TD6 - Convergence en loi, théorème limite central

Exercice 1. (a) Calculer
$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$$
pour tout $n \geq 0$. Faire le lien avec la loi de $X_1 + \cdots + X_n$ où $\{X_n,\, n \geq 1\}$ est une suite i.i.d. de v.a. exponentielles de paramètre 1.

(b) En utilisant le théorème limite central, calculer
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n x^n e^{-x}\, dx.$$

Exercice 2. Soit X une v.a. uniforme sur $[-1, 1]$ et $\{X_n,\, n \geq 1\}$ une suite i.i.d. uniforme sur $\{-1, 1\}$.

(a) Montrer que X a même loi que
$$\sum_{n\geq 1} \frac{X_n}{2^n}.$$

(b) En déduire que
$$\frac{\sin x}{x} \;=\; \prod_{n\geq 1} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$ (en faisant le prolongement par continuité nécessaire pour $x = 0$).

(c) En déduire la formule de *Viète* (1593) :
$$\pi \;=\; 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}\cdots\right)^{-1}.$$

Exercice 3. (a) Soit $\{X_n,\, n \geq 1\}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi uniforme sur $[0, 1]$. Identifier la loi limite de
$$\frac{4\sum_{i=1}^n iX_i - n^2}{n^{3/2}}.$$

(b) Soit $\{X_n,\, n \geq 1\}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Identifier des suites positives déterministes $\{a_n,\, n \geq 1\}$ et $\{b_n,\, n \geq 1\}$ tendant vers ∞, telles que
$$a_n \max\{X_i,\, i \leq n\} \;-\; b_n$$
converge en loi, et identifier la loi limite.

(c) Même question qu'au (b) en remplaçant $\mathcal{N}(0, 1)$ par la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 4. Pour tout $\sigma > 0$ on pose

$$\varphi_\sigma(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

qui est la densité de la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

(a) Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, dx)$. Montrer que pour tout $\sigma > 0$ on a

$$\int_{\mathbb{R}} f * \varphi_\sigma(x)\, \mu(dx) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sigma^2 t^2/2} \hat{f}(t) \bar{\hat{\mu}}(t)\, dt$$

où $\hat{f}$ et $\hat{\mu}$ désignent les transformées de Fourier respectives de f et μ. En déduire que si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ avec $\hat{f} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, dx)$, alors on a la *formule de Plancherel* :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mu(dx) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \bar{\hat{\mu}}(t)\, dt.$$

(b) Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}$. Montrer la *formule d'inversion de Paul Lévy* :

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\sigma^2 t^2/2} \left(\frac{e^{-\mathrm{i}ta} - e^{-\mathrm{i}tb}}{t} \right) \hat{\mu}(t)\, dt \;\to\; \mu(a, b) \;+\; \frac{\mu\{a\} + \mu\{b\}}{2}$$

quand $\sigma \to 0$, pour tout $a < b$.

(c) En déduire la *formule d'inversion de Fourier* : si μ une probabilité sur $\mathbb{R}$ ayant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue et telle que $\hat{\mu} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, dx)$, alors

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}tx} \hat{f}(t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$