Zahlen und Operationen

Stefan Rothe
Laurenz Pantenburg

27.04.2024

Inhaltsverzeichnis

1 Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$

1.1 Motivation

Die natürlichen Zahlen ergeben sich, indem Dinge gezählt werden.

Beispiel: Ich kann keinen, einen, fünf oder zehn Millionen Äpfel besitzen. Jede Anzahl Äpfel, die ich besitze, kann als natürliche Zahl dargestellt werden:

$$0, 1, 5, 10'000'000$$

1.2 Menge der natürlichen Zahlen

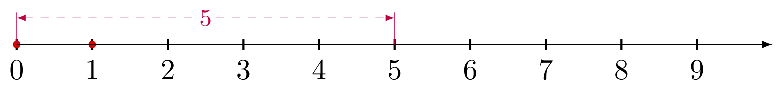
Definition: Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{N}$ bezeichnet.

$$\mathbb{N} := \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots\}$$

Hinweis: Manchmal wird die Null nicht zu den natürlichen Zahlen gezählt. Es ist eine Frage der Definition, ob die Null dazu gehört oder nicht. Hier ist die Null gemäss Definition eine natürliche Zahl.

1.3 Zahlengerade

Die natürlichen Zahlen können auf der Zahlengerade dargestellt werden. Dabei ist der Punkt 0 (die Null) der Ausgangspunkt oder **Ursprung**. Der Abstand zwischen 0 und 1 (der Eins) ist die **Einheit**, also der Länge 1.



So können sämtlich natürlichen Zahlen dargestellt werden, indem sie mit der Distanz zum Ursprung gleichgesetzt werden. So ist der Punkt, welcher die Zahl 5 repräsentiert, genau das fünffache der Einheitsdistanz vom Ursprung entfernt.

1.4 Abgeschlossenheit

Werden zwei beliebige natürliche Zahlen addiert oder multipliziert, so ergibt sich wieder eine natürliche Zahl.

Diese wichtige Eigenschaft einer Zahlenmenge wird **Abgeschlossenheit** genannt. Es wird gesagt, dass die natürlichen Zahlen bezüglich der Addition und der Multiplikation abgeschlossen sind.

Bezüglich der Subtraktion und Division sind die natürlichen Zahlen **nicht** abgeschlossen: Beispielsweise sind $3 - 5 = -2$ und $1 : 2 = 0.5$ keine natürlichen Zahlen.

2 Addition $a + b$

2.1 Definition

Die Addition ist eine Rechenoperation der ersten Stufe. Sie basiert auf dem Vorgang des Zusammenfassens von Dingen.

2.2 Schreib- und Sprechweise

Die beiden Zahlen a und b, welche addiert werden, heissen **Summanden**, das Resultat c heisst **Summe**.

Für die Addition wird das Operationszeichen $+$ verwendet. Wir schreiben

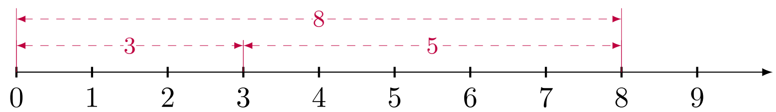
$$a + b = c$$

und sagen «a plus b ist gleich c.» oder «Die Summe von a und b ist gleich c.»

Beispiel: Die Summe von Drei und Fünf ist gleich Acht: $3 + 5 = 8$

2.3 Geometrische Interpretation

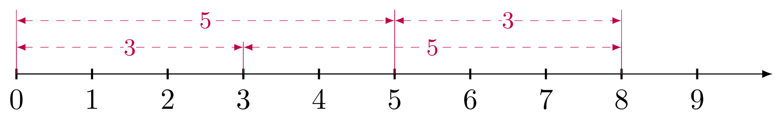
Geometrisch gesehen ist eine Addition das aneinanderhängen zweier Längen.



So bedeutet $3 + 5$, dass die Distanz von 0 zu 3 und die Distanz von 0 zu 5 aneinandergehängt werden. Dabei wird der Punkt 8 erreicht, also $3 + 5 = 8$.

2.4 Kommutativgesetz

Anhand der geometrischen Interpretation der Addition ist ersichtlich, dass es keine Rolle spielt, in welcher Reihenfolge die Summanden stehen. Wenn an die Länge 5 die Länge 3 angehängt wird, wird der gleiche Ort erreicht wie wenn an die Länge 3 die Länge 5 angehängt wird.



Diese Erkenntnis wird als mathematisches Gesetz formuliert:

Kommutativgesetz. Die Summanden einer Addition können vertauscht werden, ohne dass sich der Wert der Summe ändert.

$$a + b = b + a$$

2.5 Assoziativgesetz

Grundsätzlich werden mehrere Additionen immer **von links nach rechts** ausgeführt. Um die Reihenfolge zu ändern, können Klammern verwendet werden. Operationen in Klammern werden zuerst ausgeführt.

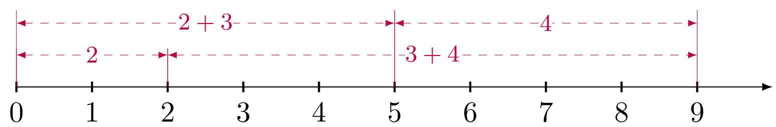
Beispiel: Hier wird von links nach rechts gerechnet:

$$2 + 3 + 4 = 5 + 4 = 9$$

Hier wird zuerst die Addition in den Klammern ausgeführt:

$$2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$$

Offenbar spielt bei Addition diese Reihenfolge keine Rolle. Dies kann wieder anhand der geometrischen Darstellung auf der Zahlengerade gezeigt werden:



Auch diese Erkenntnis wird als mathematisches Gesetz formuliert:

Assoziativgesetz. Mehrere Additionen dürfen in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden, ohne dass sich der Wert der Summe ändert.

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

2.6 Neutralität der Null

Die Zahl Null hat bezüglich der Addition eine besondere Stellung. Das Addieren von Null verändert den Wert nicht. Deshalb wird sie **neutral** bezüglich der Addition genannt.

Neutralität der Null. Zu einer Zahl kann Null addiert werden, ohne dass sich der Wert ändert:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

3 Multiplikation $a \cdot b$

3.1 Definition

Die Multiplikation ist eine Rechenoperation der zweiten Stufe. Das Produkt zweier natürlicher Zahlen n und a entsteht durch das wiederholte Addieren des gleichen Summanden a zum Ausgangswert Null:

$$n \cdot a := 0 + \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n-\text{mal}}$$

Wenn in dieser Definition $n = 0$ gesetzt wird, kommt a gar nicht als Summand vor und das Resultat ist 0.

Multiplikation mit Null: Das Produkt einer beliebigen Zahl a und Null ist gleich Null.

$$0 \cdot a = 0$$

3.2 Schreib- und Sprechweise

Die beiden Zahlen a und b, welche multipliziert werden, heissen **Faktoren**, das Resultat c heisst **Produkt**.

Für die Multiplikation wird das Zeichen · verwendet. Wir schreiben

$$a \cdot b = c$$

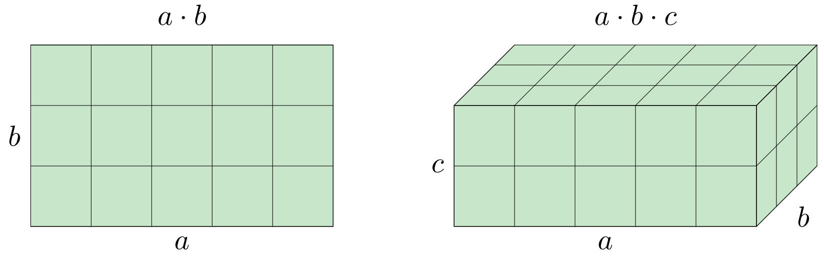
und sagen «a mal b ist gleich c.» oder «Das Produkt von a und b ist gleich c.»

Beispiel: Das Produkt von Zwei und Drei ist gleich Sechs: $2 \cdot 3 = 6$

3.3 Geometrische Interpretation

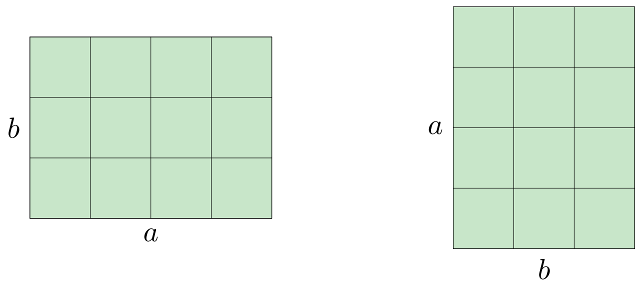
Geometrisch entspricht das Produkt zweier Zahlen $a \cdot b$ dem Flächeninhalt eines Rechtecks mit den entsprechenden Seiten a und b.

Das Produkt dreier Zahlen $a \cdot b \cdot c$ entspricht dem Volumen eines Quaders mit den Seiten a, b und c.



