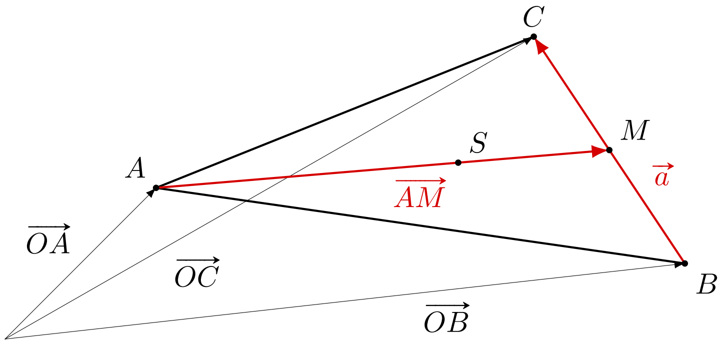
Vektorgeometrie 2D

Stefan Rothe

26.12.2024



$$\overrightarrow{OS} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) - \overrightarrow{OA}\right)$$

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung **2**
2 Komponentendarstellung **5**
3 Vektoren und Punkte **7**
4 Kollinearität und Orthogonalität **9**
5 Geraden **12**
6 Anwendungen **14**

© Gymnasium Kirchenfeld
Dieses Skript steht unter einer Creative Commons Attribution 4.0 International-Lizenz.
(CC BY 4.0)

1 Einführung

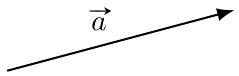
1.1 Vektorbegriff

Vektoren sind eine neues Grundelement der Mathematik, welche die Zahlen ergänzen. Im Gegensatz zu Zahlen besitzen Vektoren auch eine **Richtung**.

Ein Vektor kann als Verschiebung interpretiert werden.

1.2 Darstellung

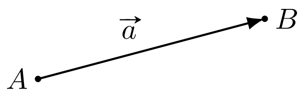
Ein Vektor $\vec{a}$ wird als Pfeil dargestellt und mit einem Kleinbuchstaben mit Pfeil beschriftet.



1.3 Definition durch Endpunkte

Ein Vektor $\vec{a}$ kann durch einen Anfangspunkt A und einen Endpunkt B definiert werden. Dazu wird die folgende Schreibweise verwendet:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$$



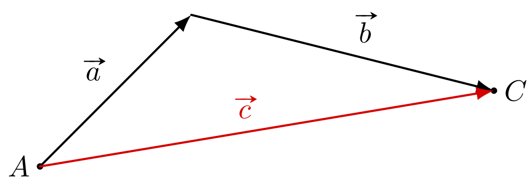
Da der Vektor gerichtet ist, ist die Reihenfolge der Punkte wichtig. Der Vektor $\overrightarrow{BA}$ ist ein anderer Vektor als $\overrightarrow{AB}$.

1.4 Addition

Die Addition von Vektoren ist die Aneinanderreihung von Verschiebungen. Wird ein Punkt A zunächst um den Vektor $\vec{a}$ verschoben und anschliessend um den Vektor $\vec{b}$, so kommt der Punkt bei C zu liegen. Die gleiche Verschiebung entsteht, wenn der Punkt A um den Vektor

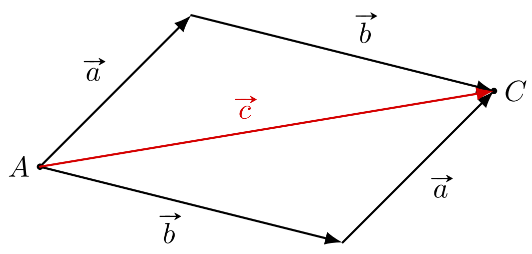
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

verschoben wird:



Die Addition von Vektoren ist **kommutativ**. Es spielt keine Rolle, ob der Vektor $\vec{b}$ an den Vektor $\vec{a}$ angehängt wird oder umgekehrt. Als Summe entsteht in beiden Fällen der gleiche Vektor $\vec{c}$. Die beiden Varianten der Addition bilden ein Parallelogramm.

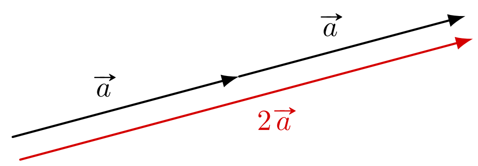
$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$



1.5 Skalierung

Wird ein Vektor $\vec{a}$ zu sich selbst addiert, so entsteht ein paralleler Vektor zu $\vec{a}$ mit doppelter Länge. Der Vektor wird also zwei Mal genommen, geschrieben:

$$\vec{a} + \vec{a} = 2 \cdot \vec{a} = 2\vec{a}$$

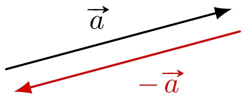


Allgemein kann das mehrfache Addieren des gleichen Vektors als Multiplikation mit einer natürlichen Zahl geschrieben werden:

$$n \cdot \vec{a} = n\vec{a} := \underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \cdots + \vec{a}}_{n-\text{mal}}$$

