TD2 - Rappels d'intégration et théorie de la mesure II

Exercice 1. Soit $f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), dx)$ où dx désigne la mesure de Lebesgue. Montrer que la fonction

$$f * g(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x-u)g(u)\,du$$

est bien définie presque partout et appartient à $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), dx)$ avec

$$||f * g||_1 \;\leq\; ||f||_1 ||g||_1.$$

Exercice 2. Soit $p \geq 1$ et $q \in]1, \infty]$ tel que $1/p + 1/q = 1$. Soit $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), dx)$ et $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), dx)$ où dx désigne la mesure de Lebesgue.

(a) Montrer que la fonction

$$f * g(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x-u)g(u)\,du$$

est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et que c'est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^d$.

(b) Montrer que $x \mapsto f * g(x)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 3. Sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ où $\lambda_d(dx) = dx$ désigne la mesure de Lebesgue, on considère la sphère unité

$$S^{d-1} \;=\; \left\{x \in \mathbb{R}^d,\ |x| = 1\right\}$$

où $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$ désigne la norme euclidienne. L'exercice vise à définir une mesure de Lebesgue sur $(S^{d-1}, \mathcal{B}(S^{d-1})$ où $\mathcal{B}(S^{d-1}) = \{A \cap S^{d-1},\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}$. Pour tout $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ on note

$$\Gamma(A) \;=\; \{rx,\ r \in [0,1]\,\mathrm{et}\, x \in A\} \;\in\; \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

et on pose

$$\omega_d(A) \;=\; d\,\lambda_d\,(\Gamma(A))\,.$$

(a) Montrer que ω_d est une mesure positive finie sur S^{d-1} qui est la mesure image de la restriction de la mesure $d\lambda_d$ sur la boule unité de $\mathbb{R}^d$ par l'application $x \mapsto x/|x|$. Montrer que ω_d est invariante par isométrie et que sa masse totale est

$$\omega_d(S^{d-1}) \;=\; \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$

Sur $(\mathbb{R}^d \backslash \{0\}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \backslash \{0\}))$, on définit la mesure μ_d par

$$\mu_d(B) \;=\; \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} \mathbf{1}_B(rz)\, r^{d-1} dr\, \omega_d(dz)$$

pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$.

(b) Montrer que si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$ est de la forme

$$B = \{x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\},\ a < |x| < b \text{ et } x/|x| \in A\}$$

où $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ et $0 < a < b$, alors on a

$$\mu_d(B) = \left(\frac{b^d - a^d}{d}\right) \omega_d(A) = \lambda_d(B).$$

(c) En déduire que $\mu_d = \lambda_d$ sur $(\mathbb{R}^d \backslash \{0\}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \backslash \{0\}))$.

(d) En déduire que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ borélienne, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx = \int_0^\infty \int_{S^{d-1}} f(rz)\, r^{d-1} dr\, \omega_d(dz).$$

Discuter le cas $d = 2$ et retrouver la formule de changement de variables en coordonnées polaires.

(e) Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ une fonction borélienne et radiale au sens où il existe $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ borélienne telle que $f(x) = g(|x|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Déduire de tout ce qui précède que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty g(r)\, r^{d-1} dr.$$

(f) Le rayon de la Terre étant de 6371km, quelle est sa surface ?

Exercice 4. Pour tout $d \geq 3$, on considère la transformation

$$\varphi_d : (r, \theta_1, \ldots, \theta_{d-1}) \mapsto \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & r\cos(\theta_1) \\ x_2 & = & r\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ x_3 & = & r\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\theta_3) \\ \vdots & & \\ x_{d-1} & = & r\sin(\theta_1)\ldots\sin(\theta_{d-2})\cos(\theta_{d-1}) \\ x_d & = & r\sin(\theta_1)\ldots\sin(\theta_{d-2})\sin(\theta_{d-1}) \end{array} \right.$$

de $U =]0, \infty[\times]0, \pi[^{d-2}\times] - \pi, \pi[$ vers $V = \mathbb{R}^d \backslash \{x_{d-1} \leq 0, x_d = 0\}$ ouverts de $\mathbb{R}^d$.

(a) Montrer que φ_d est un difféomorphisme de U sur V et calculer son inverse.

(b) Soit J_d le Jacobien de φ_d. Montrer que

$$|J_d| = r\sin(\theta_1)\ldots\sin(\theta_{d-2})|J_{d-1}|.$$

(c) En déduire que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ borélienne, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx = \int_U f \circ \varphi_d(r, \theta_1, \ldots, \theta_{d-1}) \left(r^{d-1}\sin^{d-2}(\theta_1)\ldots\sin(\theta_{d-2})\right) dr d\theta_1 \ldots d\theta_{d-1}.$$