3.4 Kommutativgesetz

Anhand der geometrischen Interpretation wird ersichtlich, dass auch für die Multiplikation das Kommutativgesetz gelten muss. Das Vertauschen der beiden Faktoren entspricht dem Vertauschen der beiden Seitenlängen eines Rechtecks, was einer Drehung um 90° entspricht. Die Fläche des Rechtecks und somit das Produkt verändert sich dabei nicht.

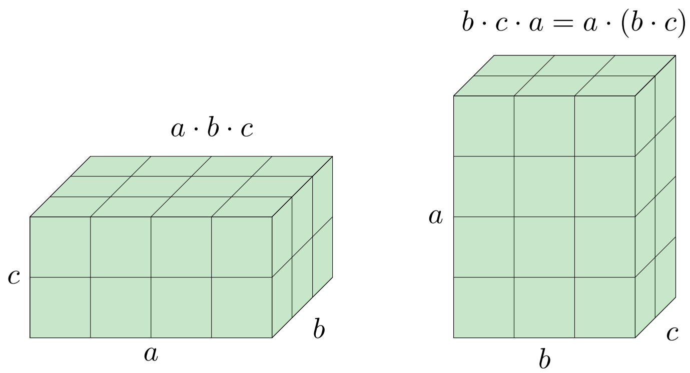


Kommutativgesetz. Die Faktoren einer Multiplikation dürfen vertauscht werden, ohne dass sich der Wert des Produkts ändert:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

3.5 Assoziativgesetz

Das Volumen eines Quaders ergibt sich aus der Grundfläche multipliziert mit der Höhe. Je nach Orientierung des Quaders ergibt sich somit eine andere Formel für das gleiche Volumen. Wird bei der rechten Formel das Kommutativgesetz angewendet, ergibt sich daraus das Assoziativgesetz für die Multiplikation.



Assoziativgesetz. Mehrere Multiplikationen dürfen in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden, ohne dass sich der Wert des Produkts ändert:

$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3.6 Neutralität der Eins

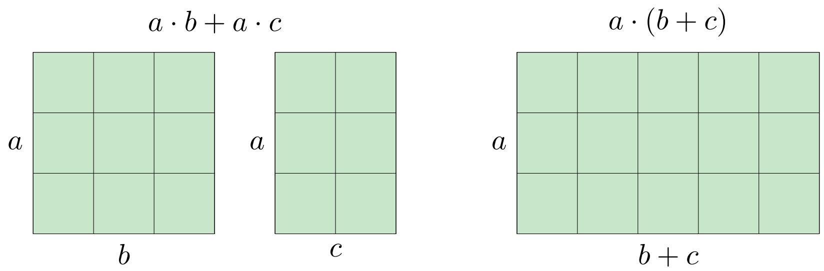
Die Eins hat bezüglich der Multiplikation eine besondere Stellung. Das Multiplizieren mit Eins verändert den Wert nicht.

Neutralität der Eins. Eine Zahl kann mit Eins multipliziert werden, ohne dass sich der Wert ändert:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

3.7 Distributivgesetz

Das Distributivgesetz verbindet die Addition und die Multiplikation. Es kann ebenfalls durch eine geometrische Überlegung begründet werden. Wird das Rechteck mit den Seiten a und b und das Rechteck mit den Seiten a und c zusammengesetzt, so ergibt sich ein Rechteck mit den Seiten a und $b + c$, welches die gleiche Fläche wie die beiden ersten Rechtecke hat.



Distributivgesetz. Eine Summe wird mit einem Faktor a multipliziert, indem jeder Summand mit a multipliziert wird.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

4 Potenzieren a^b

4.1 Definition

Das Potenzieren ist eine Rechenoperation der dritten Stufe. Die Potenz zweier natürlicher Zahlen entsteht durch das wiederholte Multiplizieren des gleichen Faktors a mit dem Ausgangswert Eins:

$$a^n := 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n-\text{mal}}$$

Wenn in dieser Definition $n = 0$ gesetzt wird, kommt a gar nicht als Faktor vor und das Resultat ist 1.

Potenzieren mit Null: Die nullte Potenz einer von Null verschiedenen Zahl a ist gleich Eins.

$$a^0 = 1 \qquad a \neq 0$$

4.2 Schreib- und Sprechweise

Die Zahl a, welche potenziert wird, heisst **Basis**. Die Zahl b, um welche potenziert wird, heisst **Exponent**. Das Resultat einer Potenzierung heisst **Potenz**.

Für das Potenzieren wird kein Operationszeichen verwendet. Stattdessen wird der Exponent b hochgestellt nach der Basis a geschrieben:

$$a^b = c$$

und sagen «a hoch b ist gleich c.» oder «Die b-te Potenz von a ist gleich c.

Beispiel: Die vierte Potenz von Drei ist gleich 81:

$$3^4 = 81$$

Das Potenzieren mit Zwei wird als **Quadrieren** bezeichnet, das Resultat dieser Operation als **Quadrat**.

Beispiel: Das Quadrat von Fünf ist gleich 25:

$$5^2 = 25$$

Achtung: Für das Potenzieren gibt es weder ein Kommutativ- noch ein Assoziativgesetz.

$$8 = 2^3 \neq 3^2 = 9 \qquad\qquad 8 = 2^3 = \left(2^1\right)^3 \neq 2^{\left(1^3\right)} = 2^1 = 2$$

4.3 Reihenfolge der Operationen

Damit bei einer Rechenanweisung wie $2 + 3 \cdot 5^2$ immer das gleiche Resultat entsteht, muss die Reihenfolge, in welcher die Operationen ausgeführt werden, klar geregelt werden. Dabei gelten folgende Vorschriften:

Klammern zuerst. Zuerst werden immer Operationen innerhalb von Klammern ausgeführt. Bei mehreren verschachtelten Klammern wird immer zuerst die innerste Klammer ausgerechnet.

Beispiele:

$5 \cdot (2+3) = 5 \cdot 5 = 25$ $\qquad (2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$

Dritte Stufe. Danach werden Operationen der dritten Stufe ausgeführt, also Potenzieren und Wurzelziehen. Verschachtelte Potenzen werden von **oben nach unten** ausgeführt.

Beispiele:

$2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$ $\qquad 2^{3^2} = 2^9 = 512$ $\qquad \left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64$

Achtung: Einfache Taschenrechner beachten diese Regel nicht und führen verschachtelte Potenzen von links nach rechts aus.

Zweite Stufe (Punktoperationen). Danach werden Operationen der zweiten Stufe ausgeführt, also Multiplikationen und Divisionen. Mehrere aufeinanderfolgende Operationen auf dieser Stufe werden von **links nach rechts** ausgeführt.

Beispiele:

$5 \cdot 2 + 3 = 10 + 3 = 13$ $\qquad 2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 \cdot 4 = 24$

Erste Stufe (Strichoperationen). Danach werden Operationen der ersten Stufe ausgeführt, also Additionen und Subtraktionen. Mehrere aufeinanderfolgende Operationen auf dieser Stufe werden von **links nach rechts** ausgeführt.

Beispiele:

$2 + 3 + 4 = 5 + 4 = 9$ $\qquad 2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$

5 Teiler und Primzahlen

5.1 Teiler

Definition: Die natürliche Zahl t ist ein **Teiler** der natürlichen Zahl n, wenn n ohne Rest durch t dividiert werden kann, also wenn es genau eine natürliche Zahl z gibt, sodass gilt:

$$t \cdot z = n$$

Wir schreiben $t \mid n$ und sagen «t ist ein Teiler von n» oder «t teilt n».

Beispiele:

- Die Zahl 60 hat 12 Teiler, nämlich $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30$ und 60.
- Die Zahl 13 hat zwei Teiler, nämlich 1 und 13.
- Die Zahl 1 teilt jede natürliche Zahl.
- Die Zahl 0 teilt keine natürliche Zahl.
- Die Zahl 0 hat jede natürliche Zahl ausser sich selbst als Teiler.

Zwei Zahlen heissen **teilerfremd**, wenn sie ausser 1 keinen gemeinsamen Teiler haben.

5.2 Primzahlen

Definition. Eine natürliche Zahl ist **prim** oder eine **Primzahl**, wenn sie genau zwei Teiler hat.

Die beiden Teiler sind Eins und die Zahl selbst. Somit ist die Zahl Eins keine Primzahl, da sie nur einen Teiler hat.

Die Zwei ist die kleinste Primzahl und gleichzeitig die einzige gerade Primzahl. Alle anderen geraden Zahlen haben ja neben Eins und sich selbst noch mindestens die Zwei als Teiler und haben somit mehr als zwei Teiler.

5.3 Sieb des Eratosthenes

Das Sieb des Eratosthenes ist ein Algorithmus, um alle Primzahlen in einem bestimmten Zahlenbereich zu finden.

Dazu werden alle Zahlen von 2 bis zur gewünschten maximalen Zahl aufgeschrieben. Dann werden folgende Anweisungen immer wiederholt, bis alle Zahlen eingefärbt oder Primzahlen sind:

1. Nimm die kleinste nicht eingefärbte Zahl. Das ist eine Primzahl.
2. Färbe alle Vielfachen dieser Zahl ein.
3. Beginne von vorne.