1.6 Gegenvektor

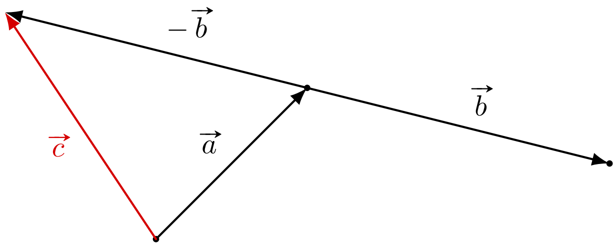
Der Gegenvektor eines Vektors $\vec{a}$ ist der Vektor, der gleich lang ist wie $\vec{a}$ und in die umgekehrte Richtung zeigt. Der Gegenvektor wird mit $-\vec{a}$ bezeichnet.



1.7 Subtraktion

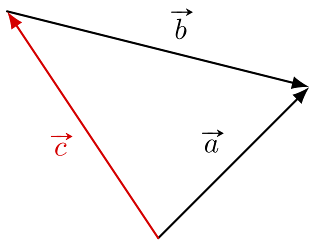
Die Subtraktion von Vektoren kann auf zwei Arten definiert werden. Erstens kann die Subtraktion eines Vektors $\vec{b}$ vom Vektor $\vec{a}$ als Addition des Gegenvektors $-\vec{b}$ betrachtet werden:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$



Zweitens kann die Subtraktionsgleichung durch addieren von $\vec{b}$ zu einer Addition umgeformt werden:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$$



2 Komponentendarstellung

2.1 Komponenten

Wird ein Vektor $\vec{v}$ in das kartesische Koordinatensystem eingezeichnet, so kann der Vektor beschrieben werden durch die

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

Dabei werden v_x und v_y die Komponenten des Vektors $\vec{v}$ genannt. v_x ist die horizontale Komponente, v_y die vertikale Komponente. Die horizontale Komponente steht oben, die vertikale Komponente unten.

2.2 Addition und Subtraktion

Die Addition und Subtraktion von Vektoren erfolgt komponentenweise.

Addition. Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ werden addiert, indem ihre Komponenten addiert werden:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_a + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

Subtraktion. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden subtrahiert, indem ihre Komponenten subtrahiert werden:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_a - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix}$$

2.3 Skalierung

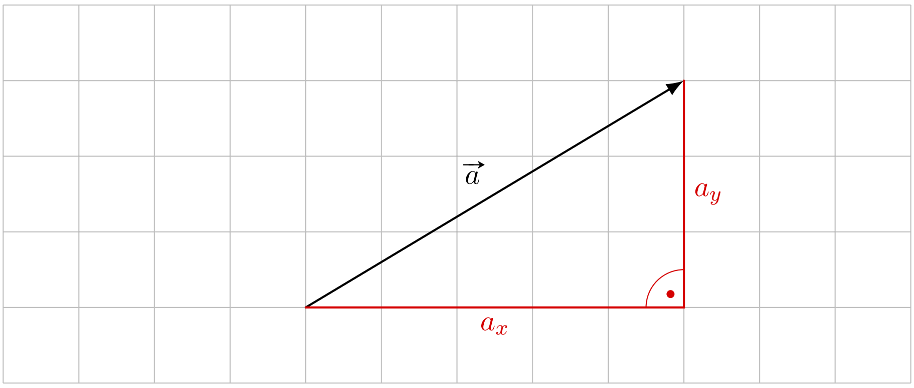
Die Skalierung eines Vektors erfolgt komponentenweise.

Skalierung. Ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ wird skaliert, indem seine Komponenten mit dem Faktor multipliziert werden:

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \end{pmatrix}$$

2.4 Länge

Die Länge eines Vektors $\vec{a}$ wird mit $|\vec{a}|$ bezeichnet. Die Komponenten bilden zusammen mit dem Vektor ein rechtwinkliges Dreieck. Deshalb kann die Länge mit Hilfe des Satzes von Pythagoras aus dem Komponenten berechnet werden.



Länge eines Vektors. Die Länge $|\vec{a}|$ eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ wird wie folgt berechnet:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Beispiel: In der oben stehenden Abbildung hat der Vektor $\vec{a}$ die Komponenten $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$. Also ist seine Länge

$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \approx 5.831$$

2.5 Nullvektor

Ein spezieller Vektor ist der Nullvektor. Er stellt einen Pfeil der Länge Null dar. Im Gegensatz zu allen anderen Vektoren hat der Nullvektor keine Richtung. Der Nullvektor wird als Zahl Null mit einem Vektorpfeil geschrieben: $\vec{0}$. Alle seine Komponenten sind Null.

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.6 Gleichheit

Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn ihre Komponenten übereinstimmen:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a_x = b_x \quad \text{und} \quad a_y = b_y$$

3 Vektoren und Punkte

3.1 Unterschiede

Vektoren und Punkte sind unterschiedliche Objekte mit unterschiedlichen Eigenschaften.

