Master 1 Mathématiques - Module "Probabilités"

Devoir à la maison à rendre pour le 7 novembre

Exercice. *Autour du Théorème limite central.* Soit $\{X_n,\, n \geq 1\}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles centrées et à variance finie. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(a) En utilisant le théorème limite central, montrer que $\mathbb{P}[S_n \geq 0] \to 1/2$ quand $n \to \infty$.

(b) Montrer que $\mathbb{P}[n^{-\alpha}|S_n| \geq \varepsilon] \to 0$ quand $n \to \infty$ pour tout $\alpha > 1/2$ et tout $\varepsilon > 0$.

(c) En utilisant judicieusement les inégalités de Jensen et de Markov, en déduire

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\mathbb{E}\left[e^{-S_n}\mathbf{1}_{\{S_n \geq 0\}}\right]\right)^{1/n^{3/4}} \; > \; 0.$$

(d) Montrer finalement que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{E}\left[e^{-S_n}\mathbf{1}_{\{S_n \geq 0\}}\right]\right)^{1/n} \; = \; 1.$$

Problème 1. *Inégalité de Gauss.* Soit X une v.a. positive de carré intégrable ayant une densité f dérivable et décroissante sur $(0,\infty)$. On note μ la mesure positive sur $(0,\infty)$ telle que

$$\mu(a,b) \; = \; f(a) \; - \; f(b)$$

pour tout $0 < a < b < \infty$.

(a) Montrer que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et donner sa densité.

(b) Montrer que $xf(x) \to 0$ quand $x \to \infty$. En déduire à l'aide d'une intégration par parties que

$$\mathbb{P}[X \geq x] \; = \; \int_x^\infty (t-x)\,\mu(dt) \; = \; \int_0^\infty (t-x)_+\,\mu(dt)$$

avec la notation standard $u_+ = \max(u,0)$.

(c) Montrer que $x^3 f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$ et quand $x \to 0$. En déduire

$$\mathbb{E}[X^2] \; = \; \frac{1}{3}\int_0^\infty t^3\,\mu(dt)$$

à l'aide d'une autre intégration par parties.

(d) Montrer que $27x^2(t-x)_+ \leq 4t^3$ pour tout $t, x > 0$. En déduire que

$$x^2\,\mathbb{P}[X \geq x] \; \leq \; \frac{4}{9}\,\mathbb{E}[X^2]$$

pour tout $x > 0$ (Inégalité de Gauss, 1828). En quoi ceci améliore-t-il l'inégalité de Markov ?

(e) Discuter le cas d'égalité dans l'inégalité obtenue en (d). Montrer en particulier qu'elle ne peut être atteinte que si f a un point de discontinuité.

Problème 2. *Loi des grands nombres pour v.a. décorrélées.* Soit $\{X_n,\, n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires positives de même loi à espérance finie. On suppose que les X_n sont indépendantes deux à deux mais pas nécessairement mutuellement indépendantes. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour tout $n \geq 1$ et le but du problème est de montrer qu'on a toujours

$$\frac{S_n}{n} \;\to\; \mathbb{E}[X_1] \qquad \text{p.s.}$$

quand $n \to \infty$ (Etemadi, 1981).

(a) On pose $Y_n = X_n \mathbf{1}_{\{X_n \leq n\}}$ et $T_n = Y_1 + \cdots + Y_n$. Montrer que

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}[X_n \neq Y_n] \;<\; \infty.$$

En déduire que la suite $\{S_n - T_n, n \geq 1\}$ converge p.s.

(b) Montrer que

$$\frac{\mathbb{E}[T_n]}{n} \;\to\; \mathbb{E}[X_1], \qquad n \to \infty.$$

(c) Montrer que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2} \;<\; \infty.$$

(d) Soit $\alpha > 1$ et $k_n = [\alpha^n]$ où $[.]$ désigne la partie entière. Montrer qu'il existe $C < \infty$ tel que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{k_n^2} \mathbf{1}_{\{k_n \geq j\}} \;\leq\; \frac{C}{j^2}$$

pour tout $j \geq 1$. En déduire que

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left[\left| \frac{T_{k_n} - \mathbb{E}[T_{k_n}]}{k_n} \right| \geq \varepsilon \right] \;\leq\; \frac{C}{\varepsilon^2} \sum_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}[Y_n^2]}{n^2}.$$

(e) En déduire à l'aide du (a) que

$$\frac{S_{k_n}}{k_n} \;\to\; \mathbb{E}[X_1] \qquad \text{p.s.}$$

quand $n \to \infty$.

(f) Montrer finalement que pour tout $\alpha > 1$ on a

$$\mathbb{P}\left[\alpha^{-1}\mathbb{E}[X_1] \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} \leq \limsup_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} \leq \alpha \mathbb{E}[X_1] \right] \;=\; 1.$$

Conclure.