5.4 Primfaktorzerlegung

Satz: Zu jeder natürlichen Zahl n existiert eine eindeutige Primfaktorzerlegung

$$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_s^{r_s}$$

Die Primfaktoren $p_1, p_2, \dots, p_s$ sind unterschiedliche Primzahlen. Die Zahl s gibt an, wie viele (verschiedene) Primzahlen vorkommen. Die Potenzen $r_1, r_2, \dots, r_s$ geben an, wie oft der jeweilige Primfaktor ein Teiler der Zahl n ist.

Beispiel: $504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

Eine wichtige Anwendung der Primfaktorzerlegung ist das Kürzen und Erweitern von Brüchen. Angenommen, der folgende Bruch soll gekürzt werden:

$$\frac{14014}{5278}$$

Zunächst werden Zähler und Nenner in ihre Primfaktoren zerlegt. Gemeinsame Primfaktoren in Zähler und Nenner können gekürzt werden:

$$\frac{14014}{5278} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29} = \frac{7 \cdot 11}{29} = \frac{77}{29}$$

5.5 Aufwand der Primfaktorzerlegung

Das Zerlegen einer grossen Zahl in ihre Primfaktoren ist sehr aufwändig, weil es bis heute keinen effizienten Algorithmus dafür gibt. Je nach Grösse der Zahl dauert eine solche vom Computer durchgeführte Zerlegung Stunden, Tage, Jahre oder gar Milliarden von Jahren. Beispielsweise wurde die Zahl RSA-240, eine 240-stellige Zahl, im November 2019 von einem Zusammenschluss von Computern zerlegt; auf einem Single-core-Rechner hätte die Faktorisierung etwa 900 Jahre in Anspruch genommen.

In der Informatik basieren wichtige Verschlüsselungsverfahren darauf, dass es unmöglich ist, eine grosse Zahl in vernünftiger Zeit in ihre Primfaktoren zu zerlegen.

5.6 ggT und kgV

Den grössten gemeinsamen Teiler (ggT) und das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) zweier Zahlen kann mit Hilfe der Primfaktorzerlegung der beiden Zahlen ermittelt werden.

$$\begin{aligned} 6468 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11 \\ 840 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

Der grösste gemeinsame Teiler ist das Produkt aller Primfaktoren, welche in beiden Zerlegungen vorkommen.

$6488 =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$			3	$\cdot$			7	$\cdot$	7	$\cdot$ 11
$840 =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	3	$\cdot$	5	$\cdot$	7			

Also ist ggT$(6488; 840) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$.

Für das kleinste gemeinsame Vielfache müssen diejenigen Primfaktoren gesucht werden, die in mindestens einer der beiden Zerlegungen vorkommen:

$6488 =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$			3	$\cdot$			7	$\cdot$	7	$\cdot$	11
$840 =$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	2	$\cdot$	3	$\cdot$	5	$\cdot$	7				

Also ist kgV$(6468; 840) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11 = 64680$.

5.7 Wie viele Primzahlen gibt es?

Bereits der griechische Mathematiker Euklid von Alexandria (ca. 300 v.Chr.) hat bewiesen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Da damals das Konzept der Unendlichkeit noch nicht bekannt war, hat er seinen Satz und den Beweis so formuliert:

> «Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl Primzahlen.»

Wird sein Satz in moderne Sprache übersetzt, lautet er so:

Satz des Euklid: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Um diesen Satz zu beweisen, muss gezeigt werden, dass zur jeder Primzahl p eine grössere Primzahl gefunden werden kann. Euklid hat den Satz wie folgt bewiesen:

Es wird angenommen, dass es eine grösste Primzahl p gibt. Eine Liste der Primzahlen könnte so aussehen:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots, p$$

Nun werden alle diese Primzahlen miteinander multipliziert und zu Eins addiert:

$$z = 1 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \cdots \cdot p$$

Nun werden die Primfaktoren der so entstandenen Zahl z gesucht, indem versucht wird, z durch die bekannten Primzahlen zu dividieren. Bei der Division durch 2 bleibt der Rest übrig, da Eins addiert wurde:

$$z : 2 = (1 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \cdots \cdot p) : 2 = \frac{1}{2} + 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \cdots \cdot p$$

Das gleiche lässt sich für alle anderen Primzahlen von 3 bis p feststellen.

Die Primfaktoren von z müssen also Primzahlen sein, die grösser als p sind. Damit ist gezeigt worden, dass es keine grösste Primzahl p geben kann. Wenn es nur endlich viele Primzahlen gäbe, dann könnte man eine grösste Primzahl angeben. Da dies nicht möglich ist, muss es unendlich viele Primzahlen geben.

6 Stellenwertsystem

6.1 Römische Zahlen

Die Römer haben als Zeichen für die Zahlen die lateinischen Buchstaben verwendet. Dabei hat jeder Buchstaben einen bestimmten Wert:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

In einer römischen Zahl werden die Ziffern immer nach absteigendem Wert angeordnet. Ganz links befindet sich die grösste Ziffer, ganz rechts die kleinste.

Um den Wert einer römischen Zahl herauszufinden, müssen nur die Werte der einzelnen Ziffern addiert werden:

$$\text{MDCCCCLXXXIIII} = 1000 + 500 + 4 \cdot 100 + 50 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 1 = 1984$$

Zusätzlich kann die Subtraktionsregel angewendet werden: Wenn eine kleinere Ziffer links von einer fünf- oder zehnmal grösseren Ziffer steht, so wird die kleiner von der grösseren subtrahiert. Die Zahlen 40 und 90 können also so geschrieben werden:

$$40 = \text{XXXX} = \text{XL} \qquad 90 = \text{LXXXX} = \text{XC}$$

Damit lassen sich die Zahlen kürzer darstellen. Die Zahl 1984 kann man also so schreiben:

$$\text{MCMLXXXIV} = 1000 + (-1 \cdot 100 + 1000) + 50 + 3 \cdot 10 + (-1 + 5) = 1984$$

6.2 Dezimalsystem

Ganz natürlich werden sämtliche Zahlen mit **nur** zehn Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dargestellt. Aber wie funktioniert das genau? Der Trick ist, dass die **Ziffer** je nach ihrer Position bzw. **Stelle** in der Zahl einen anderen Wert, ihren **Stellenwert** darstellt. Der Stellenwert ergibt sich aus Zehn hoch die Nummer der Stelle. Die Stellen werden von rechts nach links durchnummeriert, beginnend bei Null.

Der Wert der Zahl ergibt sich, indem jede Ziffer mit ihrem Stellenwert multipliziert wird und anschliessend alle diese Werte addiert werden. Die Zahl 5478 bedeutet also, dass 5 Tausender, 4 Hunderter, 7 Zehner und 8 Einer addiert werden:

Stelle	3	2	1	0
Stellenwert (Potenz)	10^3	10^2	10^1	10^0
Stellenwert	1000	100	10	1
Ziffer	5	4	7	8
Wert	$5 \cdot 1000$	$4 \cdot 100$	$7 \cdot 10$	$8 \cdot 1$

6.3 Zahlensysteme mit anderer Basis

Wir können anstelle der Zahl Zehn eine andere Zahl als **Basis** der Potenzen und somit des Zahlensystems wählen. Damit verändern sich die Stellenwerte entsprechend.

Dabei stimmt die **Basis des Zahlensystems** immer mit der Anzahl Ziffern überein.

Damit wir einer Zahl ansehen, in welchem Zahlensystem sie geschrieben wurde, hängen wir die Basis immer tiefgestellt und in Klammern an die Zahl an. Die Zahl «4032» im Fünfersystem schreiben wir:

$$4032_{(5)}$$

Die folgende Abbildung zeigt, wie der Wert der Zahl $4032_{(5)}$ berechnet wird:

Stelle	3	2	1	0
Stellenwert (Potenz)	5^3	5^2	5^1	5^0
Stellenwert	125	25	5	1
Ziffer	4	0	3	2
Wert	$4 \cdot 125$	$0 \cdot 25$	$3 \cdot 5$	$2 \cdot 1$

Die Zahl 4032_5 im Fünfersystem entspricht also der Zahl 517 im Dezimalsystem:

$$4 \cdot 125 + 0 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 = 500 + 9 + 2 = 517$$

6.4 Übersicht Zahlensysteme

Hier ist eine Übersicht der Zahlensysteme mit einer Basis von Zwei bis Zehn:

Bezeichnung	**Basis**	**Ziffern**
Binärsystem	2	$0, 1$
Dreiersystem	3	$0, 1, 2$
Vierersystem	4	$0, 1, 2, 3$
Fünfersystem	5	$0, 1, 2, 3, 4$
Sechsersystem	6	$0, 1, 2, 3, 4, 5$
Siebnersystem	7	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$
Oktalsystem	8	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$
Neunersystem	9	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$
Dezimalsystem	10	$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

7 Subtraktion $a - b$

7.1 Definition

Wir haben fünf Äpfel und fügen diesen zwei Äpfel hinzu, erhalten also sieben Äpfel.

$$5 + 2 = 7$$

Was müssen wir tun, um wieder zurück zu fünf Äpfel zu kommen? Das **Gegenteil** von zwei Äpfel hinzufügen: zwei Äpfel wegnehmen.

$$7 - 2 = 5$$

Die Differenz zweier Zahlen wird mit Hilfe einer **Subtraktion** berechnet.