Ein **Punkt** befindet sich an einem bestimmten Ort und er hat keine Richtung. Ein Punkt P mit den **Koordinaten** x und y wird wie folgt geschrieben:

$$P(x/y)$$

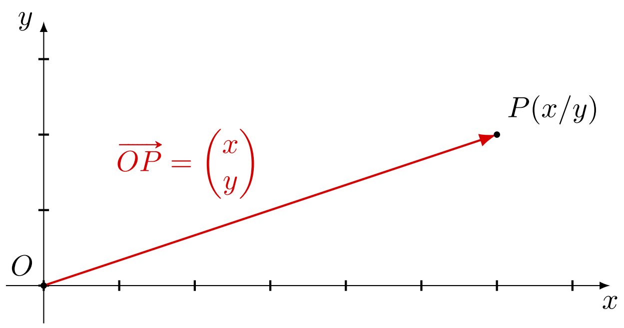
Ein **Vektor** kann beliebig verschoben werden, er hat also keine feste Position, aber er zeigt in eine bestimmte Richtung. Ein Vektor $\vec{v}$ mit den **Komponenten** v_x und v_y wird folgendermassen geschrieben:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

3.2 Ortsvektor

Wird ein Vektor $\overrightarrow{OP}$ mit dem Ursprung O als Anfangspunkt und dem Punkt $P(x/y)$ als Endpunkt definiert wird, so entsprechen die Komponenten des Vektors gerade den Koordinaten des Punkts P:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



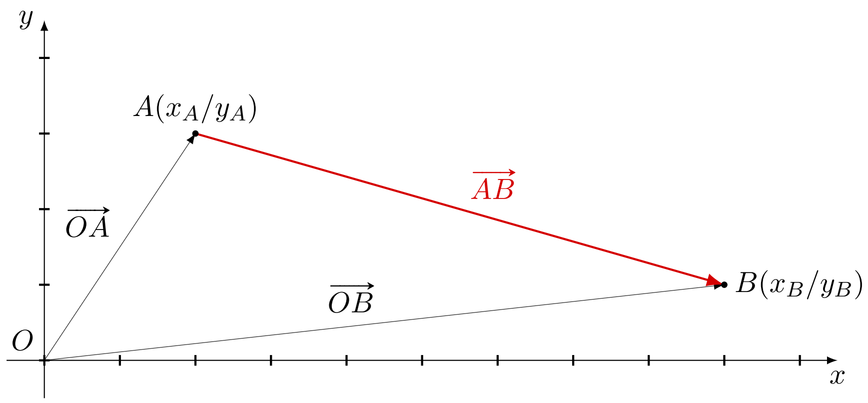
Dieser Vektor wird **Ortsvektor** des Punkts P genannt. Der Ortsvektor von P zeigt vom Ursprung O zum Punkt P.

Werden Vektoren als Verschiebungen aufgefasst, so verschiebt der Ortsvektor den Ursprung O in den Punkt P.

Beispiel: Der Ortsvektor des Punkts $A(-3/5)$ lautet $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

3.3 Vektor zwischen Punkten

Ein Vektor kann durch einen Anfangspunkt A und einen Endpunkt B bestimmt werden.



Der Vektor $\overrightarrow{AB}$, welcher von Punkt A nach Punkt B zeigt, kann als Subtraktion der Ortsvektoren von A und B ausgedrückt werden.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Daraus lässt sich schliessen, dass sich die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ durch Subtraktion der Koordinaten von Punkt B und Punkt A ergeben.

Vektor zwischen Punkten. Hat ein Vektor $\overrightarrow{AB}$ den Anfangspunkt $A(x_A/y_A)$ und den Endpunkt $B(x_B/y_B)$ besitzt, so lautet seine Komponentendarstellung

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Beispiel: Im der oben stehenden Abbildung ist der Vektor $\vec{v}$ durch den Anfangspunkt $A(2/3)$ und den Endpunkt $B(9/1)$ definiert. Also lautet seine Komponentendarstellung

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4 Kollinearität und Orthogonalität

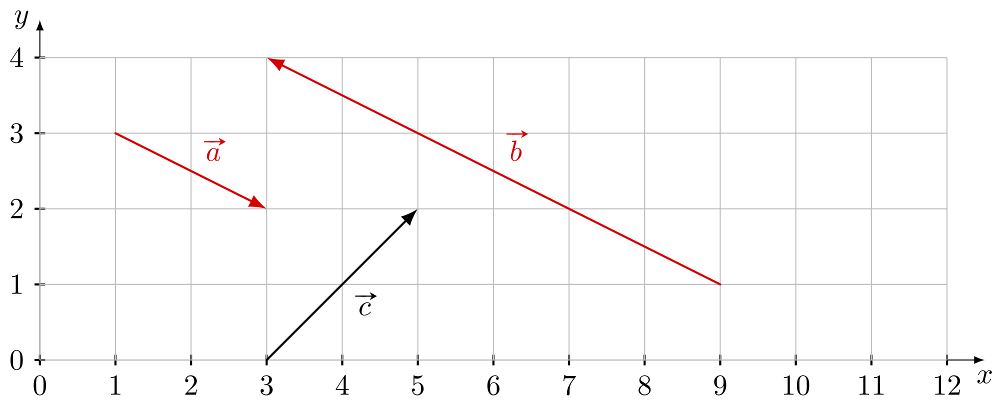
Eine wichtige Frage ist es, ob zwei Vektoren parallel zueinander sind oder senkrecht aufeinander stehen.

