fonction considérée, $x \mapsto \exp\left(- \frac{1}{x(1-x)} \right)\chi_{]0,1[}(x) \Big)$ est C^∞ à support compact donc est dans $\mathcal{S}$. On pose de même

$$g : x \mapsto \mathcal{F}^{-1}\left(\exp\left(- \frac{1}{x(1-x)} \right) \chi_{]-1,1[}(x) \right)$$

qui est dans $\mathcal{S}$ au même titre que f. D'après le cours, on a alors

$$f * g = \hat{f}.\hat{g}$$

donc on a, (normalement on aurait un "presque-partout" mais ici f et g sont continues donc c'est un "partout")

$$f * g(x) = \left(\exp\left(- \frac{1}{x(1-x)} \right) \chi_{]0,1[}(x) \right) \left(\exp\left(- \frac{1}{x(1-x)} \right) \chi_{]-1,0[}(x) \right) = 0$$

donc $f * g$ est nulle presque-partout et on a trouvé $f, g \in \mathcal{S}$ telles que $f * g = 0$ sans que $f = 0$ ou $g = 0$, donc non on ne peut pas déduire que "$f * g = 0$" que $f = 0$ ou $g = 0$.

b)(ii) Si $f = g$, alors on aurait

$$f * f = \hat{f}^2 = 0$$

donc, puisque on est dans $\mathcal{S}$ on peut appliquer la formule d'inversion de Fourier, qui est ici aussi valide "partout" au lieu de "presque-partout" par contiuité, et ainsi $f = 0$.

c) On va procéder par analyse-synthèse :

⋆ Analyse : soit f une solution, alors, on applique la transformée de Fourier et on obtient

$$\forall y \in \mathbb{R},\ (2i\pi y)^{12}\,\hat{f}(y) + (2i\pi y)^{8}\,\hat{f}(y) + \hat{f}(y) = \hat{g}(y)$$

donc nécessairement

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \hat{f}(y) = \frac{\hat{g}(y)}{(2i\pi y)^{12} + (2i\pi y)^{8} + 1}.$$

⋆ Montrons que l'expression de $\hat{f}$ trouvée convient : C'est le produit de la fonction $\hat{g}$ qui est C^∞ et d'une fonction rationnelle sans pôle réel, donc C^∞, donc $\hat{f}$ est aussi de classe C^∞, on va aussi montrer que c'est une fonction à décroissance rapide, on va pour cela calculer partiellement ses dérivées, on va plus précisément montrer, par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\{P_i,\ i \in [\![1,n]\!]\} \in \mathbb{R}[X] \mid \forall y \in \mathbb{R},\ \hat{f}^{(n)}(y) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \hat{g}^{(k)}(y)P_k(y)}{\left((2i\pi y)^{12} + (2i\pi y)^{8} + 1\right)^{2n}}$$

Pour simplifier les notation, on va noter le dénominateur u, ainsi pour le cas $n = 1$, c'est la formule de la dérivée d'un quotient et on a

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \hat{f}'(y) = \frac{\hat{g}'(y)v(y) - \hat{g}(y)v'(y)}{v(y)^2}$$

(il est claire que v' est un polynôme) et pour le cas $n \to n+1$, on va dériver

$$\begin{aligned}
\hat{f}^{(n+1)}(y) &= \left(\frac{\sum_{k=0}^{n} \hat{g}^{(k)}(y)P_k(y)}{v(y)^{2n}}\right)' \\
&= \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} \hat{g}^{(k)}(y)P_k(y)\right)' v(y) - \sum_{k=1}^{n} \hat{g}^{(k)}(y)P_k(y)v'(y)}{v(y)^{2(n+1)}} \\
&= \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} \hat{g}^{(k+1)}(y)P_k(y) + \hat{g}^{(k)}(y)P_k'(y)\right) v(y) - \sum_{k=1}^{n} \hat{g}^{(k)}(y)P_k(y)v'(y)}{v(y)^{2(n+1)}} \\
\hat{f}^{(n+1)}(y) &= \frac{\sum_{k=0}^{n} \hat{g}^{(k+1)}(y)P_k(y)v(y) - \hat{g}^{(k)}(y)\left(P_k(y)v'(y) - P_k'(y)v(y)\right)}{v(y)^{2(n+1)}}
\end{aligned}$$

et je n'ai pas la place (en largeur) pour développer complètement cette expression, on va donc juste "constater" que les $P_k, k \in [\![0, n+1]\!]$ existent. Et puisque $\hat{g}$ est dans $\mathcal{S}$, on peut majorer tous les $\hat{g}^{(k)}P_k$ par un même $c > 0$, donc finalement

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(y) < \frac{nc}{(2i\pi y)^{12} + (2i\pi y)^{8} + 1} \longrightarrow 0$$

ce qui montre que l'expression de f trouvée est bien dans $\mathcal{S}$, on peut alors appliquer la formule d'inversion et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{g}(y)}{(2i\pi y)^{12} + (2i\pi y)^{8} + 1}\right)(x).$$