Definition: Die Subtraktion ist die Umkehroperation der Addition. Mit der Subtraktion wird ein unbekannter Summand x einer Addition berechnet:

$$x + b = a \qquad \Leftrightarrow \qquad x = a - b$$

7.2 Schreib- und Sprechweise

Die Zahl a, von welcher subtrahiert wird, heisst **Minuend**. Die Zahl b, welche subtrahiert wird, heisst **Subtrahend**. Das Resultat einer Subtraktion wird **Differenz** genannt.

Für die Subtraktion wird das Operationszeichen $-$ verwendet. Wir schreiben

$$a - b = c$$

und sagen «die Differenz von a und b ist gleich c.»

7.3 Reihenfolge der Operationen

Die Subtraktion ist eine Operation der ersten Stufe. Das bedeutet, dass Subtraktionen immer gleichzeitig mit den Additionen von links nach rechts ausgeführt werden.

Beispiele:

$$3 - 2 + 1 = 1 + 1 = 2 \qquad\qquad 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 4 = 1$$

$$3 - (2 + 1) = 3 - 3 = 0 \qquad\qquad (5 - 2) \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$$

Achtung: Für die Subtraktion gibt es weder ein Kommutativ- noch ein Assoziativgesetz.

$$-1 = 2 - 3 \neq 3 - 2 = 1 \qquad\qquad 0 = 1 - 1 = 3 - 2 - 1 \neq 3 - (2 - 1) = 3 - 1 = 2$$

8 Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

Die natürlichen Zahlen sind unter Addition und Multiplikation abgeschlossen: Addieren und multiplizieren wir natürliche Zahlen, so ist das Ergebnis wieder eine natürliche Zahl. Für die Subtraktion funktioniert das leider nicht. Rechnen wir

$$5 - 7 = \square$$

so können wir mit den natürlichen Zahlen kein Ergebnis finden.

Denken wir an die Äpfel zurück: wir können von fünf Äpfeln nicht sieben wegnehmen, da wir nicht weniger als null Äpfel haben können.

In der Tat haben sich auch berühmte Mathematiker lange gegen negative Zahlen gesträubt. Sie bekamen dann aber zum Rechnen mit Schulden einen praktischen Nutzen.

Wenn man von fünf Äpfeln sieben Äpfel abziehen möchte, ist die Frage: «Wie viele Äpfel bräuchte es noch, damit am Ende alle Äpfel weg sind?». Die Antwort ist Zwei! Rechnen wir $5 - 7$ so erhalten wir das Gegenteil von Zwei (bzgl. der Addition), also Minus Zwei!

$$5 - 7 = -2$$

8.1 Definition: Gegenzahl

Welche Zahl muss zu Fünf addiert werden, um Null zu erhalten?

$$5 + \square = 0$$

Wenn nur die natürlichen Zahlen betrachtet werden, gibt es keine Antwort auf diese Frage. Wenn in der Mathematik eine Lücke entdeckt wird, dann wird oft etwas neues definiert, das heisst «erfunden», um diese Lücke zu füllen.

In diesem Fall werden neue Zahlen definiert, welche diese Gleichung erfüllen.

Definition: Eine Zahl, welche Null ergibt, wenn sie zu einer gegebenen Zahl a addiert wird, wird **Gegenzahl** von a genannt und mit $-a$ bezeichnet:

$$a + (-a) = 0$$

Die Gegenzahl von 5 ist also -5 und $5 + (-5) = 0$. Wird die Menge der natürlichen Zahlen um ihre Gegenzahlen erweitert, so ergibt sich die Menge der **ganzen Zahlen**.

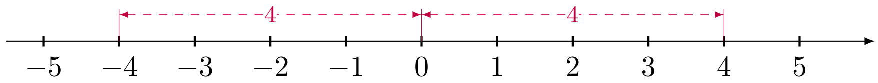
Definition: Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ enthält sämtliche natürliche Zahlen sowie ihre Gegenzahlen.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Anmerkung: Die Gegenzahl von 0 ist wieder 0, da $0 + 0 = 0$ gilt. Deshalb ist $-0 = 0$.

8.2 Zahlengerade und Betrag

Auch die ganzen Zahlen können auf der Zahlengeraden dargestellt werden. Dabei wird die Gegenzahl jeder Zahl gegenüberliegend der Null dargestellt. So wird die Zahl -4 auf der anderen Seite von Null mit gleichem Abstand zur Null wie die Zahl 4 dargestellt.



Der Abstand einer Zahl a zur Null auf der Zahlengerade wird als ihr Betrag $|a|$ bezeichnet.

Definition: Der **Betrag** $|a|$ einer negativen Zahl a ist ist die Gegenzahl von a. Der Betrag $|a|$ einer nicht-negativen Zahl a ist gleich a.

$$|a| := \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Beispiele: $|-3| = 3$ $\quad |4| = 4$ $\quad |-4| = 4$

8.3 Abgeschlossenheit

Die ganzen Zahlen sind bezüglich der Addition, der Subtraktion und der Multiplikation abgeschlossen. Das bedeutet, dass die Summe, die Differenz und das Produkt zweier ganzen Zahlen immer eine ganze Zahl ist.

8.4 Teilmengen

Oft wird über bestimmte Teilmengen der ganzen Zahlen gesprochen. Dabei werden die folgenden Begriffe und Symbole verwendet:

Begriff	**Symbol**	**Menge**
positive ganze Zahlen	$\mathbb{Z}^+$	$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
nichtnegative ganze Zahlen	$\mathbb{Z}_0^+$	$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N}$
negative ganze Zahlen	$\mathbb{Z}^-$	$\{\ldots, -4, -3, -2, -1\}$
nichtpositive ganze Zahlen	$\mathbb{Z}_0^-$	$\{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0\}$

8.5 Negative Zahlen und Gegenzahlen

Es ist nicht so, dass Gegenzahlen immer negativ sind. Jede beliebige Zahl a hat eine Gegenzahl, egal ob a selbst positiv ist, oder nicht. Die Gegenzahl von $a = -5$ ist beispielsweise $-a = -(-5) = 5$.

Wenn eine Variable a verwendet wird, um über eine beliebige Zahl zu sprechen, kann es also auch sein, dass die Gegenzahl $-a$ eine positive Zahl ist und zwar genau dann, wenn a eine negative Zahl ist.

8.6 Rechenregeln

Für das Rechnen mit Gegenzahlen gelten die folgenden Rechenregeln:

Gegen-Gegenzahl. Die Gegenzahl der Gegenzahl einer Zahl ist die ursprüngliche Zahl:

$$-(-a) = a$$

Addition und Subtraktion. Das Addieren der Gegenzahl ist das Gleiche wie das Subtrahieren der Zahl. Das Subtrahieren der Gegenzahl ist das gleiche wie das Addieren der Zahl.

$$a + (-b) = a - b \qquad a - (-b) = a + b$$

Subtraktion einer Summe. Die Subtraktion einer Summe ist das Gleiche wie das Subtrahieren beider Summanden:

$$a - (b + c) = a - b - c$$

Subtraktion einer Differenz. Die Subtraktion einer Differenz ist das Gleiche wie das Subtrahieren des Minuenden und das addieren des Subtrahenden.

$$a - (b - c) = a - b + c$$

Multiplikation von Gegenzahlen. Für die Multiplikation von Gegenzahlen gelten folgende Regeln:

$$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -ab \qquad (-a) \cdot (-b) = ab$$

Anmerkung: Wir haben gesehen, dass die Subtraktion nicht kommutativ ist, also $6-3 \neq 3-6$. Mit Hilfe der Gegenzahlen können wir aber etwas tricksen, denn $6-3 = 6+(-3) = (-3)+6$.

9 Division und Brüche $a : b \quad \frac{a}{b}$

So wie die Subtraktion die Gegenoperation zur Addition ist, so ist die Division die Gegenoperation zur Multiplikation.

9.1 Definition

In einem Korb sind immer fünf Äpfel. Haben wird drei solcher Körbe so haben wir insgesamt 15 Äpfel.

$$5 \cdot 3 = 15$$

Wenn wir hingegen zurück gehen und wissen möchten, wie 15 Äpfel gleichmässig auf drei Körbe aufgeteilt werden, so rechnen wir umgekehrt:

$$15 : 3 = 5$$

So ist das Gegenteil einer Multiplikation mit 3 gerade die Division durch 3.

Definition: Die Division ist die Umkehroperation der Multiplikation. Mit der Division wird ein unbekannter Faktor x einer Multiplikation berechnet:

$$x \cdot b = a \qquad \Leftrightarrow \qquad x = a : b$$

9.2 Schreib- und Sprechweise

Die Zahl a, welche dividiert wird, heisst **Dividend**. Die Zahl b, durch welche dividiert wird, heisst **Divisor**. Das Resultat einer Division wird **Quotient** genannt.