4.1 Kollinearität (parallel)

Sind zwei Vektoren parallel, so werden sie als kollinear bezeichnet. Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel, wenn Sie in die gleiche oder umgekehrte Richtung zeigen. Das ist genau dann der Fall, wenn der eine Vektor ein vielfaches des anderen Vektors ist.

Kollinearität. Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ sind kollinear (parallel), wenn es eine Zahl λ gibt, sodass

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$$



Beispiele: Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind kollinear, da:

$$2 = -\frac{1}{3} \cdot (-6) \qquad\qquad -1 = -\frac{1}{3} \cdot 3$$

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind nicht parallel, da

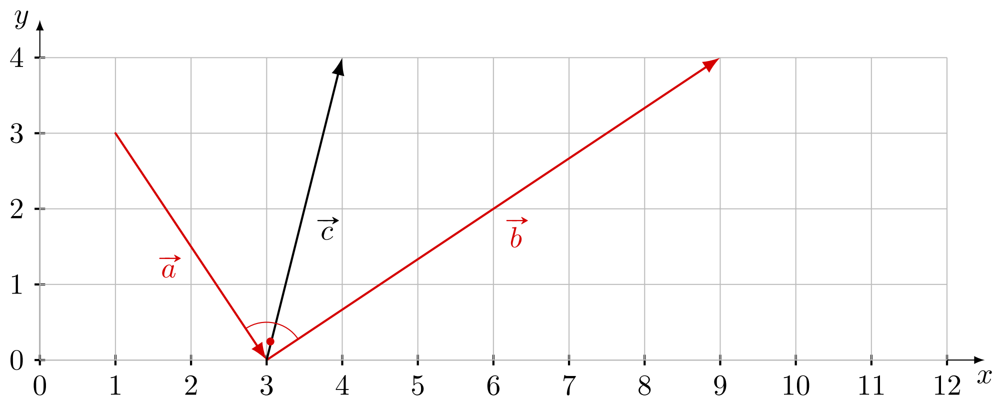
$$2 = 1 \cdot 2 \qquad\qquad -1 = -\frac{1}{2} \cdot 2$$

4.2 Orthogonalität (senkrecht)

Stehen zwei Vektoren senkrecht zueinander, so werden sie als **orthogonal** bezeichnet.

Orthogonalität. Zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ sind orthogonal (stehen senkrecht zueinander), wenn

$$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0$$



Beispiele: Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind orthogonal, da:

$$2 \cdot 6 + (-3) \cdot 4 = 12 - 12 = 0$$

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ sind nicht orthogonal, da

$$2 \cdot 1 + (-3) \cdot 4 = 2 - 12 = -10 \neq 0$$

Ist ein Vektor in Komponentenform gegeben, so können die zu ihm senkrechten Vektoren einfach ermittelt werden:

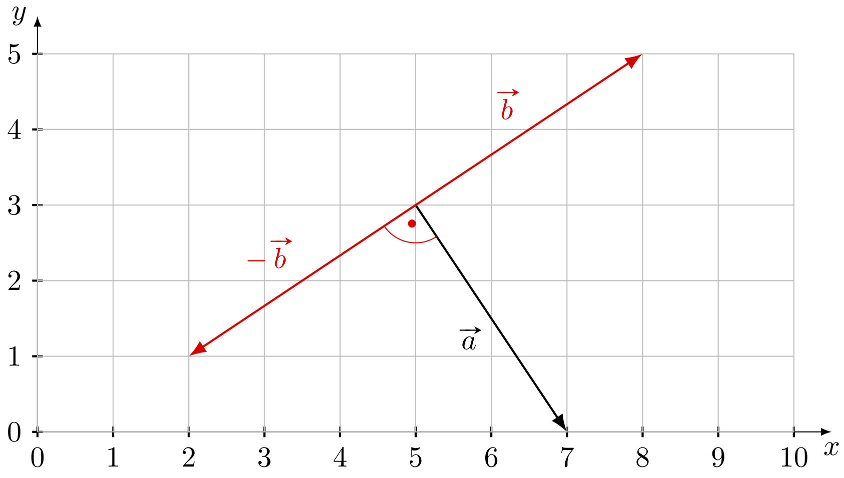
Senkrechter Vektor. Ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ gegeben, so stehen die Vektoren

$$\begin{pmatrix} -a_y \\ a_x \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_y \\ -a_x \end{pmatrix}$$

senkrecht auf $\vec{a}$ und haben die gleiche Länge wie $\vec{a}$. Die Komponenten der senkrechten Vektoren erhält man, indem die Komponenten von $\vec{a}$ vertauscht werden und eine Komponente negiert wird.