Für die Division wird das Operationszeichen : verwendet. Wir schreiben

$$a : b = c$$

und sagen «der Quotient von a und b ist gleich c.»

9.3 Brüche

In der Mathematik ist jedoch eine andere Schreibweise der Division viel weiter verbreitet. Eine Division wird üblicherweise als Bruch geschrieben:

$$\frac{a}{b} := a : b$$

In der Mathematik am Gymnasium wird ebenfalls diese Schreib- und Sprechweise verwendet. Dabei wird die Zahl a oberhalb des Bruchstrichs **Zähler** und die Zahl b unterhalb des Bruchstrichs **Nenner** genannt. Wir schreiben

$$\frac{a}{b} = c$$

und sagen «a über b ist gleich c.», «a durch b ist gleich c.» oder weiterhin «der Quotient von a und b ist gleich c.»

9.4 Operationsreihenfolge

Ein wichtiger Unterschied zwischen der Bruchschreibweise und der Schreibweise als Division ist die Reihenfolge, in welcher die Operationen ausgeführt werden.

Grundsätzlich werden Divisionen als Punktoperationen gleichzeitig mit den Multiplikationen von links nach rechts ausgeführt. Bei Brüchen gilt zusätzlich die Regel, dass zunächst Operationen in Zähler und Nenner ausgeführt werden müssen. Bei der Bruchschreibweise muss man sich also Klammern um Zähler und Nenner vorstellen.

Beispiel: $\frac{1+2}{2+3} = (1+2) : (2+3) \neq 1+2:2+3 = 1 + \frac{2}{2} + 3$

9.5 Division durch Null

Warum macht die Division durch Null Probleme? Nehmen wir eine beliebige Zahl a und teilen diese durch 0. Was soll das Ergebnis sein? Wir nennen das Ergebnis zunächst x und schauen mal, ob wir x herausfinden können.

Die Division durch Null muss speziell betrachtet werden.

$$x = a : 0$$

Dann müsste aber gelten, dass

$$0 \cdot x = a$$

ist. Die Zahl a ist also doch nicht beliebig, sondern muss auch 0 sein, sonst erhalten wir einen Widerspruch, denn auf der linken Seite der Gleichung steht $0 \cdot x = 0$. Wenn $a = 0$ ist, erhalten wir

$$x = 0 : 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \cdot x = 0$$

In die rechte Gleichung können wir für x jede beliebige Zahl einsetzen und die Gleichung bleibt wahr. Jede beliebige Zahl ist aber kein sinnvolles Ergebnis für $x = 0 : 0$. Deshalb sagen wir, dass das Ergebnis einer Division durch Null **nicht definiert** ist.

9.6 Kürzen und Erweitern

Ein Bruch wird **erweitert**, indem Zähler und Nenner mit der gleichen ganzen Zahl multipliziert werden:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$$

Ein Bruch wird **gekürzt**, indem Zähler und Nenner durch die gleiche ganze Zahl dividiert werden:

$$\frac{-3}{-6} = \frac{(-3) : (-3)}{(-6) : (-3)} = \frac{1}{2}$$

Definition: Ein Bruch $\frac{z}{n}$ ist **vollständig gekürzt**, wenn der grösste gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner gleich Eins ist.

$$\text{ggT}(z; n) = 1$$

Beim Erweitern und Kürzen ändert sich der Wert des Bruchs nichts, alle diese Brüche repräsentieren also die gleiche Zahl.

9.7 Gegenzahlen

Wenn sowohl Zähler als auch Nenner eines Bruchs negativ sind, so kann der Bruch mit (-1) erweitert werden. Damit fallen die negativen Vorzeichen weg.

$$\frac{-2}{-5} = \frac{(-2) \cdot (-1)}{(-5) \cdot (-1)} = \frac{2}{5}$$

Gegenzahl bei Brüchen: Der Wert eines Bruchs ändert sich nicht, wenn sowohl Zähler als auch Nenner durch ihre Gegenzahlen ersetzt werden. Die Gegenzahl eines Bruchs erhält man, indem nur der Zähler oder nur der Nenner durch seine Gegenzahl ersetzt wird.

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \qquad\qquad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Anmerkung: Wer gerne Pizza isst, wird wissen, dass ein halbes Stück Pizza nicht das Gleiche ist, wie zwei Viertelstück Pizza oder drei Sechstelstück Pizza. In der Mathematik nehmen wir diese Unterscheidung aber nicht vor. Für uns ist $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$. Beim Erweitern und Kürzen ändert sich deshalb der Wert des Bruchs nicht, alle diese Brüche repräsentieren die gleiche Zahl.

9.8 Addition und Subtraktion

Um Brüche zu addieren, müssen Sie auf den gleichen Nenner gebracht werden. Dazu wird jeder Bruch mit dem Nenner des anderen Bruchs erweitert. Sind beide Nenner gleich, können die Zähler addiert werden.

Addition von Brüchen:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$$

Das Vorgehen für die Subtraktion ist analog:

Subtraktion von Brüchen:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$$

Dieses Vorgehen funktioniert immer, ist jedoch unpraktisch, da im Nenner sehr grosse Zahlen entstehen können. Besser ist es, den kleinsten gemeinsame Nenner n der beiden Brüche mit $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ zu bestimmen. Dieser ist gerade das kleinste gemeinsame Vielfache von b und d:

$$n = \text{kgV}(b; d)$$

Beispiel: Das kleinste gemeinsame Vielfache von 4 und 6 ist 12. Deshalb werden hier die Brüche so erweitert, dass der Nenner 12 entsteht:

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \frac{9 + 10}{12} = \frac{19}{12}$$

9.9 Multiplikation

Multiplikation von Brüchen: Brüche werden multipliziert, indem Zähler und Nenner multipliziert werden.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Beispiel: Zwei Drittel von drei Vierteln ist ein Zweitel:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

9.10 Kehrwert

Welche Zahl muss mit zwei Fünftel multipliziert werden, um Eins zu erhalten?

$$\frac{2}{5} \cdot \square = 1$$

Die Antwort auf diese Frage lautet $\frac{5}{2}$, da dann das Produkt so gekürzt werden kann, dass 1 resultiert. Allgemein wird eine solche Zahl **Kehrwert** genannt.

Definition: Der Kehrwert einer Zahl a ist diejenige Zahl, welche mit a multipliziert Eins ergibt.

Ganz allgemein kann der Kehrwert von a als $\frac{1}{a}$ geschrieben werden, denn:

$$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{1} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a \cdot 1}{1 \cdot a} = \frac{a}{a} = 1$$

Kehrwert eines Bruchs: Um den Kehrwert eines Bruchs zu erhalten, werden Zähler und Nenner vertauscht.

Der Kehrwert von $\frac{a}{b}$ ist $\frac{b}{a}$.

9.11 Doppelbrüche und Division

Wenn im Zähler und Nenner eines Bruchs wiederum Brüche stehen, ergibt sich ein Doppelbruch. Diese Schreibweise ist jedoch unübersichtlich, deshalb empfiehlt es sich, einen Doppelbruch gemäss Definition als Division zu schreiben:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$$

Division von Brüchen: Brüche werden dividiert, indem der erste Bruch mit dem Kehrwert des zweiten multipliziert wird:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Beispiel: Ein Doppelbruch wird als Division geschrieben. Die Division wird als Multiplikation mit dem Kehrwert geschrieben und ausgerechnet.

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

10 Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

Die ganzen Zahlen sind abgeschlossen unter Addition, Multiplikation und Subtraktion. Nehmen wir jetzt allerdings die Division als weitere mögliche Rechenoperation hinzu, so stellen wir fest, dass z.B. das Ergebnis von $5 : 2$ keine ganze Zahl mehr ist. Auch hier macht die Anwendung oft Probleme: Wie teilt man fünf Äpfel fair auf zwei Personen auf? Was in der Realität auf Probleme stossen mag, lösen die Mathematiker durch Definitionen.

10.1 Definition

Mit welcher Zahl muss Fünf multipliziert werden, um Zwei zu erhalten?

$$5 \cdot \square = 2$$

Diese Frage wird mit Hilfe der Umkehroperation, der Division beantwortet. Als Resultat ergibt sich

$$\frac{2}{5} = \square$$

Dieser Bruch ist aber keine ganze Zahl. Somit kann die Frage innerhalb der ganzen Zahlen nicht beantwortet werden.

Das Problem wird gelöst, indem wiederum neue Zahlen «erfunden» werden.

Definition: Ein Bruch mit ganzen Zahlen in Zähler und Nenner heisst **rationale Zahl**. Dabei darf der Nenner nicht gleich Null sein. In mathematischer Schreibweise ist r eine rationale Zahl, wenn

$$r := \frac{z}{n} \qquad z, n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0$$

Werden alle rationalen Zahlen zusammengefasst, ergibt sich die Menge der rationalen Zahlen.