Das lässt sich einfach überprüfen:

$$\begin{aligned} a_x \cdot (-a_y) + a_y \cdot a_x &= -a_x \cdot a_y + a_y \cdot a_x = 0 \\ a_x \cdot a_y + a_y \cdot (-a_x) &= a_x \cdot a_y - a_y \cdot a_x = 0 \end{aligned}$$



Beispiel: Zum $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ stehen die folgenden beiden Vektoren senkrecht:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad -\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

5 Geraden

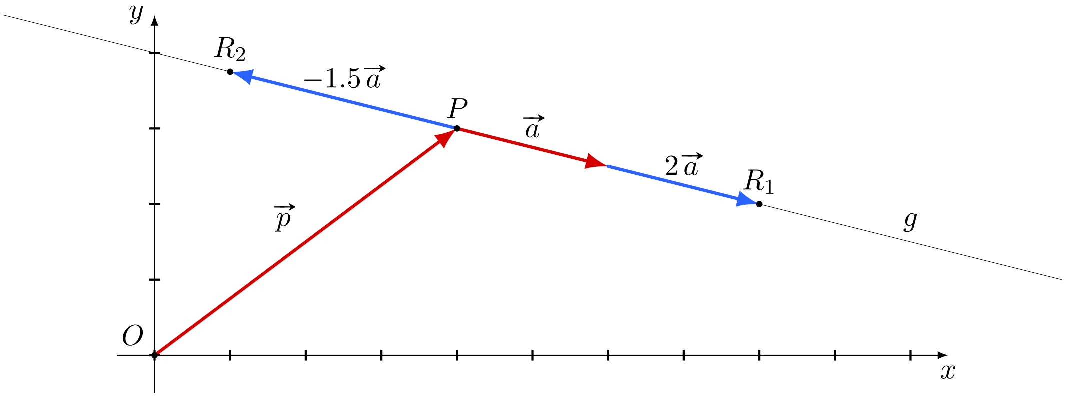
5.1 Geradengleichung

Eine Gerade g kann durch die Vektorgleichung

$$g: \quad \vec{r} = \vec{p} + t \cdot \vec{a}$$

beschrieben werden. Dabei ist $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ der Ortsvektor eines bestimmten **Punktes** P auf der Geraden und $\vec{a}$ ist die **Richtung** der Geraden. Der **Parameter** t ist eine beliebig wählbare, reelle Zahl.

Wird für t eine Zahl eingesetzt, so ergibt sich der Ortsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$ eines Punktes R, welcher auf der Geraden liegt. Da t beliebig gewählt werden kann, können so sämtliche auf der Gerade liegenden Punkte ermittelt werden.



Beispiel: Gegeben ist die Gerade

$$g: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen von 2 bzw. -1.5 für den Parameter t können zwei Ortsvektoren von Punkten R_1 und R_2 auf der Geraden ermittelt werden.

$$\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad R_1(8/2)$$

$$\vec{r_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 1.5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ 3+0.75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.75 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad R_2(1/3.75)$$

5.2 Gerade durch zwei Punkte

Die Gleichung der Geraden durch die zwei Punkte A und B ergibt sich aus dem Richtungsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und dem Ortsvektors $\vec{p} = \overrightarrow{OA}$. Alternativ kann auch der Ortsvektor von B gewählt werden. Die Vektorgleichung der Geraden durch A und B lautet also:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

Beispiel: Die Gleichung der Geraden durch $A(2/3)$ und $B(-4/2)$ soll bestimmt werden.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{p} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \vec{p} + t \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5.3 Parallele durch einen Punkt

5.4 Senkrechte durch einen Punkt

5.5 Schnittpunkt zweier Geraden

6 Anwendungen

Mit Vektoren können geometrische Probleme algebraisch gelöst werden. Hier werden exemplarisch ein paar solcher Probleme betrachtet.

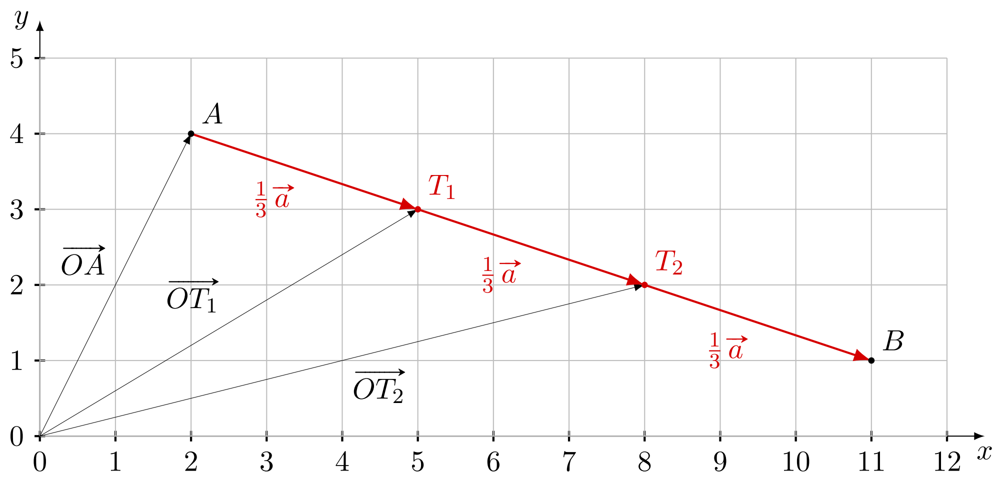
6.1 Streckenteilung

Aufgabe: Teilen Sie die Strecke $\overline{AB}$ in drei gleiche Teile.

$$A(2/4) \qquad B(11/1)$$

Zunächst wird der Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ bestimmt. Der erste Teilpunkt T_1 erhält man, indem ein Drittel von $\vec{a}$ zum Ortsvektor von A addiert wird. Der zweite Teilpunkt erhält man durch Addieren von zwei Dritteln von $\vec{a}$.

$$\vec{a} := \overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\vec{a} \qquad \overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\vec{a}$$



Damit ergeben sich folgende Ortsvektoren und Koordinaten für T_1 und T_2:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11-2 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OT_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\frac{1}{3}9 \\ 4+\frac{1}{3}(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OT_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\frac{2}{3}9 \\ 4+\frac{2}{3}(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

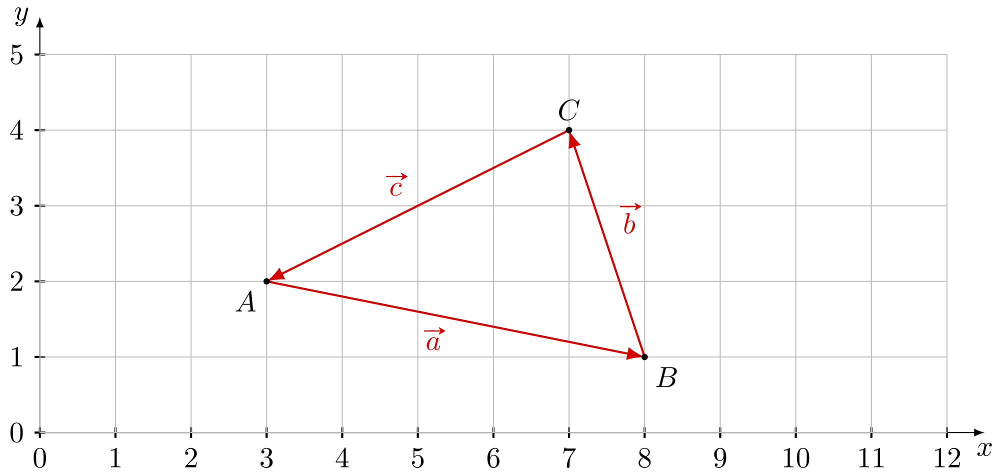
Die Strecke wird also durch die Punkte $T_1(5/3)$ und $T_2(8/2)$ in drei gleiche Teile geteilt.

6.2 Umfang eines Dreiecks

Aufgabe: Bestimmen Sie den Umfang des Dreiecks $\triangle ABC$ mit

$$A(3/2) \qquad B(8/1) \qquad C(7/4)$$

Zwischen den Punkten A, B und C können die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CA}$ definiert werden.



Anschliessend werden die Längen der Vektoren ermittelt und addiert, um den Umfang des Dreiecks zu erhalten.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} \approx 5.099$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7-8 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10} \approx 3.162$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 3-7 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad |\vec{c}| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} \approx 4.472$$

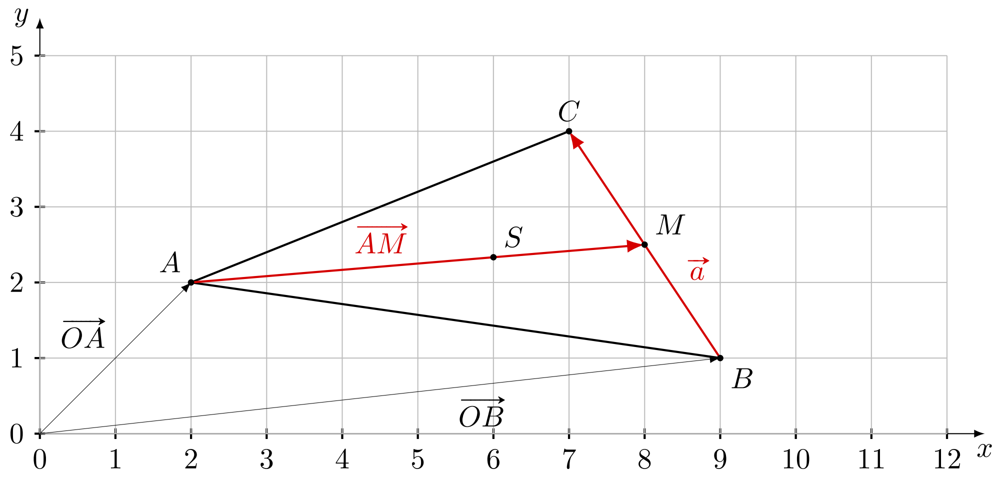
Damit ergibt sich für den Umfang des Dreiecks:

$$U = |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \approx 5.099 + 3.162 + 4.472 \approx 12.733$$

6.3 Schwerpunkt eines Dreiecks

Aufgabe: Bestimmen den Schwerpunkt der Dreiecks $\triangle ABC$ mit

$$A(2/2) \qquad B(9/1) \qquad C(7/4)$$



Zunächst wird der Vektor $\vec{a}$ ermittelt, welcher die Seite a beschreibt.

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 7-9 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nun kann der Mittelpunkt der Seite a berechnet werden:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \tfrac{1}{2}\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

Jetzt wird der Vektor $\overrightarrow{AM}$ berechnet, welcher die Seitenhalbierende beschreibt.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2.5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Da der Schwerpunkt die Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1 teilt, kann nun dessen Ortsverktor berechnet werden.

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \tfrac{2}{3}\begin{pmatrix} 6 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2.\overline{3} \end{pmatrix}$$

Der Schwerpunkt des Dreiecks hat also die Koordinaten $S(6/2.\overline{3})$.

6.4 Parallelogramm

Aufgabe: Ermitteln Sie den fehlenden Eckpunkt C und den Umfang des Parallelogramms $ABCD$ mit

$$A(3/2) \qquad B(8/1) \qquad D(6/4)$$

Zuerst werden die Seitenvektoren des Parallelogramms bestimmt:

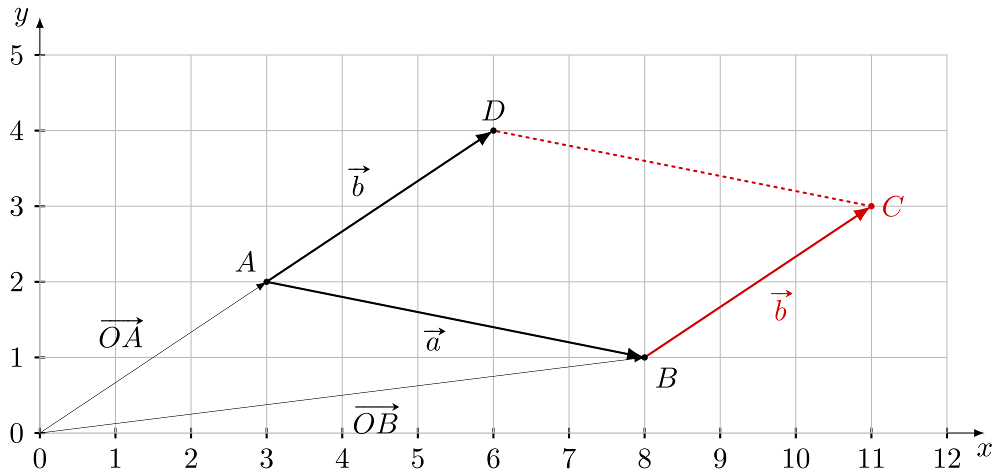
$$\vec{a} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-3 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Punkt C erhält man, indem der Punkt B um den Vektor $\vec{b}$ verschiebt. Dazu wird $\vec{b}$ zum Ortsvektor $\overrightarrow{OB}$ addiert:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+3 \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Also ist der vierte Punkt des Parallelogramms $C(11/3)$.



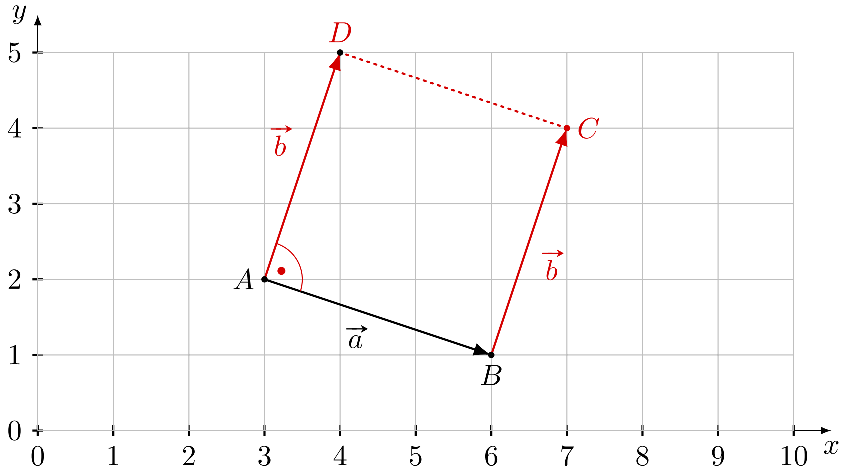
Der Umfang des Parallelogramms ergibt sich, indem die Längen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addiert und verdoppelt werden:

$$U = 2\left(|\vec{a}| + |\vec{b}|\right) = 2\left(\sqrt{5^2 + (-1)^2} + \sqrt{3^2 + 2^2}\right) \approx 2 \cdot 8.704 \approx 12.310$$

6.5 Quadrat

Aufgabe: Ermitteln Sie die fehlenden Eckpunkte C und D sowie die Fläche des Quadrats $ABCD$ mit

$$A(3/2) \qquad B(6/1)$$



Zunächst wird der Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ermittelt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nun wird der zu $\vec{a}$ senkrechte Vektor $\vec{b}$ ermittelt:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nun werden C und D ermittelt:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

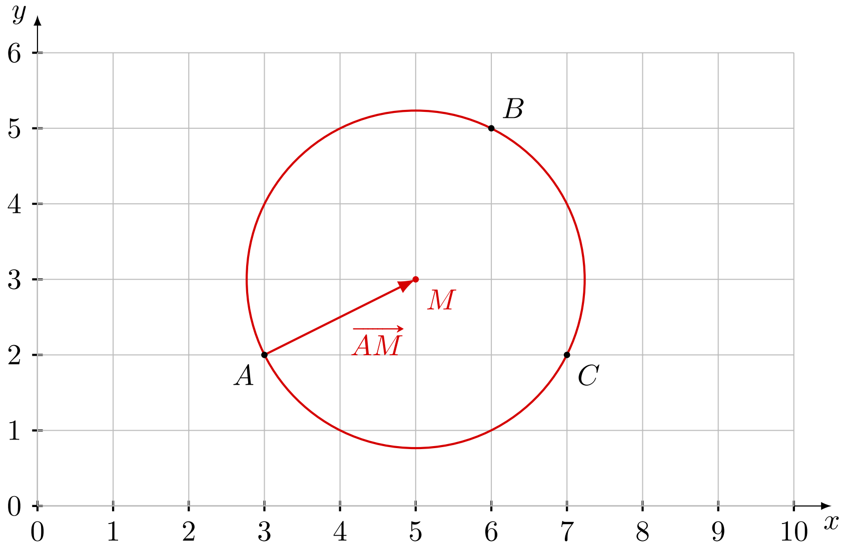
Die gesuchten Punkte sind also $C(7/4)$ und $D(4/5)$. Die Fläche des Quadrats beträgt

$$A = |\vec{a}|^2 = \left(\sqrt{3^2+1^2}\right)^2 = 9 + 1 = 10$$

6.6 Kreis

Aufgabe: Berechnen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises, auf welchem die folgenden drei Punkte liegen:

$A(3/2) \qquad B(6/5) \qquad C(7/2)$



Sei $\overrightarrow{OA}$ der Ortsvektor des Punkts A auf dem Kreis und $\overrightarrow{OM}$ der Ortsvektor des Mittelpunkts M mit den folgenden Komponenten:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$ zeigt vom Punkt P zum Kreismittelpunkt M. Seine Länge ist der Radius des Kreises r:

$$\left| \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} \right| = r$$

In Komponentenschreibweise ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = r$$

Um die Wurzel zu eliminieren wird die Gleichung quadriert.

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = r^2$$

Für die Punkte B und C ergeben sich zwei analoge Gleichungen. Diese ergeben zusammen ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Unbekannten:

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = r^2 \qquad (1)$$
$$(x-6)^2 + (y-5)^2 = r^2 \qquad (2)$$
$$(x-7)^2 + (y-2)^2 = r^2 \qquad (3)$$

Die Gleichungen werden ausmultipliziert:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 - 4y + 13 &= r^2 && (1) \\ x^2 - 12x + y^2 - 10y + 61 &= r^2 && (2) \\ x^2 - 14x + y^2 - 4y + 53 &= r^2 && (3) \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der Gleichungen werden r und die Quadrate eliminiert und es entsteht ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -6x - 4y + 13 &= -12x - 10y + 61 && (1) = (2) \\ -6x - 4y + 13 &= -14x - 4y + 53 && (1) = (3) \end{aligned}$$

Nach Zusammenfassen ergibt sich:

$$\begin{aligned} 6x + 6y &= 48 \\ 8x &= 40 \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist $x = 5$ und $y = 3$. Also hat der Mittelpunkt des Kreises die Koordinaten $M(5/3)$.

Den Radius des Kreises ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{AM}$:

$$r = \left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \approx 3.162$$