Definition: Die Menge der rationalen Zahlen ist $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{z}{n} \;\middle|\; z, n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0 \right\}$

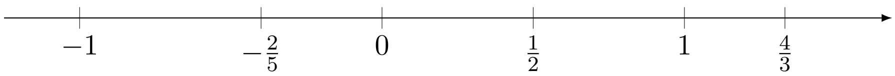
Beispiele: Einige rationale Zahlen sind: $\frac{1}{2} \quad \frac{-4}{-9} \quad \frac{-5}{10000} \quad \frac{0}{-2000} \quad \frac{10}{1}$

Achtung: Die Schreibweise als «gemischter Bruch» sollte vermieden werden, da Sie zu Unklarheiten führen kann. In der Mathematik wird nämlich das Multiplikationszeichen normalerweise weggelassen, nur zwischen zwei Zahlen ist es notwendig. So ist $2a = 2 \cdot a$ oder $5\pi = 5 \cdot \pi$. Wird nun $2\frac{1}{2}$ geschrieben, so ist unklar, ob dies nun $2 + \frac{1}{2}$ oder $2 \cdot \frac{1}{2}$ bedeuten soll.

Regel: Das Additionszeichen darf nicht weggelassen werden, nur das Multiplikationszeichen. «Gemischte Brüche» sind also verboten!

10.2 Zahlengerade und Mittelwert

Auch die rationalen Zahlen lassen sich auf dem Zahlenstrahl darstellen. So befindet sich beispielsweise die Zahl $\frac{1}{2}$ in der Mitte der Zahlen Null und Eins.



In der Mitte von zwei rationalen Zahlen befindet sich immer deren Mittelwert, der ebenfalls eine rationale Zahl ist. Somit liegen zwischen zwei beliebigen rationalen Zahlen auf dem Zahlenstrahl **unendlich viele weitere** rationale Zahlen. In der Mathematik wird gesagt, die rationalen Zahlen **liegen dicht** auf dem Zahlenstrahl.

10.3 Abgeschlossenheit

Die rationalen Zahlen sind bezüglich der folgenden Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division abgeschlossen. Das bedeutet, dass die Summe, die Differenz, das Produkt oder der Quotient zweier rationaler Zahlen immer eine rationale Zahl ist.

10.4 Äquivalenz

Brüche können erweitert und gekürzt werden, ohne dass sich deren Wert ändert. Das bedeutet, dass es für jede rationale Zahl unendlich viele verschiedene Darstellungen als Bruch .So ist

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{40000}{80000} \dots$$

Damit die Darstellung von rationalen Zahlen eindeutig ist, werden folgende Regeln festgelegt:

- Jede rationale Zahl wird durch den **vollständig gekürzten Bruch** dargestellt.
- Ist die rationale Zahl negativ, so wird das **Minuszeichen vor den Bruch** geschrieben.
- Ist der Nenner gleich Eins, wird dieser weggelassen.

Beispiele: $\frac{-4}{-9} = \frac{4}{9}, \qquad \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{20}{2} = 10$

10.5 Dezimalbrüche

Jede rationale Zahl kann auch als Dezimalzahl dargestellt werden. Dazu wird das Stellenwertsystem nach rechts erweitert. Rechts von der Stelle Null steht ein Dezimalpunkt, dann folgt die Stelle -1, welche einen Stellenwert von 10^{-1} oder $\frac{1}{10}$ hat. Wenn wir eine Stelle nach rechts gehen, wird der Stellenwert immer durch Zehn dividiert.

Die Dezimalzahl 42.875 bedeutet also, dass 4 Zehner, 2 Einer, 8 Zehntel, 7 Hundertstel und 5 Tausendstel addiert werden:

Stelle	1	0	-1	-2	-3
Stellenwert (Potenz)	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
Stellenwert	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
Ziffer	4	$2.$	8	7	5
Wert	$4 \cdot 10$	$2 \cdot 1$	$8 \cdot \frac{1}{10}$	$7 \cdot \frac{1}{100}$	$5 \cdot \frac{1}{1000}$

Um einen beliebigen Bruch in eine Dezimalzahl umzuwandeln, wird die schriftliche Division angewendet.

Beispiele: Die rationale Zahlen $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{6}$ werden wie folgt als Dezimalbruch dargestellt:

$$\begin{array}{l}
1.000 : 8 = 0.125 \\
\underline{\ 8\ } \\
\ 20 \\
\underline{\ 16\ } \\
\ \ 40 \\
\ \ \underline{40} \\
\ \ \ \ 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
2.0 : 3 = 0.\overline{6} \\
\underline{1.8} \\
\ \ \ 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
1.00 : 6 = 0.1\overline{6} \\
\underline{\ 6\ } \\
\ 40 \\
\underline{\ 36\ } \\
\ \ \ 4
\end{array}$$

Manche rationalen Zahlen lassen sich nicht als endliche Dezimalbrüche darstellen, da bei der schriftlichen Division immer ein Rest übrig bleibt. Das heisst, dass sich einige Dezimalstellen unendlich oft wiederholen. Diese werden mit einem Strich oberhalb der Ziffern markiert. Solche Dezimalbrüch heissen **periodische Dezimalbrüche**.

Beispiel: Einige periodische Dezimalbrüche sind:

$$\frac{1}{3} = 0.\overline{3} \qquad \frac{1}{6} = 0.1\overline{6} \qquad \frac{1}{7} = 0.\overline{142857} \qquad \frac{1}{9} = 0.\overline{1} \qquad \frac{1}{11} = 0.\overline{09} \qquad \frac{1}{13} = 0.\overline{076923}$$

Um eine Dezimalzahl in einen Bruch zu verwandeln, rechnen addieren wir einfach die Werte der Dezimalstellen, indem wir die Brüche gleichnamig machen:

$$0.875 = \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{875}{1000} = \frac{175 \cdot 5}{200 \cdot 5} = \frac{35 \cdot 5}{40 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{7}{8}$$

11 Potenzen mit ganzen Zahlen $(-a)^{-b}$

11.1 Negativer Exponent

Bisher konnten Potenzen nur eine natürliche Zahl als Exponenten haben. Man kann sich aber fragen, was es bedeuten würde, wenn eine negative Zahl im Exponenten steht. Dazu wird betrachtet, was passiert, wenn bei einer Potenz immer wieder der Exponent um Eins verringert wird.

$$\begin{array}{ll|l} 5^3 & = 1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 & :5 \\ 5^2 & = 1 \cdot 5 \cdot 5 = 25 & :5 \\ 5^1 & = 1 \cdot 5 = 5 & :5 \\ 5^0 & = 1 & \end{array}$$

Wenn bei einer Potenz der Exponent um eins verringert wird, bedeutet dies, dass der Wert der Potenz durch ihre Basis dividiert wird. Das macht Sinn, ein um Eins kleinerer Exponent bedeutet ja, dass die Basis einmal weniger mit sich selbst multipliziert wird.

Wenn nun diese Regel bei der Potenz 5^0 weiter angewendet wird, dann entsteht die Potenz 5^{-1}. Deren Wert ist der Wert von 5^0 dividert durch 5 also $\frac{1}{5}$. Wird dies so fortgesetzt, können die Werte für sämtliche Potenzen mit negativem Exponenten bestimmt werden:

$$\begin{array}{ll|l} 5^0 & = 1 & :5 \\ 5^{-1} & = \dfrac{1}{5} & :5 \\ 5^{-2} & = \dfrac{1}{5 \cdot 5} = \dfrac{1}{25} & :5 \\ 5^{-3} & = \dfrac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \dfrac{1}{125} & \end{array}$$

Diese Überlegungen werden in folgender Definition festgehalten:

Definition: Die Potenz einer Zahl a mit einem negativen Exponenten $-n$ ist der Kehrwert der Potenz mit der Gegenzahl n im Exponenten.

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n} = \frac{1}{1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n-\text{mal}}}$$

Beispiele: $4^{-7} = \dfrac{1}{4^7}$ $3^{-1} = \dfrac{1}{3}$ $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = 0.01$

11.2 Negative Basis

Im folgenden wird betrachtet, welche Werte die Potenz einer negativen Zahl annimmt, indem die Definition angewendet wird.

$$(-5)^0 = 1 = 5^0$$
$$(-5)^1 = 1 \cdot (-5) = -5^1$$
$$(-5)^2 = 1 \cdot (-5) \cdot (-5) = 25 = 5^2$$
$$(-5)^3 = 1 \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125 = -5^3$$
$$(-5)^4 = 1 \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 625 = 5^4$$

Wenn zwei negative Zahlen multipliziert werden, ergibt sich eine positive Zahl. Wenn der Exponent gerade ist, können alle Faktoren paarweise multipliziert werden und das Resultat ist positiv. Wenn der Exponent ungerade ist, bleibt immer ein negativer Faktor übrig.

Die Potenz einer negativen Zahl $-n$ mit einem **geraden Exponenten** b ist gleich der Potenz mit der Gegenzahl n als Basis.

$$(-n)^b = n^b \qquad \text{wenn } b \text{ gerade}$$

Die Potenz einer negativen Zahl $-n$ mit einem **ungeraden Exponenten** b ist gleich der Gegenzahl der Potenz mit der Gegenzahl n als Basis.

$$(-n)^b = -n^b \qquad \text{wenn } b \text{ ungerade}$$

11.3 Potenzgesetze

Potenzen können gemäss der fünf Potenzgesetze umgeformt werden.

Produkt mit gleicher Basis. Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die Potenzen addiert werden:

$$a^k \cdot a^m = a^{k+m}$$

Begründung: Gemäss der Definition der Potenz bedeutet a^k, dass a der Faktor k-mal in der Multiplikation vorkommt. a^m bedeutet, dass der Faktor m-mal vorkommt. Insgesamt kommt der Faktor a also $(k+m)$-mal in der Multiplikation vor. Dies kann gemäss Definition wiederum als a^{k+m} geschrieben werden.

$$a^k \cdot a^m = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{k-\text{mal}} \cdot 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m-\text{mal}} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{(k+m)-\text{mal}} = a^{k+m}$$

Beispiele: $5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$ $\qquad 3 \cdot 3^{-3} = 3^{1+(-3)} = 3^{-2}$

Quotient mit gleicher Basis. Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem die Potenzen subtrahiert werden:

$$\frac{a^k}{a^m} = a^{k-m}$$

Begründung: Gemäss der Definition der Potenz bedeutet a^k, dass a der Faktor k-mal vorkommt. a^m bedeutet, dass der Faktor m-mal vorkommt. Insgesamt kommt der Faktor a also k-mal im Zähler und m-mal im Nenner vor. Ist k grösser als m, so bleibt der Faktor $(k-m)$-mal im Zähler übrig, was als a^{k-m} geschrieben werden kann.

$$\frac{a^k}{a^m} = \frac{1 \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{k-\text{mal}}}{1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m-\text{mal}}} = \frac{1 \cdot \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{(k-m)-\text{mal}}}{1} = a^{k-m}$$

Ist hingegen m grösser als k, so bleibt der Faktor $(m-k)$-mal im Nenner übrig. Dies kann im Nenner als a^{m-k} geschrieben werden. Dank der Definition der Potenz für negative Exponenten kann dies ebenfalls zu a^{k-m} umgeformt werden.

$$\frac{a^k}{a^m} = \frac{1 \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{k-\text{mal}}}{1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m-\text{mal}}} = \frac{1}{1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{(m-k)-\text{mal}}} = \frac{1}{a^{m-k}} = a^{-(m-k)} = a^{k-m}$$

Beispiele: $\frac{5^2}{5^3} = 5^{2-3} = 5^{-1}$ $\qquad \frac{3^{-2}}{3^{-4}} = 3^{-2-(-4)} = 3^2$

Produkt mit gleichem Exponent. In einem Produkt können gleiche Exponenten ausgeklammert werden:

$$a^k \cdot b^k = (a \cdot b)^k$$

Begründung: Gemäss Definition ist $a^k \cdot b^k$ ein Produkt, in welchem die Faktoren a und b je k-mal vorkommen. Wegen der Kommutativität der Multiplikation können die Faktoren umgestellt werden, sodass k Faktoren $(a \cdot b)$ entstehen. Dieses Produkt kann wiederum als $(a \cdot b)^k$ geschrieben werden.

$$a^k \cdot b^k = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{k-\text{mal}} \cdot 1 \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{k-\text{mal}} = 1 \cdot \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdots (a \cdot b)}_{k-\text{mal}} = (ab)^k$$

Beispiele: $5^3 \cdot 3^3 = (5 \cdot 3)^3 = 15^3$ $\qquad 2^{-2} \cdot 7^{-2} = (2 \cdot 7)^{-2} = 14^{-2}$

Quotient mit gleichem Exponent. In einem Bruch können gleiche Exponenten ausgeklammert werden:

$$\frac{a^k}{b^k} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

Begründung: Gemäss Definition hat der Bruch $\frac{a^k}{b^k}$ im Zähler bzw. im Nenner k Faktoren a bzw. b. Der Bruch kann also in eine Multiplikation von k Brüchen $\frac{a}{b}$ aufgeteilt werden. Diese können gemäss Definition der Potenz als $\left(\frac{a}{b}\right)^k$ geschrieben werden.

$$\frac{a^k}{b^k} = \frac{1 \cdot \overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{k-\text{mal}}}{1 \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{k-\text{mal}}} = 1 \cdot \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{k-\text{mal}} = \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

Beispiele: $\frac{4^6}{2^6} = \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^6$ $\qquad \frac{3^{-2}}{5^{-2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = 0.6^{-2}$

Potenz einer Potenz. Potenzen werden potenziert, indem die Exponenten multipliziert werden:

$$\left(a^k\right)^m = (a^m)^k = a^{k \cdot m}$$

Begründung: a^k bedeutet, dass der Faktor a im Produkt k-mal vorkommt. Wird die Potenz nochmals mit m potenziert, bedeutet dies, dass alle k Faktoren m-mal wiederholt werden. Insgesamt kommt der Faktor a in $\left(a^k\right)^m$ also $(k \cdot m)$-mal vor. Dies kann auch als $a^{k \cdot m}$ geschrieben werden.

$$(a^k)^m = \overbrace{1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{k-\text{mal}} \cdot 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{k-\text{mal}} \cdots 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{k-\text{mal}}}^{m-\text{mal}} = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{(k \cdot m)-\text{mal}} = a^{k \cdot m}$$

Beispiele: $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$ $\qquad (5^2)^{-2} = 5^{2 \cdot (-2)} = 5^{-4}$

Achtung: Potenzen werden von oben nach unten berechnet. So ist 5^{3^2} nicht dasselbe wie $\left(5^3\right)^2$:

$$5^{3^2} = 5^{\left(3^2\right)} = 5^9 \qquad \left(5^3\right)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$$

12 Wissenschaftliche Schreibweise und Präfixe

In der Wissenschaft trifft man häufig auf sehr grosse oder sehr kleine Zahlen. So ist die Sonne etwa 150'000'000'000 m von der Erde entfernt. Ein Atom hat einen Radius von etwa 0.0000000001 m. Solche Zahlen sind nicht einfach zu lesen. Deshalb werden sie üblicherweise anders dargestellt.

12.1 Wissenschaftliche Schreibweise

In der wissenschaftlichen Schreibweise wird das Dezimalpunkt so verschoben, dass **vor dem Dezimalpunkt genau eine Stelle steht**.

So wird die Zahl 125 durch 100 dividiert, um 1.25 zu erhalten. Damit der Wert erhalten bleibt, muss die Zahl anschliessend wieder mit 100 multipliziert werden. Diesen Faktor wir als Potenz von Zehn geschrieben.

$$125 = 12.5 \cdot 10 = 1.25 \cdot 100 = 1.25 \cdot 10^2$$

Analog wird die Zahl 0.0034 mit 1000 multipliziert, um 3.4 zu erhalten. Um den Wert zu erhalten, wird anschliessend wieder mit einem Tausendstel multipliziert. Der Tausendstel wird als Potenz von Zehn geschrieben:

$$0.0034 = 0.034 \cdot \frac{1}{10} = 0.34 \cdot \frac{1}{100} = 3.4 \cdot \frac{1}{1000} = 3.4 \cdot 10^{-3}$$

So kann nun geschrieben werden, dass die Sonne $1.5 \cdot 10^{11}$ m von der Erde entfernt ist und dass ein Atom etwa einen Radius von $1 \cdot 10^{-10}$ m hat.

12.2 SI-Präfixe

Für bestimmte solche Faktoren haben sich eigenständige Bezeichnungen entwickelt. So sagen wir vier Kilometer statt $4 \cdot 10^3$ m oder ein Gigabyte statt $10 \cdot 10^9$ B.

Diese Bezeichnungen sind heute durch das **internationale Einheitensystem SI** (französisch: *système international d'unités*) genau festgelegt.

Präfix	Bezeichnung	Wert
P – Peta	Billiarde (engl. *quadrillion*)	$10^{15} = 1'000'000'000'000'000$
T – Tera	Billion (engl. *trillion*)	$10^{12} = 1'000'000'000'000$
G – Giga	Milliarde (engl. *billion*)	$10^{9} = 1'000'000'000$
M – Mega	Million	$10^{6} = 1'000'000$
k – Kilo	Tausend	$10^{3} = 1000$
h – Hekto	Hundert	$10^{2} = 100$
da – Deka	Zehn	$10^{1} = 10$
–	–	$10^{0} = 1$
d – Dezi	Zehntel	$10^{-1} = 0.1$
c – Zenti	Hundertstel	$10^{-2} = 0.01$
m – Milli	Tausendstel	$10^{-3} = 0.001$
μ – Mikro	Millionstel	$10^{-6} = 0.000\ 001$
n – Nano	Milliardstel	$10^{-9} = 0.000\ 000\ 001$
p – Piko	Billionstel	$10^{-12} = 0.000\ 000\ 000\ 001$
f – Femto	Billiardstel	$10^{-15} = 0.000\ 000\ 000\ 000\ 001$

Achtung: Der englische Begriff «billion» bedeutet nicht eine Billion, sondern eine Milliarde. Ein:e «billionaire» ist also ein:e Milliardär:in. Der englische Begriff «trillion» bedeutet eine Billion.

13 Quadratwurzeln $\sqrt{a}$

Wurzeln können als Gegenoperation zum Quadrieren aufgefasst werden. Wenn wir Sieben quadrieren erhalten wir 49:

$$7^2 = 49$$

Um von der 49 zurück zur Sieben zu kommen, ziehen wir die Quadratwurzel aus 49:

$$\sqrt{49} = 7$$

13.1 Definition

Welche Zahl muss quadriert werden, um Neun zu erhalten?

$$\square^2 = 9$$

Diese Frage wird mit Hilfe der Umkehroperation, dem Wurzelziehen oder Radizieren, beantwortet. Als Resultat ergibt sich

$$\sqrt{9} = \square$$

Dabei ist zu beachten, dass es zwei Zahlen gibt, deren Quadrat Neun ist, nämlich 3 und -3. Damit das Wurzelziehen eindeutig ist, wird festgelegt, dass das eine Wurzel nie negativ sein kann.

Welche Zahl muss quadriert werden, um -9 zu erhalten?

$$\square^2 = -9$$

Das ein Quadrat nie negativ sein kann, gibt es keine Antwort auf diese Frage. Das Wurzelziehen aus negativen Zahlen ist somit nicht definiert.

Definition: Das Wurzelziehen oder Radizieren ist die Umkehroperation des Quadrierens. Mit dem Radizieren wird die unbekannte, nicht-negative Basis eines Quadrates berechnet:

$$\begin{aligned} x^2 &= a \qquad & x &\geq 0 \\ x &= \sqrt{a} \qquad & a &\geq 0 \end{aligned}$$

Das Radizieren einer negativen Zahl ist nicht definiert.

Beispiele: $\sqrt{25} = 5$ $\quad\sqrt{0} = 0$ $\quad\sqrt{1} = 1$ $\quad\sqrt{-4}$ ist nicht definiert.

13.2 Schreib- und Sprechweise

Die Zahl a welche radiziert wird, heisst **Radikand**. Das Resultat des Wurzelziehens heisst **Wurzel** oder **Radikal**.

Für das Wurzelziehen wird das Operationszeichen $\sqrt{}$ verwendet. Wir schreiben

$$\sqrt{a} = b$$

und sagen «Die Wurzel von a ist gleich b.»

Beispiel: Die Wurzel von 49 ist Sieben: $\sqrt{49} = 7$

13.3 Gesetze

Wurzeln können gemäss der folgenden Gesetze umgeformt werden.

Produktregel. Das Produkt zweier Wurzeln ist gleich der Wurzel aus dem Produkt der beiden Radikanden.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Das Produkt zweier gleicher Wurzeln ist gleich dem Radikanden:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

Beispiele: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}$ $\qquad \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$

Quotientenregel. Der Quotient zweier Wurzeln ist gleich der Wurzel des Quotienten der beiden Radikanden.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Beispiele: $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$

Quadrieren einer Wurzel. Das Quadrat einer Wurzel ist gleich dem Radikanden. Dabei muss natürlich beachtet werden, dass der Radikand nicht negativ sein kann.

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \qquad a \geq 0$$

Beispiele: $\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$ $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

Wurzel eines Quadrats. Die Wurzel eines Quadrats ist gleich dem Betrag der Basis.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Hier kann a durchaus eine negative Zahl sein, da ja der Radikand a^2 in jedem Fall positiv ist. Da das Resultat der Wurzel gemäss Definition nicht negativ sein kann, muss hier der Betrag von a genommen werden.

Beispiele: $\sqrt{5^2} = |5| = 5$ $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

14 Reelle Zahlen $\mathbb{R}$

So wie uns die Subtraktion von den natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen geführt hat und wir mit der Division auf die rationalen Zahlen gestossen sind, so führt das Wurzelziehen zu den reellen Zahlen. Denn leider ist die Wurzel aus einer rationalen Zahl nicht immer eine rationale Zahl. Das berühmteste Beispiel hierfür ist sicher $\sqrt{2}$.

14.1 irrationale Zahlen

Wir haben gesehen, dass die rationalen Zahlen auf der Zahlengerade dicht liegen. Das heisst, wir finden zwischen zwei rationalen Zahlen immer unendlich viele weitere.

Wir können aber auch Zahlen konstruieren, die nicht rational sind. Dazu müssen wir nur eine unendliche Dezimalentwicklung angeben, die nicht periodisch ist, beispielsweise:

$$0.1011011101111011111011111101\ldots$$

Diese Zahl liegt natürlich auch auf der Zahlengerade, zwischen 0.1 und 0.11, sie ist aber nicht eine rationale Zahl, da sie nicht als Bruch darstellbar ist.

Definition: Eine Zahl auf der Zahlengeraden, welche nicht eine rationale Zahl ist, also **nicht** in der Form

$$\frac{z}{n} \qquad z \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

geschrieben werden kann, heisst **irrationale** Zahl.

Werden alle rationalen und alle irrationalen Zahlen zusammengefasst, ergeben sich sämtliche Zahlen auf der Zahlengeraden.

Definition: Alle rationalen und irrationalen Zahlen zusammen werden **reelle Zahlen** genannt und mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

14.2 Beweis der Irratonalität von Zahlen

Es ist gar nicht so einfach zu beweisen, dass eine bestimmte Zahl irrational ist.

- Dass $\sqrt{2}$ und weitere Wurzeln irrational sind, hat der Grieche Archytas von Tarent ca. 420 v. Chr. bewiesen.
- Dass die Kreiszahl π irrational ist, hat Johann Heinrich Lambert 1761 bewiesen.
- Dass die eulersche Zahl e irrational ist, hat Charles Hermite 1873 bewiesen.
- Bei anderen Zahlen wird die Irrationalität vermutet, ist aber bis heute nicht bewiesen, z.B. bei

$$\pi + e \qquad\qquad \pi - e \qquad\qquad \pi^{\pi}$$

14.3 Irrationalität von Wurzeln

Der Beweis, dass bestimmte Wurzeln irrational sind, ist von Euklid überliefert worden und ist relativ einfach nachvollziehbar, hier am Beispiel von $\sqrt{5}$

Satz: Die Wurzel von fünf ist keine rationale Zahl.

Beweis: Der Satz wird mit einem Widerspruchsbeweis bewiesen. Das bedeutet, dass das Gegenteil angenommen und gezeigt wird, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt.

Es wird also angenommen, dass $\sqrt{5}$ eine rationale Zahl ist. Jede rationale Zahl kann als vollständig gekürzten Bruch dargestellt werden:

$$\sqrt{5} = \frac{z}{n} \qquad z \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Nun wird die Gleichung auf beiden Seiten quadriert:

$$5 = \left(\frac{z}{n}\right)^2 = \frac{z^2}{n^2}$$

Die Gleichung kann wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{5}{1} = \frac{z^2}{n^2}$$

Diese Gleichung hat auf beiden Seiten einen vollständig gekürzten Bruch, da z und n gemäss Annahme keine gemeinsamen Teiler haben. Zwei vollständig gekürzte Brüche sind gleich, wenn Zähler und Nenner gleich sind. Also folgt:

$$5 = z^2 \qquad \text{und} \qquad 1 = n^2$$

Es gibt aber keine ganze Zahl z, deren Quadrat 5 ist. Damit ist ein Widerspruch aufgezeigt worden. Daraus folgt, dass die Annahme, dass $\sqrt{5}$ eine rationale Zahl ist, falsch sein muss.

Anmerkung: Um den Beweis richtig nachvollziehen zu können ist wichtig zu verstehen, was es bedeutet, dass der Bruch $\frac{n}{z}$ vollständig gekürzt ist. Dies bedeutet, dass z und n keine gemeinsamen Teiler haben, die noch gekürzt werden könnten. Insbesondere sind in der Primfaktorzerlegung alle Primfaktoren von z und n verschieden. Beim Quadrieren einer Zahl kommen keine neuen Primfaktoren hinzu, die vorhandenen Primfaktoren werden nur jeweils verdoppelt. Deshalb haben auch z^2 und n^2 keinen gemeinsamen Teiler und der Bruch $\frac{z^2}{n^2}$ ist ebenfalls ein gekürzter Bruch.

14.4 Intervalle

Manchmal soll ein Intervall auf der Zahlengeraden beschrieben werden, beispielsweise alle Zahlen zwischen -1 und 1. Dabei muss angegeben werden, ob die Grenzen des Intervalls dazu gerechnet werden oder nicht.

Es werden die folgenden Begriffe und Schreibweisen verwendet:

Begriff	Schreibweise	Definition
geschlossenes Intervall	$[a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
linksoffenes Intervall	$(a, b]$ oder $]a, b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
rechtsoffenes Intervall	$[a, b)$ oder $[a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
offenes Intervall	(a, b) oder $]a, b[$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Linksoffene und rechtsoffene Intervalle werden zusammen auch als halboffene Intervalle bezeichnet.

14.5 Näherungen

Irrationale Zahlen können wir nicht exakt als Dezimalzahl notieren. In diesem Fall geben wir eine Annäherung an und verwenden wir das Zeichen $\approx$ um zu verdeutlichen, dass die Angabe nicht exakt ist:

$$\sqrt{2} \approx 1.414 \qquad \pi \approx 3.141$$